الفصل الرابع

اشتقاق التوزيع البعدي لبعض التوزيعات

(1-4) تمهيد

(2-4) التوزيع البعدي(posterior distribution)

(3-4) خطوات اشتقاق التوزيع البعدي.

(4-4) تطبيقيات على اشتقاق التوزيع البعدي.

(4-1): تمهيد

تناولنا في الفصل الثالث مقدمة عامه عن طريقة بييز ونظرية بييز الاحتمالية وبعض طرق اختيار التوزيع القبلي وفي هذا الفصل سوف نتناول الآتي التوزيع البعدي(posterior distribution) بالإضافة الى خطوات اشتقاق التوزيع البعدي (stops of derivative the posterior distribution)، تطبيقات متنوعه لاشتقاق التوزيع البعدي.

(4-2)التوزيع البعدي(Posterior distribution)[1].

يبنى التوزيع البعدي في طريقة بييز على المعلومات التي يحتويها توزيع العينة$(x_1, x_2, \dots, x_n)$ بالإضافة الى المعلومات التي نعرفها حول المعلمةΘ والتي يمثلها التوزيع القبلي h(Θ) ويرمز له بالرمز $\prod(x/\Theta)$.

تعريف:

التوزيع البعدي(posterior distribution) هو توزيع احتمالي مشروط للمعلمة ɵ بشرط أخذ العينة ويحوي كل المعلومات التي يحتويها توزيع العينة $x = (x_1, x_2, \dots, x_3)$ بالاضافه الى المعلومات الاخرى التي نعرفها حول المعلمة ɵ والتي يمثلها التوزيع القبلي h(ɵ) وهو يلخص كل المعلومات الممكنة حول المعلمة.

ويمكن اشتقاقه من خلال العلاقة الآتية:

[1]) جلال مصطفى الصياد، الاستدلال الاحصائي،(مرجع سابق)، ص٤٦٣

$$\pi(\theta/x) = \begin{cases} \dfrac{P(x/\theta)\grave{h}(\theta)}{\sum P(x/\theta)h(\theta)} & \text{عندما } \theta \text{ متغيراً متقطع} \\ \dfrac{f(x/\theta)h(\theta)}{\int f(x/\theta)h(\theta)d\theta} & \text{عندما } \theta \text{ متغيراً متصل} \end{cases} \quad ..\rightarrow (1-4)$$

(4-3):خطوات اشتقاق التوزيع البعدي طريقة بييز لتقدير:[1]

نفترض أن لدينا مجتمع له دالة توزيع شرطي _لـ θ_ هي $f(x/\theta)$ وإننا أخذنا منه العينة $(x_1, x_2, x_3, \dots, x_n)$ كذلك نفترض أن التوزيع القبلي لـ θ هو h(θ) للحصول على التوزيع البعدي لـ θ نستخدم العلاقة (4-1) ثم نتبع الخطوات الآتية:

(a) نحدد صيغة التوزيع البعدي من خلال الطرف الايمن لإحدى العلاقتين الآتيتين:

$$\pi(\theta/x)\alpha f(x/\theta)h(\theta) \quad \text{أو} \quad \pi(\theta/x)\alpha P(x/\theta)h(\theta)$$

أي: من بسط العلاقة (4-1) بعد اهمال الثوابت.

(b) بمقارنة صيغة التوزيع البعدي الناتجة من(a) ودالة (كتلة أو كثافة) التوزيع المشابه للتوزيع البعدي بصيغته الأصلية(المعروفة لدينا) نوجد معلمات التوزيع البعدي.

(c) ناتج المقام في العلاقة(4-1)(التوزيع الهامشي)

=مقلوب ثوابت التوزيع البعدي المطلقة(انظر ملاحظه(٢)صـ٦٦) مضروباً في ثوابت البسط في العلاقة(4-1)

(d) كتابة صيغة التوزيع البعدي النهائية التي هو نفس التوزيع المشابه بصيغته الأصلية مع استبدال معلماته بمعلمات التوزيع البعدي.

[1] استنتاج من واقع التطبيقات والتمارين

ملاحظات:

(1) ثوابت التوزيع المطلقة هي الثوابت التي تكون مضروب في التوزيع ولا تحتوي على اي متغير مثل($\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}$) في التوزيع الطبيعي و$\frac{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}{\Gamma(\alpha+\beta)}$ في توزيع بيتا.

(2) ثوابت التوزيع البعدي المطلقة = ثوابت التوزيع الأصلي المشابه للتوزيع البعدي مع استبدال معالم التوزيع الأصلي بمعالم التوزيع البعدي.

(4-4) تطبيقات:

ت(1): لتكن $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ عينه عشوائية من توزيع بواسون بالمعلمة ϴ

$$f(x/\theta) = \frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!} : x = 0,1,2,3, \dots.$$

والتوزيع القبلي لهذا التوزيع هو: ϴ>0 : $h(\theta) = \frac{\beta^\alpha \, \theta^{\alpha-1} \, e^{-\theta\beta}}{\Gamma(\alpha)}$

لمعرفة التوزيع البعدي(Posterior distribution) نتبع الخطوات الآتية.

(1[1]) بما أن التوزيع القبلي هو توزيع مستمر(جاما) فإن التوزيع البعدي يمكن

اشتقاقه من خلال العلاقة : $\pi(\theta/x) = \frac{f(x/\theta)h(\theta)}{\int f(x/\theta)h(\theta)d\theta}$

وعلية فإن: $\pi(\theta/x) = \frac{f(x/\theta)h(\theta)}{\int f(x/\theta)h(\theta)d\theta} = \frac{\frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!}.\frac{\beta^\alpha \, \theta^{\alpha-1} \, e^{-\theta\beta}}{\Gamma(\alpha)}.}{\int\frac{e^{-\theta}\theta^x}{x!}.\frac{\beta^\alpha \, \theta^{\alpha-1} \, e^{-\theta\beta}}{\Gamma(\alpha)}d\theta}$

[1]) د. جلال مصطفى الصياد الاستدلال الاحصائي، (مرجع سابق)، ص٤٦٧

$$\pi(\theta/x) = \frac{\frac{\beta^{\alpha}}{x!\ \Gamma(\alpha)} . \theta^{x+\alpha-1} e^{-\theta(1+\beta)}}{\int \frac{\beta^{\alpha}}{x!\ \Gamma(\alpha)} . \theta^{x+\alpha-1} e^{-\theta(1+\beta)}\ d\theta} \rightarrow (1)$$

(2) لإيجاد التوزيع البعدي نتبع الخطوات في ص(65).

(a) نحدد صيغة التوزيع البعدي من خلال بسط العلاقة (١) بعد إهمال ثوابته:

وعليه نلاحظ: أن التوزيع البعدي يشابه توزيع (جاما) وحيث أن الصيغة

الاصلية لتوزيع جاما هي: $x>O$: $f(x,\alpha,\beta) = \frac{\beta^{\alpha} X^{\alpha-1} e^{-X\beta}}{\Gamma(\alpha)}$

(b) بمقارنة صيغة التوزيع البعدي في المعادلة(**1**) باعتبار أن المتغير العشوائي في التوزيع البعدي هو المعلمة(θ) ودالة (كثافة) التوزيع المشابه للتوزيع البعدي بصيغته الأصلية(المعرفة لدينا) نجد أن:

$$\alpha - 1 = x + \alpha - 1 \Rightarrow \alpha = x + \alpha \quad \text{و} \quad \beta = 1 + \beta$$

(c) ناتج المقام في العلاقة(4−1):

$$\int f(x/\theta) h(\theta) d\theta = \frac{\beta^{\alpha}}{x!\ \Gamma(\alpha)} . \frac{\Gamma(x+\alpha)}{(1+\beta)^{x+\alpha}}$$

(d) وعليه فإن التوزيع البعدي: $\pi(\theta/x) = \frac{(1+\beta)^{x+\alpha}}{\Gamma(x+\alpha)}\ \theta^{x+\alpha-1} e^{-\theta(1+\beta)}$

وهو عبارة عن توزيع جاما بمعلمتيه: $(\alpha = x + \alpha\ ,\ \beta = 1 + \beta)$

(١) تطبيقاً لخطوات اشتقاق التوزيع البعدي في ص(٦٥)

ت(2): إذا كان لدينا $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ عينه عشوائية مسحوبة من توزيع بواسون بالمعلمة ϴ

$$f(\mathrm{X}, \theta) = \frac{e^{-\theta}\theta^{x}}{x!} : x = 0,1,2,3, \dots.$$

و التوزيع القبلي هو التوزيع الأسي ولمعرفة التوزيع البعدي لتوزيع العينة.

نلاحظ أن التوزيع القبلي هو التوزيع الأسي فإن: $h(\theta) = \lambda e^{-\lambda\theta}$ حيث α هي معلمة التوزيع القبلي.

وبما أن التوزيع القبلي هو توزيع مستمر فإن التوزيع البعدي يمكن اشتقاقه باستخدام العلاقة

$$\pi(\theta/x) = \frac{f(x/\theta)h(\theta)}{\int f(x/\theta)h(\theta)d\theta}$$

وعلية فإن:
$$\pi(\theta/x) = \frac{f(X/\theta)h(\theta)}{\int f(X/\theta)h(\theta)d\theta} = \frac{\frac{e^{-\theta}\theta^{x}}{x!}.\lambda e^{-\lambda\theta}.}{\int\frac{e^{-\theta}\theta^{x}}{x!}\lambda e^{-\lambda\theta}\,.d\theta}$$

$$= \frac{\frac{\lambda}{x!}.\theta^{x}e^{-\theta(1+\lambda)}}{\int\frac{\lambda}{x!}.\theta^{x}e^{-\theta(1+\lambda)}\;d\theta} \rightarrow (1)$$

ولإيجاد التوزيع البعدي نتبع الخطوات في ص(65).

(a) نحدد صيغة التوزيع البعدي من خلال بسط العلاقة(١) بعد إهمال ثوابته:

وعليه نلاحظ أن: التوزيع البعدي يشابه توزيع ((جاما)) وحيث أن الصيغة الأصلية لتوزيع جاما هي: $f(x, \alpha, \beta) = \frac{\beta^{\alpha}\, x^{\alpha-1}\, e^{-x\beta}}{\Gamma(\alpha)} \quad : x>O$

[1]) تطبيقاً لخطوات اشتقاق التوزيع البعدي في ص(٦٥)

(b) بمقارنة صيغة التوزيع البعدي الناتجة من(a) باعتبار أن المتغير العشوائي في التوزيع البعدي هو المعلمة(θ) ودالة (كثافة) التوزيع المشابه للتوزيع البعدي بصيغته الأصلية (المعرفة لدينا) نجد أن:

$$\alpha - 1 = x \Rightarrow \alpha = x + 1 \quad \text{و} \quad \beta = 1 + \lambda$$

(c) ناتج المقام في العلاقة(4−1):

$$\int f(x/\theta)h(\theta)d\theta = \frac{\lambda}{x!}.\frac{\Gamma(x+1)}{(1+\lambda)^{x+1}}$$

(d) وبتعويض في معادلة(١) نجد أن التوزيع البعدي:

$$\pi(\theta/x) = \frac{(1+\lambda)^{x+1}}{\Gamma(x+1)}\ \theta^{x}e^{-\theta(1+\lambda)}$$

وهو عبارة عن توزيع جاما بالمعلمتين: $(\alpha = x + 1\ ,\ \beta = 1 + \lambda)$.

ت(3) ليكن x متغير عشوائي يتبع توزيع ثنائي الحدين بالمعلمة θ فإذا افترضنا أن التوزيع القبلي هو توزيع بيتا أوج التوزيع البعدي وسمي معلماته ثم أوجد كلاً من التوقع والتباين بالنسبة للتوزيع البعدي؟...[١]

توزيع العينة: $\mathbf{X \sim Bin(\theta,\ n)}$

$$P(x,n,\theta) = \binom{n}{x}\theta^{x}(1-\theta)^{n-x} \qquad : x = 0,1,2,\dots,n$$

$$h(\theta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\ \theta^{\alpha-1}\ (1-\theta)^{\beta-1} \quad : 1>\theta>0 \quad ,\alpha,\beta>0$$

[١] زين العابدين عبدالرحيم البشير أ.د :أحمد عودة عبدالمجيد عودة ،الاستدلال الاحصائي ، مرجع سابق، ص١٢٦,١٢٧

ولإيجاد التوزيع البعدي نتبع الخطوات الآتية:

(1) بما أن التوزيع القبلي هو توزيع مستمر(بيتا) فإن التوزيع البعدي يمكن اشتقاقه

من خلال العلاقة: $\pi(\theta/x) = \frac{f(x/\theta)h(\theta)}{\int f(x/\theta)h(\theta)d\theta}$

وعلية فإن: $\pi(\theta/x) = \frac{f(X/\theta)h(\theta)}{\int f(X/\theta)h(\theta)d\theta} = \frac{\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}.\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}.}{\int\binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}.\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}.d\theta}$

$$= \frac{\binom{n}{x}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}.\theta^{x+\alpha-1}(1-\theta)^{n+\beta-x-1}}{\int\binom{n}{x}\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}.\theta^{x+\alpha-1}(1-\theta)^{n+\beta-x-1}d\theta} \rightarrow (1)$$

(2)لاشتقاق التوزيع البعدي نتبع الخطوات في ص(65).

(a) نحدد صيغة التوزيع البعدي من خلال بسط العلاقة(١) بعد إهمال ثوابته:

وعليه نلاحظ: أن التوزيع البعدي يشابه توزيع ((بيتا)) وحيث أن الصيغة الأصلية لتوزيع بيتا

$$f(x,\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\,x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \quad : 1>x>0 \quad ,\alpha,\beta>0$$

(b) بمقارنة صيغة التوزيع البعدي أي بسط العلاقة (١) بعد إهمال الثوابت وباعتبار أن المتغير العشوائي في التوزيع البعدي هو المعلمة(θ) ودالة (كثافة) التوزيع المشابه للتوزيع البعدي بصيغته الأصلية(المعرفة لدينا) نجد أن:

$$\alpha - 1 = x + \alpha - 1 \Rightarrow \alpha = x + \alpha$$

$$\beta - 1 = n + \beta - x - 1 \Rightarrow \beta = n + \beta - x \quad \text{و}$$

(1) تطبيقاً لخطوات اشتقاق التوزيع البعدي في ص(٦٥)

(c) ناتج المقام في العلاقة(4−1):

$$\int f(x/\theta)h(\theta)d\theta = \binom{n}{x} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} . \frac{\Gamma(\alpha+x)\Gamma(n+\beta-x)}{\Gamma(n+\beta+\alpha)}$$

(d) وبتعويض () في المعادلة([1]) فإن التوزيع البعدي:

$$\pi(\theta/x) = \frac{\Gamma(n+\beta+\alpha)}{\Gamma(\alpha+x)\Gamma(n+\beta-x)} \ \theta^{x+\alpha-1}\,(1-\theta)^{n+\beta-x-1}$$

حيث : $1 > \theta > 0 \ \ , x+\alpha > 0 \ \text{and} \ \ n+\beta-x > o$

وهو عبارة عن توزيع بيتا بالمعلمتين: $(\alpha = x+\alpha \ , \ \beta = n+\beta-x)$

وعلية فإن:

متوسط التوزيع البعدي $\mu = \frac{x+\alpha}{n+\alpha+\beta}$ وتباينه $\sigma^2 = \frac{(x+\alpha)(n+\beta-n)}{(n+\alpha+\beta)^2\,(1+n+\alpha+\beta)^2}$

ت(4): إذا كان$(x_1, x_2, \dots, x_n) = x$ عينة عشوائية مختارة من توزيع طبيعي تباينه σ^2 ووسطه الحسابي (مجهول) والتوزيع القبلي للمعلمة μ هوتوزيع طبيعي بمتوسط μ_0 وتباين${\sigma_0}^2$ فكيف يمكن التحقق من أن التوزيع البعدي لمتوسط المجتمع هو ايضاً توزيع طبيعي...([2])

بمتوسط μ_0 $\frac{\sigma_0{}^2\,\sigma^2}{n\,\sigma_0{}^2\,\sigma^2}$ وتباين $\mu^* = \frac{n\,\sigma_0{}^2}{n\sigma_0{}^2+\,\sigma^2}\,\overline{x} + \frac{\sigma^2}{n\sigma_0{}^2+\,\sigma^2}$ σ^{*2}

لمعرفة التوزيع البعدي نعلم أن $\overline{x}$ احصاء كافي للمعلمةμ وأن

$$\overline{x} \ \sim \text{Nor}(\mu, \sigma^2/n)$$

---

[1]) تطبيقاً لخطوات اشتقاق التوزيع البعدي في ص(٦٥)

[2]) زين العابدين عبدالرحيم البشير ،أ.د :أحمد عودة عبدالمجيد عودة ،الاستدلال الاحصائي ،مرجع سابق ،تمرين(٢٠، ٥,٥)صـ١٣٩

$$f(\overline{x},\mu,\sigma\ /\sqrt{n}) = \frac{1}{\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\sqrt{2\pi}}\ e^{\frac{-n}{2\sigma^2}(\overline{x}-\mu)^2}\ : \infty>\overline{x}>-\infty\ ,\mu,\sigma^2>O$$

وحيث أن التوزيع القبلي هو توزيع طبيعي بمتوسط μ_0 وتباين ${\sigma_0}^2$ فإن:

$$\mu\ \sim \text{Nor}(\mu_0\ ,\ {\sigma_0}^2)$$

$$h(\mu) = \frac{1}{\sqrt{2\pi{\sigma_0}^2}}\ e^{\frac{-1}{2{\sigma_0}^2}(\mu-\mu_0)^2}\ \ : \infty>\mu>-\infty\ ,\mu_0,{\sigma_0}^2>O$$

وعلية فإن التوزيع البعدي يمكن التعرف علية من خلال العلاقة:

$$\pi(\theta/x)\alpha\ f(x_i/\Theta)h(\theta)\alpha\ \ e^{-\left[\frac{n}{2\sigma^2}(\overline{x}-\mu)^2+\frac{1}{\mathbf{2\sigma_0^2}}(\mu-\mu_0)^2\right]}$$

ملاحظه(): في التوزيع الطبيعي المعروف لدينا:

$$f(x,\mu,\sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}\ e^{\frac{-1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}\ : \infty>x>-\infty\ ,\mu,\sigma^2>O$$

لو أخذنا المشقة بالنسبة لـ x لقوى e نجد أن:

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2\right] = \frac{2(x-\mu)}{2\sigma^2} = \frac{x-\mu}{\sigma^2}$$

حيث:x المتغير العشوائي التي أجرينا المشقة بالنسبة له و μ متوسط التوزيع الطبيعي

و ${\sigma^2}$ تباين التوزيع الطبيعي

() استنتاج من واقع التطبيق.

*** وبالمثل ***

المشتقة بالنسبة لـ μ لقوى e بدون السالب في التوزيع البعدي يجب أن يكون الناتج: $\frac{\mu-\mu^*}{\sigma^{*2}}$

$$\frac{d}{d\mu}\left[\frac{n}{2\sigma^2}(\overline{x}-\mu)^2+\frac{1}{\boldsymbol{2\sigma_0^2}}(\mu-\mu_0)^2\right]=\frac{n}{\sigma^2}(x-\mu)+\frac{1}{\boldsymbol{\sigma_0^2}}(\mu-\mu_0)$$

$$=\frac{1}{\sigma^2{\sigma_0}^2}[n{\sigma_0}^2\mu-n\boldsymbol{\sigma_0}^2\overline{x}+\sigma^2\mu-\sigma^2\mu_0]$$

$$=\frac{1}{\sigma^2{\sigma_0}^2}[(n{\sigma_0}^2+\sigma^2)\mu-(n\boldsymbol{\sigma_0}^2\overline{x}+\sigma^2\mu_0)]$$

$$=\frac{n{\sigma_0}^2+\sigma^2}{\sigma^2{\sigma_0}^2}\left[\mu-\frac{(n\boldsymbol{\sigma_0}^2\overline{x}+\sigma^2\mu_0)}{n{\sigma_0}^2+\sigma^2}\right]=\frac{1}{\sigma^2{\sigma_0}^2/n{\sigma_0}^2+\sigma^2}\left[\mu-\frac{(n\boldsymbol{\sigma_0}^2\overline{x}+\sigma^2\mu_0)}{n{\sigma_0}^2+\sigma^2}\right]$$

وعلية فإن: $\mu^*=\frac{(n\boldsymbol{\sigma_0}^2\overline{x}+\sigma^2\mu_0)}{n{\sigma_0}^2+\sigma^2}$ و $\sigma^{*2}=\sigma^2{\sigma_0}^2/n{\sigma_0}^2+\sigma^2$

ت(5): إذا كان التوزيع المسحوب منة العينة هو توزيع ذي الحدين السالب بالمعلمة θ والتوزيع القبلي قبل أخذ العينة هو توزيع جاما فلمعرفة التوزيع البعدي

نلاحظ أن توزيع العينة:()

$$x \sim \textbf{Nib}\ (\mathbf{r},\boldsymbol{\theta})$$

$$P(x,r,\theta)=\binom{X+r-1}{r-1}\theta^r(1-\theta)\quad :r>0,\ 1>P>0,x=0,1,2,....$$

والتوزيع القبلي هو توزيع بيتا:

$$f(x,r,\theta)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\ \theta^{\alpha-1}(1-\theta)^{\beta-1}\ :\ \alpha,\beta>0\ \ ,\theta>0$$

() تطبيق لخطوات اشتقاق التوزيع البعدي في ص(٦٥)

ولإيجاد التوزيع البعدي نتبع الخطوات الآتية:

(1) بما أن التوزيع القبلي هو توزيع مستمر(بيتا) فإن التوزيع البعدي يمكن اشتقاقه من خلال العلاقة : $\pi(\theta/x) = \frac{f(x/\theta)h(\theta)}{\int f(x/\theta)h(\theta)d\theta}$

وعلية فإن:

$$\pi(\theta/x) = \frac{\binom{x+r-1}{r-1}\ \theta^r\ (1-\theta)\ \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}.\theta^{\alpha-1}\ (1-\theta)^{\beta-1}.}{\int\binom{x+r-1}{r-1}\theta^r\ (1-\theta)\ .\frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\theta^{\alpha-1}\ (1-\theta)^{\beta-1}\ .d\theta}$$

$$= \frac{\binom{x+r-1}{r-1}\ \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}.\theta^{r+\alpha-1}\ (1-\theta)^{\beta}}{\int\ \binom{x+r-1}{r-1}\ \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\ .\theta^{r+\alpha-1}\ (1-\theta)^{\beta}\ d\theta} \rightarrow (^{1})$$

(2)لاشتقاق التوزيع البعدي نتبع الخطوات في ص(65).

(a) نحدد صيغة التوزيع البعدي من خلال بسط العلاقة(1) بعد إهمال ثوابته وعليه نلاحظ أن التوزيع البعدي يشابه توزيع ((بيتا)) وحيث أن الصيغة الأصلية لتوزيع بيتا هي:

$$f(\mathrm{x},\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}\ \mathrm{x}^{\alpha-1}\ (1-\mathrm{x})^{\beta-1}\ \ :\ 1>\mathrm{x}>0\ \ ,\alpha,\beta>0$$

(b) بمقارنة صيغة التوزيع البعدي أي بسط العلاقة(1) بعد اهمال الثوابت باعتبار أن المتغير العشوائي في التوزيع البعدي هو المعلمة(θ) ودالة (كثافة) التوزيع المشابه للتوزيع البعدي بصيغته الأصلية(المعرفة لدينا) نجد أن:

$$\alpha - 1 = r + \ \alpha - 1 \Rightarrow \alpha = r + \alpha\ \ ,\beta - 1 = \beta\ \Rightarrow \beta = \beta + 1$$

(1) تطبيق لخطوات اشتقاق التوزيع البعدي في ص(٦٥)

(c) ناتج المقام في العلاقة(1):

$$\int f(x/\theta)h(\theta)d\theta = \binom{x+r-1}{r-1} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} . \frac{\Gamma(r+\alpha)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(r+\beta+\alpha+1)}$$

(d) وبتعويض (جـ) في المعادلة([٢]) فإن التوزيع البعدي

$$\pi(\theta/x) = \frac{\Gamma(r+\beta+\alpha+1)}{\Gamma(r+\alpha)\Gamma(r+\beta+\alpha+1)} \ \theta^{x+\alpha-1}(1-\theta)^{n+\beta-x-1}$$

حيث : $1 > \theta > 0 \ , r+\alpha > 0 \text{ and } \beta+1 > o$

وهو عبارة عن توزيع بيتا بالمعلمتين : $(\alpha = r+\alpha \ , \ \beta = \beta+1)$

P	0.1	0.2
h(P)	0.6	0.4

ت(6): أذا كان الجدول الموضح جانباً يمثل التوزيع القبلي للمعلمة P لمجتمع ما مولدة بواسطة المتغير العشوائي X المأخوذ من عينة عشوائية بالحجم (2)

فلمعرفة التوزيع البعدي للمعلمة P نلاحظ أن:

$$X \sim Bin(2,P) \quad \text{لأن} \quad n=2 \quad \text{و} \quad x=0,1,2$$

وحيث أن: دالة كتلة توزيع ثنائي الحدين هي:()

$$P(x,n,\theta) = \binom{n}{x} P^x (1-P)^{n-x} \qquad : x = 0,1,2,\dots,n$$

وحيث أن: التوزيع القبلي توزيع متقطع فإن التوزيع البعدي يعطى بالعلاقة:

$$\pi(P/x) = \frac{P(x/P)h(P)}{\sum P(x/P)h(P)}$$

[١]) تطبيقاً لخطوات اشتقاق التوزيع البعدي في ص(٦٥)

وبما أن: لدينا قيم عددية سوف نوجد اولاً التوزيع الهامشي(Marginal distribution)

$$g(x) = \sum P(x/P)h(P)$$

$$= [P(x\ /0.1)\ h(0.1)\ + P(x\ /0.2)\ h(0.1)]$$

$$= \binom{2}{x}\ [(0.1)^x(0.9)^{2-x}0.6 + (o.2)^x(o.8)^{2-x}0{,}4]$$

وعلية يمكن تمثيل التوزيع الهامشي بالجدول الآتي:

X	0	1	2
g(x)	0.742	0.234	0.022

وعليه فإن: التوزيع البعدي يعطى بالعلاقة:

$$\pi(P/x) = \frac{P(x/P)h(P)}{g(x)}$$

(١)عندما x=0:

$$\pi(0.1/0) = \frac{P(0/0.1)h(0.1)}{g(0)} = \frac{\binom{2}{0}(0.1)^0(0.9)^2\ (0.6)}{0.742} = 0.655$$

$$\pi(0.2/0) = 1 - \pi(o.1/0) = 1 - 0.655 = 0.345$$

(٢)عندما x=1:

$$\pi(0.1/1) = \frac{P(1/0.1)h(0.1)}{g(1)} = \frac{\binom{2}{1}(0.1)^0(0.9)^2\ (0.6)}{0.236} = 0.4576$$

(١) تطبيق لخطوات اشتقاق التوزيع البعدي في ص(٦٥)

$$\pi(0.2/1) = 1 - \pi(0.1/1) = 1 - 0.4576 = 0.5424$$

(٣)عندما2=x:

$$\pi(o.1/2) = \frac{P(2/0.1)h(0.1)}{g(2)} = \frac{\binom{2}{2}(0.1)^0(0.9)^2\ (0.6)}{0.236} = 0.2727$$

$$\pi(0.2/2) = 1 - \pi(0.1/2) = 1 - 0.2727 = 0.7273$$

نلاحظ: أن التوزيع البعدي متقطع وفي حدود مدى المعلمة P حيث 0<P<1