مقدمة:

لرياضيات المصفوفات دوراً كبيراً في الحياة إذ أنها تستخدم في كثير من المجالات التطبيقية وذلك بغرض تسهيل العملية الحسابية وتجنب الأخطاء والنواتج غير الدقيقة.

فهي كثيراً ما تستخدم في الجوانب الاقتصادية وذلك لمعرفة حساب المتغيرات التي تطرأ على العملية الاقتصادية مثل حساب المنصرفات والتكاليف الشهرية أو السنوية وكذلك لمعرفة مدى الخسارة أو النجاح للعملية وبعض المتغيرات الأخرى.

لذا فإن الكثير من مصانع وشركات الإنتاج تفضل نظام المصفوفات لرصد وحساب سلعها الإنتاجية خاصة تلك المصانع التي تتألف من مجموعات ووحدات لإنتاج سلع مختلفة في آن واحد، ولأن المصفوفة تتكون من صفوف وأعمدة لذا فهي الطريقة المثلى لتمثيل الوحدات أو المجموعات الإنتاجية وسلعها.

وكذلك نجد دور المصفوفات في الجوانب والتطبيقات الفيزيائية مثل تمثيل الدارات الكهربائية لمعرفة وحساب التيار الساري أو معرفة الفولتية أو أي متغير فيزيائي آخر من الدائرة وكذلك تستخدم في التطبيقات الميكانيكية لحساب القوى، كما أن المصفوفات تدخل في عمليات التشفير وإرسال الرسائل المشفرة لحفظ البيانات، وفي كثير من المجالات التطبيقية الأخرى.

أهمية البحث:

تكمن أهمية البحث في معرفة مدى إستخدام علم المصفوفات في العلوم التطبيقية كوسيلة فعالة وذلك بغرض تسهيل العمليات الرياضية المعقدة والمطولة، بالإضافة لإختصار الوقت وإعطاء النتائج بصورة أكثر وضوحاً ودقةً .

مشكلة البحث:

يجهل الكثير من الدارسين دور وأهمية المصفوفوات في الحياة إذ أنهم يرونها لا تتعدى فقط العمليات الجبرية المعروفة لذلك كانت مشكلة البحث تتمثل في معرفة دور المصفوفات وإستخدامها في كثير من الجوانب الحياتية التطبيقية العملية المختلفة.

أهداف البحث:

وكانت من الأهداف:

1- معرفة دور المصفوفات وكيفية إستخدامها في المجالات المختلفة ورصد البيانات عليها.
2- إستخدام المصفوفة كأداة للتوقع والتنبؤ لمتغيرات ما تطرأ على ظاهرة معينة أو مجموعة ظواهر.
3- إستخدام المصفوفات كأداة قياس وحساب المتغيرات.

الفصل الأول

المصفوفات Matrices

1-1 تعريف المصفوفة:

تعرف المصفوفة بأنها تنظيم مستطيلي، أو تركيبة رياضية مكونة من عناصر على هيئة صفوف وأعمدة ويأخذ شكلها العام الصورة:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \ldots\ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \ldots\ldots & a_{2n} \\ \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m1} & a_{mn} \end{bmatrix}$$

وتعرف المصفوفة أعلاه بأنها تتكون من عدد m من الصفوف (rows) وعدد n من الأعمدة (columns) وتكتب هكذا

$(a_{ij})_{m,n}$

ويمثل a_{ij} العنصر الذي يقع في الصف i وفي العمود j

2-1 بعض أنواع المصفوفات:

1-2-1 المصفوفة الصفرية Null matrix or Zero matrix

يطلق على المصفوفة (1.1)مصفوفة صفرية إذا كان كل عنصر من عناصرها يساوي صفراً مثل

صفر = $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$

2-2-1 المصفوفة المربعة:

إذا كانت m=n فإن (1.1) يكون مربعاً ويمكن عندئذٍ تسميتها مصفوفة مربعة من درجة n أو مصفوفة مربعة n مثل:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$$

3-2-1 **المصفوفة القطرية Diagonal matrix**

تعرف المصفوفة المربعة بأنها مصفوفة قطرية إذا كانت كل عنصر فيها لا يقع على القطر الرئيسي يساوي صفراً . حيث تسمى العناصر $a_{11},a_{22}\ldots..a_{nn}$ عناصر القطر الرئيسي مثلاً

$$B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

4-2-1 **مصفوفة الوحدة Unit matrix**

تعرف المصفوفة القطرية من درجة n الت يكون كل عنصر في قطرها الرئيسي مساوياً واحد صحيح بمصفوفة الوحدة من درجة n ويرمز لها بالرمز I_n وعليه فإن العناصر $a_{11},a_{22}\ldots..a_{nn}=I$

مثلاً

$$C=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

3-1 **العمليات الجبرية على المصفوفات matrix Depurations**

1-3-1 **تساوي المصفوفات Matrix equality**

نقول أن المصفوفتين $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ متساويان فيما إذا كانت (وإذا كانت وفقط) هاتان المصفوفتان من درجة واحدة وكل عنصر من إحداهما مساوياً للعنصر المقابل له من الثانية أي إذا كان وإذا كان وفقط.

$aij = bij \ (i=1,2,\ldots n)$

أي تكون مصفوفتين متساويتين فيما إذا كنات وإذا كانت فقط إحدهما من الثانية.

2-3-1 الجمع والطرح للمصفوفات:

إذا كانت $A = aij$ و $B = bij$ مصفوفتين من الدرجة mxn فإن مجموعهما (حاصل طرحها $A \pm B$ يعرف بها المصفوفة $C = cij$ ذات الدرجة mxn حيث كل عنصر من C هو مجموع (حاصل طرح) العنصرين المقابلين من المصفوفتين A و B وبذا يكون:

$A \pm B = aij \pm bij$

3-3-1 ضرب المصفوفات matrix multiplication

لتوضيح عملية الضرب سنبدأ بتوضيح عملية ضرب المصفوفة ف ثابت وهو ما يعرف بالضرب القياسي.

1-3-3-1 الضرب القياسي Scalar multiplication

لحاصل ضرب أي عدد قياسي h مثلاً في مصفوفة A يكتب hA أو Ah حيث hA تمثل المصفوفة التي نحصل عليها بعد ضرب كل عنصر من عناصر A في العدد h

أي أن

$$h\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m1} & & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Ha_{11} & h\,a_{12} & \ldots & ha_{1n} \\ Ha_{11} & ha_{12} & \ldots & ha_{2n} \\ \vdots & & & \\ Ha_{m1} & h\,a_{m2} & \ldots & ha_{mn} \end{bmatrix}$$

2-3-3-1 ضرب مصفوفتين **Multiplication of two matrices**

إذا افترضنا أن هناك مصفوفتين A_{mn} و B_{pq} فإننا نستطيع إيجاد:

(i) حاصل ضرب A مسبقاً في B إذا كانت n=p

(ii) وحاصل ضرب B مسبقاً في A إذا كانت q=m

فإذا كانت لدينا مصوفتان A و B وكان عدد أعمدة A يساوي عدد صفوف B فإن حاصل ضربهما A مسبقاً في B يكتب AB ، ويساوي مصفوفة عدد صفوفها يساوي عدد صفوف A وعدد أعمدتها يساوي عدد أعمدة B ونحصل على عنصر المصفوفة AB في الصف i والعمود j بضرب العناصر المقابلة في الصف i من المصفوفة A في عناصر العمود j والمصفوفة B وبالجمع أي أنه إذا كانت A=(aij) عبارة عن مصفوفة من الدرجة mxp وكانت $B= b_{ij}$ من الدرجة pxn فإن

$AB= C_{ij}$ تكون مصفوفة من درجة mxn حيث

$$C_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \cdots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

أمثلة على العمليات الحسابية للمصفوفات

مثال: لتكن

$$A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ J & e & f \\ g & h & y \end{bmatrix}, \quad B=\begin{bmatrix} x & r & z \\ r & q & w \\ s & n & i \end{bmatrix}$$

فجد A-B /1 A+B /2

الحل

$$A+B=\begin{bmatrix} a & b & c \\ J & e & f \\ g & h & y \end{bmatrix}, + \begin{bmatrix} x & r & z \\ r & q & w \\ s & n & I \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+x & b+r & c+z \\ j+r & e+q & f+w \\ g+s & h+n & y+i \end{bmatrix}$$

$$A-B= J \quad e \begin{bmatrix} a & b & c \\ f & - & r \\ g & h & y \end{bmatrix}, \quad q \begin{bmatrix} x & r & z \\ w & = & j-r \\ s & n & I \end{bmatrix} e-q \begin{bmatrix} a-x & b-r & c-z \\ f-w & & \\ g-s & h-n & y-i \end{bmatrix}$$

مثال: لتكن

$$A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & r \\ e & f \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} g & h & i \\ j & k & q \end{bmatrix}$$

فجد A.B

$$A.B=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g & h & i \\ j & k & q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a.g+b & ah+bk & ai+bg \\ c.g+if & ch+jk & ci+jg \\ eg+fg & eh+fk & ei+fq \end{bmatrix}$$

$$B.A=\begin{bmatrix} g & h & i \\ j & k & q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g.a+h.c+i.e & g.b+h.d & i.f \\ j.a+k.c+q.e & j.b+k.d & q.f \end{bmatrix}$$

مثال: إذا كان

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \quad , \quad B=\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$$

أو A.B و B.A

$$B.A =\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}= \begin{bmatrix} (1)(2)+(-1)(1) & (1)(3)+(-2)(2) \\ (3)(2)+(0)(1) & (3)(3)+(0)(2) \end{bmatrix}$$

$$B.A= \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 6 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A.B =\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2(1)+3(3) & 2(-2)+3(0) \\ 1(1)+2(3) & 1(-2)+2(0) \end{bmatrix}$$

$$A.B= \begin{bmatrix} 11 & -4 \\ 7 & -2 \end{bmatrix}$$

ملاحظة: $B.A \neq A.B$ وهذا يعني أن الضرب ليس عملية إبدالية.

4-1 معكوس المصفوفة:

يعتبر معكوس المصفوفة من الأدوات المهمة المستخدمة في حل المعادلات الخطية.

ويمكن تعريف معكوس المصفوفة:

تعريف:

معكوس المصفوفة هو مصفوفة إذا تم ضربها في المصفوفة الأصل نتج عن ذلك مصفوفة الوحدة.

ويمكن إيجاد معكوس المصفوفة بهذه الطريقة نتبع الخطوات:

لتكن A مصفوفة 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

أولاً : نستبدل عناصر الأقطار الرئيسية لتصبح

$$A = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

ثانياً: نستبدل إشارة العناصر الأخرى لتصبح المصفوفة:

$$A = \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

ثالثاً : نوجد المحدد

$$Jet\,(A) = (a_{22} - a_{21}\, a_{12})$$

عليه يكون معكوس المصفوفة A هو

$$A^{-1} = \frac{adj(A)}{Jet} = \frac{1}{a_{22} - a_{21}a_{12}} \begin{bmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{bmatrix}$$

مثال: جد معكوس المصفوفة

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 10 & 8 \end{bmatrix}$$

الحل: أولاً إستبدال الأقطار الرئيسية

$$= \begin{bmatrix} 8 & 3 \\ -10 & 4 \end{bmatrix}$$

ثانياً: غير غير إشارات العناصر الأخرى

$$\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -10 & 4 \end{bmatrix}$$

جد المحدد $(32-30) = (8.4)-(-10.-3) = 2$

عليه يكون معكوس المصفوفة A هو

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 8 & -3 \\ -10 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3/2 \\ -5 & 2 \end{bmatrix}$$

1-4-1 **الطريقة المطولة لإيجاد معكوس المصفوفة:**

لتكن A مصفوفة ولإيجاد المعكوس لـA نتبع الخطوات التالية:

$$A=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$A_{11}= (-1)^{1+1} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = + a_{22} \quad , \quad A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} a_{12} = -a_{21}$$

$$A_{21} = (-1)^{1+2} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = +a_{2} \quad , \quad A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = -a_{11}$$

$$aij(A) = \begin{bmatrix} +a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & +a_{11} \end{bmatrix}$$

$$\text{Det}(A) = (a_{11}\, a_{22} - a_{21}\, a_{12})$$

عليه يكون المعكوس

$$A^{-1} = \frac{1}{a_{11}\, a_{22} - a_{21}a_{12}} \begin{bmatrix} +a_{22} & -a_{21} \\ -a_{12} & +a_{11} \end{bmatrix}$$

مثال: جد معكوس D إذا كان

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ & & \end{bmatrix}$$

$$D = \begin{matrix} 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{matrix}$$

الحل

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$Adt\ (A) = 2(3.4)-3\ (4.4 - 1.1) + 4\ (4.2 - 1.3) = 20 - 45+20 = -5$$

$$D_{11} = (-1)^{1+1} \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = (-1)^2 .\ (3.4 - 2.1) = (12-2) = 10$$

$$D_{12} = (-1)^{1+2} \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = (-1)^3\ (4.4 - 1.1) = (-1)^3.(16-1) = -15$$

$$D_{13} = (-1)^3 \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} = -5\ ,\quad D_{21}(-1)^3 \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} = -4$$

$$D_{22}\ (-1)^4 \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} = 4\ ,\quad D_{23} = (-1)^5 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ & 1 \end{bmatrix} = -1 \quad 2$$

$$D_{31} = (-1)^4 \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} = -9\ ,\quad D_{32}\ (-1)^5 \begin{bmatrix} 24 & = & 14 \\ 4 & & 1 \end{bmatrix}$$

$$D_{33} = (-1)^6 \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} = -(-6) = 6$$

$$ndjD \begin{bmatrix} 10 & -15 & -5 \\ -4 & 4 & -1 \\ -9 & 14 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 & -4 & -9 \\ -15 & 4 & 14 \\ -5 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{bmatrix} 12 & -4 & -9 \\ -15 & 4 & 14 \\ -5 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

الفصل الثاني

حل أنظمة المعادلات الخطية

تمهيد:

لنظم المعادلات الخطية إستخدامات في مجالات متعددة وحل هذه المعادلات يعتبر من الأمور المهمة لإيجاد المتغيرات إذ هي تستخدم كنموذج رياضي لتمثيل كثير من التطبيقات المختلفة مثل تطبيقات الدوائر الكهربائية والالكترونية وتطبيقات النمذجة والمحاكاة وغيرها من التطبيقات.

2-1 الصورة العامة للمعادلة الخطية:

$$\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_a \\ \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{array}$$

وبإستخدام المصفوفات يتم وصف نظام المعادلات الخطية كما يلي:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix} \quad \text{That is: } Ax= b$$

ومن أهم الطرق الطرق المستخدمة لحل المعادلات الخطية:

1/ طريقة كريمز Cramer’s Rule:

تعتمد طريقة كرامز على عملية إستخدام المحددات والمحدد ما هو الا مصفوفة فمثلاً محدد نظام المعادلات الخطية المبينة أعلاه يمكن كتابته كما يلي:

$$
\begin{array}{cccc|c}
a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\
a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2a} & b_2 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m
\end{array}
$$

وعادة يمثل المحدد بمصفوفة عدد أسطرها يساوي عدد أعمدتها وتحتوي المصفوفة على مجموعة من القيم يمثل كل منها مجموع ضرب المحدد.

إن ناتج معالجة المحدد هي الحصول على قيمة واحدة وذلك بتنفيذ مجموعة من عمليات الضرب والجمع على القيم في المحدد.

1-1-2 حساب قيمة المحدد الثنائي:

تتم عملية إيجاد قيمة المحدد الثنائي كما يلي:

$$
\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - cb
$$

أي ضرب القطر الأيسر وطرح حاص ضرب القطر الأيمن منه.

حساب المحدد الثلاثي:

$$
\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}
$$

لإيجاد قيمة المحدد نستخدم محدد ثنائي كعامل مساعد لكل عنصر في العمود الأول كما يلي:

العامل المساعد a

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

بهذا فإن العامل المساعد هو

$$\begin{vmatrix} b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

مثال: أوجد قيمة المحدد

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 4 & -8 & 2 \end{vmatrix}$$

الحل:

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 & -1 \\ 5 & -1 & 4 \\ 4 & -8 & 2 \end{vmatrix} = -2 \begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -8 & 2 \end{vmatrix} -5 \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -8 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 4 \end{vmatrix}$$

$$-2\,[-1(2) - (-8)(4)] \; -5\,[3(2) - (-8)(-1)] + 4\,[3(4) - (-1)(-1)]$$

$$-2\,[-2 + 32] \; -5\,[6 - 8] + 4\,[12 - 1]$$

$$-2\,(30) -5\,(-2) + 4\,(11)$$

$$-60 + 10 + 44 = -6$$

2-2 حل المعادلات الخطية لمتغيرين:

لإيجاد قيم المتغيرات في نظام المعادلات لمتغيرين ننفذ الخطوات التالية:

- نجد المحدد

- نجد محدد المتغير الأول
- نجد محدد المتغير الثاني
- نستخرج قيمة المتغير الثاني بقسمة محدده على المحدد

وفيما يلي المعادلات التي تبين آلية حساب قيم المتغيرات:

لحل المعادلات التالية:

$$\boxed{\begin{aligned} a_1x + b_1y &= c_1 \\ a_2x + b_2y &= c_2 \end{aligned}}$$

نستخدم المعادلات التالية:

$$x = \frac{\begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}}$$

مثال: أوجد حل المعادلات التالية:

$$X - 3y = 6$$

$$2x + 3y = 3$$

الحل:

نحدد أولاً المعادلات ثم نستخرج المحددات وبعدها نجد قيم المتغيرات:

$a_1 = 1 \qquad b_1 = -3 \qquad c_1 = 6$

$a_2 = 2 \qquad b_2 = 3 \qquad c_2 = 3$

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{18+9}{3+6} = 3$$

$$Y = \frac{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}} = 3-12 = -1$$

3-2 حل نظام المعادلات الخطية بثلاثة متغيرات:

وفيما يلي آلية إيجاد قيم المتغيرات لنظام المعادلات التالي:

$$a_1x_3 + b_1y + c_1z = d_1$$
$$a_2x + b_2y + c_2z = d_3$$
$$a_3x + b_2y + c_3z = d_3$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\Delta} \qquad \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\Delta} \qquad \frac{\begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix}}{\Delta}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ A_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

مثال: أوجد حل نظام المعادلات التالي ثم تأكد من الحل:

$$2x + 3y + z = 2$$

$$-x + 2y + 3z = -1$$

$$-3x - 3y + z = 0$$

الحل:

$$X = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} \qquad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{vmatrix}}{\Delta} \qquad z = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \\ 2 & 3 & 3 \end{vmatrix}$$

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \\ -3 & -3 & 1 \end{vmatrix} = 2(11) + 1(6) - 3(7) = 7$$

$$x = \frac{2(11) + 1(6)}{7} = \frac{28}{7} = 4$$

$$y = \frac{2(-1) + 1(2) - 3(7)}{7} = \frac{-21}{7} = -3$$

$$z = \frac{2(-3) + 1(6) -3(-7)}{7} = \frac{21}{7} = 3$$

فتأكد من الحل كما يلي:

(1) $2(4) + 3(-3) + 3 = 2$ ok

(2) $-(4) + 2(-3) + 3(3) = -1$ ok

(3) $-3(4) -3(-3) + 3 = 0$ ok

4-2 **طريقة جاوس بالحذف Gawss Elimination method :**

تستخدم هذه الطريقة لحل نظام المعادلات الخطية على مرحلتين:

1-4-2 **المرحلة الأولى:**

وتسمى المرحلة الأساسية والهدف منها تحويل المصفوفة الى مصفوفة سطرية مستوية وفيما يلي بعض الأمثلة على هذا النوع من المصفوفات:

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & -3 & 7 \\ 0 & 1 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} , \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

لاحظ أن السطر الأخير يحتوي على معامل واحد للمتغير الأخير والسطر الذي قبله يحتوي على معاملين وهكذا.

2-4-2 المرحلة الثانية:

وتسمى المرحلة الخطية وذلك لإستخراج قيم المتغيرات من المصفوفة المستوية الأسطر بشكل عكسي بدءاً من المتغير الأخير والذي يستخرج مباشرة من السطر الأخير في المصفوفة وانتقالاً الى الأسطر العليا لتحديد قيم المتغيرات الأخرى بتعويض قيم المتغيرات هذه المراحل:

$$\begin{bmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & a_{03} \\ a_{10} & a_{11} & a_{02} & a_{13} \\ a_{20} & a_{21} & a_{02} & a_{23} \\ a_{30} & a_{31} & a_{02} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_0 \\ b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \grave{a}_{00} & \grave{a}_{01} & \grave{a}_{02} & \grave{a}_{03} \\ 0 & \grave{a}_{11} & \grave{a}_{02} & \grave{a}_{13} \\ 0 & 0 & \grave{a}_{02} & \grave{a}_{23} \\ 0 & 0 & 0 & \grave{a}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \grave{b}_0 \\ \grave{b}_1 \\ \grave{b}_2 \\ \grave{b}_3 \end{bmatrix}$$

$$x_3 = \grave{b}_3 / \grave{a}_{33}$$

$$x_2 = (\grave{b}_2 - x_3\grave{a}_{23})/\grave{a}_{22}$$

$$x_1 = (-\sum_{j=i+1}^{N-1} z_j\, a_{ij})/a_{ii}$$

3-4-2 **ننفذ طريقة جاوس بالحذف حسب الخطوات التالية:**

1- إذا كانت المصفوفة مستوية سطرياً توقف.

2- وألا يوجد أول عمود من اليسار قيمته غير صفرية وأنق السطر الذي تقع فيه القيمة الى السطر الأول للمرحلة التي تعمل عليها.

3- أقسم أسطر على معامل المتغير الأول لتوليد قيمة مساوية للواحد.

4- نفذ عمليات الطرح والضرب لجعل القيمة الواقعة تحت الواحد الناتج في السطر التالي مساوية للصفر.

5- كرر الخطوات من 1-5 (حتى تحصل على مصفوفة مستوية الأسطر).

مثال: أوجد حل المعادلات التالية:

$x + y + 2z = 9$

$2x + 4y -37 = 1$

$3x +6y -57 = 0$

مثل المعادلات بالمصفوفة:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{bmatrix}$$

المصفوفة غير مستوية الأسطر إذاً نفذ المرحلة الأولى:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -7/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

بعد تسوية المصفوفة يمكن تنفيذ المرحلة الخلفية لإيجاد قيم المتغيرات:

$x + y + 2z = 9 \quad , \quad y - 7/2z = - 17/2 \quad ,z =3$

$x = 3 - y$

$y = 2$

$z = 3$

$x = 1 , y = 2 , z = 3$

تسمى مجموعة الأعداد المرتبة على شكل مستطيل والموضوعة داخل أقواس.

2-5 إستخدام المصفوفة المعكوسة:

يمثل نموذج 8 المعادلات الخطية كما يلي:

$AX = C$

ولو ضربنا طرفي المعادلة في معكوس المصفوفة A فإننا سنحصل على:

$A^{-1}AX = A^{-1}C$

ولما كان حاصل ضرب المصفوفة المعكوسة لحل نموذج المعادلات الخطية:

مثال:

أوجد حل نموذج المعادلات التالية:

$-x + 5y = 4$

$2x + 5y = -2$

الحل:

أوجد المصفوفة المطلوبة:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 5 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} , \quad x = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad \text{and } c = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

أوجد معكوس A

بدل الأقطار

غير إشارات العنصرين الآخرين كما يلي:

$$\begin{bmatrix} & 5 \\ & 2 \end{bmatrix} \begin{matrix} 5 \\ -1 \end{matrix}$$

أحسب محدد المصفوفة الناتجة

$$A \; - 5 - 10 = -15$$

والآن جد عكس المصفوفة كما يلي:

$$A^{-1} = -1/15 \begin{bmatrix} 5 & -5 \\ -2 & -1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 2/15 & 1/15 \end{bmatrix}$$

إستخدام الناتج لايجاد قيم المتغيرات:

$$X = A^{-1}C$$

$$\begin{bmatrix} -1/3 & 1/3 \\ 2/15 & 1/15 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \end{bmatrix}$$

وبهذا يكون الحل كما يلي:

$X = -2$ and $y = 2/5$

مثال: جد حل النموذج التالي:

$$X + 2Y - Z = 6$$

$$3X + 5Y = 2$$

$$-2X - Y - 2Z = 4$$

الحل

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & -1 \\ -2 & -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 5.5 & -2.5 & -1.5 \\ -4 & 2 & 1 \\ -35 & 1.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$X = A^{-1}C$$

$$\begin{bmatrix} 5.5 & -2.5 & -1.5 \\ -4 & 2 & 1 \\ -35 & 1.5 & 0.5 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 22 \\ -16 \\ -16 \end{bmatrix}$$

الفصل الثالث

تطبيقات المصفوفات

Matrices and Application

1-3 تمهيد:

كما أشرنا سابقاً الى أن للمصفوفات دور كبير في المجالات المختلفة لذا فإننا في هذا الفصل سوف نتطرق إن شاء الله لمعرفة بعض المجالات التطبيقية التي تستخدم فيها المصفوفات وهي تتمثل في الآتي:

المبحث الأول: تطبيقات فيزيائية وتشمل:

أ. تطبيقات في الدارات الكهربية
ب.تطبيقات في الميكانيكا

المبحث الثاني: تطبيقات في عمليات التشفير

المبحث الثالث: تطبيقات اقتصادية

1-1-3 تطبيقات المصفوفات:

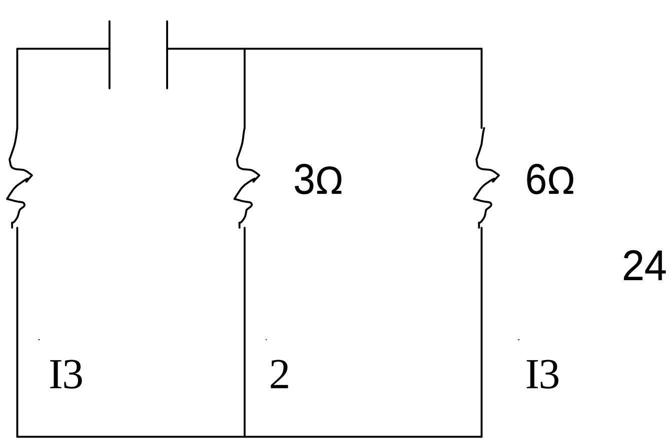
1-1-1-3 تمثيل الدارات الكهربائية والالكترونية:

تستخدم المصفوفات في تمثيل الدارات الكهربائية لحلها وإيجاد قيم التيار أو الفولتية وغيرها من الداره الكهربائية المحددة.

مثال:

الشكل التالي يوضح داره كهربائية

المطلوب:



إيجاد التيارات المبينة في الداره

تمثيل التيارات بإستخدام المصفوفات

الحل:

$$\begin{bmatrix} I_1 & + & I_2 & + & I_3 \\ -2I_1 & + & 3I_2 & & \\ & & -3I & + & 6I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 24 \\ 0 \end{bmatrix}$$

والآن نحل هذه المصفوفات عن طريق المفاهيم

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & I_1 \\ -2 & 3 & 0 & I_2 \\ 0 & -3 & 6 & I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 24 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ومن هنا نحصل على

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & 3 & 0 \\ 0 & -3 & 6 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 0 \\ 24 \\ 0 \end{bmatrix}$$

ويكون الحل كما يلي:

$I_1 = -6A$

$I_2 = 4A$

$I_3 = 2A$

مثال:

أوجد قيم التيارات الممثلة بالمعادلات التالية:

$I_A + I_B + I_C = 0$

$2\ I_A - I_B \quad = 6$

$5\ I_B - I_C = -3$

الحل:

بناء المصفوفة يكون

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -5 & 0 \\ 0 & 5 & -1 \end{bmatrix} \quad X=\begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ 3 \end{bmatrix}$$

2-3 إيجاد المصفوفة المعكوسة:

$$A^{-1}= \begin{bmatrix} 0.294 & 0.353 & 0.294 \\ 0.118 & 0.059 & 0.0.118 \\ 0.588 & -0.294 & -0.412 \end{bmatrix}$$

إستخراج قيم التيارات

$$\begin{bmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{bmatrix} = A^{-1}C$$

$$\begin{bmatrix} 0.294 & 0.353 & 0.294 \\ 0.118 & 0.059 & 0.0.118 \\ 0.588 & -0.294 & -0.412 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1.236 \\ -0.708 \\ -0.528 \end{bmatrix}$$

3-3 إستخدام المصفوفات في عملية التشفير:

إن عملية التشفير عملية مهمة في معالجة البيانات وذلك لحماية البيانات من المتطفلين وتتلخص عملية التشفير في تحويل البيانات الى شئ غير مفهوم وإعادته الى الأصل

عند الحاجة وتستخدمة المصفوفات كطريقة عملية لتنفيذ عملية التشفير وفك التشفير.

مثال:

لنفرض أنك تعرف أن الأحرف تمثل كل منها بخانتين إعتماداً على موقعهما:

A= 01 , B = 02 , …E= 5i … w = 32

وكانت الرسالة محولة بالمصفوفة التالية:

$$A=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

وكانت الرسالة المشفرة المستلمة هي:

$$\begin{bmatrix} 1 & -16 & -10 & -1 & -2 & 0 & -18 & -15 & -2 & -5 & -2 & -15 & 15 \\ 8 & -21 & -15 & -2 & -3 & -1 & -27 & -23 & -3 & -2 & -3 & -23 & -23 \end{bmatrix}$$

المطلوب:

إرجاع الرسالة الى أصلها (على أن تكون على علم بالبيانات السابقة والتي هي سر بين المرسل والمستقبل)

الحل:

نستخرج معكوس المصفوفة A

$$\left[\begin{array}{cc:cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right] \quad - R_1 + R_2 \left[\begin{array}{cc:cc} 3 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right]$$

$$-3R_2+R_1 \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right] R_1+R_2 \left[\begin{array}{cc:cc} 0 & 1 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \end{array}\right] \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 4 & -3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix}$$

بعدها نضرب المصفوفة المعكوسة في الرسالة المشفرة:

$$\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 6 & -16 & -10 & -1 & -2 & 0 & -18 & -15 & -2 & -5 & -2 & -15 & -15 \\ 8 & -24 & -15 & -2 & -3 & -1 & -27 & -23 & -3 & -8 & -3 & -23 & -23 \end{bmatrix}$$

= 2 0 0 1 0 2 0 1 0 1 0 1 1

0 5 2 1 3 9 9 1 4 1 1

2 0 0 1 0 2 0 1 0 1 0 1 1

0 8 5 2 1 3 9 9 1 4 1 9 9

A B C D E F G H I J L M

0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 1 1 1

1 2 3 4 5 6 7 8 9 0 1 3

N O P Q R S T U V W X Y Z

1 1 1 1 1 1 2 2 2 2 2 2

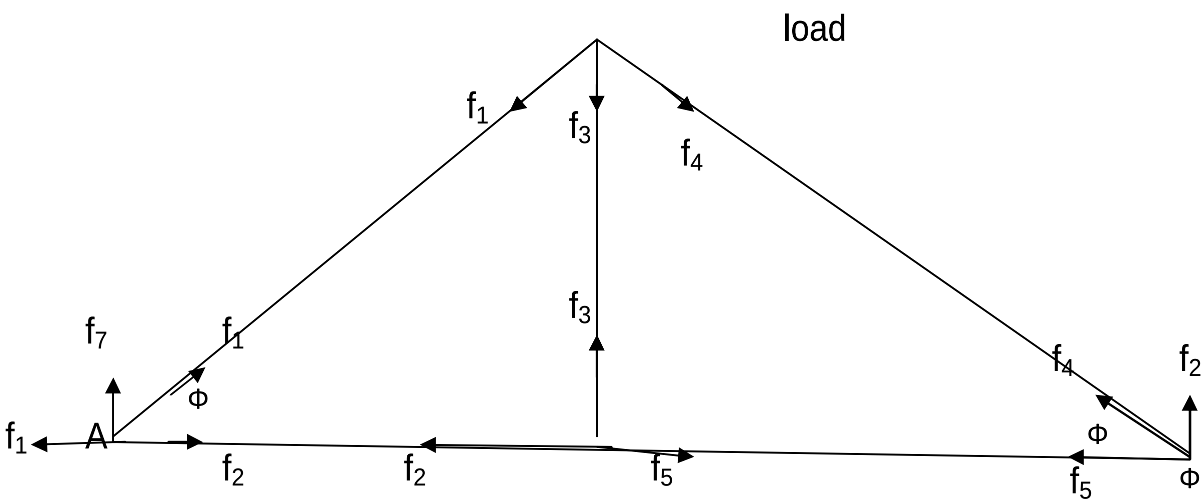
4 5 6 7 8 9 0 0 2 3 4 5 6

إذاً يكون مضمون الرسالة وبعد مطابقة الأرقام أي أن كل عمود من المصفوفة الناتجة

THE LAW IS ANA …

4-3 تطبيقات المصفوفات في الميكانيكا:

تستخدم المصفوفات في الميكانيكا وذلك بعد تمثيل التطبيق الميكانيكي بمجموعة معادلات:



بإستخدام قوى الحمل g_1 and g_2 المطلوب تحديد القوى في السعة:

$$f_1 \cos \Theta + f_2 - f_6 = 0$$

$$f_1 \sin\Theta + f_7 = 0$$

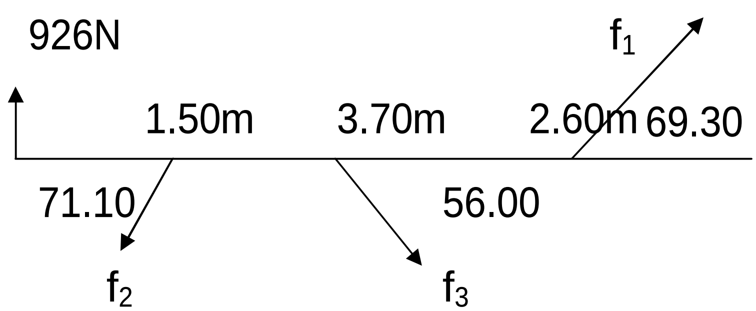
$$-f_1 \cos \Theta + f_4 \cos\Theta + g_1 = 0$$
$$- f_1 \sin \Theta - f_3 - f_4 \sin \Theta = 0$$
$$- f_2 + f_5 = 0$$
$$f_3 - g_2 = 0$$
$$- f_4\cos\Theta - f_5 = 0$$
$$f_4\sin\Theta + f_8 = 0$$

وتمثل هذه المعادلات بالمصفوفات لإيجاد الحل لها كما يلي:

$$f_1\cos\theta+f_2-f_1 = 0 \quad \begin{bmatrix} \cos\theta & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\cos\theta & 0 & 0 & \cos\theta & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & -1 & -\sin\theta & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -COS\theta & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sin\theta & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \\ f_8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -y_1 \\ 0 \\ 0 \\ g_2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

مثال:

أوجد



$f_1\sin69.3 - f_2\sin71.1 = f_3\sin56.6 + 926 = 0$

$f_1\cos69.3 - f_2\cos71.1 = f_3\cos56.6 + 926 = 0$

$7.80\ f_1\sin69.3 - 1.50f_2\sin71.1 - 520f_3\sin56.6 = 0$

$$\begin{bmatrix} \sin 69.3^0 & -\sin 71.1^0 & -\sin 56.6^0 \\ \cos 69.3^0 & -\cos 71.1^0 & \cos 56.6^0 \\ 7.20\sin 69.3^0 & -1.50\sin 71.1^0 & 5.20\sin 56.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -926 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} f_1 = \\ f_2 = \\ f_3 = \end{matrix} \begin{bmatrix} \sin 69.3^0 & -\sin 71.1^0 & -\sin 56.6^0 \\ \cos 69.3^0 & -\cos 71.1^0 & \cos 56.6^0 \\ 7.20\sin 69.3^0 & -1.50\sin 71.1^0 & 5.20\sin 56.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -926 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} f_1 = \\ f_2 = \\ f_3 = \end{matrix} \begin{bmatrix} 425.5 \\ 1079.9 \\ 362.2 \end{bmatrix}$$

$f_1 = 425.2$ N

$f_2 = 1079.9$ N

$f_3 = 362.2$ N

المبحث الرابع

التطبيقات الاقتصادية

4-1 تمهيد:

تستخدم المصفوفات في كثير من الجوانب الاقتصادية لرصد البيانات ومعرفة التكاليف وحساب المنتجات ... وفي هذا المبحث سوف نتناول بعض الأمثلة التطبيقية لشركات الإنتاج.

مثال:

يقوم أحد المصانع بإنتاج ثلاثة أنواع من الملبوسات بأربعة ألوان مختلفة يومياً وهي كالآتي: 50 لبسة رجالية باللون الأحمر، و65 نسائية و 47 أطفالية باللون الأحمر.

52 رجالية و 97 نسائية و 98 أطفالية باللون الأبيض. 73 رجالية و95 نسائية و 60 أطفالية باللون الأسود مثل هذه السلع بطريقة المصفوفات.

الحل:

	أطفالية	نسائية	رجالية
الأحمر	47	65	50
الأزرق	55	37	52
الأبيض	98	97	78
الأسود	60	95	43

مثال:

شركة تصنع أربعة منتجات إذا كان الطلب على منتجاتها ممثلاً بمنحة الطالب التالي/

$$d = \begin{bmatrix} 30 & 20 & 40 & 10 \end{bmatrix}$$

إذا كان سعر بيع الشركة بالريالات للوحدة الواحدة من هذه المنتجات ممثلاً بمنحه:

$$P = \begin{bmatrix} 20 \\ 15 \\ 18 \\ 40 \end{bmatrix}$$

أحسب ثمن البيع الكلي للمنتجات الأربعة

الحل:

الطلب على المنتج الأول هو 30 وحدة وسعر بيع الوحدة الواحدة هو 20 ريال وعليه فإن ثمن بيع المنتج الأول هو ريال $600 = (20) \times (30)$

وبنفس النسق نجد أثمان بيع المنتجات الأخرى نرى أن الثمن الكلي لبيع المنتجات الأربعة هو حاصل ضرب الداخلي لمنحة الطلب d ومنحة السعر P أي أن الثمن الكلي هو:

$$d.P = \begin{bmatrix} 30 & 20 & 40 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 20 \\ 15 \\ 18 \\ 40 \end{bmatrix}$$

$$= (30)(20) + (20)(15) + (40)(18) + (10)(40)$$

$= 600 + 300 + 720 + 400 = 2020$ ريال

تقوم إحدى شركات الملاحة البحرية في أعالي البحار بتسيير ثلاثة سفن بحرية هي العبارة والإشراف والفتوح ويعمل على كل من هذه السفن عمال وعاملات وطاقم بحري واحتياطي على النحو التالي:

اسم السفينة	الفتوح	الإشراف	العبارة
نسبة العمالة			
العمال	%50	%42	%40
العاملات	%15	%14	%20
الطاقم البحري	%27	%35	%30
الإحتياطي	%8	%9	%10
المجموع	%100	%100	%100

فإذا علم أن:

A) حجم العمالة على السفن الثلاثة على الترتيب التالي (500، 300 ، 200)

B) الأجور اليومية بالجنيه توزع على النحو التالي

اسم السفينة	الفتوح	الإشراف	العبارة
العمال	2	4	3
العاملات	2	2	2
الطاقم البحري	10	9	10
الإحتياطي	7	6	10

C) متوسط الأجور في الأسبوع القادم للعمالة يقدر على الترتيب التالي للسفن الثلاث (30، 20، 10)

المطلوب:

تصميم المصفوفات التالية:

1- مصفوفة نسب العمالة
2- مصفوفة حجم العمالة الإجمالي على حسب السفن
3- مصفوفة حجم العمالة التفصيلي على حسب السفن والتصنيف
4- مصفوفة أجور العمال في المتوسط على حسب السفن
5- إيجاد حجم العمالة الإجمالي على حسب التصنيف الموجود لكل السفن
6- إيجاد ما تحمله الشركة من أجور وذلك على حسب الصنيف المعطى
7- إيجاد متوسط الأجور المقدر دفعها في الإسبوع القادم

الحل:

مصفوفة نسبة العمالة ولتكن X

1) وهي تأخذ الشكل التالي:

$$\bar{X} = \begin{bmatrix} .4 & .42 & .5 \\ .2 & .14 & .15 \\ .3 & .35 & .3 \\ .1 & .59 & .08 \end{bmatrix}$$

2) مصفوفة حجم العمالة ولتكن y حيث تأخذ الشكل التالي

$$\bar{y} \quad \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 500 \end{bmatrix}$$

3) مصفوفة أجور العمالة اليومية بالجنيه ولتكن k وهي تأخذ الشكل التالي

$$\bar{K}=\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 10 & 9 & 10 \\ 7 & 6 & 10 \end{bmatrix}$$

لإيجاد إجمالي حجم العمالة موعاً على حسب التصنيف الموضح لكل السفن المشار اليها فإننا نقوم بضرب مصفوفة نسب العمال في مصفوفة حجم العمالة أي $\bar{y}.\bar{k}$

أي أن

$$\bar{k}.\bar{y}=\begin{bmatrix} .4 & .42 & .5 \\ .2 & .14 & .15 \\ .3 & .35 & .3 \\ .1 & .59 & .08 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 200 \\ 300 \\ 500 \\ \ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 456 \\ 157 \\ 300 \\ 87 \end{bmatrix}$$

عليه فإن حجم العمال في السفن الثلاث = 456

فإن حجم العاملات في السفن الثلاث = 157

حجم الطاقم البحري في السفن الثلاث = 300

حجم الإحتياطي في السفن الثلاث = 87

عليه تكون مصفوفة حجم العمالة التفصيلي على حسب السفن والتصنيف ولتكن M تأخذ الشكل التالي:

$$M=\begin{bmatrix} 80 & 126 & 150 \\ 40 & 42 & 75 \\ \ & \ & \ \end{bmatrix}$$

60	105	135
2	17	40

مصفوفة حجم العمالة في المتوسط على حسب السفن ولتكن F تأخذ الشكل التالي:

$$F=\begin{bmatrix}10\\20\\30\end{bmatrix}$$

ولكي نحصل على الإسبوع فإننا نقوم بضرب مصفوفة العمالة التفصيلي في مصفوفة الأجور في المتوسط على حسب التصنيف أي نضرب M.F

$$M.F\begin{bmatrix}80 & 120 & 250\\40 & 42 & 75\\60 & 105 & 75\\2 & 17 & 40\end{bmatrix}.\begin{bmatrix}10\\20\\30\\ \end{bmatrix}=10820 \quad 3490 \quad 6750 \quad 1940$$

عليه فإن الشركة:

تتحمل أجور عن العمال = 1.820 جنيه

تتحمل أجور العاملات للسفن الثلاث = 3490 جنيه

تتحل الشركة أجور عن الطاقم البحري = 6750 جنيه

تتحمل الشركة أجور عن الإحتياطي = 1940 جنيه

ويكون إجمالي ما تحمله الشركة من أجور للسفن الثلاث هو 23000 جنيه

ولإيجاد ما تحمله شركة الملاحة من أجور على حسب التصنيف يكون بضرب المصفوفات الجزئية المستخرجة من مصفوفتي حجم العمالة التفصيلي ومصفوفة أجور العمالة اليومية بالجنيه.

الطريقة:

يتم إستخراج مصفوفات جزئية من المصفوفة على النحو التالي:

(1) مصفوفة حجم العمالة في السفن الثلاث

$$\begin{bmatrix} 80 & 126 & 250 \\ 40 & 42 & 75 \\ 60 & 105 & 135 \\ 20 & 27 & 40 \end{bmatrix}$$

المصفوفة الجزئية التي تمثل حجم العمال في السفن الثلاث هي:

$$\begin{bmatrix} 80 & 126 & 250 \end{bmatrix}$$

المصفوفة الجزئية التي تمثل حجم العاملات في السفن الثلاث

$$\begin{bmatrix} 40 & 42 & 75 \end{bmatrix}$$

المصفوفة الجزئية التي تمثل حجم الطاقم البحري في السفن الثلاث

$$\begin{bmatrix} 60 & 105 & 135 \end{bmatrix}$$

المصفوفة الجزئية التي تمثل حجم الإحتياطي في السفن الثلاث

$$\begin{bmatrix} 20 & 27 & 40 \end{bmatrix}$$

كما أنه يتم إستخراج مصفوفات جزئية من مصفوفة أجور العمالة اليومي بالجنيه على النحو التالي:

مصفوفة أجور العمالة اليومي

$$\begin{bmatrix} 3 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{matrix} 10 & 9 & 10 \\ 7 & 6 & 7 \end{matrix}$$

عليه تكون المصفوفات الجزئية هي:

مصفوفة أجور العمال في السفن الثلاث

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \end{bmatrix}$$

المصفوفة الجزئية التي تمثل أجور العاملات في السفن الثلاث

$$\begin{bmatrix} 10 & 9 & 10 \end{bmatrix}$$

المصفوفة التي تمثل أجور الإحتياطي في السفن الثلاث

$$\begin{bmatrix} 7 & 6 & 7 \end{bmatrix}$$

عليه يكون أجور العمال والعاملات والطاقم البحري والإحتياطي حسب التصنيف في السفن الثلاث هو:

أجور العمال

$$\begin{bmatrix} 60 & 126 & 350 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \end{bmatrix} = 1244$$

أجور العاملات

$$\begin{bmatrix} 40 & 42 & 75 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix} = 356$$

أجور الطاقم البحري

$$\begin{bmatrix} 60 & 105 & 135 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 10 \\ 9 \\ 10 \end{bmatrix} = 2895$$

أجور الإحتياطي

$$\begin{bmatrix} 20 & 27 & 40 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 7 \\ 6 \\ 109 \end{bmatrix} = 102$$

عليه يكون إجمالي ما تحملة شركة الملاحة البحرية حسب التصنيف هو حاصل جمع الأجور وهو

1244 + 356 + 2890 + 1702 = 6197 جنيه

تطبيق رقم (3):

يقوم أحد المصانع بإنتاج تشكيلة من لعب الأطفال البلاستيكية هي السيارات، القاطرات، الطائرات، المكعبات، وبالطبع كل نوع من هذه الأنواع يحتاج الى عدد من وحدات العمل والمادة الخام وأجور ومصاريف ثابتة.

فإذا كانت بيانات إحتياجات هذه التشكيلة من لوازم الإنتاج على النحو التالي:

النوع	السيارات	القطارات	الطائرات	المكعبات
التكلفة للوحدة				
العمل	4	2	5	3

المادة الخام	3.2	3	2	1.5
المهايا والأجور	54	33	21	20
مصاريف ثابتة	200	110	150	100

فإذا علم أن لوازم الإنتاج على الترتيب التالي:

(50، 100، 120 ، 130)

كما أن الإدارة المحاسبية في هذا المصنع قدرت أرباحاً لكل وحدة على الترتيب التالي

(25 ، 2 ، 23 ، 15)

فعلى فرض أن الطلبات على الإنتاج من هذه التشكيلة من لعب الأطفال في الشهر القادم على النحو التالي:

(9200 ، 45000 ، 5000 ، 3000)

المطلوب:

أ/ تصوير المصفوفات التي تعبر عن:

1- لوازم الإنتاج لكل وحدد منتجه
2- أسعار لوازم الإنتاج
3- الأرباح المقدرة
4- طلبية الإنتاج في الشهر القادم
5- إيجاد التكلفة الكلية لكل وحدة منتجة
6- إيجاد الأرباح الكلية المتوقعة عن طلبية الشهر القادم.

الحل:

1/ مصفوفة لوازم الإنتاج ولتكن $\begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & 4 \\ & & & \\ & & & \end{bmatrix}$

X وهي تأخذ الشكل التالي

$$X = \begin{matrix} 1.5 & 2 & 3 & 3.2 \\ 20 & 21 & 33 & 54 \\ 100 & 130 & 110 & 200 \end{matrix}$$

2/ مصفوفة أثمان عناصر الإنتاج

$$Y = \begin{bmatrix} 130 & 120 & 100 & 50 \end{bmatrix}$$

بالملم ولتكن Y

3/ مصفوفة الأرباح المتوقعة

لكل وحدة لتكن Z تأخذ

$$Z = \begin{bmatrix} 25 & 20 & 23 & 15 \end{bmatrix}$$

4/ مصفوفة حجم الإنتاج للشهر القادم عن كل نوع ولتكن M وهذ تأخذ الشكلان

$$M = \begin{bmatrix} 3000 & 5000 & 4500 & 9200 \end{bmatrix}$$

أو

$$M = \begin{bmatrix} 3000 \\ 5000 \\ 4500 \\ 9200 \end{bmatrix}$$

عليه تكون التكلفة الكلية لكل وحدة بضرب مصفوفة أثمان عناصر الإنتاج في مصفوفة لوازم الإنتاج في مصفوفة لوازم الإنتاج أي Y .X

$$\begin{bmatrix} 130 & 120 & 100 & 50 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3 & 5 & 2 & 4 \\ 1.5 & 2 & 3 & 3.2 \\ 20 & 21 & 33 & 54 \\ 100 & 130 & 110 & 200 \end{bmatrix}$$

$Y.X = \begin{bmatrix} 7570 & 10490 & 94200 & 16364 \end{bmatrix}$

وهذا يعني أن إنتاج الوحدة الواحدة من النوع الأول يحتاج الى 75.7 جنيه

- وأن إنتاج الوحدة الواحدة من النوع الثاني يحتاج الى 10.49 جنيه
- وأن إنتاج الوحدة الواحدة من النوع الثالث يحتاج الى 94.20 جنيه
- وأن الوحدة الواحدة من النوع الرابع يحتاج تحتاج الى 136.4 جنيه

ج/ أما إجمالي التكاليف لحجم الطلبية للأنواع مجتمعة وذلك بضرب مصفوفات تكلفة الوحدة من عناصر الإنتاج الأربعة في مصفوفة الطلبية على حسب النوع أي أن:

إجمالي التكاليف:

$$\begin{bmatrix} 7570 & 10490 & 94200 & 16204 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 3000 \\ 5000 \\ 4500 \\ 9200 \end{bmatrix}$$

= 648136800 قرش ، 648136.8 جنيه

أما الأرباح المتوقعة عن طلبية الشهر القادم فيمكن الحصول عليها عن طريق ضرب مصفوفة الأعداد المطلوبة من كل نوع في مصفوفة الأرباح المتوقعة على أساس أن الأولى متجه صف والثانية متجه عمود

$$\begin{bmatrix} 3 & 5.0 & 4.5 & 9.2 \end{bmatrix} . \begin{bmatrix} 25 \\ 20 \\ 23 \\ 15 \end{bmatrix} = 416.5 \quad \text{جنيه}$$

عليه تكون الأرباح الكلية 416.5 جنيه

تطبيق رقم (4):

تنتج إحدى الشركات نوعين من الثلاجات حيث النوع الأول له باب واحد والنوع الثاني له بابين ومن ضمن المصانع الإنتاجية لهذه الشركة مصنع لعملية التشطيب النهائي ومصنع آخر لعملية التغليف لغرض التصدير ومن المعلومات المعروفة عن عملية التشطيب.

إن الوحدة الواحدة تحتاج الى سبعة ساعات عمل النوع الأول والى 3 ساعات عمل النوع الثاني والمعلومات المتوفرة عن العمليتين.

ولعملية التغليف تحتاج الوحدة الى خمسة ساعات عمل وذلك للنوع الأول والى ساعتي عمل لتغليف الوحدة وذلك من النوع الثاني.

المطلوب:

1/ تحديد عدد الوحدات الممكن تشطيبها وتغليفها من كل نوع وذلك إذا ما أتيح لهذا المصنع 650 ساعة عمل كاملة لمصنع التشطيب و 450 ساعة عمل كاملة لمصنع التغليف وذلك دون وجود طاقة معطلة.

يمكن تصوير هذه الحالة في الجدول التالي:

النوع	الثاني	الأول	ساعات العمل
المصنع			

التشطيب	3	7	650
التغليف	2	5	450
عدد الوحدات	X_2	X_1	

وبناءاً على هذه المعلومات يمكن تصوير المعادلات التالية:

$$\begin{bmatrix} 7X_1 + 3X_2 \\ 5X_1 + 2X_2 \end{bmatrix} \begin{matrix} = 650 \\ = 450 \end{matrix}$$

حيث يمكن التعبير عن ذلك بالمصفوفة التالية، مصفوفة الطاقة المتاحة تأخذ الشكل التالي:

$$\begin{bmatrix} 650 \\ 450 \end{bmatrix}$$

مصفوفة الساعات المطلوبة لعملية التشطيب والتغليف لكل الوحدات

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

مصفوفة الوحدات التي يمكن إنتاجها في كل هذه الظروف هي

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

وعلى ذلك فإن:

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 650 \\ 450 \end{bmatrix}$$

وبضرب طرفي المعادلة في معكوس المصفوفة:

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$$

عليه تكون المعادلة كالآتي:

$$\begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -5 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 650 \\ 450 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 \\ 100 \end{bmatrix}$$

عليه يكون عدد الوحدات التي يمكن تشطيبها وتغليفها من النوع الأول هي 50 وحدة، عدد الوحدات التي يمكن تشطيبها وتغليفها من النوع الثاني هي 100 وحدة.

المصادر والمراجع:

(1) المصفوفات وتطبيقاتها، د.صباح جمعة عقيل، أ. زياد عبدالكريم القاضي، محمد خليل أبوزلطة.

(2) المصفوفات النظرية والتطبيقية، د. مجدي الطويل.

(3) الأساليب الرياضية للاقتصاديين، د. مختار محمد متولي.

(4) الرياضيات وتطبيقاتها في العلوم الإدارية والاقتصادية، د. محمود مهدي البياتي، د. دلال القاضي.

(5) ملخصات شوم، نظريات ومسائل في المصفوفات، د.فرانك أبرز.

(6) الرياضيات البحتة، د.عبدالعزيز محمد هيكل، د.مختار محمود.