3-1 المقدمة :{1}

السلاسل الزمنية هي مجموعة من المشاهدات التي تتولد على التوالي خلال الزمن وتتميز اي سلسلة زمنية بأن بياناتها مرتبة بالنسبة للزمن وان المشاهدات المتتالية عادة ما تكون غير مستقلة ، اي تعتمد على بعضها البعض ويستغل عدم الاستقلال في التوصل الى تنبؤات موثوق بها . وهناك اتجاهين لتحليل السلاسل الزمنية وهي كالاتي :

1- تحليل السلاسل الزمنية وفقاً للزمن :

في هذه الحالة يؤخذ عنصر الزمن في الاعتبار ، ويتم الاعتماد علي التغايرات المشتركة والارتباطات الذاتية في التحليل .

2- تحليل السلاسل الزمنية وفقاً للتكرار:

ويعرف بالتحليل الطيفي (Spectral Analysis) والذي يأخذ في الاعتبار التكرار ، ويتم الاعتماد على دوال التحليل (الجيب وجيب التمام) في التحليل .

3-2 أهداف تحليل السلاسل الزمنية: {1}

1. الحصول على وصف دقيق للملامح الخاصة للعملية التي تولد منها السلسلة الزمنية .

2. انشاء نموذج لتفسير وشرح سلوك السلسلة بدلالة متغيرات أخرى تربط قيم المشاهدات ببعض قواعد وسلوك السلسلة .

3. استخدام النتائج التي نحصل عليها للتنبؤ بسلوك السلسلة في المستقبل وذلك اعتمادا على معلومات الماضي .

4. التحكم في العملية التي تتولد منها السلسلة الزمنية بفحص مايمكن حدوثه عند تغيير بعض معالم النموذج .

3-3 نماذج السلاسل الزمنية ذات المتغير الواحد وذات المتغيرات المتعددة :{1}

بالإضافة الى التميز بين نماذج السلاسل الزمنية المستمرة يجب تصنيف نماذج السلاسل الزمنية وفقاً لعدد متغيرات النموذج الى :

1. نموذج السلسلة الزمنية الذي يحتوي على متغير واحد فقط يسمى نموذج السلسلة الزمنية ذي المتغير الواحد وفي هذا النوع من النماذج تستخدم البيانات الحالية والسابقة عن متغير واحد فقط فمثلاً للتنبؤ بمعدل الاصابة بمرض الملاريا في الشهر القادم أو بعد شهرين من الآن باستخدام نموذج ذي متغير واحد تستخدم فقط في البيانات الحالية والسابقة عن مرض الملاريا.

2. نموذج السلسلة الزمنية الذي يستخدم متغيرات اخرى لوصف سلوك السلسلة الزمنية محل الدراسة فيسمى نموذج السلسلة الزمنية متعددة المتغيرات و يسمى النموذج الذي يصف العلاقة الديناميكية الفعالة بين هذه المتغيرات بنموذج دالة التحويل .

3-4 اساليب التنظيم : {1}

(3-4-1) اسلوب بوكس_ جنكيز في تحليل السلاسل الزمنية :

يرمز اختصاراً بذي المتغير الواحد ويسمى هذا الاسلوب في التحليل بأسلوب بوكس جنكيز ويعتمد هذا الاسلوب على استخدام التغيرات المتوقعة للبيانات المشاهدة وتتجزأ السلسلة الزمنية الى عدة مكونات او

عناصر تسمى بثلاث مرشحات خطية هي : مرشح السكون (المتكامل) ومرشح الانحدار الذاتي ومرشح المتوسطات المتحركة .

5-3 أهمية نظام التنبؤ الجيد{1}:

للتنبؤ باستخدام السلاسل الزمنية أهمية كبيرة في مختلف المجالات منها التجارة ، الاقتصاد ، الطبيعة والهندسة ، الطب والصحة العامة ، الادارة ....الخ .

6-3 خصائص السلاسل الزمنية{2}:

نفترض ان قيمة السلاسل الزمنية هي $x_1,x_{t+1},.....,x_n$ وبصورة عامة

$T=1,2,3,....,n$ فيما يلي بعض خصائص هذه السلسلة الزمنية بافتراض ان السلسلة مستقرة او ساكنة في المتوسط او التباين :

1- المتوسط

نظرياً

$$\mu = E(x_t) \qquad (1-3)$$

المجتمع

$$\mu = \sum \frac{x_t}{N}$$

العينة:

$$\mu = \frac{\sum x_i}{n}$$

2- التباين :

نظرياً:

$$\sigma^2_{xt} = E\,(x_t - \mu)^2 \qquad (2\text{-}3)$$

المجتمع :

$$\operatorname{var}(x_t) = \sigma^2 = \frac{\sum (x_t - \mu)^2}{N}$$

العينة :

$$\operatorname{var}(x_t) = S^2 = \frac{\sum (x_t - \mu)^2}{n-1}$$

3- التغاير المشترك الذاتي :

نظرياً :

$$\operatorname{cov}(x_1, x_{t-s}) = \lambda_s = E\,(x_{t-m})(x_{t-s} - \mu) \qquad (3-3)$$

المجتمع :

$$\operatorname{cov}(x_t, x_{t-s}) = \lambda_s = \frac{\sum (x_{t-m})(x_{t-s} - \mu)}{N - s}$$

العينة :

$$\operatorname{cov}(x_t, x_{t-s}) = \lambda_s = \frac{\sum (x_t - \bar{x})(x_{t-s} - \bar{x})}{N - s - 1}$$

4- الارتباط الذاتي :

$$\hat{\rho}_s = \frac{\lambda_s}{\lambda_0} = \frac{\operatorname{cov}(x_t, x_{t-s})}{\sqrt{v(x_t)}\sqrt{v(x_{t-s})}} \qquad (4-3)$$

المجتمع :

$$\hat{\rho}_s = \frac{\lambda_s}{\lambda_0} = \frac{\sum (x_1 - \mu)(x_{t-s} - \mu)(1/N_s)}{\sum (x_t - \mu)^2 (1/N)}$$

العينة :

$$\hat{\rho}_s = \frac{\lambda_s}{\lambda_0} = \frac{\sum (x_t - \bar{x})(x_{t-s} - \bar{x})(1/n_{n-s-1})}{\sum (x_t - \bar{x})^2 (1/n)}$$

ان تحقق شرط السكون يعني ان هناك زمن طويل نسبياً تأخذ فيه قيم الظاهرة مع مرور الزمن بالسكون او الاستقرار ويعني ذلك ان تكون عادة كبيرة في السلاسل الزمنية واعتمادا على ذلك فإن تأثير (s) سيكون ضعيفاً عند حساب درجة الحرية للبسط وهذا يعني انه يمكن افتراض ان هذا القيمة تساوي تقريباً (n-1)ولذلك تصبح صيغة الارتباط في العينة بالشكل الاتي :

$$\hat{\rho}_s = \frac{\lambda_s}{\lambda_0} = \frac{\sum(x_t - \bar{x})(x_{t-s} - \bar{x})}{\sum(x_t - \bar{x})^2}$$

3-7 تجزئة السلسلة الزمنية :{2}

يعرف نموذج السلسلة الزمنية بأنه يحدد العلاقة بين قيم الظاهرة في فترة زمنية معينة وبين المكونات الاربعة في نفس الفترة وهناك نموذجان في هذا المجال هما:

1. نموذج السلسلة الزمنية الاحادية (Univariate Time Series Model)في هذا النوع من النماذج تستخدم البيانات الحالية والسابقة عند متغير واحد فقط .

2. نموذج السلسلة متعددة المتغيرات (Multivariate Time Series Model) وفي هذا النوع ، تستخدم البيانات الحالية والسابقة اكثر من متغير واحد .

3-8 السكون او الاستقرار :(2)

لتحليل السلسلة الزمنية من خلال بناء نموذج رياضي واجراء الاختبارات اللازمة واخيراً التنبؤ بالمستقبل يجب ان تكون السلسلة ساكنة او مستقرة مع مرور الزمن ولذلك نحتاج لسلسلة طويلة نسبياً (n كبيرة) للتحقق من كونها ساكنة وذلك اعتماداً على الشروط الاتية :

1- المتوسط ثابت مع مرور الزمن .

2- التباين ثابت مع مرور الزمن .

3- التغاير المشترك أو الارتباط الذاتي يجب ان يعتمد الفرق الزمني فقط .

ان الشروط الثلاث تعني لو قسمنا السلسلة الزمنية على عدة اقسام وحسبنا المتوسط والتباين لكل قسم يفترض ان تكون المتوسطات متساوية او متقاربة وهذا يعني ان المتوسط ثابت ، وكذلك الحال فإن تباينات جميع الاقسام تكون متساوية او متقاربة وهذا يعني ان التباين ثابت أما عند حسابنا للتغايرات المشتركة ثابتة او متقاربة ويعني ذلك ان التغاير المشترك او الارتباط الذاتي هو دالة الفرق الزمني فقط .

3-9 تحقيق السكون : (2)

ان مسألة تحقيق السكون هي من المسائل المهمة في السلاسل الزمنية حيث انه لا يمكن تحليل السلسلة ما لم تكن ساكنة فإذا تم إختبار سكون السلسلة وكانت النتيجة ان قيمة Q معنوية اي اكبر من قيمة مربع كاي الجدولية فهذا يعني ان السلسلة غير ساكنة . من الطرق المشهورة في تحقيق السكون للسلاسل الزمنية هي طريقة الفروق الخلفية لنيوتن ليرمز للفرق ب (∇) و (B) يرمز للمؤثر للإزاحة وان الفرق الخلفي :

$$(\nabla=1-B)$$

فإذا افترضنا أن السلسلة هي ($x1$)وكانت غير ساكنة فإن الفروق تعرف كالاتي :

$$B = X_{(t-1)}$$

$$B^2 \ X_2 = X_{(t-2)}$$

وبصورة عامة :

$$B^{m}X_{t} = X_{(t-m)} \qquad (5\text{-}3)$$

ويعرف الفرق الاول للسلسلة الزمنية كالاتي :

$$\chi'_{t} = x_t = (1-B)x_t = x_t - \overline{B}x_t$$

$$\chi'_{t} = x_t - x_{t-1}$$

ويلاحظ ان السلسلة الجديدة (χ_t^1) سوف تنقص بمقدار مشاهدة واحدة يعاد اختبار السكون على اساس السلسلة الجديدة علماً بأن :

$$Q = (n-1)\sum r^2 s$$

حيث هي الارتباطات الذاتية المسحوبة من السلسلة الجديدة وهنا فإن (n−1/2) تقرب الى العدد الصحيح الاصغر بمعنى آخر ان هذه النتيجة تحتوي على 0.5 (الجزء العشري) لذلك يهمل هذا الجزء على سبيل المثال اذا كانت (n−1/2=10.5) عند درجة حرية الناتجة من التقريب 10 وتقارن قيمة Q مع قيمة X الجدولية فإن هذه غير معنوية فهذا يعني إن استخدام الفرق الاول ادى الى تحقيق السكون ، اما اذا كانت نتيجة الاختبار معنوية فهذا يعني إنه يجب استخدام الفرق الثاني للسلسلة الاصلية وهذا يعني الفرق الاول للسلسلة (x_t) حيث يعرف الفرق الثاني كالاتي :

$$X_t' = \nabla^2 X_t = (1\text{-}B)^2 X_t$$

$$= (1-2B+B^2)X_t = X_t - 2X_t B + B^2 X_t$$

$$X_t = -2X_{(t-1)} + X_{t+2}$$

ويلاحظ إنه عند حساب الفروق تبدأ من مشاهدة الاصلية اي ابتدأ من t=3 ولذلك فإن هذه السلسلة سوف تفقد مشاهدتين من السلسلة او تفتقد مشاهدة واحدة من السلسلة مع مراعاة التغيير في درجات الحرية .

نماذج بوكس جنكيز :{4}

في هذه النماذج هناك متغير تابع (X_t) وهو يمثل قيمة السلسلة في الزمن t وهناك ايضاً متغيرات مستقلة تمثل قيم السلسلة في الازمنة الماضية(x_{t-1}, x_{t-2}) حسب رتبة النموذج وهناك ايضاً قيمة الخطأ في الازمنة السابقة (a_{t-1}, a_{t-2})اضافة الى الحد العشوائي (a_t) كما أن هناك المعلمات ($\theta_1, \theta_2, ...$) ولذلك نجد ان هذه النماذج تشبه الى حد كبير الانحدار الخطي ولتبسيط الصيغ الرياضية نظرياً وتصغير الارقام عملياً سوف نستخدم السلسلة الزمنية بدلالة الانحرافات .

(3−9−1) نماذج الانحدار الذاتي :(Auto Regression model): {3}

وهي نماذج انحدار z_t علي z_{t-1} وهي هنا بدلالة الانحرافات اما بدلالة القيم الاصلية فهي تمثل نماذج انحدار z_t علي z_{t-1},..... وسميت بالذاتي لأنها نماذج انحدار متغير علي نفسة .

بصورة عامة فان نماذج الانحدار الذاتي RA(P) ويأخذ الشكل الاتي :

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + \phi_2 z_{t-2} + ... + \phi p z_{t-p} \qquad (6-3)$$

في هذا النموذج لا يوجد الحد الثابت او المقطع لان النموذج هو بدلالة الانحرافات $\phi_1, \phi_2, ,..., \phi_p$

تمثل المعلمات وهي معاملات المتغير المستقلة $Z_{t-1}, Z_{t-2}, +\dots + \phi_p Z_{t-p}$ علي التوالي وهي تمثل ايضا الميل والخطأ العشوائي a_tوالذي يسمي عادة في هذه النماذج بحد الضوضاء (التشويش البيض) ويمكن كتابة النموذج بدلالة القيم الاصلية بالصور الأتية

$$(x_t - \mu) = \phi_1 (z_{t-1} - \mu) + \phi_2 (x_{t-2} - \mu) + \dots + \phi_p (x_{t-p} - \mu)$$

$$x_t = \mu + \phi_1 (x_{t-1} - \mu) + \phi_2 (x_{2-2} - \mu) + \dots + \phi_p (x_{t-p} - \mu)$$

$$x_t = \mu(1 - \phi_1 + \phi_2 + \dots + \phi_p) + \phi_1 x_{t-1} + \phi_2 x_{t-2} + \dots + \phi_p x_{t-p} + a_1$$

في هذا النموذج فان المقطع هو :

$$\mu(1 - \phi_1 - \phi_2 \dots - \phi_p)$$

اولا: نموذج الانحدار من الرتبة الاولي :

والذي يرمز له بالرمز RA(1) والذي يعني القيمة الحالية للسلسلة الزمنية السابقة لها والتي يرمز لها بالرمز Zt-1 الصيغة العامة لنموذج الانحدار الذاتي من الرتبة الاولي :

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + a_t$$

$$(x_t - \mu) = \phi_1 (x_t + \mu) + a_t$$

$$x_t = \mu(1 - \phi_1) + \phi_1 x_{t-1} + a_t \qquad (7\text{-}3)$$

خصائص AR(1):

1- المتوسط :

$$z_t = \phi_1 z_{t-1} + a_t$$

$$E(z_t) = \phi_1 E(z_{t-1}) + E(a_t)$$

$$E(z_t) = \phi_1(0) + (0) = 0$$

2- التباين :

$$v(z_t) = E(z_t)^2 - \frac{(E(z_t))^2}{0}$$

$$E(z_t)^2 = E(\phi_1 z_{t-1} + a_t)^2$$

$$E(\phi_1^{\,2}\, z_{t-1}^{2} + 2\phi_1 z_{t-1} + a_t^{\,2})$$

$$v(z_t) = \lambda_0 = \phi_1^{\,2} E(z_{t-1})^2 + 2\phi_1 z_{t-1} + a_t + Ea^2{}_t$$

$$v(z_t) = E(z_t)^2 = E(z_{r-1})^2$$

$$\lambda_0 = \phi_1^2 v(z_t) + 2\phi(0) + \sigma_a^2$$

$$\lambda_0 = \phi^2{}_1 \lambda_0 + \sigma_a^2$$

$$\lambda_0 = \frac{\sigma_a^2}{(1-\phi_1^{\,2})} \qquad (8\text{-}3)$$

ويلاحظ من هذه النتيجة أن ϕ^2_1ان تكون اقل من الواحد لكن يكون التباين معرفا بمعني $-1 \prec \phi_1 \prec 1$

وهذا يمثل شرط السكون لهذا النموذج اما اذا كانت $1 \prec \phi_1 \prec -1$ فالنتاين يقترب الي ما لانهاية وبالتالي فان النموذج لايكون ساكنا.

3- التغاير المشترك الذاتي :

$$\lambda_s = \text{cov}(z_1, z_{t-s}) \qquad S=1,2,...,n/2$$

$$\lambda_s = E(z_t, z_{t-s}) - E(z_t)E(z_{t-s})$$

$$\lambda_s = E(z_t, z_{t-s})$$

$$\lambda_1 = E(z_t, z_{t-1})$$

$$\lambda_1 = E(\phi z_{t-1}, a_t) z_{t-1}$$

$$= \phi E z_t^{\ 2} + E(z_t - \frac{1}{0} a_t)$$

$$\lambda_1 = \phi_1 v(z_t)$$

$$\lambda_1 = \phi_1 \lambda_0$$

$$\lambda_2 = \phi_1 \lambda_1$$

$$\lambda_2 = \phi_1^2 \lambda_0$$

ومن الممكن اثبات أن :

$$\lambda_3 = \phi_1 \lambda_2$$

$$= \phi_1^3 x_0$$

$$\lambda_4 = \phi_1^4 \lambda_0$$

بصورة عامة :

$$\lambda_k = \phi_1 \lambda_{k-1} = \phi_1^k \lambda_0 \qquad (9\text{-}3)$$

K=1,2,...,n/2

4/ الارتباط الذاتي :

$$\rho_1 = \mathrm{cov}\frac{z_t , z_{t-1}}{v(t)} = \frac{\phi^2 \lambda_0}{\lambda_0}$$

$$\rho_1 = \frac{\phi_1 \lambda_0}{\lambda_0} = \phi_1$$

$$\rho_2 = \frac{E(z_t , z_{t-2})}{v(z_t)} = \frac{\lambda_2}{\lambda_0}\frac{\phi^2 \lambda_0}{\lambda_0}$$

$$\rho_2 = \phi_1^2$$

بصورة عامة فان :

$$p_k = \phi_1 p_{k-1} = \phi_1^k p_1 = \phi_1^k \qquad (10-3)$$

(3–9–2) نماذج المتوسطات المتحركة(Moving Average Models):

في هذه النماذج القيمة الحالية للسلسة الزمنية يعبر عنها في شكل توليفة خطية من الاخطاء العشوائية الحالية والسابقة .

الصيغة العامة للنماذج المتوسطات المتحركة من الرتبة الثانية الي MA(q) يعبر عنها بالاتي:

$$z_{(1-)} = -\Theta_1 a_{t-1} - \Theta_2 a_{t-2} - ...... - \Theta_q a_{t-q} + a_t \qquad (11-3)$$

حيث $\Theta_1 + \Theta_2 .....\Theta_q$ تمثل الاخطاء العشوائية والتي خصائص **الاتية** :

1) $Ea_t = 0$

2) $v(a_t) = s_a^2$

3) $a_t N = (0, s_a^2)$

4) $E(a_1, a_{t-s}) = 0$

5) $E(a_1, z_{t-s}) = 0$

$\forall_s = 1,2,....., n/2$

ومن الممكن كتابة الدالة (*) بدلالة القيمة الفعلية كالاتي :

$$(x_{t-m}) = \Theta_1 a_{t-1} - \Theta_2 a_{t-2} - .... - \Theta q a_{t-q} + a_t$$

$$(x_t) = \mu - \Theta_1 a_{t-1} - \Theta_2 a_{t-2} - .... - \Theta q a_{t-q} + a_t$$

اولا : نموذج المتوسطات المتحركة من الرتبة الاولي MA(1) :

القيمة الحالية لهذا النموذج تعتمد علي القيمة السابقة لحد الخطاء وبعبر عنه بالصيغة الاتية

$$z_1 = -\Theta_1 a_{t-1} + a_t \;** \qquad (12\text{-}3)$$

وبدلالة القيمة الفعلية _الحقيقية

$$x_{t-m} = -\Theta_1 a_{t-1} + a_t$$

$$x_t = \mu - \Theta_1 a_{t-1} + a_t$$

خصائص النموذج MA(1) :

1/ المتوسط :

$$z_t = -\Theta_1 a_{t-1} + a_t$$

$$E(z_t) = E(-\Theta_1 a_{t-1} + a_t)$$

$$= -\Theta(0) + (0)$$

$$Ez_{(t)} = 0$$

التباين :

$$z_t = -\Theta_1 a_{t-1} + a_t$$

$$v(z_t) = \lambda_0 = E(z_t)^2 - [E(z_t)]^2 = E(z_t)^2$$

$$v(z_t) = \lambda_0 = E - (\Theta_1 a_{t-1} + a_t)^2$$

$$v(z_t) = \lambda_0 = E(\Theta^2{}_1 a^2{}_{t-1} - 2\Theta_1 a_{t-1} + a_t{}^2)$$

$$= -\Theta_1{}^2 E(a_{t-1})^2 - 2\Theta_1 E(a_t a_{t-1}) + E(a_t)^2$$

$$= \Theta^2{}_1 S\,{}_a^2 - 2\Theta_0 E\,(0) + \sigma_a^2$$

$$= \Theta_1^2 + \sigma_a^2 + \sigma_a^2$$

$$v\,(z_t) = \lambda_0 = \sigma_a^2(\theta^2{}_1 + 1) \qquad (13-3)$$

3–التغاير المشترك الذاتي :

$$\operatorname{cov}(z_t, z_{t-s}) = E(z_t, z_{t-s}) - E(z_t)E(z_{t-s}) = E(z_t, z_{t-s})$$

S=1,2, ...,n/2

$$\operatorname{cov}(z_t, z_{t-s}) = \lambda_1 = E\,(z_t, z_{t-1}) - E\,(z_t, z_{t-1}) = E\,(-\theta_1 a_{t-1} + a_t) z_{t-1}$$

$$= E(-\theta_1, a_{t-s} + z_{t-1} a_t z_{t-1})$$

$$= -\theta_1 E(a_{t-1} + z_{t-1}) + E(a_t + z_{t-1})$$

$$= -\theta_1 E(a_{t-1} + z_{t-1}) + (0)$$

$$\lambda_1 = -\theta_1 E(a_{t-1}(-\theta a_{t-2} + a_{t-1})$$

$$= -\theta_1[-\theta E(a_{t-1}a_{t-2}) + E(a_{t-2})^2]$$

$$-\theta_1[(0) + \sigma_a^2]$$

$$\lambda_1 = \theta_1 + \sigma_a^2$$

$$\lambda_2 = E(z_t, z_{t-2})$$

$$E(-\theta_1 a_{t-1}) + a_t)z_{t-2}$$

$$-\theta_1 E(a_{t-1}z_{t-2}) + E(a_t z_{t-2})$$

$$-\theta_1 E(a_{t-1}z_{t-2}) + (0)$$

$$-\theta_1 E(a_{t-1}(-\theta_1 a_{t-3} + a_{t-2})$$

$$-\theta_1(-\theta_1 E(a_{t-1}a_{t-3}) + E(a_{t-1}a_{t-2}))$$

$$= -\theta_1[(0) + (0)] = 0$$

$$\lambda_2 = zero$$

$$\lambda_3 = zero$$

$$\lambda_k = \begin{cases} -\theta\sigma_a^2 & ;\text{k=1} \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

4/ الارتباط الذاتي :

$$\rho_s = \frac{\lambda_1}{\lambda_0}, \quad s = 1, 2, \ldots n/2 = q$$

$$\rho_1 = \frac{\lambda_1}{\lambda_0} = \frac{-\theta_1\sigma_a^2}{\sigma_a^2(\theta_1^2+1)} = \frac{-\theta}{(\theta_1^2+1)}$$

$$\rho_2 = \frac{\lambda_2}{\lambda_0} = \frac{0}{\sigma_a^2(\theta_1^2+1)} = 0$$

$$\rho_k = \begin{cases} \dfrac{-\theta_1}{-\theta_1^2+1} \end{cases} \qquad (14-3)$$

k=1,2,3,...

5/ دالة الذاكرة :

معامل الذاكرة يساوي معامل الخطاء السابق في النموذج عليه فإن معامل الذاكرة هو $-\theta_1$

مع العلم ان شرط السكون

$$1\theta 1<1$$

5-10 مراحل تحليل السلاسل الزمنية: {6}،{7}،{8}،{9}،{10}

تمر السلاسل الزمنية في تحليلها بأربعة مراحل ,أذكرها فيما يلي :

3-10-1 التشخيص او التعرف (identification) :

وتتكون هذه المرحلة من ثلاث خطوات :

1/ اختبار سكون السلسلة الزمنية وذلك باستخدام الوسائل المعروفة لذلك .

2/ تحديد نوع النموذج وذلك باستخدام دالتي الترابط الذاتي الجزئي , والتي يمكن توضيحها بالجدول التالي :

جدول (3−1) سلوك دالتي الارتباط الذاتي الجزئي

النموذج	دالة الارتباط الذاتي	دالة الارتباط الذاتي الجزئي
AR(P)	تقترب من الصفر تدريجيا	تساوي الصفر بعد الفجوة الزمنيةp
MA(q)	تساوي الصفربعد الفجوة الزمنيةq	تقترب تدريجيا من الصفر
ARMA(p,q)	تقترب تدريجيا من الصفر	تقترب تدريجيا من الصفر

4/ اختيار رتبة النموذج :

وذلك باستخدام معايير معينة لمعرفة اي النماذج انسب لوصف البيانات ، مثل متوسط مربع الخطاء (MSE) ، والقيمة المطلقة لمتوسط مربع الخطاء ومعامل التحديد (R^2) واختبار تحليل التباين (F)ولكن جميع هذه المقاييس يعطي نتائج غير دقيقة خاصة في النماذج الغير خطية , ومن اهم المقاييس المستخدمة لاختيار رتبة النموذج الاتي :

مقياس اكايكي للمعلومات Akaikes information :

يرمز له بالرمز (AIC) ويعبر عنة بالصيغة

$$AIC = nLn\ SSR + 2k \qquad (15\text{-}3)$$

حيث

SSR : هو مجموع مربعات البواقي

K :تشير الي رتبة النموذج

K=P+d+q : عدد المعلمات عدا الحد الثابت في النموذج .

K=p+d+q+1 : عدد المعلمات والحد الثابت في النموذج .

افضل نموذج من بين مجموعه من النماذج هو الذي له اقل قيمة ل(AIC) .

2/ مقياس شوارتز البيزي :

ويرمز له بالرمز (SBC) ويعبر عنة بالصيغة التالية :

$$SBC = nLn\ SSR + KLn(n) \qquad (16-3)$$

النموذج المناسب هو النموذج صاحب اقل قيمة ل(SBC) .

3–10–2 التقدير(Estimation):

بعد تحديد نوع النموذج , لابد من تقدير معلمات النموذج $\theta_1,....\theta_p$ و $\theta_1,.....,\theta_4,\theta_1,....\theta_p$ و μ و σ^2 وذلك

باستخدام البيانات المتوفرة , فهنالك طرق كثيرة لتقدير المعلمات ستذكر منها :

طريقة العزوم :

تعتمد هذه الطريقة علي مساواة عزوم العينة مثل متوسط العينة $\bar{z}$ والارتباطات الذاتية للعينة r_k بالعزوم

النظرية مثل μ وداله الارتباط الذاتية ρ_k وحل المعادلات الناتجة بالنسبة للمعلمات المراد تقديرها .

ولتقدير معلمات نموذج AR(P) مثلاً نتبع الخطوات التالية :

1) يقدر المتوسط μ بالمقدر $\bar{z}$ اي :

$$\mu = \bar{z} = \frac{\sum_{I=1}^{N} Z_1}{n} \qquad (17-3)$$

2) تقدر المعلمات $\theta_p,.\theta_2,\theta_1$ باستخدام العلاقة :

$$\rho_k = \phi_1,.\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2} + ... + \phi_p\rho_{k-p}, k \succ 1$$

والتي تنتج من ضرب المعادلة المعرفة لنموذج AR(P) بالحد $Z_{T-K-\mu}$وأخذ التوقع .

ويوضح K=1,2,...,P في العلاقة السابقة نحصل علي نظام المعادلات المسمي معادلات يول

ووكر (Yule-Walker) التالي :

$$\left.\begin{array}{l} p_p = \phi_1 + \phi_2 p_1 + ... + \phi_p p_{p-1} \\ p_2 = \phi_1 p_1 + \phi_2 + ... + \phi_p p_{p-2} \\ . \\ . \\ p_p = \phi_1 p_{p-1} + \phi_2 p_{p-2} + ... + \phi_p \end{array}\right\} \qquad (18-3)$$

وبالتعويض عن ρ_k بالمقدر r_k نحصل علي مقدرات العزوم للمعلمات $\hat{\phi}_1 ... \hat{\phi}_p$ كالتالي :

$$\begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ . \\ . \\ . \\ r_p \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 r_1 r_2 .... r_{p-2} r_{p-1} \\ r_1 1 r_2 .... r_{p-s} r_{p-2} \\ . \\ . \\ r_{p-1} r_{p-2} r_{p-s} ..... r_1 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ . \\ . \\ . \\ \hat{\phi}_p \end{bmatrix} \qquad (19-3)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ . \\ . \\ . \\ \hat{\phi}_p \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} 1 r_1 r_2 \ldots\ldots r_{p-2} r_{p-1} \\ r_1 1 r_2 \ldots\ldots r_{p-s} r_{p-2} \\ . \\ . \\ r_{p-1} r_{p-2} r_{p-s} \ldots\ldots r_1 1 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ . \\ . \\ . \\ r_p \end{bmatrix} \qquad (20-3)$$

3/ تقدر $\hat{\sigma}$ كالاتي :

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{r}_0[1 - \hat{\phi}_1 r_1 - \hat{\phi}_2 r_2 - \ldots - \hat{\phi}_p r_p] \qquad (21-3)$$

حيث

$$\hat{r}_0 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(z_t - \bar{z})^2$$

هو تباين العينة .

وكمثال لهذه الطريقة تقدير العزوم لبعض النماذج :

نموذج AR(1) :

$$z_{t-\mu} = \phi_1 z_{t-1-\mu} + a_t$$

$$a_t \approx N(0, \sigma^2)$$

مقدر العزوم لمعلم μ هو :

$$\bar{\mu} = \bar{Z} \qquad (22-3)$$

مقدر العزوم للمعلم σ^2 هو :

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{Y}_0(1-\hat{\phi}r_1) \qquad (23-3)$$

حيث

$$\hat{\gamma}_0 = \frac{1}{n}\sum_{t-1}^{n}(z_t - \bar{z})^2$$

نموذج MA(1) :

$$z_{t-\mu} = \theta_1 a_{t-1} + a_{t\,t}$$

$$a_t \approx N(0, \sigma^2)$$

مقدر العزوم للمعلم θ_1 هو :

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1}{(1+\theta_1^2)} \qquad (23-3)$$

$$P_2 = \frac{-\theta_2}{(1+\theta_1^2+\theta_2^2)} \qquad (24-3)$$

$$\hat{r}_1 = \frac{-\hat{\theta}_1}{1+\theta_1^2} \qquad (25-3)$$

وبتعويض المعلمات للمقدار $\hat{\theta}_1$ نجد ان :

$$\hat{\theta}_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4r_1}}{2r}$$

هذا الحل يعطي قيمتين للمقدار $\hat{\theta}_1$ تؤخذ القيمة التي تحقق $1 \prec \left|\hat{\theta}_1\right|$

نموذج ARMA(1,1) :

$$Z_{t-\mu} = \phi_1(Z_{t-u-1}) + a_t - \theta_1 a_{t-1}$$

$$a_t \approx N(0, \sigma^2)$$

لإيجاد مقدرات العزوم للمعلمات ϕ_1, θ_1 تستخدم

العلاقات التالية :

$$\rho_1 = \frac{(1-\phi_1\theta_1)(\phi_1 - \theta_1)}{1+\theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1} \qquad (27-3)$$

$$\rho_2 = \frac{(1-\phi_1\theta_1)(\phi_1 - \theta_1)}{1+\theta_1^2 - 2\phi_1\theta_1} \qquad (28-3)$$

وبتعويض المقدرات r_1 و r_2 نحصل علي مقدرات العزوم للمعلمات ϕ_2, θ_1 اذن :

$$r_1 = \frac{(1-\hat{\phi}_1\hat{\theta}_1)(\hat{\phi}_1 - \hat{\theta}_1)}{1+\theta_1^2 - 2\hat{\phi}_1\hat{\theta}_1} \qquad (29-3)$$

$$r_2 = \frac{(1-\hat{\phi}_1\hat{\theta}_1)(\hat{\phi}_1 - \hat{\theta}_1)}{1+\theta_1^2 - 2\hat{\phi}_1\hat{\theta}_1}\hat{\phi}_1 \qquad (30-3)$$

وبقسمة المعادلة للمقدر r_2 علي المعادلة المعرفة للمقدر r_1 ينتج :

$$\hat{\phi}_1 = \frac{r_2}{r_1} \qquad (31-3)$$

ولإيجاد مقدر العزوم للمعلم θ_1 يعوض عن $\hat{\phi}_1$ في المعادلة المعرفة للمقدر r_1 ينتج :

$$r_1 = \frac{\left[1-\frac{r_2}{r_1}\hat{\theta}_1\right]\left[\frac{r_2}{r_1}\hat{\theta}_1\right]}{1+\hat{\theta}_1 - 2\frac{r_2}{r_1}\hat{\theta}_1} \qquad (32-3)$$

وبحل المعادلة التربيعية الناتجة للمقدر $\hat{\theta}_1$ تؤخذ القيمة التي تحقق $1 \succ \left|\hat{\theta}_1\right|$

3-10-3الفحص والتدقيق(Diagnostic Checking) :

بعد التعرف علي النموذج وتقدير معلماته , يجب معرفة مدي دقة النموذج المقدر لبيانات السلسلة الزمنية وذلك عن طريق دراسة الاخطاء المقدرة Residuals والمقصود بها اختبار معاملات الارتباط الذاتي للأخطاء المقدرة اي قيم $p_s(\hat{a}t)$

وذلك باستخدام الاحصائية Box – pierce Q statistic والتي لها الصيغة التالية

$$Q = n \sum_{s=1}^{m} r_s^2(\hat{a}t) \qquad (33-3)$$

وبمقارنة الاحصائية Q مع $x^2 k,\alpha$ فاذا كانت قيمة $Q \le x^2 k,\alpha$ نجد ان النموذج ملائم لوصف البيانات اما اذا كانت $Q \le x^2 k,\alpha$ فهذا يعني ان النموذج غير ملائم لوصف البيانات.

3−10−4 التنبؤ (Forecasting):

يعتبر المرحلة الاخيرة من مراحل تحليل السلاسل الزمنية موسمية والتي تعتمد علي مساواة القيم المقدرة للخطاء بالصفر وكالاتي :

للتنبؤ بنموذج ARMA(1.1) نتبع الخطوات التالية :

الصيغة العامة للنموذج :

$$Z_t = (1+\phi_1) z_{t-1} - \theta_1 a_{t-1} + a_t$$

وبما ان :

$$a_t = z_t - z^*$$

إذن :

$$\hat{z}_t = (1+\hat{\phi}_1) z_{t-1} - \hat{\theta}_1 z_{t-2} + a_t \qquad t = 3, 4, \ldots \qquad (34-3)$$

عليه يمكن التنبؤ بقيمة المشاهدة $\hat{z}$ كالاتي :

$$\hat{z}_3 = (1+\hat{\phi}_1) z_2 - \hat{\phi}_1 z_1 + \hat{a}_t \qquad (35-3)$$

بما ان....,t=3,4

$$\hat{z}_1 = \hat{z}_2 = 0$$

فان :

$$\hat{z}_1 = \hat{z}_2 = 0$$

عليه

$$\hat{a}_1 = \hat{a}_2 = \hat{a}_3 = 0$$

$$\Rightarrow \hat{z}_3 = (1+\hat{\phi}_1)z_2 - \hat{\phi}_1 z_1 \qquad (36-3)$$

كما يمكن التنبؤ $\hat{z}_4$ كالاتي :

$$\hat{z}_4 = (1+\hat{\phi}_1)z_1 - \hat{\phi}_1 z_2 + \hat{a}_1 \qquad (37-3)$$

وبما أن $\hat{a}_4 = 0$ أذن

$$\hat{z}_4 = (1+\hat{\phi}_1)z_3 - \hat{\phi}_1 z_2 \qquad (38-3)$$

وبنفس الطريقة يمكن إيجاد القيمة التنبؤية لكل ....,t=5,6