الباب الثانى

النسبية العامة والخاصة

(2-1) المقدمه:-

قدم إنشتاين 1905م النظرية النسبية الخاصة التي تعالج الأجسام المتحركة بسرعه خطية ثابتة كما قدمه في عام 1915م النظرية النسبية العامة التي تعالج الأجسام المتسارعة حيث صاغ نظريته المشهورة التي إستطاع بها تفسير التجربه ماكسيون ومورلي وقد إعتبرإنشتاين أن الزمان والمكان يندمجان في فضاء واسماه الفضاء الزمكاني

(2-2) النسبية الخاصه والعامه :-

تعتبر النسبية الخاصه الفضاء مكون من اربعه ابعاد هي:-

$X^1 = X$ $\qquad$ $X^3 = Z$

$X^2 = X$ $\qquad$ $X^4 = ict$

فإذا كانت لدينا نقطانا في هذا الفضاء الرباعي وهما

(X^1, X^2, X^3, X^4) و $(X^1 + dX^1\ , X^2 + dX^2\ , X^3 + dX^3, X^4 + dX^4)$

فإن مربع المسافة بينهما يساوى

$$d\tau^2 = \zeta_{\mu\nu}\, dX^\mu dX^\nu \tag{2.2.1}$$

$$\zeta_{\mu\nu} = \pm 1 \tag{2.2.2}$$

عندما يكون نظام (محاور) الاسناد تسير بسرعات منتظمه ثابته بالنسبة لبعضها البعض وعندما يكون الخط المستقيم هو اقصر مسافة بين نقطتين وعندما يسير نظام الاسناد بعجلة وتسارع بين نقطتين فان مربع الفاصل بينهما يساوي:

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu}\, dX^\mu dX^\nu \tag{2.2.3}$$

فان اقصر مسافة بين هاتين النقطتين لن يكون خط مستقيم بل يكون فضاء منحني يسمى بالجيودسي بالنسبه للنظام المسرع .وعندما يكون النظام لا اقليدي تكون خطوطه منحنية فان سار الضوء في مثل هذا الفراغ فانه لا يسير في خطوط مستقيمه بل يسير في مسار منحني او في صف.

(3-2) مبدأ التكافؤ:-

اذا كنت تراقب حجر يسقط من نقطة في مجال تثاقلي وكان هنالك شخص يراقب وآخر يجلس في مصعد يتسارع بعجلة نحو حجر ثابت فانه سيلاحظ ان الحجرسيسقط بتسارع نحو ارضية المصعد ولن يستطيع ان يفرق بينه وبين ذلك الموجود في مجال تثاقلي مما يعني ان التثاقل يكافئ نظام الاسناد المتسارع ويسمى هذا المبدأ بمبدأ التكافؤ.

وبما ان خطوط الفضاء تنحني في مجال التسارع حسب المعادلة (2.2.3) فان هذا يعني ان الخطوط تكون منحنية في المجال التثاقلي وان.

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu}\, dX^{\mu} dX^{\nu} \qquad (2.3.1)$$

(4-2) حركة الجسم في المجال التثاقلي :

اذا كان الجسم يسير في الفراغ خالي من المجالات فان معادلة الفاصل تكون

$$d\tau^2 = \zeta_{\alpha\beta} d\xi^{\alpha} d\xi^{\beta} \qquad (2.4.1)$$

واذا كان الجسم يسير في مجال تثاقلي فان معادله الفاصله تكون :

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu}\, dX^{\mu} dX^{\nu} \qquad (2.4.2)$$

يمكن ايجاد علاقه بين(2.4.2) و(2.4.1) بإستخدام التفاضل حيث تكون :

$$\xi^{\alpha} = \xi^{\alpha}(x^{\mu}) \qquad (2.4.3)$$

و يكون التفاضل الكلي في الصورة :

$$d\xi^{\alpha} = \frac{\partial \xi^{\alpha}}{\partial \xi^{\mu}} dx^{\mu} \qquad (2.4.4)$$

وبما أن:

$$\xi^{\alpha} = \xi^{\alpha}(x^1, x^2, \dots, x^{\mu}, \dots)$$

إذن يكون التفاضل الكلي ل

$$d\xi^{\beta} = \frac{\partial \xi^{\beta}}{\partial x^{\mu}} dx^{\mu} \qquad (2.4.5)$$

بالتعويض في المعادلة (2.4.1) ينتج أن الفاصل يساوى

وبمقارنة

$$d\tau^2 = \zeta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}dx^\mu\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}dx^\nu \qquad (2.4.6)$$

وبالمقارنة المعادلة (2.4.4)و(2.4.6) يتضح ان

$$g_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu = \zeta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu}dx^\nu dx^\mu$$

وعليه تكون

$$g_{\mu\nu} = \zeta_{\alpha\beta}\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial\xi^\beta}{\partial x^\nu} \qquad (2.4.7)$$

ولايجاد حركة الجسم في مجال تثاقلي اعتبر ان الجسم يسقط لاسفل ويسقط معه مصعد به رجل في محور الاحداثيات$(\xi^\alpha, \xi^\beta, \xi^\gamma)$.

بالنسبه للرجل في المصعد الجسم يكون ساكن وتسارعه معدومه اي ان :

$$a = \frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = 0 \qquad (2.4.8)$$

بما ان الشخص الجالس على الارض يرى الجسم يسير بعجلة فإن معادلة الحركة لهذا الجسم تتطلب صياغة المعادلة (2.4.8) وان تتحول لإحداثيات x^M

$$a = \frac{d^2\xi^\alpha}{d\tau^2} = \frac{d}{d\tau}\left[\frac{d\xi^\alpha}{d\tau}\right] = 0 \qquad (2.4.9)$$

وباستخدام المعادلة (2.4.3) يصبح الناتج

$$\frac{d}{d\tau}\left[\frac{d\xi^\alpha}{dx^\mu}\frac{dx^\mu}{d\tau}\right] = 0$$

وبتفاضل المعادلة أعلاه يتضح ان

$$\frac{d}{d\tau}\left[\frac{d\xi^\alpha}{dx^\mu}\right]\frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{d\xi^\alpha}{dx^\mu}\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = 0 \qquad (2.4.10)$$

لتبسيط المعادلة (2.4.10) ضع f

$$f = \frac{d\xi^\alpha}{dx^\mu} \qquad (2.4.11)$$

وبما ان:

$$f = f(x^1, \dots, x^\mu, \dots)$$

إذن التفاضل الكلي ل f يساوى

$$df = \frac{\partial f}{\partial x^\nu} dx^\nu$$

$$\frac{df}{d\tau} = \frac{\partial f}{\partial x^\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau} \qquad (2.4.13)$$

$$\left[\frac{df}{d\tau}\right]\frac{dx^\mu}{d\tau} + f\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = 0 \qquad (2.4.14)$$

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x^\nu}\frac{dx^\nu}{d\tau}\right]\frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{d\xi^\alpha}{dx^\mu}\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = 0$$

$$\left[\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right]\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\tau} + \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = 0 \qquad (2.4.15)$$

لتبسيط المعادلة يمكن ضرب الطرفين في $(\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha})$ وأخذ أن

$$\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu} * \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha} = \delta^\lambda_\mu \quad \begin{matrix} = 1 & \lambda = \mu \\ = 0 & \lambda \neq \mu \end{matrix}$$

$$\frac{dx^\mu}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\tau}\left[\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}\,\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right] + \left[\frac{\partial\xi^\alpha}{\partial x^\mu}\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}\right]\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = 0 \qquad (2.4.16)$$

إذن

$$\frac{dx^\nu}{d\tau}\frac{dx^\mu}{d\tau}\left[\frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}\,\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu}\right] + \delta^\lambda_\mu\,\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = 0 \qquad (2.4.17)$$

وبما ان

$$\delta^\lambda_\mu\frac{d^2x^\mu}{d\tau^2} = \frac{d^2x^\lambda}{d\tau^2} \qquad (2.4.18)$$

بتعريف رمز كريستوفل في صورة$(\Gamma^\lambda_{\mu\lambda})$

$$\Gamma^\lambda_{\mu\nu} = \frac{\partial x^\lambda}{\partial \xi^\alpha}\,\frac{\partial^2\xi^\alpha}{\partial x^\mu \partial x^\nu} \qquad (2.4.19)$$

تصبح المعادلة (2.4.17) في الصيغة

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}+\frac{d^2x^{\lambda}}{d\tau^2}=0 \qquad (2.4.20)$$

وهي تمثل معادلة الجسم الساقط في مجال تثاقلي

(5-2) الصيغة النيوتينيه لمعادلة إنشتاين:-

يمكن إيجاد الصيغة النيوتينية لمعادلات أنشتاين لجسيم في مجال تثاقلي وبالأخذ في الإعتبار حقيقة أن معادلات نيوتن تعالج الحالات التي يكون فيها الجسيم متحرك في مجال تثاقلي . وهذا يمكن عمل بعض التقريبات مثل إهمال الحدود .

$$\frac{dx}{d\tau},\quad \frac{dy}{d\tau},\quad \frac{dz}{d\tau}$$

ولان:

$$X^0=ct \qquad X^1=x$$

$$X^2=y \qquad X^3=Z$$

إذن نجد الا ّ تي عندما

$$\mu=0,\nu=0,\ \mu=1,\nu=1,\ \mu=2,\nu=2,\mu=3,\nu=3$$

$$\Gamma^{\lambda}_{\mu\nu}\frac{dx^{\nu}}{d\tau}\frac{dx^{\mu}}{d\tau}=c^2[\Gamma^{\lambda}_{00}(\frac{dt}{d\tau})^2+\Gamma^{\lambda}_{11}(\frac{dx}{d\tau})^2+\Gamma^{\lambda}_{22}(\frac{dy}{d\tau})^2+\Gamma^{\lambda}_{33}(\frac{dz}{d\tau})^2] \quad (2.5.1)$$

ولان السرعات قليلة مقارنة مع سرعة الضوء إذن يمكن إهمال هذه الحدود . إى أن

$$\frac{v_X}{c}\approx 0 \qquad \frac{v_Y}{c}\approx 0 \qquad \frac{v_Z}{c}\approx 0$$

بتعويض المعادلات (2.5.1)و (2.5.2) في المعادلة (2.4.18) نجد ان

$$\frac{d^2x^{\lambda}}{d\tau^2}+c^2\Gamma^{\lambda}_{00}(\frac{dt}{d\tau})^2=0 \qquad (2.5.2)$$

فإذا كانت حركة الجسم في بعد واحد هو محور x تصبح $\lambda=1$ فنجد ان

$$\frac{d^2x^{\lambda}}{d\tau^2}=\frac{d^2x^1}{d\tau^2}=\frac{d^2x}{d\tau^2}=\frac{d}{dt}[\frac{dx}{d\tau}]\left(\frac{dt}{d\tau}\right)$$

$$\frac{d}{dt}\left[\frac{dx}{d\tau}\right]\left(\frac{dt}{d\tau}\right)=\frac{d}{dt}\left[\frac{dx}{dt}\frac{dt}{d\tau}\right]\left(\frac{dt}{d\tau}\right)$$

$$\frac{d^2x^\mu}{d\tau} = \frac{d^2x}{d\tau} = \frac{d^2x}{dt}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 \qquad (2.5.3)$$

بتعويض المعادلة (2.5.3) في المعادلة (2.5.2) نجد ان :

$$\frac{d^2x}{dt^2}\left(\frac{dt}{d\tau}\right)^2 + c^2\Gamma^1{}_{00}\left(\frac{\mathrm{dt}}{\mathrm{d\tau}}\right)^2 = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -c^2\Gamma^\lambda{}_{00} \qquad (2.5.4)$$

$$\Gamma^\lambda{}_{\alpha\beta} = -\frac{1}{2}\mathrm{g}^{\lambda\nu}\frac{\partial \mathrm{g}_{\alpha\beta}}{\partial \mathrm{x}^\nu}$$

عندما $\alpha = 0$ $\beta = 0$ نجد ان:

$$\Gamma^\lambda{}_{00} = -\frac{1}{2}\mathrm{g}^{\lambda\nu}\frac{\partial \mathrm{g}_{00}}{\partial \mathrm{x}^\nu} \qquad (2.5.5)$$

وعندما يكون المجال ضعيف يمكن كتابة المقياس $g_{\lambda\nu}$ في الصورة :

$$g_{\lambda\nu} = \zeta_{\lambda\nu} + \mathrm{h}_{\lambda\nu} \qquad (2.5.6)$$

حيث ان

ثابت $\zeta_{\lambda\nu} = \pm 1$

الحد $\mathrm{h}_{\mu\nu}$ يكون أقل من الواحد وصغير ولان الحركة في بعد واحد فقط:

$\mathrm{x}^1 = x \qquad \mu = 1 \qquad \nu = 1$

لذا يكون

$$\Gamma^\lambda{}_{00} = \Gamma^1{}_{00} = -\frac{1}{2}\mathrm{g}^{11}\frac{\partial \mathrm{g}_{00}}{\partial \mathrm{x}^1} = -\frac{1}{2}\mathrm{g}^{11}\frac{\partial \mathrm{g}_{00}}{\partial x} \qquad (2.5.7)$$

$$g_{00} = \zeta_{00} + \mathrm{h}_{00} \qquad (2.5.8)$$

وبما ان الحد ζ_{00} ثابت إذن

$$\Gamma^\lambda{}_{00} = \Gamma^1{}_{00} = -\frac{1}{2}\mathrm{g}^{11}\frac{\partial(\zeta_{00}+\mathrm{h}_{00})}{\partial x} = -\frac{1}{2}\mathrm{g}^{11}\frac{\partial \mathrm{h}_{00}}{\partial x} \qquad (2.5.9)$$

ولكن عندما

$$g^{\lambda\nu} = \zeta^{\lambda\nu} + \mathrm{h}^{\lambda\nu} \qquad (\divideontimes)$$

وعندما يكون $\nu=1$ $\lambda=1$ في (⁎) فإن

$$g^{11} = \zeta^{11} + h^{11} \qquad (⁎)(⁎)$$

$$g^{11} = \zeta^{11} \qquad (2.5.10)$$

حيث ان $h^{11} \ll 1$ لذا نهملها

وبتعويض المعادلة (2.5.10) في المعادلة (*2.5.9*) نجد أن

$$\Gamma^{1}{}_{00} = -\frac{1}{2}\zeta^{11}\frac{\partial h_{00}}{\partial x} \qquad (2.5.11)$$

صيغة المقياس ζ^{11} ويمثل الحد *xx* في الفراغ الإغليدي لذا يكون $\zeta^{11} = -1$

$$\Gamma^{1}{}_{00} = \frac{1}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x} \qquad (2.5.12)$$

إذن بتعويض المعادلة (*2.5.12*)في المعادلة (*2.5.4*) تصبح

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{c^2}{2}\frac{\partial h_{00}}{\partial x} \qquad (2.5.13)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{c^2}{2}\nabla h_{00} \qquad (2.5.14)$$

وحسب تعريف دالة الجهد لوحدة الكتله Ø تكون علاقة Ø بالتسارع (العجلة) حسب قانون نيوتن الثاني هو

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\nabla\emptyset \qquad (2.5.15)$$

لان

$$M\frac{d^2x}{dt^2} = F = -\nabla\nu = -\nabla\,(M\emptyset) \qquad (2.5.16)$$

بمقارنة المعادلة (2.5.14) في المعادلة (2.5.15) تصبح

$$h_{00} = \frac{2\emptyset}{c^2} \qquad (2.5.17)$$

ولان ζ_{00} تمثل المقياس الزمني *tt* في الفراغ الإقليد وبتعويض(2.5.17) و في المعادلة (2.5.8) تصبح

$$\zeta_{00} = 1 \qquad (2.5.18)$$

$$g_{00} = \zeta_{00} + h_{00} = \left(1 + \frac{2\emptyset}{c^2}\right) \qquad (2.5.19)$$

(6-2) معادلة إنشتاين للحقل التثاقلي :-

ويمكن إستنباط معادلة إنشتاين الحقليه من معادلة بواسون التي تعطينا علاقة بين طاقة الوضع لوحدة الكتله ϕ وكثافة الكتلة ρ في الصيغة :-

$$\nabla^2\emptyset = 4\pi G\rho \qquad (2.6.1)$$

وعند تعويض المعادلة (*2.5.19*) في المعادلة (*2.6.1*) ولأخذ في لاعتبار نجد ان

$$\nabla^2 g_{00} = -\frac{2}{c^2}\nabla^2\emptyset \qquad (2.6.2)$$

$$\nabla^2 g_{00} = \frac{-8\pi G\rho}{c^2} \qquad (2.6.3)$$

حيث ان :- $G \equiv$ ثابت الجاذبيه

تعني هذه المعادلة ان كثافة المادة ρ هي التي تولد المجال التثاقلي ذو جهد التثاقلي $\emptyset$ ولكن النسبية الخاصة أظهرت ان كثافة المادة ρ هي ممتد لطاقة في وحدة الحجم وتم دمجها فيما يسمى بممتد طاقة المادة اي ان كثافة الطاقة T_{00} لمادة ما تتساوى مع كثافة كتلتها اي ان

$$T_{00} = \rho c^2$$

إذن نكتب المعادلة (2.6.3) في صورة ممتد (*Tenser*)بالصيغة التالية

$$G_{00} = \frac{-8\pi G}{c^2}\, T_{00} \qquad (2.6.4)$$

حيث تعبرG_{00} عن الجهد التثاقلي وكثافة خطوط القوي التي تتناسب مع انحناء الزمكان وهى تعمم في الصورة التالية.

$$G_{\mu\nu} = \frac{-8\pi G}{c^2}\, T_{\mu\nu} \qquad (2.6.5)$$

وبما أن ممتد الطاقة والاندفاع يجب ان يستوفي شرط قانون بقاء الطاقة والإندفاع لذا يكون

$$G_{\mu\nu.\mu} = \frac{-8\pi G}{c^4}\, T_{\mu\nu.\mu} \qquad (2.6.6)$$

حيث يمثل طرف الايسر الممتد المعبر عن تحدب الفراغ ويكتب في صيغة

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R \qquad (2.6.7)$$

ليستوفي الشرط (*2.6.6*) بينما يمثل الطرف الايمن الممتد المعبر عن كثافة المادة التي تحدب الفراغ وتسمى R عدد التحدب فيما يسمي $R_{\mu\nu}$بممتد ريكى .وبالنظر الى المعادلتين (*2.6.5*) و(*2.6.7*) تصبح معادلة أنشتاين للمجال التثاقلي في الصيغة.

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R = \frac{-8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \qquad (2.6.8)$$

(7-2) النسبية الخاصة في وجود الجاذبية:-

في النسبية الخاصة يمكن الحصول علي صيغة الزمن والكتلة والطول من أي إطار متحرك بواسطة ضرب أو قسمة قيمها في إطار ساكن في المعامل: (γ)

$$\gamma = \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{C^2}} \qquad (2.7.1)$$

ويمكن إستنباط صيغة γ من صيغة الفاصلة الزمكاني والذي يمثل لغة مشتركة للنسبية الخاصة والعامة معا وهي تساوي

$$d\tau^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \qquad (2.7.2)$$

وعندما يكون الفراغ خاليا من مجال التثاقل تكون الصيغة في الصورة

$$c^2 d\tau^2 = c^2 dt^2 - dx^i dx^i \qquad (2.7.3)$$

وهذة هي صيغة المربع الفاصلة في النسبية الخاصة . والتي يمكن إعادة صياغتها في الصورة

$$\frac{d\tau}{dt} = \sqrt{1 - \frac{1}{C^2} \frac{dx^i dx^i}{dt\, dt}} = \sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{C^2}} = \gamma \qquad (2.7.4)$$

ويمكن بسهول تعميم (γ) لتضمن أثر الجاذبية وذلك بإستخدام المعادلة.(2.7.2) وباستخدام تقريب المجال الضعيف في المعادلة (2.5.19) لنحصل علي

$$g_{11} = g_{22} = g_{33} = -1 \;, \qquad g_{00} = 1 + \frac{2\phi}{C^2} \qquad (2.7.5)$$

وعندما يكون الجسم متحركا في الفضاء الحر تصبح g_{00} في المعادلة (2.7.5)في الصيغ

$$g_{00} = 1$$

فتصبح صيغة الزمن عندئذ هي

$$dt = \frac{dt_0}{\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{C^2}}} \quad (2.7.7)$$

وعندما يكون الجسم ساكن في مجال تثاقلي تصبح g_{00} في المعادلة (2.7.5) في صورة

$$dt = \frac{dt_0}{\sqrt{g_{00}}} \quad (2.7.8)$$

وتكون صيغة الزمن في المجال التثاقلي هي

$$dt = \frac{dt_0}{\sqrt{g_{00}}} = \frac{dt_0}{\sqrt{\frac{2\emptyset}{C^2}}} \quad (2.7.9)$$

وعندما يكون الجسممتحركاً في مجال تثاقلي تكون صيغة الزمن في الصورة

$$dt = \frac{dt_0}{\gamma} \quad (2.7.10)$$

ومن المعادلة السابق يمكن ان اتعرف علي تاثير الحركة والجاذبية علي الزمن لنحصل

$$dt = \frac{dt_0}{\sqrt{g_{00} - \frac{\upsilon^2}{C^2}}} \quad (2.7.10)$$

ونفس النتائج يمكن الحصول عليها عند أخذ تأثير الحركة والجاذبية بالترتيب علي الحجم في الفضاء الحر الذي يكون في الصيغة بالنسبة لجسم متحركة في إتجاه المحور (X) فقط

$$V = V_0\sqrt{1 - \frac{\upsilon^2}{C^2}} \quad (2.7.11)$$

وعندما يكون الجسم ساكن في مجال تثاقلي يكون الحجم في الصيغة

$$V = \sqrt{g}V_0 = \sqrt{g_{00}}V_0 \quad (2.7.12)$$

وعندما يتحرك الجسم في مجال تثاقلي يكون الحجم في الصيغة

$$V = \gamma V_0 = \sqrt{g_{00} - \frac{\upsilon^2}{C^2}}\, V_0 \qquad (2.7.13)$$

لكي إعمم مفهوم الكتلة لتضمن تأثير الجاذبية يمكن إستخدام معادلة هاميتونين لنعبر عن النسبية العامة

$$H = \rho c^2 = g_{00} T_{00} = g_{00} \rho_0 (\frac{dx^0}{d\tau})^2 = \frac{g_{00} \rho_0 c^2}{\gamma^2} = g_{00} \frac{M_0 c^2}{V_0 \gamma^2} \qquad (2.7.14)$$

نستخدم المعادلة (2.7.13.) و (2.7.14) لنجد ان

$$\rho c^2 = \frac{M c^2}{V} = \frac{g_{00}\, M_0 c^2}{V\gamma} \qquad (2.7.15)$$

$$M = \frac{g_{00} M_0}{\sqrt{g_{00} - \frac{\upsilon^2}{c^2}}} \qquad (2.7.16)$$

وهذه المعادلة تعبر عن الكتلة المتحركة في مجال الجاذبية ونستخدم المعادلة (2.7.15)و (2.7.16) عندما يكون المجال ضعيف والسرعة صغيرة .

وتكون الطاقة النسبية في الصيغة التالية

$$E = Mc^2 = M_0 g_{00} (g_{00} - \frac{\upsilon^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}}$$

والتي يمكن إيجاد علاقتها بالسرعة وطاقة الوضع من المعادلة (2.5.19) لنحصل علي

$$E = M_0 \left(1 + \frac{2\emptyset}{c^2}\right) (1 + \frac{2\emptyset}{c^2} - \frac{\upsilon^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}} c^2$$

ولان $\frac{\upsilon^2}{c^2} \ll 1$ و $\frac{\emptyset}{c^2} \ll 1$ إذن

$$\approx M_0 (1) (1 - \frac{\emptyset}{c^2} + \frac{1}{2} \frac{\upsilon^2}{c^2})^{-\frac{1}{2}} c^2$$

$$E = M_0 c^2 + \frac{1}{2} M_0 \upsilon^2 - M_0 \emptyset$$

$$E = M_0 c^2 + T + V \qquad (2.7.17)$$

وهي صيغة الطاقة التي تحوي طاقة الوضع والحركة بالاضافة للطاقة المتجمدة في الكتلة .وهذه الصيغة تشبه الصيغة النيوتينية فيما عدا حد طاقة الكتلة .

$$V = M_0 \emptyset \tag{2.7.18}$$

(8-2) معادلة النسبية العامة المعممة في الإحداثي الكروي لمجال سكوني :-

تكون معادلة المجال التثاقلي في النظرية النسبية العامة المعممة معادلة من الرتبة الرابعة وتأخذ الشكل التالي

$$\mathcal{L}'^{\backslash\backslash\backslash}\left(R_{;\mu}R_{;\nu} - g_{\mu\nu}g^{\rho\sigma}R_{;\rho}R_{;\sigma}\right) + \mathcal{L}'^{\backslash\backslash}\left(R_{;\mu;\nu} - g_{\mu\nu}[\,]^2R\right) + \mathcal{L}^{\backslash}R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}\mathcal{L} = 0 \tag{2.8.1}$$

ويمكن ان نلخص المعادلة كالاتي

$$[\,]^2\mathrm{R} = g^{\rho\sigma}R_{;\rho;\sigma} = \frac{\mathcal{L}^{\backslash}\mathrm{R} - 2\mathcal{L}}{3\mathcal{L}^{\backslash}} - \frac{\mathcal{L}^{\backslash\backslash\backslash}}{\mathcal{L}^{\backslash\backslash}}g^{\rho\sigma}R_{;\rho}R_{;\sigma} \tag{2.8.2}$$

نفترض ان مجال النجم ساكن والابعاد تعطي كالاتي

$$g_{rr} = A(r),\quad g_{\theta\theta} = r^2,\quad g_{\emptyset\emptyset} = r^2 sin^2\theta,\quad g_{tt} = -B(r) \tag{2.8.3}$$

حيث ان الفاصل الزمني يعطى بالاتي

$$\mathrm{d}\tau^2 = \mathrm{g}_{\mu\nu}\mathrm{d}x^{\mu}dx^{\nu} \tag{2.8.4}$$

وعندما يكون الفراغ شبة إقليد بحيث يكون المجال التثاقلي ضعيفجداً تصبح المعادلة (2.8.2) في الصيغة

$$\ddot{R} + \frac{2}{r}\dot{R} = \frac{\beta}{6\alpha} + \frac{\gamma}{3\alpha}$$

فيكون حلها في الصورة

$$R = \frac{c_1}{r}e^{c_2 r} + R_0 \tag{2.8.6}$$

بالتعويض المباشر في المعادلة (2.8.5) نجد ان

$$\frac{c_1 c_2}{r}e^{c_2 r} = R_0 + \frac{\beta}{6\alpha}\frac{c_1}{r}e^{c_2 r} + \frac{\gamma}{3\alpha} \tag{2.8.7}$$

$$c_2 = \mp\sqrt{\frac{\beta}{6\alpha}} \ , \quad R_0 = -\frac{\gamma}{3\alpha} \ , \quad R = \frac{c_1}{r} e^{\mp\sqrt{\frac{\beta}{6\alpha}}r} - \frac{\gamma}{3\alpha} \qquad (2.8.8)$$

وعندما يكون المجالضعيفاً يصبح المقياس في الصيغة

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu} \qquad (2.8.9)$$

وهذا يمكننا من تبسيط المقياس العددي للتحدب في الصورة

$$R = g^{\mu k} g^{\lambda\nu} R_{\lambda\mu\nu k} = g^{00} g^{ii} R_{;0;0} \qquad (2.810)$$

وعليه تصبح

$$R_{;0;0} = \frac{1}{2}\nabla^2 g_{00} = -4\pi G\rho$$

فتكون المعادلة (2.8.2) في الصيغة

$$R = 8\pi G\rho\emptyset + 4\pi G\rho \qquad (2.8.12)$$

بمقارنة المعادلة (2.8.12) و (2.8.7) ينتج

$$\frac{\gamma}{3\alpha} = -4\pi G\rho \ ; \qquad \emptyset = \frac{c_1}{8\pi G\rho r} e^{-\sqrt{\frac{\beta}{6\alpha}}r} \qquad (2.8.13)$$

وهذا يشير إلي وجود قوة ذات مدى قصير أو علاقة القوى النووية القوية قصيرة المدي مع قوى التثاقل

$$C_1 = 8\pi G\rho \qquad (2.8.14)$$

ومن هنا نجد ان الانزياح الاحمر في مجال القوى التثاقلية القوية ذات المدي القصيرة في الصيغة

$$Z = (B)^{-\frac{1}{2}} - 1 = (1 + \frac{2}{r} e^{-\sqrt{\frac{\beta}{6\alpha}}r})^{-\frac{1}{2}} - 1 \approx (\frac{r}{2})^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\beta}{6\alpha}}r} - 1 \qquad (2.8.15)$$

عندما يكون المجال خارج النجم نجد ان ($\rho = 0$)و احدى الطرق المحتملة لفعل ذلك هو جعل (r=32) فنجد ان الانزياح الاحمر يساوى.

$$Z \approx 3$$

(2-9) الثقب الاسود:

(2-9-1) تعريف الثقب الاسود واهميتية:

هو منطقه في الفضاء تحوي كتله كبيرة في حجم صغير يسمى بالحجم الحرج لهذه الكتلة والذي عند الوصول اليه تبدا الماده بالانضغاط تحت تاثير جاذبيتها الخاصة ويحدث فيها انهيار من نوع خاص بفعل الجاذبيه ينتج عن القوه العكسية الانفجار حيث هذه القوه تضغط النجم وتجعلة صغيرا جدا وذا جاذبيه قويه خارقة, وتذاد كثافة الجسم (نتيجه تداخل جسيمات ذراته وانعدام الفراغ بين الجذيئات)، تصبح قوه الجاذبيه قويه الي درجه تجذب اي جسم قريب منه مهما بلغة سرعته. ان تاريخ نشوء الاثقب الاسود من نجم منهار وذو كتله عظيمه يطلق عيها الكتله الحرجه التي هي كبيره لدرجه كافيه لتكون سببا في تكون الثقب الاسود وانواعها هي.

أ - الثقوب السودا الدقيقة:

وتسمي ايضا الثقوب السوداء الكموميه وهو ثقب اسوده صغير جدا , تلعب تاثيرات ميكانيكا الكم دور مهم جدا في تفسيره.

ب - الثقب الاسود النجمي:

هو ثقب ينشأ من تقلص نجم عملاق عظيم (تكون كتلته نحو 15 كتله الشمس او اكثر) عند نهاية عمر النجم .

ج - ثقب الأسود متوسط الكتلة:

هي ثقوب ذات كتلة اكبر من الثقوب النجمية (عشرات من كتلة الشمس)،أ ّقل بكثير من الثقوب السوداء العملاقة بضعة ملايين من كتلة الشمس وأدله علي وجود هذا النوع قليل مقارنه مع النوعين الاخرين العملاقة والنجومية.

د - الثقب الاسود فائقة الضخامه :

وهو اكبر نوع من الثقوب السوداء يوجد في المجرة, تتراوح كتلتة ما بين مئات الاف وبلايين الكتلة الشمسية معظم المجرات ان لم تكن كلها بما في ذلك مجرتنا درب التبانة ويعتقد انها تحتوي ثقبا أسود عظيمه في حوصلتها.

(2-9-2) أجزاء الثقب الاسود:

أفق الحدث :

يمثل حدود الثقب الاسود لا يمكن رؤيه اي شيء يحدث هناك حيث لاتصدر من هذه المنطقه اي فوتونات للضوء ,وكلما اقتربنا من افق الحدث يبطء الزمن حتي يتجطد بداخله وهكذا يمثل أفق حدث الثقب الاسود احد غاز الكون الغامق ولا يمكن لا شيء يخرج من هذا الحد حتي ولو ضوء.

مركز الثقب الاسود:

ففي هذا المركز تتراكم كل ماده ثقب اسود حيث ينعدم الحجم ويصبحه مساويا للصفر وتكون كثافة غير محدوده وتيارات المدد الجزر لا نهائية وأفق الحدث ليس له اي تاثير علي الفضاء الخارجي طالما ان اي شئ يدخل لن يخرج منه مطلقا وهذا ينطبق ايضا علي عمق الثقب الاسود فهو معزول عن الكون بواسطه أفق الحدث ,وكل ما يسقط في الثقب الاسود هويته أيا كان نوع الماده المسحوقه في ذلك المكان الغريب من الكون حيث لا تسود اية قوانيين فيزيائيه معروفه في داخل تلك القبور تختفي كل صفات الماده .

(3-9-2) فكره الزمن والمكان:

لقد استعان اينشتين في نظريه النسبية العامة , بفكرة الزمن والمكان والتي تتعلق بارتباط الابعاد الأربعة (الطول والعرض والارتفاع والزمن)، اي ثلاثة احداثيات زمني لتحديد الحدث . وهذا الارتباط بين الزمن والمكان ضروري لفهم طبيعة الكون . فالزمن يمكن اعتباره كبعد رابع , ولكي يتم ذللك لابد أن يكون الزمن عموديا علي كل الابعاد الاثلاثه الباقيه (الطول والعرض و الارتفاع.) وتحدثنا ايضا النظريه النسبيه العامه عن تحدب الزمن والكان واحدي نتائج تحدب الزمن والمكان ,هي انحراف ضوء النجم المار علي حافه الشمس والذي يمكن قياسه اثناء حدوث الكسوف الكلي للشمس. ويعتبر تحدب الزمن والمكان في نصف القطر التجاذبين (حد شفيلرزشايلد) للثقب الاسود محدودا ولكن هذا التحدب يزداد بالطرد ,كلما اقتربنا من مركز الثقب الاسود , وهذا يعني ان الماده التي انهارت تنضغط وتكبس حتي تصبح كثافتها ما لانهايه في المركز .وتصف النظرية النسبية العامة مركز الثقب الاسود بانه منطقه يخطلت فيها الزمن والمكان , وتخرق فيها كل النظريات الفيزيائية, حيث توجد قوه لا نهاية لها من الجاذبية علي شكل مد وجزر بالاضافه الي الماده المنهارة . .