جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا

كلية التربية

قسم الرياضيات

بحث تكميلي لنيل درجة
البكالاريوس في الرياضيات

بعنوان :

نظريـــة الحصر (السندوتش - الشطيرة)

إعداد الطالبات :

رانيـــة حيـــدر أحمـــد حمـــدون
صـــفاء الإمـــام محمـــد مضـــوي
صـــفاء عثمـــان أحمـــد محمـــد
فاطمـــة حســـن الطـــائف الشـــيخ

إشراف

الدكتور:

عمر الفاروق

حمزة

2014م

بسم الله الرحمن الرحيم

الآيـــــة

قال تعالى :

(اللّهُ لاَ إِلَـهَ إِلاَّ هُوَ الْحَيُّ الْقَيُّومُ لاَ
تَأْخُذُهُ سِنَةٌ وَلاَ نَوْمٌ لَّهُ مَا فِي السَّمَاوَاتِ
وَمَا فِي الأَرْضِ مَن ذَا الَّذِي يَشْفَعُ عِنْدَهُ
إِلاَّ بِإِذْنِهِ يَعْلَمُ مَا بَيْنَ أَيْدِيهِمْ وَمَا
خَلْفَهُمْ وَلاَ يُحِيطُونَ بِشَيْءٍ مِّنْ عِلْمِهِ إِلاَّ
بِمَا شَاء وَسِعَ كُرْسِيُّهُ السَّمَاوَاتِ وَالأَرْضَ
وَلاَ يَؤُودُهُ حِفْظُهُمَا وَهُوَ الْعَلِيُّ الْعَظِيمُ
{255})

صدق الله العظيم

(سورة البقرة : الآية 255)

الإهـــــداء

إلــى من يـسعد قـلـبـي بـلـقـا هـا
إلــى روضة الـحب و الـحـنـان الـتـي تـنـبت الأزهـا ر
أمـي ،،،،،
إلــى رمـز الـرجـولـة والـتـضحـيـة
إلــى من دفـعـنـي إلــى الـعـلـم وبـه ازداد افـتـخـا راً
أبــى ،،،،
إلــى من هم اقـرب إلــى من روحـي
إلــى مـن شـا ركـنـي حضن الأم وبــهـم استـمـد عزتــي و إصرا ري
إلــى اخـوانــي ،،،،،
إلــى من آنـسـنـي فـي دراستـي وشـا ركـنـي همـومـي تـذكـا را وتـقـديـرا
إلــى أسـاتـذتــي الأجلاء ،،،،

الشكر و التقدير

قال تعالي { لئن شكرتم لأزيدنكم } .

الحمـد لله رب العـالمين والصـلاة والسـلام علـي معلـم البشـرية مـن جـاء رحمـة للعالمين محمد صلي الله عليه وسلم علي اله وصحبه وسلم.

أنـت مـن حولـت الفشـل إلـي نجـاح بـاهر, يعلـو فـي القمـم نشـكر جهـدك، ونقـيم عملك...

فأنت أهل للتميز.

يسرنا أن نتقدم لك بخالص الشكر ووافر الامتنان علي ما بذلت من جهد وتحملت من مشقة جعلها الله في موازين حسناتك.. ونحن العارفات بفضلك المستضيئات بقدرك العاجزات عن القيام بالشكر..وقد حررنا هذه السطور بلسان الإمكان لا بقلم التبيان سائلين المولى عز وجل أن يرزقنا وإياك الفردوس الأعلى وبارك الله فيك وأسعدك أينما حطت بك الرحال .

الدكتور / عمر الفاروق حمزة

فهرس الموضوعات

الباب الأول

المقدمـــة

المقدمـة:

سيتطرق هذا البحث لموضوع يعتبر من حيث التناول –على حسب راى الباحثون - حيث يتضمن نظرية الحصر ولتعرف عليها نقوم بدراسة بعض التعاريف والنظريات والتى نفصلها فى حينها ويحتوي البحث على أربعة فصول .

-الفصل الاول: يحتوى على تعريف النهايات والعمليا ت عليها وبعض الامثلة للتوضيح

-كما يحتوى الفصل الثانى نظريات على النهايات وبعض الامثلة

-ويحتوى الفصل الثالث على نظرية الحصر وهى موضوع البحث حيث يتضمن الفصل اثبات النظريات وبعض البراهين والنتائج المتعلقة بالنظرية

-ويحتوى الفصل الرابع على العمليات الحسابية على النهايات ويحتوى على نظريات المتتاليات واللامتناهية فى الكبر والصغر وبعض الخواص عليها.

أهمية البحث:

تنبع أهمية البحث فى أن نظرية الحصر تعتبر من النظريات ذات الاهمية الكبرى فى حل بعض النهايات المعقدة حيث تستخدم فى مجال التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية والتحليل الحقيقي ولها دور كبير فى المتتاليات.

مشكلة البحث:

جاء اختيار مشكلة البحث في أن نظرية الحصر أو(السندوتش – الشطيرة) في أنها نظرية من الأهمية بمكان وحل بعض النهايات التي يصعب حلها بالطرق الأخرى (المعتادة) وأن نظرية غير موجودة في المراجع وبالتالي غير معروفة لدى الطلاب لذلك جاء البحث للكشف عن النظرية وإبراز أهميتها في التحليل الحقيقي والنهايات وبعض مجالات الرياضيات الأخرى.

1-1: تعريف نهاية الدالة:

يقال أن العدد الحقيقي bهو نهاية الدالة$f(x)$عند النقطة$x = a$

$$\forall x \in G: 0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

أذا كانت b نهاية الدالة ما عند النقطة a فأن هذا يستلزم أن تكون قيم الدالة قريبة جداً من العدد b عندما xتكون قريبة قرباً كافياً من a .

ما معنى عدم وجود النهاية:

من تعريف النهاية نجد أن لاى ε > 0 يوجد δ > 0 بحيث أن:

$$0 < |x - a| < \delta \rightarrow |f(x) - b| < \epsilon$$

نفى هذا العبارة يكون أن:

$$0 < |x - a| < \varepsilon |f(x) - b| \geq \varepsilon$$

مثال(1):

أفرض الاقتران التالي

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ 1, & x > 0 \end{cases}$$

أثبت أن الاقتران ليس له نهاية عند $x = 1$

الحل

أفرض أنه له نهاية L سنبرهن على أنه يوجد ε هو $\left(\varepsilon = \frac{1}{2}\right)$ وأنه لجميع $\delta > 0$ يوجد x الذى يحقق

$$0 < |x - a| < \delta \qquad |f(x) - b| \geq \frac{1}{2} = \varepsilon$$

أفرض $\delta > 0$ أذا كانت $L \leq \frac{1}{2}$ نختار $x = 1 + \frac{\delta}{2}$ ، $f(x) = 1,$

$$|f(x) - L| = |1 - L| = 1 - L \geq 1 \quad \frac{1}{2} = \frac{1}{2} = \epsilon$$

اما أذا كانت $L > \frac{1}{2}$ نختار $x = 1 - \frac{\delta}{2}$ عندما

$$f(x) = f\left(1 - \frac{\delta}{2}\right) = 0$$

$$|f(x) - L| = |0 - L| = L > \frac{1}{2}$$

نجد أن $\frac{1}{2} =$ ε فأنه لأى $\delta > 0$ يوجد x يحقق

$$0 < |x - 1| < \delta \qquad |f(x) - L| \geq \varepsilon$$

$\therefore$ $f(x)$ ليس لها نهاية عند $x = 1$

2-1: النهاية من طرف واحد:

تعريف:

1. أفرض f معرفاً على $a.c$ نقول للعددLl هو نهاية $f(x)$ عندما x تقترب من a من اليمين أو(النهاية من اليمين للاقتراب f عند a).

اذاً لكل $0 < \varepsilon$ يوجد $\delta > 0$ ويحقق :

$$0 < |x-a| < \delta \to |f(x)-L| < e$$

وتكتب :

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = L$$

ونقول أن نهاية f من اليمين موجودة

2. أفرض f معرفاً على الفترة $(a.c)$.نقول العدد L هو نهاية $f(x)$ عندما x تقترب من c من اليسار أو(نهاية f من اليسار عند c) .

أذا لكل$0 < \varepsilon$ يوجد $\delta > 0$ ويحقق:

$$-\delta < |x-c| < 0 \quad \to |f(x)-L| < \varepsilon$$

وتكتب :

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = L$$

ونقول نهاية fمن اليسار موجودة .

مثال(2):أحسب

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^{\frac{3}{2}}-2x+1}{x^2-2\sqrt{x-1}}$$

الحل

$$\lim_{x\to 1^+} \frac{x^{\frac{3}{2}}-2x+1}{x^2-2\sqrt{x-1}} = \frac{1-2+1}{1-2(0)} = 0$$

مثال(3):

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{2x^2 - 3\sqrt{-x} + 1}{x - 5}$$

الحل

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{2x^2 - 3\sqrt{x} + 1}{x - 5} = \frac{0 - 0 + 1}{0 - 5} = \frac{-1}{5}$$

1- 3 : النهايات عند المالانهايات:

a) افرض $f(x)$ معرفاً علي (a, ∞) نسمى العدد L نهاية $f(x)$ عندما x تقترب من المالانهايات اذا لكل $\varepsilon > 0$ يوجد M بحيث ان

$$x > M \rightarrow |f(x) - L| > \varepsilon$$

وتكتب:

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

ونقول ان نهاية $f(x)$ موجود عندما تقترب x من المالانهاية (الموجبة) وأن f له نهاية عند المالانهاية (الموجبة).

b) افرض $f(x)$ معرفاً على $(a, -\infty)$ نسمى العدد L نهاية $f(x)$ عندما x تقترب من $-\infty$ اذاً لكل ε > 0 يوجد عدد M بحيث أن:

$$x > M \rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

وتكتب:

$$\lim_{x\to\infty^-} f(x) = L$$

نقول ان نهاية $f(x)$ موجودة عندما تقترب x من المالانهاية السالبة وان له نهاية عند المالانهاية

c) اذاً

$$\lim_{x\to\infty^-} f(x) = L \text{ او } \lim_{x\to\infty} f(x) = L$$

النهاية موجودة فاننا نسمي المستقيم $y = L$ خط التقارب الافقي للمنحنى f

مثلاً :أحسب

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-5}{x^2}$$

الحل

$$\lim_{x\to\infty} \frac{-5}{x^2} = -5 \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = 0$$

1 – 4 : أوضاع عدم التعيين:

1-نهاية بعض الدوال الكسرية:

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

عندما تنتهى قيمة المتغير x نحو قيمة معينة a

الحالة الاولى:

ينتهى فيها البسط والمقام فى ان واحد نحو الصفر.

$$\lim_{x\to a} g(x) = 0 \qquad \lim_{x\to a} f(x) = 0$$

$$\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)} = \frac{0}{0}$$

مثال(1):

اوجد النهاية التالية:

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 - x - 2}{-2x^2 + x + 3}$$

الحل

بالتعويض المباشر $\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 1^-} \frac{x^2 - x - 2}{-2x^2 + x + 3} = \lim_{x\to 1^-} \frac{(x+1)(x-2)}{(x+1)(-2x+3)} = \lim_{x\to 1^-} \frac{x-2}{-2x+3} = \frac{-3}{5}$$

مثال(2):

اوجد النهاية التالية :

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x^2 - 2}{2x^4 - x^2 - 2}$$

الحل

بالتعويض المباشر$\frac{0}{0}$

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^3 + x^2 - 2}{2x^4 - x^2 - 2}$$

لايجاد العامل الاخر فى المقام نقسم قسمة مطولة $2x^4 - x^2 - 2$ على $x - 1$ فنجد:

$$2x^3 + 2x^2 + x + 1$$

$$x - 1 \;\Big|\; 2x^4 - x^2 - 2$$

$$\underline{2x^4 - 2x^3}$$

$$x^2 - 1$$

$$\underline{x^2 - 1}$$

$$x - 1$$

$$\underline{x - 1}$$

$$0$$

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^3+x^2-2}{2x^4-x^2-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x^2+2x+2)}{(x-1)(2x^3+2x^2+x+1)}=\frac{5}{6}$$

- **ملحوظة:**

- اذا انتهت قيمة كثيرة الحدود نحو الصفر عندما ينتمى $x \to a$,فلابد ان يكون $(x-a)$ احد عوامل كثيرة الحدود.
- اذا كان المقدار من الدرجة الثانية . فنقسم كثيرة الحدود على العامل $(x-a)$ قسمة مطولة فنحصل على التحليل

الحالة الثانية :

ينتهي فيها البسط والمقام نحو (∞) او $(-\infty)$

$$\lim_{x\to a} g(x)=\infty \ , \lim_{x\to a} f(x)=\infty$$

$$\frac{\lim_{x\to a} f(x)}{\lim_{x\to a} g(x)}=\frac{\infty}{\infty}$$

فان نهاية قسمة كثيرتي الحدود عندما تنتهي $x \to \infty$ تساوى:

1) ∞ او $(-\infty)$ اذا كانت قوة البسط اكبر من قوة المقام .
2) صفراً ,اذا كانت قوة المقام اكبر من قوة البسط.
3) عدداً وهو نسبة معامل اكبر اس فى البسط على معامل الاس المطابق فى المقام.

مثال(1):

اوجد نهاية

$$\lim_{x\to \infty^-}\frac{x^5-x^4+x}{x^3-x+1}$$

الحل

$$\lim_{x\to\infty^-} \frac{x^5 - x^4 + x}{x^3 - x + 1} = \frac{\infty}{\infty}$$

من (1) نجد ان قوة البسط اكبر من قوة المقام فان:

$$\lim_{x\to\infty^-} \frac{x^5 - x^4 + x}{x^3 - x + 1} = \infty$$

مثال (2):

أوجد النهاية

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x^3 + 4}{x^5 - x^2 + 1}$$

الحل

من (2) نجد ان قوة المقام اكبر من البسط

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2 - x^3 + 4}{x^5 - x^2 + 1} = 0$$

مثال (3):

أوجد النهاية

$$\lim_{x\to\infty^-} \frac{2x^3 + x^2}{1 - x^3}$$

الحل

من(3) نجد ان

$$\lim_{x\to\infty^-}\frac{2x^3+x^2}{1-x^3}=-2$$

الحالة الثالثة:

حالة عدم تعيين من الشكل$\infty-\infty$

مثال(1):

اوجد النهاية

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2-5x+6}-x$$

الحل

الحالة هى عدم تعيين من الصورة$\infty-\infty$ نضرب فى المرافق

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^2-5x+x}-x=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2-5x+6-x^2}{\sqrt{x^2-5x+x}}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{-5x+6}{\sqrt{x^2-5x+6}+x}$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{x\left(-5+\frac{6}{x}\right)}{|x|\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{-5+\frac{6}{x}}{\sqrt{1-\frac{5}{x}+\frac{6}{x^2}}+1}=\frac{-5}{2}$$

(لاحظ ان$x=|x|$ واننا قسمنا البسط والمقام على x)

مثال(2):

اوجد النهاية

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right)$$

الحل:

الحالة هى حالة عدم تعيين من الصورة $\infty - \infty$ لنوحد المقامات

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{1-x^3}\right) = \lim_{x\to 1}\left(\frac{1}{1-x}-\frac{3}{(1-x)(1+x+x^2)}\right)$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{1+x+x^2-3}{(1-x)(1+x+x^2)}$$

$$= \lim_{x\to 1}\frac{x^2+x-2}{(1-x)(1+x+x^2)} = \lim_{x\to 1}\frac{(1-x)(-x-2)}{(1-x)(1+x+x^2)} = -1$$

الحالة الرابعة:

حالة عدم التعيين من الشكل $\infty \times 0$

مثال(1):

اوجد نهاية

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{\pi}{x}$$

الحل:

من الشكل $\infty \times 0$

$$\lim_{x\to\infty} x\sin\frac{\pi}{x} = \lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to\infty}\frac{\pi\sin\frac{\pi}{x}}{\frac{\pi}{x}} = \pi$$

الباب الثاني

مبرهنات أساسية في النهايات

1-2: مبرهنات أساسية للنهايات:

مبرهنة (1):

نهاية مجموع دالتين تساوى مجموع نهايتي الدالتين

$$\lim_{x \to a} f(x) + g(x) = \lim_{x \to a} f(x) + \lim_{x \to a} g(x)$$

البرهان

$$\forall \varepsilon > 0$$

يوجد ان

$$\lim_{x \to a} f(x) = c \quad , \lim_{x \to a} g(x) = b$$

$$|[f(x) + g(x)] - [c + b]| = |[f(x) - c] + [g(x) - b]|$$

$$\forall |f(x) - c| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad , \left|[g(x) - b] \leq \frac{\varepsilon}{2}\right|$$

$$\therefore |[f(x) + g(x)] - [c + b]| \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{x\to a} f(x) = g(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

مثال(1): أحسب

$$\lim_{x\to 0}(x^2 + x)$$

الحل

$$\lim_{x\to 0}(x^2 + x) = \lim_{x\to 0} x^2 + \lim_{x\to 0} x = 0 + 0 = 0$$

مبرهنة (2):

الضرب بثابت ,لاى c عدد ثابت فان:

$$\lim_{x\to a} c\, f(x) = c\lim_{x\to a} f(x)$$

البرهان:

إذا كان

$$\lim_{x\to a} f(x) = b$$

$$\lim_{x\to a} c\, f(x) = cb$$

$$\forall \varepsilon > 0$$

يوجد ان

$$|cf(x) - cb| = |c||f(x) - b|$$

$$f(x) - a \leq \frac{\varepsilon}{|c|}$$

$$\therefore |c\ f(x) - cb| \leq |c| \frac{\varepsilon}{|c|} = \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{x \to a} cf(x) = c \lim_{x \to a} f(x)$$

مثال(1): أحسب

$$\lim_{x \to 1} 2x^3$$

الحل

$$\lim_{x \to 1} 2x^3 = 2 \lim_{x \to 1} x^3 = 2 \times 1 = 2$$

مبرهنة(3):

نهاية حاصل ضرب دالتين تساوى حاصل ضرب نهايتى الدالتين.

$$\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot \lim_{x \to a} g(x)$$

البرهان:

اذا كان

$$\lim_{x \to a} f(x) = c \qquad , \lim_{x \to a} g(x) = b$$

$$\lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = cb$$

$\forall \varepsilon > 0$ يوجد أن

$$|f(x)g(x) - cb| \leq |f(x)g(x) - cb + cg(x) - cg(x)|$$

$$\leq |f(x) - c||g(x)| + |g(x) - b||c|$$

$$|f(x) - c| \leq \frac{\varepsilon}{2|g|}$$

$$|g(x) - b| \leq \frac{\varepsilon}{2|c|}$$

$$\therefore |f(x)g(x) - cb| \leq \frac{\varepsilon}{2|g(x)|} \cdot \left| g(x) + \frac{\varepsilon}{2|c|} \cdot |c| \right| = \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x) = \lim_{x \to a} f(x) \cdot g(x)$$

مثال : أحسب

$$\lim_{x \to 0} x \cos x$$

الحل

$$\lim_{x \to 0} x \cos x = \lim_{x \to 0} x \cdot \lim_{x \to 0} \cos x = 0 \cdot 1 = 0$$

مبرهنة(4):

نهاية النسبة بين دالتين تساوي النسبة بين نهايتي الدالتين بشرط ان نهاية المقام لا تساوي صفراً .

اى ان :

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim_{x \to a} f(x)}{\lim_{x \to a} g(x)} \qquad if \ \lim_{x \to a} g(x) \neq 0$$

البرهان

اذا كان:

$$\lim_{x \to a} f(x) = c \ , \lim_{x \to a} g(x) = b$$

$$\therefore \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{c}{b}$$

يوجد أن:

$$\forall\, \varepsilon > 0$$

$$\left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{c}{b}\right| = \left|\frac{bf(x)-cg(x)}{bg(x)}\right| \le \left|\frac{bf(x)-cg(x)-cb+cb}{bg(x)}\right|$$

$$\le \left|\frac{b(f(x)-c)}{bg(x)}\right| + \left|\frac{c(g(x)-b)}{bg(x)}\right|$$

$$\le \frac{1}{|g(x)|}|f(x)-c| + \left|\frac{c}{bg(x)}\right||g(x)-b|$$

$$\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0 \;\; |x-c| < \delta \Rightarrow |f(x)-c| < \frac{\varepsilon g(x)}{2} \;\; , |g(x)-b| < \left|\frac{bg(x)}{c}\right|\frac{\varepsilon}{2}$$

$$\therefore \left|\frac{f(x)}{g(x)}-\frac{c}{b}\right| \le \frac{1}{|g(x)|}\cdot\frac{\varepsilon|g(x)|}{2} + \left|\frac{a}{bg(x)}\right|\cdot\left|\frac{bg(x)}{a}\right|\frac{\varepsilon}{2} \le \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to a} f(x)}{\lim\limits_{x\to a} g(x)} \qquad if\;\; \lim_{x\to a} g(x) \ne 0$$

مثال(1): أحسب

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2}{x+1}$$

الحل

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2+2}{x+1}=\frac{\lim_{x\to 1}x^2+2}{\lim_{x\to 1}x+1}=\frac{1+2}{1+1}=\frac{3}{2}$$

مبرهنة(5):

اذا كان $\lim_{x\to a} f(x) = L$, $\lim_{x\to a} g(x) = M$ لاى $\varepsilon > 0$

توجد قيمة $\delta > 0$مشتركة بحيث أنه اذا $0 < |x-a| < \delta$ فأن كلا

$$|f(x)-L| < \varepsilon \ , |g(x)-M| < \varepsilon$$

البرهان

أفرض $\varepsilon > 0$ فانه يوجد $0 < \delta_1$, $0 < \delta_2$ بحيث ان

$$0 < |x-a| < \delta_1 \ , |f(x)-L| < \varepsilon$$

$$0 < |x-a| < \delta_2 \ , |g(x)-M| < \varepsilon$$

أفرض $\delta =$ الاصغر من δ_1،δ_2 فان $0 < \delta$ كذلك

$$0 < |x-a| < \delta \qquad |f(x)-L| < \varepsilon$$

$$0 < |x-a| < \delta \qquad |g(x)-M| < \varepsilon$$

مبرهنة (6):

(تفرد النهاية) اذا وجدت نهاية اقتران ما f عند a فانها متفردة .اى انه $M.L$ هما نهايتا f عند aفان $M = L$.

البرهان

افرض $f(x) = g(x)$ وأن $\varepsilon > 0$،فإنه يوجد δ بحيث انه اذا $0 < |x-a| < \delta$ فأن:

$$|f(x)-L| < \varepsilon \quad ،|f(x)-M| < \varepsilon$$

وعلى هذا، فإنه $\delta > |x-a| > 0$ نجد أن:

$$|L-M| = |L-f(x)+f(x)-M| \leq |f(x)-L| + |f(x)-M\,| < \varepsilon + \varepsilon$$

لذلك $L = M$

مبرهنة (7):

(القيمه المحصورة) أفرض $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$

لجميع x في فترة مفتوحة حول a الا ربما عند a نفسها إذا :

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$$

فإن $\lim_{x\to a} g(x)$ موجودة وتساوي L

البرهان

أفرض $\lim_{x\to a} f(x) = L \quad , \quad \lim_{x\to a} h(x) = L$

افرض ان $0 < \varepsilon$ حسب مبرهنة (5) توجد $0 < \delta$ مشتركة ،ويتحقق

$$0 < |x-a| < \delta \Rightarrow |f(x)-L| < \varepsilon \;, |h(x)-L| < \varepsilon$$

بما أن $f(x) \leq g(x)$ من المتباينة الاولى .

$$L-\varepsilon < f(x) \leq g(x) - (1)$$

كذلك لأن $g(x) \leq h(x)$ من المتباينة الثانية

$$g(x) \leq h(x) < L + \varepsilon \; - (2)$$

بجمع (1)و(2)

$$L - \varepsilon < g(x) < L + \varepsilon$$

أى أن

$$|g(x) - L| < \varepsilon$$

$$\therefore \lim_{x \to a} g(x) = L$$

مثال(1):

أوجد النهاية التالية

$$\lim_{x \to 1} (2x)(x - 1)$$

الحل

نلا حظ أن $t - 1 \leq [t] \leq t$

بوضع $t = 2x$

$$2x - 1 \leq [2x] \leq 2x$$

بضرب جميع الأطراف فى $(x - 1)$ وتصبح

$$(2x - 1)(x - 1) \leq [2x](x - 1) \leq (x - 1)2x$$

بما أن

$$\lim_{x \to 1} 2x(x - 1) = 0$$

وكذلك

$$\lim_{x \to 1} (2x - 1)(x - 1) = 0$$

من مبرهنة القيمة المحصورة نجد أن

$$\lim_{x \to 1}[2x](x-1) = 0$$

الباب الثالث

نظرية الحصر (السندوتش - الشطيرة)

1-3 نظرية الحصر أو (السندويتش- الشطيرة):

لتكن I فتره مفتوحة تنتمى إليها النقطة c حققت الدوال f, g, h الشرط:

$g(x) \leq h(x) \leq f(x)$ على الفترة $[c] - 1$

إذا كانت نهايات الدوال الثلاث موجودة عندما $x \to c$ فإن

1)

$$\lim_{x\to c} f(x) \leq \lim_{x\to c} h(x) \leq \lim_{x\to c} g(x)$$

2) إذا تحقق الشرط الإضافى

$$\lim_{x\to c} f(x) = \lim_{x\to c} g(x) = L$$

3) فإن

$$\lim_{x\to c} h(x) = L$$

وهذا ما نسمية بنظرية الحصر(السندويتش-الشطيرة)

البرهان

لكل عدد $0 < \varepsilon$ يوجد عددان موجبان δ_1, δ_2 يحققان

$$0 < |x - c| < \delta_1 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < f(x) - L < \varepsilon$$

$$\Rightarrow f(x) < L + \varepsilon$$

$$0 < |x - c| < \delta_2 \Rightarrow |g(x) - L| < \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < g(x) - L < \varepsilon$$

$$\Rightarrow L - \varepsilon < g(x)$$

وبأخذ δ مساوية أصغر العددين δ_1, δ_2 فإن

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow L - \varepsilon < g(x) \leq h(x) \leq f(x) < L + \varepsilon$$

$$\Rightarrow L - \varepsilon < h(x) < L + \varepsilon \Rightarrow -\varepsilon < h(x) - L < \varepsilon$$

$$\Rightarrow |h(x) - L| < \varepsilon$$

إذن لكل عدد $0 < \varepsilon$ يوجد عدد $0 < \delta$ بحيث يكون

$$0 < |x - c| < \delta \Rightarrow |h(x) - L| < \varepsilon$$

وهذا يعنى :

$$\lim_{x \to c} h(x) = L$$

2-3 نظريات على نظرية الحصر :

نظرية(1):

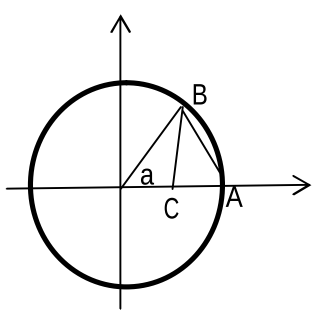
$$\lim_{a \to 0} \cos a = 1, \quad \lim_{a \to 0} \sin a = 1$$

البرهان

$$\lim_{a \to 0} \sin a = 1$$

نفرض أن الزاوية الموجهه a زاوية حادة ($0 < a < \frac{\pi}{2}$) ومقاسة بالتقدير الدائرى نلاحظ أن طول القوس $\widehat{AB}$ يساوى $ra = a$ $(r-1)$، وأن طول الضلع القائم (BC) فى المثلث القائم الزاوية ABC يساوى $Bc = \sin a$ لكن:

طول $\widehat{AB} > |AB| > |BC| > 0$ (لأن a زاوية حادة)



إذن: $a > \sin a > 0$

لكن

$$0 = \lim_{a \to 0^-} 0 = \lim_{a \to 0^-} a$$

إذن حسب نظرية الحصر :

$$\lim_{a \to 0^-} \sin a = 0$$

لنفرض الآن أن:

$$0 > a > \frac{\pi}{2} \to \frac{\pi}{2} > -a > 0$$

نعلم أن :

$$\sin a = -\sin -a$$

إذن :

$$\lim_{a \to 0^-} \sin a = -\lim_{-a \to 0^-} \sin(-a) = 0$$

ولأن $-a$ زاوية حادة نجد أن

$$\lim_{a \to 0} \sin a = 0$$

$$\lim_{a \to 0} \cos a = 0$$

نفرض أن :

$$\frac{\pi}{2} > a > -\frac{\pi}{2}$$

نعلم أن:

$$\cos a = \sqrt{1 - \sin a^2}$$

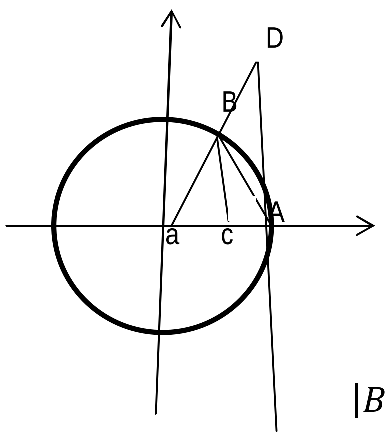
ومنه ($\cos a > 0$ لأن)

$$\lim_{a \to 0} \cos a = \sqrt{\lim_{a \to 0} (1 - \sin a^2) = 1}$$

نظرية (2):

$$\lim_{a \to 0} \frac{\sin a}{a} = 1$$

البرهان



نفرض أن a حادة ومقاسة بالتقدير الدائرى :

$$\frac{\pi}{2} > a > 0$$

نلاحظ أن :

$$|BC| = \sin a \,, \quad |AD| = \tan a$$

وكذلك فإن:

مساحة المثلث OAB>مساحة القطاع OAB>مساحة المثلث القائم OAD إذن:

$$\frac{1}{2}|OA||AD| > \frac{1}{2}r^2 a > \frac{1}{2}|OA||BC|$$

ومنه

$$\frac{1}{2}\tan a > \frac{1}{2}a > \frac{1}{2}\sin a$$

بالتقسيم على $\frac{1}{2}\sin a$ نجد :

$$\frac{1}{\cos a} > \frac{a}{\sin a} > 1$$

بالقلب نجد:

$$\cos a > \frac{\sin a}{a} > 1$$

لكن

$$\lim_{a\to0^-} \cos a = \lim_{a\to0^-} 1 = 1$$

إذن حسب نظرية الحصر نجد أن:

$$\lim_{a\to0^-} \frac{\sin a}{a} = 1$$

نفرض أن $0 > a > \frac{-\pi}{2} \Rightarrow \frac{\pi}{2} > -a > 0$ ($-a$ زاوية حادة)

نعلم أن $\frac{\sin(-a)}{(-a)} = \frac{\sin a}{a}$ إذن:

$\lim_{a\to0^-} \frac{\sin a}{a} = \lim_{-a\to0^-} \frac{\sin(-a)}{(-a)} = 1$ (لأن $-a$ زاوية حادة)

$$\therefore \lim_{a\to0} \frac{\sin a}{a} = 1$$

نظرية (3):

$$\lim_{a\to0} \frac{\tan a}{a} = 1$$

البرهان

$$\lim_{a\to0} \frac{\tan a}{a} = \lim_{a\to0} \frac{\frac{\sin a}{\cos a}}{a} = \lim_{a\to0} \frac{\sin a}{a \cos a} = \lim_{a\to0} \frac{1}{\cos a} \cdot \lim_{a\to0} \frac{\sin a}{a}$$

من النظرية(1) والنظرية (2) نجد أن :

$$\lim_{a\to0} \frac{\tan a}{a} = 1 \cdot 1 = 1$$

نتيجة :

$$\lim_{x\to a}\sin x = \sin a \quad , \quad \lim_{x\to a}\cos x = \cos a$$

البرهان

$$\lim_{x\to a}\sin x = \sin a$$

$$\sin x = \sin[(x-a)+a] = \sin(x-a)\cos a + \cos(x-a)\sin a$$

$$\lim_{x\to a}\sin x = \cos a \lim_{x\to a}\sin(x-a) + \sin a \lim_{x\to a}\cos(x-a) = \cos a \cdot 0 + \sin a \cdot 1 = \sin a$$

$$\therefore \lim_{x\to a}\sin x = \sin a$$

$$\lim_{x\to a}\cos x = \cos a$$

$$\cos x = \cos[(x-a)+a] = \cos(x-a)\cos a + \sin(x-a)\sin a$$

$$\lim_{x\to a}\cos x = \cos a \lim_{x\to a}\cos(x-a) + \sin a \lim_{x\to a}\sin(x-a) = \cos a \cdot 1 + \sin a \cdot 0 = \cos a$$

3-3 أمثلة لنظرية الحصر:

مثال(1): أوجد النهايات التالية

$$(i)\ \lim_{x\to 0} x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]\ (ii)\ \lim_{x\to 0} x^2\cdot\sin^2\frac{1}{x}$$

الحل

$$(i)\ \lim_{x\to 0} x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]$$

نلاحظ ان

$$t-1\le [t]\le t$$

$$\frac{1}{x}-1\le\left[\frac{1}{x}\right]\le\frac{1}{x}\qquad\qquad \forall x\ne 0$$

بضرب الأطراف فى x ينتج

$$1-x\le x\cdot\left[\frac{1}{x}\right]\le 1\qquad \forall x\ne 0$$

بما أن

$$\lim_{x\to 0} 1-x = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

وحسب نظرية الحصر

$$\therefore \lim_{x\to 0} x\cdot\left[\frac{1}{x}\right] = 1$$

$$(ii)\ \lim_{x\to 0} x^2\cdot\sin^2\frac{1}{x}$$

الحل

إذا كانت $x\ne 0$

$$0\le \sin^2\frac{1}{x}\le 1\qquad -(1)$$

وبضرب المعادلة(1) فى

x^2 فإن

$$0 \leq x^2 \sin^2 \frac{1}{x} \leq x^2$$

وبما أن

$$\lim_{x\to 0} 0 = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$$

حسب نظرية الحصر فإن

$$\lim_{x\to 0} x^2 \cdot \sin^2 \frac{1}{x} = 0$$

مثال(2): إذا كان

$$f(x) = \begin{cases} x^2, & x \text{عددنسبى} \\ x^4, & x \text{عددغيرنسبى} \end{cases}$$

فإن

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

الحل:

اذا كانت

$$|x| > 0$$

فإن $0 < f(x) \leq x^2$

وبما أن $\lim_{x\to 0} 0 = \lim_{x\to 0} x^2 = 0$

على حسب نظرية الحصر فإن :

$$\lim_{x\to 0} f(x) = 0$$

مثال(3):

أوجد النهايات التالية

$$(i) \lim_{x\to\infty} \sin\frac{2x}{x} \qquad (ii) \qquad \lim_{x\to\infty^-} \frac{\sin x + \cos 2x}{\sqrt{x^2+1}} \; (iii) \lim_{x\to 0} x\sin\frac{1}{\sqrt{x}}$$

الحل

$$(i) \lim_{x\to\infty} \sin\frac{2x}{x}$$

غير موجودة. $\sin 2x$ فإن نهاية ∞ عندما$x \to \infty$

نلجأ إذن لنظرية الحصر لإيجاد هذه النهاية،من الواضح أن

$$1 \geq \sin 2x \geq -1$$

الموجبة على جميع الأطراف،نجد أن: xبالقسمة على

$$\frac{1}{x} \geq \sin\frac{2x}{x} \geq -\frac{1}{x}$$

لكن:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} = \lim_{x\to\infty} -\frac{1}{x}=0$$

حسب نظرية الحصر.:.

$$\lim_{x\to\infty} \sin\frac{2x}{x}=0$$

$$(ii)\lim_{x\to\infty^-}\frac{\sin x+\cos 2x}{\sqrt{x^2+1}}$$

الحل

غير موجودة بالاستفادة من $\sin x + \cos 2x$ فإن نهاية المقدار $x \to -\infty$ عندما
نظرية الحصر ، نجد أن

$$1\geq\cos 2x\geq -1 \qquad ,1\geq\sin x\geq -1$$

بالجمع

$$2\geq\sin x+\cos 2x\geq -2$$

الموجب فإن $\sqrt{x^2+1}$ لنقسيم جميع الأطراف على المقدار

$$\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}\geq\frac{\sin x+\cos 2x}{\sqrt{x^2+1}}\geq\frac{-2}{\sqrt{x^2+1}}$$

لكن

$$\lim_{x\to\infty^-}\frac{2}{\sqrt{x^2+1}}=\lim_{x\to\infty^-}\frac{-2}{\sqrt{x^2+1}}=0$$

$$\therefore\lim_{x\to\infty^-}\frac{\sin x+\cos 2x}{\sqrt{x^2+1}}=0$$

$$(iii)\lim_{x\to 0}x\sin\frac{1}{\sqrt{x}}$$

الحل

غير موجودة $x \to 0$ عندما $\sin\frac{1}{\sqrt{x}}$ هنا أيضاً نهاية المقدار

$$-1\leq\sin\frac{1}{\sqrt{x}}\leq 1$$

بضرب جميع الأطراف بالمقدار x الموجبة ،نجد أن

$$-x \le x \sin\frac{1}{\sqrt{x}} \le x$$

لكن

$$\lim_{x\to 0} -x = \lim_{x\to 0} x = 0$$

$$\therefore \lim_{x\to 0} x \sin\frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

مثال(4):

$$(i) \quad \lim_{x\to 0} \sin\frac{3x}{x} \qquad (ii) \quad \lim_{x\to 0} \tan\frac{4x}{x} \qquad (iii) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\sin 5x}{\tan 4x} \qquad (iv) \quad \lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\tan 3x}$$

الحل

$$(i) \quad \lim_{x\to 0} \sin\frac{3x}{x}$$

$$\lim_{x\to 0} \sin\frac{3x}{x} = 3 \lim_{x\to 0} \sin\frac{3x}{3x} = 3 \times 1 = 3$$

$$(ii) \quad \lim_{x\to 0} \tan\frac{4x}{x}$$

الحل

$$\lim_{x\to 0} \tan\frac{4x}{x} = 4 \lim_{x\to 0} \tan\frac{4x}{4x} = 4 \times 1 = 4$$

$(iii)\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\tan 4x}$

الحل

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{\tan 4x}=\frac{5}{4}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\sin 5x}{5x}}{\frac{\tan 4x}{4x}}=\frac{5}{4}$$

$(iv)\qquad \lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\tan 3x}$

الحل

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan 2x}{\tan 3x}=\frac{2}{3}\lim_{x\to 0}\frac{\frac{\tan 2x}{2x}}{\frac{\tan 3x}{3x}}=\frac{2}{3}$$

بشكل عام ،فإن:

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\tan ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}\qquad\qquad \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\tan bx}{\sin ax}=\frac{b}{a}$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\sin(ax)}{x}=a\qquad\qquad \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{\tan(bx)}{x}=b$$

$$\lim_{x\longrightarrow 0}\frac{x}{\sin(ax)}=\frac{1}{a}\qquad\qquad \lim_{x\longrightarrow 0}\frac{x}{\tan(bx)}=\frac{1}{b}$$

بعض المتطابقات الشهيرة:

1) $\sin(a+b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

2) $\cos(a+b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$

3) $\sin a - \sin b = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right) \times \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

4) $\cos a - \cos b = -2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \times \sin\left(\frac{a-b}{2}\right)$

5) $\sin 2a = 2\sin a \cos a$

6) $\cos 2a = \cos^2 a - \sin^2 a$

7) $\cos 2a = 1 - 2\sin^2 a$

8) $\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$

9)$(x+a)^3 = (x+a)(x^2 - ax + a^2) = x^3 - 3ax^2 + 3xa^2 + a^3$

10) $(x-a)^3 = (x-a)(x^2 + ax + a^2 = x^3 - 3ax^2 + 3xa^2 - a^3$

الباب الرابع

العمليات الحسابية في المتتاليات بالتطبيق على النهايات

1-4: العمليات الحسابية فى المتتاليات بالتطبيق على النهايات:

نظرية:

لتكن$\{x_n\}, \{y_n\}$متتاليتين عدديتين متقاربتين من a, b فعندئذ

$$\lim_{n\to\infty}(x_n \pm y_n) = a \pm b$$

البرهان

حسب الفرض أن $x_n \to a$, $y_{n\to b}$ فعندئذ حسب التعريف من أجل إى عدد $\varepsilon > 0$ يوجد عددان طبيعيان n_1, n_2 بحيث

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n \geq n_1$$

$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall n \geq n_2$$

من أجل $n_\circ = \max(n_1, n_2)$ نجد بسهولة أنه إذا كان $n \geq n_\circ$ فإن

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{2} |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2}$$

بناء على ذلك نجد:

$$|x_n \pm y_n| - (a \pm b) = |(x_n - a) \pm (y_n - b)| \leq |x_n - a| + |y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

إذن المتتالية

$$(x_n \pm y_n) \to a \pm b$$

نظرية:

لتكن$\{x_n\}\{y_n\}$ متتاليتين عدديتين متقاربتين من a, b على الترتيب فعندئذ

$$\lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = a \cdot b$$

البرهان

نحسب أولاً المقدار التالى معتمدين على خواص القيمة المطلقة

$$|x_n y_n - ab| = |x_n y_n - a y_n + a y_n - ab| \leq |x_n y_n - a y_n| + |a y_n - ab|$$
$$\leq |y_n||x_n - a| + |a||y_n - b| \ \ldots \ldots . \ (1)$$

بما أن المتتالية $\{y_n\}$ تقاربية من العدد b ومحدودة بالتالى يوجد عدد حقيقى $k > 0$ بحيث يكون $|y_n| < k$ من أجل جميع $n \leq 1$ ومن ثم يمكننا إيجاد M يحقق العلاقتين

$$|a| < m \qquad |y_n| < m \qquad \forall n \in N$$

بما أن $x_{n\to a}$ فإنه حسب التعريف التقاربى

من إجل إى عدد حقيقى $\varepsilon > 0$ يمكننا إيجاد عدد طبيعى n_1 بحيث تحقق المتراجحه

$$|x_{-n} - a| < \frac{\varepsilon}{2M} \qquad \forall n \geq n_1 \qquad (2)$$

وبما أن $y_n \to b$ فايضاً نجد أنه من أجل عدد حقيقى $\varepsilon > 0$ يمكننا إيجاد عدد طبيعى n_2 بحيث تتحقق المتراجحه

$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{2M} \qquad \forall n \geq n_2 \qquad (3)$$

من أجل $n_\circ = \max(n_1, n_2)$ نجد بسهولة أن المتراجحتين (2),(3)تحققان معاً وذلك $\forall n \geq n_\circ$

وبالتالى بالتعويض فى (1) نجد

$$|x_n y_n - ab| < M\frac{\varepsilon}{2M} + M\frac{\varepsilon}{2M} = \varepsilon$$

نظرية :

لتكن $\{y_n\}$ متتابعة عددية متقاربة من b و$b \neq 0$ فإنه يوجد عدد طبيعى $n_\circ$ بحيث تحقق المتراجحة

$$|y_n| > \frac{|b|}{2} \qquad \forall n \geq n_\circ$$

البرهان

من أجل العدد الحقيقى$\frac{|b|}{2}$ و$\varepsilon > 0$ يمكن إيجاد عدد طبيعى $n_\circ$ بحيث تحقق المتراجحه

$$|y_n - b| < \frac{|b|}{2} \qquad \forall n \geq n_\circ$$

وعندئذ يكون لدينا:

$$|y_n| = |(y_n - b) + b| \geq |b| - |y_n - b| > |b| - \frac{|b|}{2} = \frac{|b|}{2} > 0$$

نظرية :

لتكن $\{x_n\}, \{y_n\}$ متتاليتين عدديتين تقاربتين من b, a على الترتيب وإذا كانت المتتالية

$y_n \neq 0$, $\forall n \in N$ وكان $b \neq 0$ فإن:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{x_n}{y_n}\right] = \frac{a}{b}$$

البرهان

أولاً :

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| = \left|\frac{x_n b - y_n a}{y_n b}\right| = \frac{|(x_n - a)b + (b - y_n)a|}{|y_n||b|} \leq \frac{|x_n - a|}{|y_n|} + \frac{|b - y_n||a|}{|y_n||b|}$$

حسب النظرية السابقة يكون $\frac{|b|}{2} < |y_n|$ وذلك لكل $\forall n \geq n_1$ ولنفرض أن $\varepsilon > 0$ عدد كيفى عندئذ

بما أن $x_n \to a$ فإنه يمكن إيجاد عدد طبيعى n_2 بحيث تحقق المتراجحه :

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon|b|}{4} \qquad \forall n \geq n_2$$

وبما أن $y_n \to b$ فإنه يوجد عدد طبيعى n_3 بحيث تحقق المتراجحه

$$|a||y_n - b| < \frac{\varepsilon b^2}{4}$$

بفرض $n_\circ = \max(n_1, n_2, n_3)$ نجد أنه :

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - \frac{a}{b}\right| < \frac{\varepsilon|b|}{4} \cdot \frac{2}{|b|} + \frac{\varepsilon b^2}{4}\frac{1}{|b|} \cdot \frac{2}{|b|} = \varepsilon \qquad \forall n \geq n_\circ$$

2-4: الإنتقال إلى النهايات فى المتراجحات:

نظرية:

إذا كانت المتتالية $\{x_n\}$ متقاربة ،وكان $x_n \geq 0 \forall n \in N$ فإن

$$\lim_{n\to\infty} x_n \geq 0$$

البرهان

لو فرضنا العكس $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $a < 0$ وبالتالى حسب تعريف التقارب نجد أن :

$$\forall \varepsilon > 0, \exists n_\circ \in N, \qquad |x_n - a| < \varepsilon \qquad \forall n \geq n_\circ$$

$$\Rightarrow a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \qquad \forall n \geq n_\circ$$

لو أخذنا $\frac{|a|}{2} > \varepsilon > 0$ وعوضنا بالطرف الأيمن من المتراجحه السابقة نجد

$$x_n < \frac{a}{2} < 0$$

لكن هذا يناقض الفرض لأن

$$x_n \geq 0 \qquad \forall n \in N$$

نظرية:

إذا كانت $\{x_n\}, \{y_n\}$ متتاليتين متقاربتين من a, b على الترتيب وكان $x_n \leq y_n$ مهما يكن n فإن $a \leq b$

البرهان

لنأخذ المتتالية $(y_n - x_n)$ حيث

$$(y_n - x_n) \geq 0 \qquad \forall n \in N$$

فحسب النظرية السابقه نجد:

$$\lim_{n\to\infty} (y_n - x_n) = \lim_{n\to\infty} y_n - \lim_{n\to\infty} x_n \geq 0$$

$$\therefore \lim_{n\to\infty} y_n \geq \lim_{n\to\infty} x_n$$

نظرية :

إذا كانت المتتاليتين $\{x_n\}, \{y_n\}$ متقاربتين من نقطة واحدة a وإذا كانت المتتالية $\{z_n\}$ تحقق المتراجحة

$$x_n \leq z_n \leq y_n \qquad \forall n \in N$$

فإن المتتالية $\{z_n\}$تتقارب أيضاً من نفس النقطة a

البرهان

من أجل إى عدد حقيقى $\varepsilon > 0$ يمكننا إيجاد عددين طبيعيين $n_1, n_2 \in N$ بحيث تحقق المتراجحتان:

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \qquad \forall n \in n_1$$

$$a - \varepsilon < y_n < a + \varepsilon \qquad \forall n \in n_2$$

لنضع $n_\circ = max(n_1, n_2)$ عندئذ $\forall n \in n_\circ$ يكون لدينا:

$$a - \varepsilon < x_n \leq z_n \leq y_n < a + \varepsilon \qquad \forall n \geq n_\circ$$

أي:

$$a - \varepsilon < z_n < a + \varepsilon$$

وبالتالي المتتالية $\{z_n\}$ تتقارب من النقطة a .

3-4: اللامتناهيات فى الكبر واللامتناهيات فى الصغر:

1- اللامتناهيات فى الكبر:

لتكن $\{x_n\}$ متتالية عددية ما، نقول عن هذه المتتالية أنها لامتناهية فى الكبر (متباعدة) إذا كان من أجل إى عدد $M > 0$ يمكن إيجاد عدد طبيعى $n_\circ$ بحيث تحقق المتراجحة .

$$x_n > M \qquad \forall n \in n_\circ$$

اى إذا كانت المتتالية $\{x_n\}$ تحقق الشرط:

$$\forall m > 0 , \exists n_\circ(m) \in N , x_n < +m \qquad \forall n \in n_\circ$$

فإن المتتالية $\{x_n\}$ تكون متباعدة نحو $+\infty$ اى أن:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = +\infty$$

إما إذا تحققت المتتالية $\{x_n\}$ الشرط:

$$\forall M > 0 , \exists n_\circ(M) \in N, x_n < -M \qquad \forall n \geq n_\circ$$

فإن المتتالية $\{x_n\}$ تكون متباعدة نحو $-\infty$ اى أن:

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\infty$$

مثال(1):

أثبت أن المتتالية $\{3^{2n-1}\}$ تسعى نحو اللانهاية عندما $n \to \infty$ اى

$$\lim_{n\to\infty} 3^{2n-1} = \infty$$

الحل

حسب التعريف $\forall m > 0$ يمكن إيجاد عدد طبيعى $n_\circ$ يتعلق ب M بحيث يحقق المتراجحة

$$x_n > M \Rightarrow 3^{2n-1} > M \qquad\qquad \forall n \geq n_\circ(M)$$

وبالتالى $(2n-1)\log 3 > \log m$

اى أن

$$n > \frac{1}{2}\left(\frac{\log m}{\log 3} + 1\right)$$

لو أخذنا $n_\circ$ أصغر عدد طبيعى يحقق المتراجحة السابقة

$$n_\circ > \frac{1}{2}\left(\frac{\log m}{\log 3} + 1\right)$$

مثال(2):

اثبت أن

$$\lim_{n\to\infty} (1-2n)$$

الحل

$$\forall m > 0\ \exists n_\circ(m) \in N\,, \qquad x_n < -m \qquad \forall n \geq n_\circ(m)$$

$$(1-2n) < -m \Rightarrow 2n - 1 > m \Rightarrow n > \frac{1}{2}(m+1)$$

بأخذ $n_\circ$ أصغر عدد طبيعى يحقق المتراجحة السابقة

$$n_\circ > \frac{1}{2}(m+1)$$

عندئذ يتحقق تعريف التباعد اى:

$$\lim_{n\to\infty}(1-2n) = \infty$$

خواص المتتاليات اللامتناهيات فى الكبر:

لتكن $\{x_n\}, \{y_n\}$ متتالتين عدديتين

(1) لو فرضنا $\{x_n\}$ محدودة وكانت $\lim_{n\to\infty} y_n = +\infty$ فإن

$$\lim_{n\to\infty}(x_n + y_n) = +\infty \ ,\ \lim_{n\to\infty}(x_n) - y_n = -\infty$$

$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{y_n} = 0$ أنحيث $x_n \neq 0$ وذلك $\forall n \in N$

(2) إذا كانت $x_n \to +\infty \quad y_n \to +\infty$

عندئذ

$$\begin{cases} \lim_{n\to\infty}(x_n + y_n = +\infty) \\ \lim_{n\to\infty}(x_n \cdot y_n = +\infty) \end{cases}$$

(3)إذا كانت $\{y_n\}$ متتالية متقاربة من عدد $b \neq 0$ وكانت

$$\lim_{n\to\infty} x_n = +\infty$$

فإن:

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \begin{cases} +\infty & if b > 0 \\ -\infty & if b < 0 \end{cases}$$

(4) إذا كانت المتتالية $\{y_n\}$ متقاربة من عدد a وكانت

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \pm\infty$$

فإن:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = 0$$

(5) إذا كانت

$$a \neq 0 \quad \text{حيث} \lim_{n\to\infty} x_n = a$$

$$y_n > 0 \text{ حيث } \lim_{n\to\infty} y_n = 0$$

فإن:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \begin{cases} +\infty & if\ a > 0 \\ -\infty & if\ a < 0 \end{cases}$$

2- اللامتناهيات فى الصغر:

لتكن $\{x_n\}$ متتالية عددية ما، نقول عن هذه المتتالية أنها لامتناهية فى الصغر إذا كانت

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 0$$

اى حسب التعريف للنهاية المتتالية حيث $a = 0$ فأن :

$$\forall \varepsilon > 0 \ , \exists n_\circ \in N \ , |x_n - 0| = |x_n| < \varepsilon \qquad \forall n \in n_\circ$$

مثال:

أثبت أن المتتالية $\{x_n\}$ تسعى نحو الصفر عندما $n \to +\infty$

حسب التعريف

$$\forall \varepsilon > 0\,, \exists n_\circ \in N\,,\quad |x_n - 0| < \delta \qquad\qquad \forall n \geq n_\circ$$

لو أخذنا n_0 أصغر عدد طبيعي يحقق المتراجحة السابقة فيكون قد تم المطلوب

مثال(1):

أوجد نهاية المتتالية التى حدها العام

$$x_n = \frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n} \qquad\qquad n \to \infty \text{ عندما}$$

الحل

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n}\right] = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\cdot\lim_{n\to\infty}\sin\frac{n\pi}{2}$$

لكن المتتالية $\sin\frac{n\pi}{2}$ هى متتالية محدودة والمتتالية $\frac{1}{n} \to 0$ عندما $n \to \infty$

وحسب البند الأول من النظرية السابقة فإن المتتالية

$$\frac{\sin\frac{n\pi}{2}}{n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

الباب الخامس

مستخلص البحث

المراجع

مستخلص البحث :

في هذا الفصل سوف نوجز ما تم فى البحث فى الفصول السابقة :ويمثل خلاصة أو نتائج ما توصل (تعرف)علية الباحثون ويتلخص فى الأتي:

تناول الباحثون فى الفصل الأول تعريف النهاية حيث جاء التعريف كما يلى(يقال أن العدد الحقيقي b هو نهاية الدالة $f(x)$ عند النقطة $x = a$ إذا كان لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث أن:

$$\forall x \in G: 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$$

إذا كانت b هى نهاية دالة ما عند النقطة a فإن هذا يستلزم أن تكون قيم الدالة قريبة جداً من العدد b عندما xتكون قريبة قرباً كافياً من a)

وتطرقوا إلى النهاية من الطرف الأيمن والطرف الأيسر بالتعريف وبعض الأمثلة حيث جاء التعريف كما يلى:

(أفرض f معرفاً على a, c نقول للعدد L هو نهاية $f(x)$ عندما x تقترب من a من اليمين وتقترب من c من اليسار إذاً لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ ويحقق:

$$0 < x - a < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

وتكتب :

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = L$$

ونقول نهاية f من اليمين موجوده

$$-\delta < x - c < 0 \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

وتكتب:

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = L$$

ونقول نهاية f من اليسار موجوده

مثلاً:

$$\lim_{x \to 1^+} x^2 - 2\sqrt{x-1} = 1 - 2\sqrt{0} = 1$$

$$\lim_{x \to 0^-} x^2 - 2\sqrt{x+1} = 0 - 2\sqrt{0+1} = -2$$

وتطرق الباحثون أيضاً للنهايات بأوضاع تعينها إلى أربعة بالتعريف وبالتمثيل ونوجز هذه الأوضاع فى الأتى :

(1) ينتهى فيها البسط والمقام فى آن واحد نحو الصفر $\left(\frac{0}{0}\right)$

(2) ينتهى فيها البسط والمقام نحو $\left(\frac{\infty}{\infty}\right)$

(3) حالة عدم التعين من الشكل $\infty - \infty$

(4) حالة عدم التعين من الشكل $0 \times \infty$

وفى الفصل الثانى :تم إثبات بعض نظريات النهايات الأساسية حيث تمثل حجر أساس بالنسبة لأعلى النظريات والتطبيقات فى التحليل الحقيقى و التفاضل والتكامل ويمكن إختصارها فى الأتى:

1- نهاية مجموع دالتين تساوى مجموع نهايتى الدلتين

$$\lim_{x\to a} f(x) + g(x) = \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} g(x)$$

2- الضرب بثابت ،لاى c عدد ثابت فأن

$$\lim_{x\to a} cf(x) = c\lim_{x\to a} f(x)$$

3- نهاية حاصل ضرب دالتين تساوى حاصل ضرب نهايتى الدالتين

$$\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = \lim_{x\to a} f(x)\cdot \lim_{x\to a} g(x)$$

4- (تفرد النهاية) إذا وجدت نهاية إقتران ما fعند a فإنها متفردة .أى أن m, L هما نهايتا f عند a فإن $m = L$

وفى الفصل الثالث تعرف الباحثون على نظرية السندويتش حيث تمثل مشكلة البحث وموضوع الدراسة وتناول الباحثون النظرية بالإثبات وتطرقوا إلى بعض النظريات المتعلقة بها ومع بعض الأمثلة وتنص نظرية السندويتش على الأتى :

(أفرض $f(x) \le g(x) \le h(x)$ لجميع x فى فترة المفتوحة حول a الا ربما عند a نفسها إذا:

$$\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{x\to a} h(x) = L$$

فإن

$$\lim_{x\to a} g(x) = L \quad)$$

فى الفصل الرابع تناول الباحثون العمليات الحسابية فى المتتاليات بالتطبيق على النهايات حيث تطرقوا إلى نظريات توضح كيفية العمليات كالجمع،الطرح،الضرب والقسمه بالبرهان ويمكن توضيح النظريات كما يلى :

1- لتكن $\{x_n\}, \{y_n\}$ متتاليتين عدديتين متقاربتين من a, b فعندئذ

$$\lim_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = a \pm b$$

2- لتكن $\{x_n\}, \{y_n\}$ متتاليتين عدديتين متقاربتين من b, a على الترتيب فعندئذ

$$\lim_{n\to\infty} x_n \cdot y_n = a \cdot b$$

3- لتكن $\{x_n\}, \{y_n\}$ متتاليتين عدديتين متقاربتين من b, a على الترتيب وإذا كانت المتتالية

$\forall n \in N$ وكان $b \neq 0$ $y_n \neq 0$ فإن:

$$\lim_{n\to\infty} \left[\frac{x_n}{y_n}\right] = \frac{a}{b}$$

وتم دراسة تقارب وتباعد المتتاليات بالبرهان والتعرف على بعض الخواص عليها.

المراجع:

1)حساب التفاضل والهندسة التحليلية .

د:إبراهيم ديب سرمينى

فهرسة مكتبة الملك فهد الوطنية أثناء النشر.

رقم الإيداع:22\2602 .

2)أساسيات التفاضل والتكامل.

خالد قاسم سمور.

الطبعة الثانية :2004-1425

دار الفكر

3)حساب التفاضل والتكامل(الجزء الأول)

د:طه موسى العدوى

4)الحسبان الشامل فى التفاضل الشامل والهندسة التحليلية(الجزء الأول)

د:عبد المجيد نصير

د:سيام الناشف

دار الكندى للنشر والتوزيع –أربد

رقم الأيداع لدى المكتبة الوطنية

1996\9\ 1226

5)الرياضيات (2)

د:محمد خليل الصباغ

مدرس بكلية الهندسة الميكانيكية

جامعة حلب

6)التفاضل والهندسة التحليلية

تأليف:عمر حسن الرشيد

دار صفاء للنشر والتوزيع

7)حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية

تأليف:وليم دورفي

كلية مونت هولبوك

الدار الدولية للنشر والتوزيع

8)التفاضل والتكامل

تأليف:عمر حسين القادري

جمال محمد البتسنجى

دار صفاء للنشر والتوزيع