جامعـــة السودان للعلوم و التكنولوجيا

كليـــة التربية

قســـم الرياضيات

بحث تكميلي لنيل درجة البكالوريوس في الرياضيات

بعنـــوان :

التفاضل و التكامل المعتل في التحليل الحقيقي

إعداد الطلاب :

- أحمد عبد القادر السنوسي عبد الله
- حسن محمد اسحاق عبد الواحد
- عبد القادر رابح محمود الصادق
- مجاهد فخر الدين محمد عمر

إشراف الأستاذ :

عبد القادر البشري الضي

2014م

الايـــة

قال تعالي

(هُوَ الَّذِي جَعَلَ الشَّمْسَ ضِيَاء وَالْقَمَرَ
نُورًا وَقَدَّرَهُ مَنَازِلَ لِتَعْلَمُواْ عَدَدَ
السِّنِينَ وَالْحِسَابَ مَا خَلَقَ اللّهُ ذَلِكَ إِلاَّ
بِالْحَقِّ يُفَصِّلُ الآيَاتِ لِقَوْمٍ يَعْلَمُونَ {51})

صدق الله العظيم.

(سورة يونس :الآية51)

الإهداء

إلى من جرع الكأس فارغاً ليسقيني قطرة حب

إلى من كلت أنامله ليقدم لنا لحظة سعادة

إلى من حصد الأشواك عن دربي ليمهد لي طريق العلم

إلى القلب الكبير

والدي العزيز

إلى من أرضعتني الحب و الحنان

إلى رمز الحب و بلسم الشفاء

إلى القلب الناصع بالبياض

والدتي الحبيبة

إلى القلوب الطاهرة الرقية و النفوس البريئة إلى رياحين حياتي
إخوتي
الآن تفتح الأشرعة و تدفع المرساة لتنطلق السفينة في عرض بحر واسع
مظلم هو بحر الحياة و في هذه الظلمة لا يضيء إلا قنديل الذكريات
ذكريات الأخوة البعيدة إلى الذين أحببتهم و أحبوني
أصدقائي
إلى أستاذنا الجليل
عبد القادر البشرى الضي
إلى جامعة السودان للعلوم و التكنولوجيا
كلية التربية
و لك الشموخ أيتها القامة الخضراء
إلى هؤلاء أهدي هذا البحث المتواضع

الشكر و التقدير

كن عالماً فإن لم تستطيع فكن متعلماً ، فإن لم تستطيع فحب العلماء ، فإن لم تستطيع فلا تبغضهم .

في مثل هذه اللحظات يتوقف اليراع ليفكر قبل أن يخط الحروف ليجمعها في كلمات .تتبعثر الأحرف عبثاً و يحاول تجميعها في سطور كثيرة تمر في الخيال ولا بقي لنا في نهاية المطاف إلا قليلاً من الذكريات وصور تجمعنا برفاق كانوا بحياتنا.... فواجب علينا شكرهم ووداعهم ونحن نخطو خطواتنا الأولي في غمار الحياة و نخص بالجزيل الشكر والعرفان إلي كل من أشعل شمعة في دروب عملنا و إلي من وقف علي المنابر و أعطي من حصيلة فكره لينير دربنا إلي الأساتذة الكرام في كلية التربية.

و أخص بالتقدير و الشكر الأستاذ / عبد القادر البشرى الضي الذي تفضل بالإشراف على هذا البحث نقول له بشراك قول رسول الله صلى الله عليه و سلم (إن الحوت في البحر و الطير في السماء ليصلون علي معلم الناس الخير) .

و لا ننسى أن نشكر كل الجهات التي ساعدتنا في إخراج هذا البحث بهذه الصورة .

فهرس المحتويات

مقدمـــــــة :

علم التفاضل و التكامل يعتبر أحد فروع الرياضيات المهمة جداً نشأ منذ القرن السابع عشر الميلادي وتطور بعد ذلك فقد تم استنتاج طرق عديدة في حساب التفاضل و التكامل كان لها عظيم الأثر في تحقيق هذا التطور .

و يستخدم هذا العلم في مجالات مختلفة للعلوم و المعرفة كالفيزياء و جميع فروع الهندسة لإثبات النظريات و لحل المسائل العلمية و على سبيل المثال ولتصميم جناح الطائرة يستخدم مبادئ الديناميكا الهوائية أحد فروع الفيزياء التي تستخدم المعادلات الرياضية لمعرفة ردود فعل الجناح تحت تأثير الظروف المختلفة و بحساب التفاضل و التكامل يمكن استخلاص هذه المعادلات من مبادئ الديناميكا الهوائية حيث يقوم مبدأ التفاضل على حساب التغير في قيمة ما بين نقطتين بالنسبة متغير آخر و من ثم تقليل الفرق للمتغير لحساب أرق التغيير و ذلك في يؤول الفرق بين قيمتين المتغير الثاني للصفر أما حساب التكامل فهو إيجاد التابع الأصلي للدالة التي نريد تكاملها و قد عرض جو تقرير لا يبتذ في سنة 1675 أو لعملية تكامل لحساب المساحة تحت

المنحنى $y = f(x)$ و أعتبر أن تكامل الدالة الحقيقية ذات قيم لمتغير حقيقي هي المساحة المحصورة بين المنحنى f(x) و المستقيمين $x = a$, $x = b$ و يمكن صياغة ذلك رياضياً :

$$S = \{(x , y) \in R^2 : a \le x \le b , 0 \le y \le f(x)\}$$

و يرمز لهذه العملية حسب العالم لورينتز كالآتي $\int_a^b f(x)dx$ و إذا كان إحدى حدود التكامل أو كلاهما يساوي سالب أو موجب ما لانهاية يسمى التكامل المعتل أو الدالة غير معرفة وهو أحد مواضع هذا البحث .

أهداف البحث:

1. التعرف على المشتقات الاتجاهية .
2. التعرف على صيغ التكامل المعتل و خواصه .
3. تطبيق مفهوم النهاية في حل التكامل المعتل .

أهمية البحث :

تكمن أهمية البحث في أن التفاضل و التكامل يعتبر من أهم فروع الرياضيات و ذلك لعلاقة تطبيقاته المتصلة بالعلوم الأخرى لذلك كانت الأهمية لدراسة التفاضل و التكامل المعتل وبعض نظرياته و خصائص المختلفة التي تعني بكيفية حسابه .

الفصل الأول

التفاضل

المشتقات ى R :

(1-1) دالة المتغير :

هي قاعدة تشارك فيها تماماً كل قيمة للمتغير xفي فئة خطية مع متغير آخر y.

يسمى المتغير y في هذه الحالة متغير غير مستقل و يسمى المتغير x بالمتغير المستقل .

و الفئة التي يمكن اختباره المتغير xمنها يسمى مجال الدالة و الفئة التي تحتوي على قيم المقابلة للمتغير y تسمى مدى الدالة .

إذا كانت الدالة fمعرفة على جوار يحتوي x_0 على في R فإن :

$$f(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

عندما يكون $f(x_0)$ موجوداً فإننا نقول بأن f قابلة للاشتقاق عند x_0 و تسمى $f(x_0)$ المشتقة الأولى للدالة f عند x_0.

ومن أهم تطبيقات المشتقة الأولى هو إيجاد (القيم الصغرى المحلية) القيم العظمى المحلية و القيم الصغرى المحلية .

من الملاحظ أنه إذا كانت الدالة f معرفة على جوار يحتوي على x_0 و لها قيم قصوى محلية عند x_0 فإنه إذا كانت f قابلة للاشتقاق فلابد أن يكون $f(x_0) = 0$

من بين النظريات التي درست في مبادئ حساب التفاضل و التكامل نظرية رول و التي توضح أنه إذا كانت f متصلة على $[a , b]$ و قابلة للاشتقاق على $]a , b[$ و بالإضافة إلى ذلك يكون $f(a) = f(b)$ ، فإن هناك نقطة على الأقل x_0 في $]a , b[$ حيث $f(x_0) = 0$.

نستطيع كذلك تعميم هذه النظرية إلى ما يسمى بنظرية القيمة الوسطى والتي تقول: (إذا كانت f دالة متصلة على $[a , b]$ و قابلة للاشتقاق على $]a , b[$ ، فإن هناك على الأقل $x_0 = \in$ $]a , b[$ حيث :

$$f(x_0) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

نظرية القيمة الوسطى تساعد على ربط خواص الدالة f بخوص مشتقتها الأولى على سبيل المثال إذا عرفنا أن $f'(x_0) > 0$ لكل $x = \in [a , b]$ فإن ذلك يؤديإلى وجود على الأقل عدد واحد $c \in (x , y)$ حيث أن :

$$f(y) - f(x) = f(c)(y - x) > 0$$

و من ذلك نجد أن :

$$f(y) > f(x)$$

و الذي يوضح أن الدالة f دالة تزايدية على $[a , b]$.

عرفنا كذلك أن إذا كانت الدالة f مطردة تناقصية أو تزايدية على $[a , b]$ و قابلة للاشتقاق على $]a , b[$ بحيث أن $f(x) \neq 0$ لكل $x = \in [a , b]$ فإن f^{-1} لكل $x = \in [a , b]$ ، فإن f^{-1} موجودة على الفترة $[a , b]$ و قابلة للاشتقاق على $[c , d]$ و يكون :

لكل $y \in [a , b]$.

من المعروف كذلك أنه إذا كانت f و g دالتين قابلتين للاشتقاق عند a فإن $f + g$ ، fg ، λg ، عندما يكون λ عدد حقيقي كلها دوال قابلة للاشتقاق عند a و بالإضافة إلى ذلك إذا كان $g(a) \neq 0$ فإن الدالة $\frac{f}{g}$ تكون أيضاً قابلة للاشتقاق عند a .

نظريات القيمة المتوسطة :

(2-1) **نظرية القيمة لمتوسطة الأولى** :

إذا كانت f(x , y) دالة مستمرة في منطقة مغلقة و إذا كانت المشتقة الأولى موجودة في منطقة مفتوحة فإن :

$$f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = h\big(x_0(x_0\theta h, y_0 + \theta k)\big) + kf(y)(x_0 + +\theta h_1 y_0 + \theta k) \ 0 < \theta < 1$$

و أحياناً تكتب على الصورة $K = \Delta y = y - y_0 , h = \Delta x = x - x_0$

(3-1) **نظرية تايلور للقيمة المتوسطة** :

إذا كانت كل المشتقات الجزئية الفرعية للدالة $f(x , y)$ مستمرة في منطقة مغلقة و إذا كانت المشتقات الجزئية التي رتبتها $(n + 1)$ الفرعية موجودة في منطقة مفتوحة فإن :

$$\begin{aligned} f(x_0 + h, y_0 + k) &= f(x_0, y_0) + \left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right) f(x_0, y_0) \\ &+ \frac{1}{2!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^2 f(x_0) \ldots \\ &+ \frac{1}{n!}\left(h\frac{\partial}{\partial x} + k\frac{\partial}{\partial y}\right)^n f(x_0, y_0) + R_n \end{aligned}$$

حيث R_n هو الباقي بعد n من الحدود .

(4-1) المشتقات الاتجاهية للدوال على R^n:

الاتجاه في حالة R^nهو عبارة عن نقط B بحيث يكون$\|B\|$=1، مثل هذه النقطة تقع على كل وحدة .

لنفرض أنx_0 نقطة في R^n .

إذا تحركنا من النقطةx_0 في اتجاه B فإن التسارع عندx_0 في اتجاه B هو كل النقط$x_0 + tB$ حيث t $\geq$ 0.

إذا كانت f دالة معرفة على R^n و متصلة عندx_0 فإن المشتقة الاتجاهية للدالة fعند x_0 في اتجاه B هي :

$$(DBf)(x_0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(x_0 + tB) - f(x_0)}{t}$$

مثال **1 :**

إذا كانت $f(x,y) = x^2 + 3y$ و $B = \left(\frac{1}{\sqrt{2}},\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

فأوجد $DBf(x_0)$.

الحل

$$x_0 + tB = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, 2 + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

$$f(x_0 + tB) = f\left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + 3\left(2 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2 + 3\left(2 + \frac{t}{\sqrt{2}}\right)$$

$$1 + \frac{t}{\sqrt{2}} + \frac{t^2}{2} + 6 + \frac{3t}{\sqrt{2}} = 7 + \frac{5t}{\sqrt{2}} + \frac{t^2}{2}$$

$$DBf(x_0) = \lim_{t\to 0}\frac{7 + \frac{5t}{2} + t^2 - 7}{t} = \frac{5}{\sqrt{2}}$$

(5-1) المشتقات الجزئية :

المشتقات الجزئية للدالة f على مجموعة جزئية A من R^n هي المشتقات الاتجاهية والتي يمكن الحصول عليها بوضع B مساوية لإحدى متجهات الوحدة :

$$(0,0,0, \dots \dots , 1), \dots , (0,1,0, \dots ,0), (1,0,0, \dots ,0)$$

فمثلاً $(\Delta xf)(x_0)$ هي المشتقة الجزئية للدالة f عند x_0 في اتجاه $(1,0,0, \dots ,0)$.

إذا كانــت $w = f(x, y, z)$ و $B = (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1)$ فــإن $\Delta_1 f = f_1$ ، $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، $\frac{\partial w}{\partial x}$ ، $f(x)$ ، $w(x)$ كلها تدل على المشتقة الجزئية للدالة f في اتجاه (1,0,0) .

بنفس طريقـة تعريف المشتقة الاتجاهيـة نستطيع تعريف المشتقة الجزئيـة ، فمثلاً في حالـة R^n نعرف :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x+t, y, z) - f(x, y, z)}{t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x, y+t, z) - f(x, y, z)}{t}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{t \to 0} \frac{f(x, y, z+t) - f(x, y, z)}{t}$$

نستطيع تعريف مشتقات جزئية عليا ، فمثلاً :

$$fxx = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$fxy = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

$$fyx = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$fyxz = \frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}\right)$$

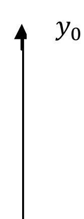
لنفرض أن $f \in C'$ حيث $f = (f_1, f_2, \dots f_p)$ و أن $\frac{1}{B(x_0, r)}$ كده حول x_0 و نصف قطرها r في R^p .

إذا كان حيث فيمكن استنتاج أن هناك نقط في حيث :

$$f(x) - f(x_0) = \frac{\partial f_1}{\partial x_1}\Delta x_1 + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + x_2 + \cdots + \frac{\partial f_p}{\partial x_p} + \Delta xp$$

لتوضيح هذه الفكرة نكتفي بتوضيحها في حالة R^n.

الآن $\Delta x = (\Delta x + \Delta y)$ و النقطة $y = (x_0 + \Delta x, y_0)$



$$f(x) - f(x_0) = [f(x) - f(y)] + [f(y) - f(x_0)]$$

الآن نستطيع تطبيق نظرية القيمة الوسطى على $f(x) - f(y)$ و يكون هناك x^* بين $x_0 + x$,x_0 للحصول على $x' = (x^*, y_0)$ و كذلك تطبيق نظرية القيمة الوسطى على $f(y) - f(x_0)$ و الحصول على y^* الذي يعطينا $y^{\circ} = (x_0 + \Delta x, y^*)$ حيث أن :

$$f(y) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$$

$$= x \frac{\partial f_1}{\partial x}(x^*, y_0) = \frac{\partial f_1}{\partial x}\left(x^{\circ}\right) + x$$

$$f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0 + \Delta x, y_0)$$

$$= \Delta y \frac{\partial f_2}{\partial y}(x + \Delta x, y^*) = \frac{\partial f_2}{\partial y}\left(y^{\circ}\right)\Delta y$$

إذن :

$$f(x) - f(x_0) = \frac{\partial f_1}{\partial x}\left(x^{\circ}\right)\Delta x + = \frac{\partial f_2}{\partial y}(y)\Delta y$$

وجود و اتصالية المشتقات الجزئية لأولى الدالة f أي أن $(f \in c^{\circ})$ شرط ضروري لاتصالية الدالة f على المجموعة المفتوحة A في R^p .

النظرية التالية توضح ذلك .

نظرية 1 :

إذا كانت $f \in C'$ على مجموعة مفتوحة A في R^p فإن الدالة f تكون متصلة على f .

البرهان:

لنفـرض أن $B(x_0, r)$ كـرة مفتوحــة و أنA $B^-(x_0, r) \le A$ حيـث أن كـل مشـتقة جزئيــة$\frac{\partial f_i}{\partial x_i}$ متصلة على A فإنها تكون محدودة على Bو بذلك يوجد$M > 0$ حيث :

$$\left|\frac{\partial f_i}{\partial x_i}\right| \le M \quad \text{لكل} \quad i = 1,2, \dots \dots \dots p$$

من المناقشة السابقة نصل إلى :

$$\|f(x) - f(x_0)\| \le M|\Delta x_1| + M|\Delta x_2| + \cdots + M|\Delta x_p| \le pM\|x - x_0\|$$

إذن :

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$

مثال **2:**

إذا كانت $f(x, y, z) = y \sin x^2 + xy^2$ فأوجد $\frac{\partial f}{\partial x}$ ، $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x}$ ، $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$

الحل

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy \cos x^2 + y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial x} = -4x^2 y \sin x^2 + 2y \cos x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = \frac{\partial}{\partial y}(2xy \cos x^2 + y^2)$$

$$= 2x \cos x^2 + 2y$$

قد توجد المشتقات الجزئية للدالة عند نقطة دون أن يكون متصلة عند تلك النقطة .

المثال التالي يوضح تلك الفكرة .

مثال 3 :

الدالة $(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2+y^2} & , \quad (x, y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0,0) \end{cases}$

يقال المتغير z إنه في متغيرين y,x إذا كان تصل زوج $(x\ ,\ y)$ معطى يمكننا تحديد قيمة أو أكثر للمقدار z .

و هذا التعريف يظل محتفظاً بالتعريف إلمام الدالة كتناظر بين فئتين و الفئتان هما هما (1) فئة أزواج العدد $(x\ ,\ y)$ الممثلين هندسياً بفئة نقطة ذات بعدين في المستوى $(x\ ,\ y)$ فئة الأعداد الحقيقية الممثلة بالمتغير z .

نستعمل العلامة $f\,(x\ ,y)$...... الخ تشير إلى قيمة الدالة عند $(x\ \ ,\ \ y)$ و نكتب $z =$ $f\,(x\ ,y)$.... الخ .

و أحياناً نستخدم العلامة $z = f\,(\ ,y)$، على انه يجب أن نفهم أنه في هذه الحالة z تستعمل بمعنيين كدالة و كمتغير .

مثال 4:

إذا كانت $f(x,y) = x^2 + 2y^2$ فإن .

$$f(3\,,-1) = (3)^2 + 2(-1)^3 = 7$$

يمكن سريان هذا المبدأ أكثر من متغيرين أي أن $w = f(x,y,z)$ تشير إلى قيمة الدالة عند $(x\ ,y\ ,z)$ (نقطة فراغ ثلاث الأبعاد) .

المتغير المعتمد (التابع) و المتغير المستقل أو الأصلي منطقة نفوذ الدالة :

إذا كانت الدالة $F(x,y)$ فتسمى z متغيراً تابعاً سميان المتغيرين x ,y الأصلين .

الدالة تسمى وحيدة القيمة إذا كانت قيمة واحدة فقط للمقدار z تناظر كل زوج $(x\ \ ,\ \ y)$ الدالة المعرفة بها و إذا وجد أكثر من قيمة للمقدار z فالدالة تكون متعددة القيم .

لذا تقبل أنفسنا بالدوال وحيدة القيمة مالم يشير إلى غير ذلك .

مثال5:

إذا كانت $z = \sqrt{1 - (x^2 + y^2)}$ فإن المنطقة التي يكون فيها المقدار z حقيقياً يتكون من فئة النقط $(x\ ,y)$ بحيث $(x^2 + y^2) \le 1$ أي أن فئة النقط داخل و على أثر المستوى xy و مركزها $(0,0)$ و نصف قطرها $= 1$.

(6-1) نظم إحداثيات ثلاثي الأبعاد العمومية :

نظام إحداثيات الثلاثة أبعاد العمومية نحصل عليها من تكوين ثلاثة محاور عمودية متبادلة المحاور السينية و الصادية و العينية متقاطعة عند نقطة الأصل 0تكون إمتداداً طبيعياً المستوى العادي لتمثيل الدوال في متغيرين بيانياً .

النقطة في ثلاثي الأبعاد تمثل بالثلاثي(x , y , z) و تمثل إحداثيات النقطة .

و في هذا النظام الإحداثي$z = f(x, y)$ أو $f(x, y, z) = 0$ يمثل سطح بصفة عامة .

مثال 6:

فئة النقط (x , y , z) بحيث $z = \sqrt{1-(x^2+y^2)}$ تمثل سطح نصف كرة ، نصفي قطرها و مركزها عند النقطة (0,0, 0) .

(7-1) النهايـات :

بفرض$f(x, y)$ دالة غير معرفة عند مجاورة محذوفة النقطة (x_0, y_0) فتقول أن 1 هو نهاية الدالة $f(x, y)$ عندما لا تقترب من x_0و كذلكyتقترب من y تقترب منy_0 أو (x, y) تقترب x_0, y_0 نكتب :

$$\lim_{(x,y)\to(x_0, y_0)} f(x, y) = L \text{ أو } \lim_{\substack{x\to x_0 \\ y\to y_0}} f(x, y) = L$$

إذا كانت لأي عدد موجب $\in$ يمكننا إيجاد عد موجب تعتمد على $\in$ و على x_0, y_0وبوجه عام بحيث أن : $0 < |x - x_0| < \delta$, $0 < |y - y_0| < \delta$

حيث :

$$|f(x, y) - 1| < \in$$

مثال7 :

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 1}} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{\substack{x\to 0 \\ y\to 1}} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

مثال8:

$\lim_{\substack{x\to 0\\ y\to 1}} \tan^{-1}\left(\frac{y}{x}\right)$لايوجد كما هو واضح من حقيقة أن و بوجه عام فإن نظريات النهايات و مبدأ اللانهاية ... الخ .

لدوال لمتغير واحد تستخدم بتعديل مناسب للدوال ذلك متغيرين أو أكثر .

النهايات المكررة أو المعادة :

لنهايات المكررة أوالمعادة$\lim_{x\to x_0}\{\lim_{y\to y_0} f(x,y)\}$ و $\lim_{y\to y_0}\{\lim_{x\to x_0} f(x,y)\}$

أنها يرمز لها $\lim_{x\to x_0} \lim_{y\to y_0} f(x,y)$ و $\lim_{y\to y_0} \lim_{x\to x_0} f(x,y)$

على الترتيب ليس من الضروري أن يتساويا .

و أنهما يجب أن يتساويا إذا وجدت$\lim_{y\to y_0} f(x,y)$.

و التساوي لا يضمن وجود النهاية الأخيرة .

مثال 9:

إذا كانت $f(x,y) = \frac{x-y}{x+y}$ فإن

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right) = \lim_{x\to 0}(1) = 1$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x-y}{x+y}\right) = \lim_{y\to 0}(-1) = -1$$

أي أن النهايات المكررة غير متساوية و كذلك$\lim_{\substack{\to 0\\ y\to 0}} f(x,y)$لا يمكن وجوده

(8-1) المشتقات الجزئية من رتبة أعلا :

إذا كانت الدالة $f(x,y)$لها مشتقات جزئية عند كل نقطة(x,y)في المنطقة فإنdf/dx و df/dy نفسها دوال في X,y التي يمكن أن يكون لها أيضاً مشتقات جزئية هذه المشتقات الثانية تأخذ الرموز .

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x^2}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = f_{xx}\ \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = f_{yy}\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = f_{yx},\ \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = f_{xy}$$

إذا كانت f_{xy} وf_{yx} متصلة فإن $f_{xy} = f_{yx}$ و رتبة التفاضل ليست هامة والا ربما لا يكونان متساويين .

مثال 10:

إذا كانت $(x, y) = 2x^2 + 3xy^2$

فإن :

$$f_{xx} = 12x \ , \quad f_{yy} = 6x$$

$$f_{xy} = 6y \quad = f_{yx}$$

و بطريقة متشابهة نعرف المشتقات من رتبة أعلا فمثلاً :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2 \partial y} = f_{yxx}$$

هو مشتقة *f* مأخوذة بالنسبة إلى *y* و مرتين بالنسبة إلى *x* .

(1-9) تفاضل الدوال المؤلفة:

نفرض أن $z = f(x, y)$ و

1- إذا كانت *y=t sin t* ، *x=t cos t* ، $z=e^{xy^2}$ احسب $\frac{dz}{dt}$ عند $t = \frac{\pi}{2}$

الحل:

$$\left.\frac{dz}{dt}\right| = \frac{dz}{dx}.\frac{dx}{dt} + \frac{dz}{dy}.\frac{dy}{dz} =$$

$$(y^2 e^{xy^2})(-t \sin t)+(2xye^{xy^2})(t \cos t + \sin t)$$

$$\left.\frac{dz}{dt}\right| = (\pi/4)(-\pi/2) + (0)(1) = \frac{-\pi^3}{8}$$

عند$y = \frac{\pi}{2}$, $t = \frac{\pi}{2}$, $n = 0$

مثال11: أثبت أن $dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy$ حتى إذا كانت *x,y* متغيران تابعيه أو متعددة .

الحل:

نفرض أن *x, y* تعتمد على المتغيرات الثلاثة *u, v, w* فإن

1- $dx = x_u du + x_v dv + x_w dw$

2- $dy = y_u du + y_v dv + y_w dw$

$z_x d_x + z_y d_y = (z_x x_u + z_y y_u)\, du +$

$z_x x_v + z_y yv\rfloor dv + (z_x x_w + z_y y_w)\, dw$

$= z_u du + z_v dv + d_w dw = dz$

مثال 12:

اثبت أن $z=f(x^2y)$ حيث f دالة تفاضلية تحقق

$$x\left(\frac{dz}{dx}\right) = 2y\left(\frac{dz}{dy}\right)$$

الإثبات :

نفرض أن $x^2y = u \Leftarrow \therefore z = f(u)$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{du}\cdot\frac{du}{dx} = \grave{f}(u).2xy \quad , \quad \frac{dz}{dy} = \frac{dz}{du}\cdot\frac{du}{dy} = \grave{f}(u)\,.x^2$$

$$\therefore x\frac{dz}{dx} = \grave{f}(u).2x^2y \;,\; 2y\frac{dz}{dy} = \grave{f}(u).2x^2y$$

$$\therefore x\frac{dz}{dx} = 2y\frac{dz}{dy}$$

(1-10) الدوال الضمنية :

بوجه عام المعادلة $f(u,y,z) = 0$ تعرف متميزا واحداً وليكن z كدالة في متغيرين آخرين x, y وحينئذ z تسمى أحياناً دالة ضمنية للمتغيرين x, y تميزها عن الدالة المسماه بالدالة الصريحة f حيث $z = f(x,y)$ بحيث أن $f[x,y,f(x,y)] = 0$

تفاضل الدوال الضمني ليس صفياً بشرط أن تكون متيقظين للمتغيرات التابعة والمتغيرات المستقلة.

(1-11) محدد جاكوبيان :

اذا كانت الدالة $F(x,y)$ وكذلك الدالة $G(u,v)$ تفاضليتين في المنطقة ،فإن محدد باكوبيان أو بالاختصار جاكوبيان للدالة F وكذلك الدالة G بالنسبة الى u, v هو محدد دالي من الرتبة الثانية ويعرف بما يأتي :

$$\frac{d(F,G)}{d(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{dF}{du} & \frac{dF}{dv} \\ \frac{dG}{du} & \frac{dG}{dv} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} F_u & F_v \\ G_u & G_v \end{vmatrix}$$

بالمثل محدد دالة من الرتبة الثالثة

$$\frac{d(F,G,H)}{d(u,v,w)} = \begin{vmatrix} F_u & F_v & F_w \\ G_u & G_v & G_w \\ H_u & H_v & H_w \end{vmatrix}$$

ويسمى جاكوبيان F, G, H بالنسبة الىu, v, w ومن السهل عمل لهذا الامتداد.

(1-12) المشتقات الجزئية باستعمال جاكوبيان :

جاكوبيان نالب يبرهن فائدته في الحصول على المشتقات الجزئية للدوال الضمنية مثلاً

إذا كانت لدينا المعادلات الآتية :

G(x,y,u,v) = 0 F(x,y,u.v) = 0 ,

عموماً بمكننا اعتبار ان u ,vدالتان للمقدارينx, y وفي هذه الحالة يكون عندنا

$$\frac{du}{dx} = -\frac{\frac{d(F,G)}{d(x,v)}}{\frac{d(F,G)}{d(u,v)}}, \qquad \frac{dv}{dy} = -\frac{\frac{d(F,G)}{d(y,v)}}{\frac{d(F,G)}{d(u,v)}}$$

$$\frac{du}{dx} = -\frac{\frac{d(F,G)}{d(u,x)}}{\frac{d(F,G)}{d(u,v)}}, \qquad \frac{dv}{dy} = -\frac{\frac{d(F,G)}{d(u,y)}}{\frac{d(F,G)}{d(u,v)}}$$

الافكار السابقة يمكن امتدادها بسهولة فمثلاً اذا اعتبرنا المعادلات الآتية

,H(u,v,w,x,y) = 0 ,G(u,v,w,x,y) = 0 F(u,v,w,x,y) = 0

فمثلاً يمكننا اعتبار أن u, v, w كدوال للمقادير x, y في هذه الحالة

$$\frac{du}{dx} = -\frac{\frac{d(F,G,H)}{d(x,v,w)}}{\frac{d(F,G,H)}{d(u,v,w)}}, \qquad \frac{dw}{dy} = -\frac{\frac{d(F,G,H)}{d(u,v,y)}}{\frac{d(F,G,H)}{d(u,v,w)}}$$

مثال 13:

اذا كانت x = 2r – s، y = r + 2s أوجد $\frac{d^2u}{dydx}$ بدالة المشتقات s ,r .

الحل:

بحل المعادلتين x = 2r – s، y = r + 2s للمقدار s ,r نجد أن

$,s=(2y-x)/5 \qquad r=(2x+y)/5$

$$\therefore \frac{dr}{dx}=2/5 \quad , \quad \frac{ds}{dx}=-\frac{1}{5} \quad , \quad \frac{dr}{dy}=1/5 \quad ,\frac{ds}{dy}=2/5$$

$$\therefore \frac{du}{dx}=\frac{du}{dr}.\frac{dr}{dx}+\frac{du}{ds}.\frac{ds}{dx}=\frac{2}{5}\frac{du}{dr}-\frac{1}{5}\frac{du}{ds}$$

$$\frac{d^2u}{dydx}=\frac{d}{dy}\left(\frac{du}{dx}\right)=\frac{d}{dr}\left(\frac{2}{5}\frac{du}{dr}-\frac{1}{5}\frac{du}{ds}\right)\frac{dr}{dy}+\frac{d}{ds}\left(\frac{2}{5}\frac{du}{dr}-\frac{1}{5}\frac{du}{ds}\right)\frac{ds}{dy}$$

$$=\left(\frac{2}{5}\frac{d^2u}{dr^2}-\frac{1}{5}\frac{d^2u}{d^rds}\right)\left(\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{2}{5}\frac{d^2u}{dsdr}-\frac{1}{5}\frac{d^2u}{ds^2}\right)\left(\frac{2}{5}\right)$$

$$=\frac{1}{25}\left(2\frac{d^2u}{dr^2}+3\frac{d^2u}{drds}-2\frac{d^2u}{ds^2}\right)$$

بفرض أن لها مشتقات جزئية ثابتة مستمرة.

مثال 14:

إذا كانت$u = x^3y$ أو $\frac{du}{dt}$ إذا كانت $t^2 = x^2 + y^3$..... (2) $t = x^5 + y$ ..... (1)

الحل :

بالتفاضل المعادلة (2) بالنسبة t نحصل على :

$$5x^2\left(\frac{dx}{dt}\right)+\frac{dy}{dt}=1 \qquad ..... \; (3)$$

$$2x\left(\frac{dx}{dt}\right)+3y^2\left(\frac{dy}{dt}\right)=2t \qquad ..... \qquad (4)$$

بحل المعادلتين 3 ، 4 آنيا للمقدار $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ نحصل على

$$\frac{dx}{dt}=\frac{\begin{vmatrix}1 & 1\\ 2t & 3y^2\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5x^4 & 1\\ 2x & 3y^2\end{vmatrix}}=\frac{3y^2-2t}{15x^4y^2-2x};$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{\begin{vmatrix}5x^4 & 1\\ 2x & 2t\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}5x^4 & 1\\ 2x & 3y^2\end{vmatrix}}=\frac{10x^2t-2x}{15x^4y^2-2x}$$

$$\therefore \frac{du}{dt}=\frac{du}{dx}.\frac{dx}{dt}+\frac{du}{dy}.\frac{dy}{dt}=$$

$$3x^2y\left(\frac{3y^2-2t}{15x^4y^2-2x}\right)+(x^3)(\frac{10x^4t-2x}{15x^4y^2-2x}$$

مثال15 :

إذا كانت$f(x\ ,y\ ,z)$ تعرف z كدالة ضمنية للمقدارين$y,\ x$ في المنطقةR في المحتوى xy أثبت أن :

ب) $\frac{dz}{dy} = -\frac{fy}{fz}$ حيث $f_t \neq 0$

الحل:

z دالة للمتغيرين $x, y \therefore dt = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy \Rightarrow$

$$df = \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy + \frac{df}{dz}dz =$$

$$\left(\frac{df}{dz} + \frac{df}{dz}.\frac{dz}{dx}\right)dx + \left(\frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}\ .\frac{dz}{dy}\right) = 0$$

حيث x ,y متغيرين مستقلين $\Longleftarrow$

$$\frac{df}{dx} + \frac{df}{dz}\ .\frac{dz}{dx} = 0 \longrightarrow (1 \qquad \frac{df}{dy} + \frac{df}{dz}\ .\frac{dz}{dy} = 0 \longrightarrow (2$$

مثال16:

اذا كانت $f(x\ ,y\ ,u\ ,v) = 0$ و $G(x\ ,y\ ,u\ ,v) = 0$ أوجد:

$$(1)\ \frac{du}{dx} \quad (2)\ \frac{du}{dy} \quad (3)\ \frac{dv}{dx} \quad (4)\ \frac{dv}{dy}$$

الحل

المعادلتين بوجه عام يعرفان المتغيرين التابعين (المعتمدين u ,v كدوال ضمنية) لمتغيرين مستقلين x ,y باستخدام:

1- $df = fxdx + fydy + fudu + fvdv = 0$

2- $dG = Gxdx + Gydy + Gudu + Gvdv = 0$

أيضاً بما أن u ,v دالتان للمقدارين x ,y

3- $du = uxdx + uydy$ (4) $\longrightarrow dv = vxdx + vydy$ (4)

بالتعويض بالمعادلتين (3) و (4) في المعادلتين (1) و (2) ينتج أن

$$df = (fx + f_u ux + fvfx)dx - (fy + fuUy + fvVy)dy = 0 \longrightarrow (5)$$

$$dG = (Gx + GuUx + GvVx)dx + (Gy + GuUy + GvVy)dy = 0 \longrightarrow (6)$$

حيث y, x متغيران مستقلان فإن معامليهما للمقدارين dx, dy في المعادلتين (5) و (6) هما صفر نحصل على :

$$fuUx + fvVx = -fx \longrightarrow (7) \qquad fuUy + FvVy = -fy \longrightarrow (8)$$
$$GuUx + GvVx = -Gx \qquad GuUy + GvVy = -Gy$$

بحل المعادلتين (7) و (8) ينتج

$$ux = \frac{du}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} -fx & fy \\ -Gx & Gy \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} fu & fv \\ Gu & Gv \end{vmatrix}} = -\frac{\frac{\mathrm{d(f,G)}}{\mathrm{d(x,v)}}}{\frac{\mathrm{d(f,G)}}{\mathrm{d(u,v)}}} \quad (1)$$

$$vx = \frac{dv}{dx} = \frac{\begin{vmatrix} fx & -fx \\ Gx & Gx \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} fu & fv \\ Gu & Gv \end{vmatrix}} = -\frac{\frac{\mathrm{d(f,G)}}{\mathrm{d(u,x)}}}{\frac{\mathrm{d(f,G)}}{\mathrm{d(u,v)}}} \quad (2)$$

$$uy = \frac{du}{dy} = \frac{\begin{vmatrix} -fy & fv \\ -Gy & Gv \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} fu & fv \\ Gu & Gv \end{vmatrix}} = -\frac{\frac{\mathrm{d(f,G)}}{\mathrm{d(y,v)}}}{\frac{\mathrm{d(f,G)}}{\mathrm{d(u,v)}}} \quad (3)$$

$$vy = \frac{dv}{dy} = \frac{\begin{vmatrix} fx & -fy \\ Gx & -Gy \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} fx & fv \\ Gx & Gy \end{vmatrix}} = -\frac{\frac{\mathrm{d(f,G)}}{\mathrm{d(u,y)}}}{\frac{\mathrm{d(f,G)}}{\mathrm{d(u,v)}}} \quad (4)$$

المحدد الدالي $\begin{vmatrix} fu & fv \\ Gu & Gv \end{vmatrix}$ يرمز له بالمقدار $\frac{d(f,G)}{d(u,v)}$ أو $T\left(\frac{f,G}{u,v}\right)$

وبعد جاكبيون للمقدارين f, Gبالنسبة الى u, vومن المفروض أنه لا يساوي صفراً .

(1-13) نظريات علي جاكوبيان :

فيما يلي نفترض أن كل الدوال تفاضلية مستمرة :

1- الشرط الضروري والكافي لكي تكون المعادلات

$$F(u,v,x,y,z) = 0 \quad , G(u,v,x,y,z) = 0$$

يمكن حلها للمقادير u ,vمثلاً هو $\frac{d(F,G)}{\mathrm{d(u,v)}}$ويساوي تطابقياً صفراً في المنطقة صفراً في المنطقة R .

بالمثل تكون النتائج صحيحة لمعادلات عددهاm في متغيرات عددهاn حيثm < n.

2- اذا كان x, y دوال للمقادير u, v بينما u, v دوال للمقدارين r, s فإن :

$$\frac{d(x,y)}{\mathrm{d(r,s)}} = \frac{\mathrm{d(x,y)d(u,v)}}{\mathrm{d(u,v)d(r,s)}}$$

وهذا هو مثال قاعدة السلسلية لجاكوبيان .

هذه الأفكار قادرة على التعميم

3- اذا كانت $u = f(x,y), v = g(x,y)$

فإن الشرط الضروري والكافي للعلاقة الدالة الصرف

$\emptyset(u, v) = 0$ موجودة بين u, v هو أن $\frac{d(u,v)}{d(x,y)}$ مساوية للصفر تطابقياً .

نتائج مشابهة صحيحة لدوال عددها n لمتغيرات عددها n .

مثال17: إذا كان

$$\emptyset(x, y) = x^3y + e^{xy^2}$$

أوجد :

1/ $\emptyset_{xy}$ 2/$\emptyset_{yy}$ 3/$\emptyset_{xx}$ 4 /$\emptyset_y$ 5/$\emptyset_x$ 6/$\emptyset_{yx}$

الحل

$$1/\emptyset_x = \frac{\partial\emptyset}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3y + e^{xy^2}\right) = 3x^2y + y^2e^{xy^2}$$

$$2/\emptyset_y = \frac{\partial\emptyset}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^3y + e^{xy^2}\right) = x^3 + 2yx\, e^{xy^2}$$

$$3/\emptyset_{xx} = \frac{\partial^2\emptyset}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\emptyset}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(3x^2y + y^2e^{xy^2}\right) = 6xy + y^4e^{xy^2}$$

$$4/\emptyset_{yy} = \frac{\partial^2\emptyset}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\emptyset}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(x^2 + 2\, yxe^{xy^2}\right) = 6y^2x^2e^{xy^2}$$

$$5/\emptyset_{xy} = \frac{\partial^2\emptyset}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\emptyset}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y + y^2e^{xy^2}\right) =$$
$$3x^2 + y^2e^{xy^2}2xy + e^{xy^2}2y = 3x^2 + 2xy^3e^{xy^2} + 2ye^{xy^2}$$

$$6/\emptyset_{yx} = \frac{\partial^2\emptyset}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\emptyset}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(x^3 + 2\, xye^{xy^2}\right)$$
$$= 3x^2 + 2xy.e^{xy^2} + e^{xy^2} + e^{xy^2}2y$$
$$= 3x^2 + 2xy^3e^{xy^2} + 2ye^{xy^2}$$

مثال18:

إذا كانت $z = x^2 \tan^{-1}\frac{y}{x}$ جد :

$\frac{\partial^2 z}{\partial x \, \partial y}$عند النقطة$(1\,,1)$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x^2 \frac{1}{1+\left(\frac{y}{x}\right)^2}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right)\left(\frac{y}{x}\right)$$

$$= x^2 . \frac{x^2}{x^2 y^2} . \frac{1}{x} = \frac{x^3}{x^2 + y^2}$$

$$\left.\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}\right| = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{x^2}{x^2 + y^2}\right)$$

$$= \frac{(x^2 + y^2)(3x^2) - (x^3 2x)}{(x^2 + y^2)}$$

$$= \frac{2.3 - 1.2}{2^2} = \frac{4}{4} = 1$$

$$\therefore z_{xy}(1,1) = 1$$

تكون المشتقة الجزئية:

$$f_x(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(-(0+t\,,0)) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0}{t^2} = 0$$

كذلك :

$$f_y(0,0) = \lim_{t\to 0}\frac{f(0,0+t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0}\frac{0}{t^2} = 0$$

و لكن النهاية على الخط $y = x$ وقريباً من *(0,0)* تكون :

$$\lim_{t\to 0}\frac{(0+t)(0+t)}{(0+t)^2 + (0+t)^2} = \lim_{t\to 0}\frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2}$$

و لكن النهاية على محور الصادات *x = 0* و قريباً من*(0,0)* تكون صفر ، هذا يعني أن $\lim_{t\to 0} f(x,y)$ رغم وجود $f_x(x,y)$, $f_y(x,y)$.

عرفنا من مبادئ التفاضل و التكامل أن الدالة القابلة للاشتقاق عند نقطة لابد أن تكون متصلة عند تلك النقطة .

من هذه الملاحظة نرى أن الدالة عند نقطة قي جميع الاتجاهات لا يؤدي إلى قابلية الدالة للاشتقاق عند تلك النقطة و المثال التالي يوضح هذه الفكرة .

مثال 19:

وضح أن الدالة :

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^4+y^4}, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

لها مشتقة اتجاهية عند(0,0) و لكنها غير قابلة للاشتقاق عند *(0,0)*

الحل

لنفرض أن $B = (e_1, e_2)$.

$$D_B f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(te_1, te_2) - f(0,0)}{t}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{t^3 e_1^2 e_2}{t(t^4 e_1^4 + t^2 e_2^2)}$$

$$\begin{cases} \dfrac{e_1^2}{e_2}, & e_2 \neq 0 \\ 0, & e_2 \neq 0 \end{cases}$$

وهذا يوضح أن *f* لها مشتقة اتجاهية عند *(0,0)* في أي اتجاه $B = (e_1, e_2)$.

إذا أخذنا النهاية على المسار $y = x^2$ فإن :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to 0} \frac{x^2x^2}{x^4+y^4} = \frac{1}{2}$$

و لكن النهاية للدالة نفسها على المسار $y = 0$ هي :

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim_{(x,y)\to 0} \frac{x^2 0}{x^4+0} = 0$$

إذن النهاية للدالة ***f*** في جميع الاتجاهات غير موجودة و بالتالي تكون الدالة ***f*** غير متصلة عند *(0,0)* .

إذا كانت الدالة قابلة للاشتقاق عند *(0,0)* فلابد أن تكون متصلة عند *(0,0)* ، هذا يوصلنا إلى الحكم و هو أن ***f*** غير قابلة للاشتقاق عند *(0 , 0)* .

(14-1) القابلية للاشتقاق:

نعطي الآن تعريف القابلية للاشتقاق للدالة ***f*** على مجموعة مفتوحة في R^{p} .

لنفرض أن $f \in \mathbb{C}$ على مجموعة مفتوحة A في R^{p} .

الدالـة $f : A \leq R^{\mathrm{p}} \rightarrow R^{\mathrm{m}}$ قابلـة للاشـتقاق عنـد $x_0 \in \mathrm{A}$ إذا كـان هنـاك دالـة خطيـة $Df_{(x_0)} : R^{\mathrm{p}} \rightarrow R^{\mathrm{m}}$ تسمى المشتقة الكلية للدالة ***f*** عند x_0 حيث أن :

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - Df(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|}$$

موجودة .

الدالــة f تكـون قابلــة للاشــتقاق عنــد x إذا كــان لهــا مشــتقة كليــة عنــد x و تكــون قابلــة للاشتقاق على A إذا كانت الدالة f مشتقة كلية عند كل نقطة من نقط المجموعةA.

لنفرض أن $f \in C'$ على مجموعة مفتوحة A في R^{p} .

دالة الباقي هي :

$$\Psi = f(x) - f(x_0) - Df(x_0). \Delta x$$

(15-1)التفاضلات :

بفرض $\Delta x = dx$, $\Delta y = dy$ هما الزيادة المعطاة المقدارين y , x على الترتيب فإن :

$$\Delta z = f(x + \Delta x , y + \Delta y) - f(x, y) = \Delta f$$

تسمى الزيادة في $z = f(x, y)$.

و إذا كانت f(x,y) لها مشتقة أولى جزئية مستمرة في المنطقة فإن :

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x} + x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \epsilon_1 \Delta x + \epsilon_2 \Delta y$$

$$= \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy + \epsilon_1 dx + \epsilon_2 dy = \Delta f$$

حيث ϵ_1 و ϵ_2 تقترب من الصفر عندما Δx و Δy تقترب من الصفر .

$$df = \frac{df}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy \quad \text{أو} \quad dz = \frac{dz}{dx}dx + \frac{dz}{dy}dy$$

يسمى التفاضل الكلي للمقدار *z* أو *f* أو الجزء الأساسي Δz أو Δf و نلاحظ أن $z \neq dz$ على حجوم العموم .

و إذا كانت $\Delta x = dx$ و $\Delta y = dy$ صغيرة فإن dz مساوية تقريباً Δz الكميتين dy , dx سميان تفاضلان *x , y* على الترتيب و ليست بحاجة أن تكون صغيرة .

إذا كانت *f* دالة بحيث أن Δf و أن Δz يمكن التعبير عنها في صورة (2) حيث ϵ_1 و ϵ_2 تقترب من صفر عندما تقترب Δx و Δy من صفر فتسمى الدالة *f* قابلة للتفاضل أو تفاضلية عند النقطة (*x, y*) و مجرد وجود f_x و f_y لا يضمن في حد ذاته القابلية للتفاضل و لو أن استمرار الدالتين f_x يضمن التفاضلية و مع أن هذا الشرط هو أقوى قليلاً من الشرط الضروري نقول أن *f* مستمرة تفاضلية في المنطقة *R* .

الفصل الثاني

التكامل الريماني

التكامل الريماني (المعتل

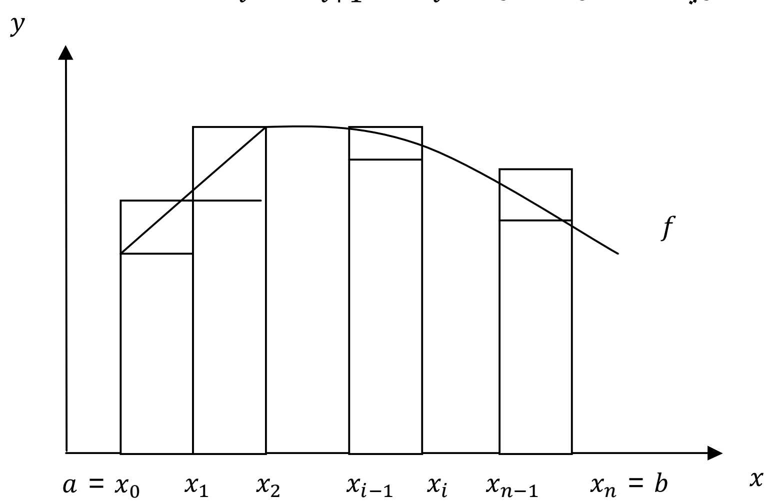
قد يكون حساب عملية التكامل صعباً في بعض الحالات و لكن أن التكامل موجود أو غير موجود أهم بكثير من حساب ذلك التكامل لأنه في أسوأ الحالات نستطيع استخدام الطرق العديدة لتقريب قيمة التكامل عند معرفة أن هذا التكامل موجود .

المناقشة في هذا الفصل تتعلق بوجود التكامل بطريقة ربما أكثر من حسابه ، و كذلك دراسة خواص هذا التكامل ومعرفة ما يسمى بالتكامل المعتل .

لنفرض أن fدالة محدودة و موجبة على مجموعة جزئية محدودة من R عندما نقول بأننا نريد تكامل الدالة f على الفترة [a , b] فإننا نعني إيجاد المساحة تحت المنحنى الدالة f و بين المستقيمين x = a و y = b و محور السينات .

لإيجاد ذلك نقسم الفترة [a , b] إلى أجزاء متساوية $a = x_0 < x_1 < x_2 \dots x_n = b$ لنفرض أن $p = [x_0, x_1, \dots x_n]$.

هو التجزيء المذكور و لنفرضأن$\Delta x_i = x_{i+1} - x_i$:



إذا كانت M_i هي أعلى قيمة للدالة f على$[x_{i-1}, x_i]$ و كان M_iهي أصغر قيمة للدالة f على و حيث أن دالة محدودة فإن أعلى و أصغر قيمة مضمونتي الوجود ، فإننا نستطيع لأن تكون ما يلي :

$$(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i \quad و \quad L(f, P) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i$$

يسمي الجمع الأول بالجمع العلوي ، و يسمى الجمع الثاني بالجمع السفلي .

الجمع العلوي هو مجموع أعلى قيمة للدالة على فترة مضرب في طول تلك الفترة لكل الفترات$[x_{i-1}, x_i]$ و الجمع السفلي هو مجموع أصغر قيمة للدالة على فترة مضروب في طول تلك الفترة لكل الفترات$[x_{i-1}, x_i]$.

بما أن fالدالة محدودة فإن هناك M حيث لكل$-M \le f \le M$ لكل $x \in [a, b]$.

لنفرض أن$\overline{\int} f$ هو أصغر حد علوي للأعداد$\overline{(f, P)}$ لأي تجزئي P لنفرض أن$\underline{\int} f$ هو أكبر حد سفلي للأعداد$L(f, P)$ لأي تجزئ P.

كلما صغرت الفترات في التجزئيP (أي كلما قصر طول كل فترة جزئية في الفترة $[a, b]$)فإن المجموع $\overline{(f, P)}$يصغر و المجموع$L(f, P)$ يكبر يسمى$\overline{\int} f$ بتكامل ريمان العلوي للدالة f على الفترة $[a, b]$ و يسمى$\underline{\int} f$ بتكامل ريمان السفلس للدالة f على $[a, b]$.

عندما $\Delta x_i \to 0$ و ينطبق المجموعان $\overline{(f, P)}$و$L(f, P)$ فإن القيمة المشتركة هي تكامل الدالة f على الفترة $[a, b]$.

تعريف :

الدالة f قابلة للتكامل الريماني على بشرط أن :

$$\overline{\int} f = \underline{\int} f$$

إذاكانت الدالة قابلة للتكامل على فإن تكامل fهي القيمة المشتركة لتكامل ريمان العلوي وتكامل ريمان السفلي أي أن :

$$\int_a^b f = \overline{\int} f = \underline{\int} f$$

سنرمز للدوال القابلة للتكامل الريماني على الفترة$[a, b]$ بالرمز $R[a, b]$.

مثال **1**:

وضح أن الدالة الثابتة$f(x) = k$لكل $x \in [a, b]$ دالة قابلة للتكامل الريماني ؟

الحل

لنفرض أن P هو أي تجزئي للفترة $[a\ ,b]$

$$P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b$$

$$\cup\,(f,p) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i = k(b-a)$$

$$L(f\ ,p) = \cup\,(f,p) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i = k(b-a)$$

إذن $L(f\ ,p) = \cup\,(f,p)$ لأي تجزئي P للفترة $[a\ ,b]$ ، ومن ذلك نجد أن :

$$\int f = \int f = k(b-a)$$

هذا يعني أن f قابلة للتكامل الريماني أي أن $(f \in R[a\ ,b])$

و

$$\int_a^b f = k(b-a)$$

مثال 2 : وضح أن الدالة

$$f(x) = \begin{cases} 1\ ,x \in Q \cap [a\ ,b] \\ 0\ ,x \in Q^c \cap [a\ ,b] \end{cases}$$

غير قابلة للتكامل الريماني ؟

الحل

لنفرض أن P هوي أي تجزئي للفترة $[a\ ,b]$، حيث أن كل فترة جزئية تحتوي على عدد قياسي

، فإن $M_i = 1$ لكلi، و كذلك كل فترة جزئية من هذا التجزئي تحتوي على عدد غير قياسي و

بذلك يكون m_i لكل iإذن :

$$\cup\,(f\ ,p) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i = \sum_{i=0}^{n-1} 1.\,\Delta x_i = b-a$$

و

$$L(f\ ,p)\ =\ \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i\ =\ \sum_{i=0}^{n-1} 0 x_i\ =\ 0$$

إذن $\int f\ = b - a\ ,\quad \int f\ = 0$

و بذلك تكون الدالة f غير قابلة للتكامل الريماني أي أن $(f \notin R(a\ ,b))$

نظرية **1** :

لنفرض أن f دالة محدودة على $[\ ,b]$.

F دالة قابلة للتكامل الريماني على $[a\ ,b]$ إذا و إذا كان فقط لأي $\varepsilon > 0$ يوجد تجزئي P للفترة $[a\ ,b]$ حيث :

$$\cup\ (f\ ,P) - L(f\ ,P)\ <\ \varepsilon$$

البرهان

لنفرض أن f دالة قابلة للتكامل الريماني على $[a\ ,b]$ و لنفرض أن $\varepsilon > 0$.

نختار تجزئي على الفترة $[\ ,b]$ حيث

$$\int f -\ L(f\ ,P_1)\ <\ \frac{\varepsilon}{2}$$

و نختار كذلك تجزئي P_2للفترة $[\ ,b]$ حيث :

$$\cup\ (f, P_2) - \int f\ <\ \frac{\varepsilon}{2}$$

حيث أن : $f \in R[a\ ,b]$ فإن

$$\overline{\int} f - \underline{\int} f = \int f$$

إذن :

$$\cup\ (f\ ,p_2) - \int_a^b f\ <\ \frac{\varepsilon}{2}\ ,\ \int_a^b f - L(f\ ,P_1)\ <\ \frac{\varepsilon}{2}$$

الآن إذا كان *P* هو تكرير التجزئيين *P₁* و P_2فإن :

$$L(f\ ,P_1) \le L(f\ ,P_1)\ \le\ \int_a^b f\ \le \cup\,(f\ ,P) \le \cup\,(f\ ,P_2)$$

و بذلك فإن :

$$\cup\,(f\ ,P) - L(f,P) \le \cup\,(f\ ,P_2) - L(f\ ,P_1) < \left(\int_a^b f + \frac{\varepsilon}{2}\right) - \left(\int_a^b f - \frac{\varepsilon}{2}\right)$$

$$= \ \varepsilon$$

و هذا هو المطلوب .

مثال 3 : وضح أن الدالة

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x}\ , & x \ne 0 \\ 1\ , & x = 0 \end{cases}$$

قابلة للتكامل الريماني على (*0 , 1*) .

الحل

من الواضح أن الدالة دالة متصلة على (*0,1*) .

لاحظ أن$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 = f(0)$

وبذلك تكون الدالة *f* متصلة على الفترة (*0 , 1*) ومن النظرية السابقة تكون الدالة *f* قابلة

للتكامل الريماني على (*0,1*) .

مثال 4 :

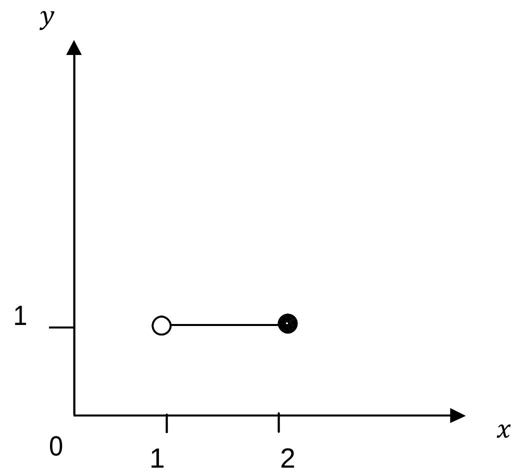
وضح أن الدالة :

$$f(x) = \begin{cases} 0\ , & x \in [0\ ,1\ ] \\ 1\ , & x \in [1\ ,2\ ] \end{cases}$$

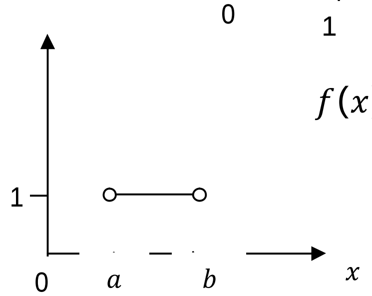
قابلة للتكامل الريماني .

الحل

الدالة *f* مطردة على الفترة [0 , 2] إذن تكون الدالة قابلة للتكامل الريماني .



مثال 5 :وضح أن الدالة



$$f(x) = \begin{cases} \cup , & x = a , b \\ 1 , & x \in]a , b[\end{cases}$$

قابلة للتكامل الريماني على الفترة$[a , b]$.

الحل

لا حظ أن *f* دالة غير متصلة على $]a , b[$ و كذلك دالة ليست مطردة على $[a , b]$.

لنفرض أن *P* هو تجزئي للفترة $]a , b[$ حيث :

$$P : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{i-1} < x_i < x_{i+1} < \cdots < x_n = b$$

لا حظ أن $M_i = m_i = 1$ على كل فترة$[x_{i-1} , x_i]$ و بذلك فإن:

$$\cup (f , P) = \sum_{i=0}^{n-1} M_i \Delta x_i = b - a$$

$$L(f , P) = \sum_{i=0}^{n-1} m_i \Delta x_i = b - a$$

إذن :

$$\int f - \int f = \int f = b - a$$

و هذا يؤكد أن $f \in R\,[a , b]$.

حالات التكاملات المعتلة (2_2):

لكي تكون الدالة f قابلة للتكامل الريماني فلا بد من توفر الشرطين التاليين:

1. أن تكون الدالة المراد تكاملها دالة محدودة على المجموعة المراد التكامل عليها .
2. أن تكون المجموعة المراد التكامل عليها محدودة و مغلقة .

نقسم هذا النوع من التكاملات إلى الحالات التالية :

الحالة الأولى :

أ/ الدالة f معرفة على الفترة $[a\ ,\ \infty[$ ، حيث a عدد حقيقي ، وقابلة للتكامل الريماني على أي فترة مغلقة و محدودة $[a\ , b]$.

لنفرض أن :

$$A_a^b = \int_a^b f(x)\, dx$$

التكامل المعتل $\int^b f(x)\, dx$ هو نهاية التكامل $A_a^b = \int_a^b f(x)\, dx$ عندما $b \to \infty$.

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{b \to \infty} A_a^b = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx$$

تعريف (2- 3) :

إذا كانت $\lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx$ موجودة و تساوي عدد حقيقي L فإننا نقول بأن التكامل المعتل $\int^b f(x)dx$ متقارب و في هذه الحالة يكون :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{b \to \infty} \int_a^b f(x)dx$$

أما إذا كانت النهاية غير موجودة أو تساوي∞أو $-\infty$ فإننا نقول بأن :

$\int_a^b f(x)dx$متباعد

مثال6 :

أوجد $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\, dx$

الحل

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{b \to \infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{x^2}\, dx = \lim_{b \to \infty} (-\cos b + 1)$$

ولهذا يكون هذا التكامل المعتل متقارباً إلى 1

مثال 7 :

أوجد $\int_0^\infty \sin x \; dx$

الحل

$$\int_{0}^{\infty} \sin x\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \sin x\, dx = \lim_{b\to\infty} (-\cos +1)$$

و لكن النهاية الأخيرة هذه غير موجودة مما ينتج عنه أن $\int_0^\infty \sin x\, dx$ يكون متباعداً .

مثال 8 : أحسب

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x} dx$$

الحل

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{\mathrm{x}} \mathrm{dx} \;\; \lim_{\mathrm{b}\to\infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{x} dx = \lim_{\mathrm{b}\to\infty} (\ln \mathrm{b} - \ln 1) = \lim_{\mathrm{b}\to\infty} (\ln \mathrm{b}) = \infty$$

ولهذا فإن $\int_1^\infty \frac{1}{\mathrm{x}} \mathrm{dx}$ يكون متباعداً .

مثال 9 : أحسب

$$\int_{0}^{\infty} \mathrm{x}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{x}^2}\, \mathrm{dx}$$

الحل

$$\int_{0}^{\infty} \mathrm{x}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{x}^2}\, \mathrm{dx} = \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{\mathrm{b}} \mathrm{x}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{x}^2}\, \mathrm{dx}$$

و نحسب التكامل عن طريق التعويض يكون :

$$\int_{0}^{\infty} \mathrm{x}\, \mathrm{e}^{-\mathrm{x}^2}\, \mathrm{dx} = \frac{1}{2}(1 - e^{-b^2})$$

إذن :

$$\int_0^{\infty} x\, e^{-x^2}\, dx = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{2}\left(1 - e^{-b^2}\right) = \frac{1}{2}$$

مثال 10 : أحسب

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^n}\, dx$$

حيث $n > 0$ و $n \neq 1$

الحل

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^n} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^{\infty} \frac{1}{x^n}\, dx = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{n-1}\left(1 - b^{n-1}\right)$$

الآن إذا كان $0 \le n \le 1$ فإن $b^{1-n} \to \infty$ كلما كان $b \to \infty$ و يكون التكامل

$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^n} dx$ في هذه الحالة متباعداً .

إذا كان $n > 0$ فإن $b^{1-n} \to \infty$ كلما كان $\infty \to$ و بذلك فإن :

$$\lim_{b\to\infty} \frac{1}{n-1}\left(1 - b^{n-1}\right)$$

و في هذه الحالة يكون التكامل $\int_1^{\infty} \frac{1}{x^n} dx$ متقارباً إلى $\frac{1}{n-1}$

قاعدة(2-1) :

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x^n} dx = \begin{cases} \dfrac{1}{n-1}, & n > 0 \\ \text{متباعداً}, & 0 < n < 1 \end{cases}$$

ب/ الدالة f معرفة على الفترة $[-\infty , b]$ و قابلة للتكامل الريماني على أي فترة محدودة و مغلقة $[a , b]$.

في هذه الحالة يكون لدينا التكامل المعتل $\int_1^{\infty} f(x)\, dx$

تعريف (2-4) :

إذا كانت $\lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{b} f(x)\,dx$ موجودة و تساوي عدد حقيقي ن فإننا نقول بأن التكامل المعتل $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx$ متقارباً و في هذه الحالة يكون :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{b} f(x)dx$$

إذا كانت هذه النهاية غير موجودة أو تساوي ∞ أو ∞ − فإننا نقول بأن :

$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ متباعداً

مثال 11 :أحسب

$$\int_{-\infty}^{1}\frac{2x}{1+x^2}$$

الحل

$$\int_{-\infty}^{1}\frac{2x}{1+x^2} = \lim_{a\to\infty}\int_{-\infty}^{1}\frac{2x}{1+x^2}$$

ولكن التكامل الأخير يمكن الحصول عليه بطريقة التعويض أي أن :

$$\int_{-\infty}^{1}\frac{2x}{1+x^2} = \lim_{a\to\infty}[\ln(1+x^1)]_a^1 = \lim_{a\to\infty}[\ln 2-\ln(1+a^2)] = -\infty$$

إذن :

$\int_{-\infty}^{1}\frac{2x}{1+x^2}$ متباعداً

من الملاحظ أنه إذا كان b عدد حيث $a<b$ و كان التكامل متقارباً فإن التكامل يكون متقارباً . أيضاً و يكون :

$$\int_{a}^{\infty} f(x)dx = \int_{a}^{b} f(x)dx + \int_{a}^{\infty} f(x)dx$$

أما إذا نباعد أحد التكاملين $\int_{a}^{\infty} f(x)dx$ و $\int_{b}^{\infty} f(x)dx$ فإن ذلك يؤدي إلى تباعد الآخر.

ج/ إذا كانت الدالة f قابلة للتكامل على أي فترة محدودة و مغلقة $[a\,,b]$.

لتوسيع نطاق التكامل حتى يشكل خط الأعداد الحقيقية ، نحتاج إلى دراسة التكامل:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

تعريف (5-2) :

إذا كانت الدالة f قابلة للتكامل الريماني على $[-a\ , b]$ فإن :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a \to \infty} \int_{-a}^{c} f(x) + \lim_{b \to \infty} \int_{c}^{b} f(x)dx$$

حيث c عدد حقيقي .

و يكون $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx =$ متقارباً إذا كان كل من $\int_{c}^{\infty} f(x)dx$ و $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ متقارباً في هذه الحالة يكون :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx$$

من الملاحظ أن تقارب أو تباعد التكامل المعتل $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ لا تعتمد على اختيار العدد c لأنه يمكن كتابة التكامل على شكل :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{d} f(x)dx + \int_{d}^{\infty} f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{d} f(x)dx + \int_{d}^{\infty} f(x)dx$$

مثال 12 : أوجد

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2}$$

الحل

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1 + x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2}$$

و الآن :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2} = \lim_{b \to 0} \int_{0}^{b} \frac{1}{1 + x^2} = \lim_{b \to 0} [tan^{-1}]_{0}^{b}$$

$$= \lim_{b \to 0}[\tan^{-1} b - \tan^{-1} 0] = \lim_{b \to \infty}[\tan^{-1} b] = \frac{\pi}{2}$$

و

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2} = \lim_{a \to \infty} \int_{-a}^{0} \frac{1}{1 + x^2} = \lim_{a \to \infty} [\tan^{-1} x]_a^0$$

إذن :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2} = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1 + x^2} + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1 + x^2} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi$$

الحالة الثانية :

و في هذه الحالة تكون الفترة المراد التكامل عليها محدودة و لكن الدالة غير معرفة عند نقطة داخل تلك الفترة نقسم ذلك إلى :

أ/الدالة f لها خط تقارب عمودي عند x = a وفترة التكامل هي$[a , b]$ وتكون الدالة قابلة للتكامل الريماني على أي فترة جزئيتين على شكل$[a + \varepsilon , b]$ من الفترة$[a , b]$.

في هذه الحالة يكون التكامل المعتل $\int_a^b f(x)dx$ متقارباً إذا كانت النهاية $\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a+\varepsilon}^{b} f(x)dx$.

موجود و تساوي عدد حقيقي و يكون :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^b f(x)dx$$

إذا كانت النهاية

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{a-\varepsilon}^{b} f(x)dx$$

غير موجودة أو تساوي ∞ أو $-\infty$ فإن $\int^b f(x)dx$يكون متباعداً .

مثال 12 : أحسب التكامل

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{\propto}}$$

الحل

الدالة $f(x) = \frac{1}{x^{\propto}}$ قابلة للتكامل الريماني على أي فترة مغلقة $[\varepsilon , 1]$.

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{\propto}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^1 \frac{dx}{x^{\propto}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{[x^{\propto -1}]_{\varepsilon}^{1}}{1-\propto} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{1}{1-\propto} - \frac{\varepsilon^{1-\propto}}{1-\propto}\right]$$

إذا كان فإن :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left[\frac{1}{1-\propto} - \frac{\varepsilon^{1-\propto}}{1-\propto}\right] = \frac{1}{1-\propto}$$

و في هذه الحالة يكون التكامل $\int_0^1 \frac{dx}{x^{\propto}}$ متقارباً و إذا كان $1 < \propto$ فإن التكامل $\int_0^1 \frac{dx}{x^{\propto}}$ يكون متباعداً لأن النهاية تساوي ∞ و إذا كان $\propto = 1$ فإن النهاية تكون كذلك ∞ وبالتالي $\int_0^1 \frac{dx}{x^{\propto}}$ متباعداً .

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^{\propto}} = \begin{cases} \propto < 1 \text{ , متقارب} \\ \propto \geq 1 \text{ , متباعد} \end{cases}$$

مثال 13 :

أحسب $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$

الحل

و بالتالي حسب تطبيق الملاحظة السابقة حيث $\propto = \frac{1}{2}$ يكون :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

إذن : $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ متقارب .

ب/ الدالة f لها خط تقارب عمودي عند x = b و فترة التكامل هي $[a , b]$ و تكون الدالة f قابلة للتكامل الريماني على أي فترة جزئية مغلقة $[a , b - \varepsilon]$ للفترة $[a , b]$.

في هذه الحالة يكون التكامل المعتل = $\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{x}}$.

متقارباً إذا كانت النهاية :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)$$

موجود و تساوي عدد حقيقي و يكون :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x)$$

عد ذلك يكون التكامل $\int_a^b f(x)dx$ متباعداً .

مثال 14 : أحسب

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

الحل

حيث أن $x = 1$ خط تقارب عمودي للدالة ، فإن :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{\varepsilon \to 0} [\sin^{-1} x]_0^{1-\varepsilon}$$
$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \sin^{-1}(1-\varepsilon) = \frac{\pi}{2}$$

مثال15 :

قرر ما إذا كان $\int_0^1 \frac{dx}{x-1}$ متقارباً أو متباعداً .

الحل

حيث أن $x = 1$ خط تقارب عمودي للدالة $f(x) = \frac{1}{x-1}$ فإن :

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-1} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{x-1} = \lim_{\varepsilon \to 0} [\ln[x-1]]_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} \ln|-\varepsilon| = -\infty$$

∴ نستنتج أن $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$ متباعداً .

ج/ الدالة f لها خط تقارب عمودي عند النقطة c حيث و تكون فترة التكامل $[a\,,b]$.

إذا كان $\int_a^c f(x)dx$ و $\int_c^b f(x)dx$ متقاربان فإن التكامل $\int_a^c f(x)dx$ يكون متقارب .

و يكون :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{c-\varepsilon} f(x)dx + \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{c+\varepsilon_2}^b f(x)dx$$

حيث $0 < \varepsilon_1 < c-a$, $0 < \varepsilon_2 < b-c$

عدا ذلك يكون التكامل $\int_a^b f(x)dx$ متباعد .

قد تعمم هذه الفكرة في حالة ما يكون للدالة f عدد منتهي من خطوط التقارب العمودية أي أنه إذا كان $x = c_1, c_2, \dots c_n$ خطوط تقارب عمودية للدالة f حيث $(a\,,b)$ c $c_1, c_2, \dots c_n$.

فإن :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_a^{c_1-\varepsilon_1} f(x)dx + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{c_1+\varepsilon_2}^{c_2-c_1} f(x)dx + \cdots \lim_{\varepsilon_n\to 0}\int_{c_{n-1+\varepsilon_n}}^{b} f(x)dx$$

و يكون $\int_a^b f(x)dx$ متقارباً إذا تقاربت جميع التكاملات التي في الطرف الأيمن من المعادلة السابقة ، عدا ذلك يكون $\int_a^b f(x)dx$ متباعداً .

مثال 16 : أحسب

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^3}$$

الحل

حيث أن x =1 خط تقارب للدالة $f(x) = \frac{1}{(x-1)^3}$ و نلاحظ أن $1 \in (0\,,2)$ فإن:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^3} = \lim_{\varepsilon_1\to 0}\int_0^{1-\varepsilon_1} \frac{dx}{(x-1)^3} + \lim_{\varepsilon_2\to 0}\int_{1+\varepsilon_2}^{2} \frac{dx}{(x-1)^3}$$

الآن إذا كان x = 1u = فإن du = dx و بذلك يكون :

$$\int_{0}^{1-\varepsilon_1} \frac{dx}{(x-1)^3} = \int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{du}{u^3}$$

كذلك :

$$\int_{1+\varepsilon_2}^{2} \frac{dx}{(x-1)^3} = \int_{-1}^{-\varepsilon_1} \frac{du}{u^3}$$

ولكن نلاحظ أن $\int_0^1 \frac{dx}{x^2}$ متباعداً

$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^3}$ يكون متباعداً أيضاً

مثال 17 :

أحسب

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$$

الحل

للدالة $f(x) = \frac{1}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$ خط تقارب عمودي عند x = 1 و لذلك فإن :

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \int_0^1 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} + \int_1^2 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} = \lim_{\varepsilon_1 \to 0} \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}} + \lim_{\varepsilon_2 \to 0} \int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^{\frac{2}{3}}}$$

$$= \lim_{\varepsilon_1 \to 0}\left(3\sqrt{-\varepsilon_1 + 3}\right) + \lim_{\varepsilon_2 \to 0}\left(3 - \sqrt[3]{\varepsilon_2}\right)$$

$$= 3 + 3 = 6$$

الفصل الثالث

خوص التكامل المعتل

خواص التكامل المعتل :

(1-3) خواص التكامل المعتل من النوع الأول :

إننا ندرس خواص التكامل المعتل من النوع الأول

إننــا نــدرس خــواص التكامــل المعتــل $\int_a^{\infty} f(x)dx$ لأن $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ يمكــن تحويلــه إلــى التكامل $\int_a^{\infty} f(x)dx$ و ذلك بوضع بدلاً من .

أما التكامل $\int_a^{b} f(x)dx$ فهو تركيبة خطية للتكاملين $\int_a^{b} f(x)dx$ و $\int_a^{b} f(x)dx$.

نعطي خواص التكامل المعتل في شكل نظريات ونتبعها ببعض الأمثلة .

نظرية1 :

إذا كانت $f(x) \geq 0$ و قابلة للتكامل الريماني على $[a\,, x]$ و لكن $x \geq a$ و إذا وجد عدد K حيث $\int_a^{\infty} f(x) \leq dx$ فإن $\int_a^{\infty} f(x)dx$ متقارب .

البرهان

لبرهنة ذلك نفرض أن :

$$f(x) = \int_a^{x} f(x)dx$$

حيث أن $f(x) \geq 0$ لكل $x \geq a$ فإن الدالة $f(x)$ دالة تزايدية على $[a\,, x]$

إذا كان $x_1 \leq x_2$ في $[a\,, x]$ فإن :

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx$$

و بذلك فإن $F(x_2) \geq F(x_1)$ كذلك $F(x) \leq k$ لكن $x \geq a$

$$\lim_{x\to\infty} F(x) = \int_a^{\infty} f(x)dx$$

موجودة .

أي أن :

$\int_a^{\infty} f(x)dx$ متقارب

اعتماداً على هذه النظرية يمكن برهنة النظرية التالية و التي تسمى في بعض الأحيان اختبار المقارنة و الذي يقارن فيه قابلية تكامل دالة معطاة بدالة أخرى معروف أنها قابلة للتكامل .

نظرية **2** :

لنفرض أن $0 \le f(x) \le g(x)$ لكل $x \ge a$.

1/ إذا كان $\int_a^{\infty} \mathrm{g(x)}$ متقارب فإن $\int_a^{\infty} \mathrm{g(x)}$ يكون متقارباً أيضاً .

2/ إذا كان $\int_a^{\infty} \mathrm{g(x)}$ متباعداً فإن $\int_a^{\infty} \mathrm{g(x)}$ يكون ذلك متباعداً .

البرهان

1/ حيث أن $\int_a^{\infty} \mathrm{g(x)}$ متقارب فإن هناك M حيث :

$$\int_a^{\infty} \mathrm{g(x)} = M$$

الآن لكل $x \ge a$ لدينا

$$0 \le \int_a^{x} f(x)dx \le \int_a^{x} g(x) \le \int_a^{\infty} g(x)dx = M$$

ومن النظرية السابقة يكون $\int_a^{\infty} f(x)dx$ متقارباً .

مثال 1 :

وضح أن $\int_1^{\infty} \frac{1}{\mathrm{x}^2+1}$ متقارب

الحل

نلاحظ أن $\frac{1}{\mathrm{x}^2} < \frac{1}{\mathrm{x}^3+1}$ لكل $x > 1$

و نجد أن $\int_1^{\infty} \frac{1}{\mathrm{x}^2}$ متقارب . و هذا يقود إلى $\int_1^{\infty} \frac{1}{\mathrm{x}^2+1}$ متقارب أيضاً (نظرية) .

نظرية (3)

إذا كانت f قابلة للتكامل الريماني على $[a\,,x]$ و كان $\int_a^\infty [f(x)]\,dx$ متقارب فإن $\int_a^\infty f(x)dx$ يكون كذلك متقارباً .

البرهان

من الملاحظ أن $f^+(x) \le |f(x)|$

و كذلك $f^-(x) \le |f(x)|$

إذن :

$$\int_a^\infty \overset{+}{f}(x)dx \;,\; \int_a^\infty \bar{f}(x)dx$$ متقاربان

الآن :

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^\infty \overset{+}{f}(x)dx + \int_a^\infty \bar{f}(x)dx$$

و هذا يعني أن $\int_a^\infty f(x)dx$ متقارب .

نظرية (4)

لنفرض أن f ، g دالتان موجبتان وقابلتان للتكامل على $[a\,,x]$ و $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ عندئذ يكون $\int_a^\infty f(x)dx$ و $\int_a^\infty g(x)dx$ متقاربان معاً أو متباعداً معاً .

البرهان

نستنتج من $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ أن هناك عددان M_1 و M_2 حيث :

$$M_2 g(x) \le f(x) \le M_1 g(x)$$

لكن $x \ge n$ (n عدد حقيقي) .

نستنتج أن $\int_a^\infty f(x)dx$ و $\int_a^\infty g(x)dx$ متقاربان معاً أو متباعدان معاً .

مثال 2 :

ناقش تقارب التكامل $\int_1^\infty e^{-x^2}$

الحل

حيث أن $x^2 \geq x$ لكل $x \geq 1$ فإن $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ ومن ذلك نصل إلى أن :

$\int_1^\infty e^{-x^2}$ متقارب إذا كان $\int_1^\infty e^{-x^2}$ متقارب .

الآن :

$$\int_1^\infty e^{-x} = \lim_{b \to \infty} \int_1^b e^{-x} = \lim_{b\to\infty}(-e^{-b} + e^{-1}) = \frac{1}{e}$$

إذن $\int_1^\infty e^{-x}$ متقارب و هذا يؤدي إلى تقارب $\int_1^\infty e^{-x^2}$.

نظرية (5)

إذا كانـت $f(x) \geq 0$ لكـل $x \in [a, b]$ فإنـه مـن خـواص التكامـل المحـدد $\int_a^b f(x) \geq 0$ و لذلك فإن :

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx \geq 0$$

نظرية (6) :

إذا كان $\int_a^\infty f(x)$ متقارباً فإن $\int_a^b f(x) = 0$.

البرهـان

$$\int_a^b f(x) = 0$$

و لكن :

$$\int_\infty^\infty f(x) = 0 = \lim_{a \to \infty}\int_a^a f(x) = 0$$

$$\Longrightarrow \quad \int_{\infty}^{\infty} f(x) = 0$$

مثال 3 :

أحسب التكامل $\int_1^{\infty} e^{-\propto x}$ حيث $\propto > 0$

الحل

$$F(x) = -\frac{1}{\propto} e^{-\propto x}$$

إذن :

$$\int_1^{\infty} e^{-\propto x}\, dx = \lim_{x\to\infty}[F(x) - F(1)] = 0 - \left(-\frac{1}{\propto} e^{-\propto x}\right) = \frac{1}{\propto} e^{-\propto}$$

نظرية (7)

إذا كان f دالة متصلة على $[a\,,\infty]$ وكان $x = g(u)$ حيث g دالة تزايدية على $[\propto\,,\infty]$ $g(\propto) =$ فإنه إذا تقارب أحد التكاملين

$$\int_{\propto}^{\infty} f(g(u)g^{-}(u)du \quad , \quad \int_a^{\infty} f(x)dx$$

فإن الآخر يكون متقارباً و يكون :

$$\int_a^{\infty} f(x)dx = \int_{\propto}^{\infty} f\big(g(u)\big)g^{\circ}(u)du$$

مثال 4 :

ناقش تقارب التكامل $\int_0^{\infty} \frac{e^x dx}{1+2e^x}$

الحل

الدالة $f(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$ دالة متصلة على $[0\,,\infty]$.

إذا كان $x=\ln u$ فإن $f(\ln u)$ و $(\ln u)' = 1/u$

وبذلك يكون :

$$\int_0^{\infty} \frac{e^x dx}{1 + e^{2x}} = \int_1^{\infty} \frac{du}{1 + u^2} = \tan^{-1} \int_1^{\infty} = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

مثال 5 :

أحسب التكامل $\int_0^{\infty} x^n e^{-x}$

الحل

لنفرض أن $U(x) = x^n$ و $dv = e^{-x}$ و بذلك فإن :

$$v = -e^x , \quad du = nx^{n-1}$$

الآن :

$$\lim_{x\to\infty} u(x)v(x) = \lim_{x\to\infty} (-x^n e^{-x}) = -\lim_{x\to\infty} \frac{x^n}{e^x} = -\lim_{x\to\infty} \frac{n!}{e^x} = 0$$

و ذلك بتطبيق قاعدة لوبيتال

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = \lim_{x\to\infty} (-x^n e^{-x}) = -u(0)v(0) = -n \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x}\, dx$$

و حساب التكامل $\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x}\, dx$ مرة أخرى نصل إلى :

$$\int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x}\, dx = n(n-1) \int_0^{\infty} x^{n-2} e^{-x}\, dx$$

و هكذا نصل إلى أن :

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x}\, dx = n!$$

ملحوظة :

اختبار تكامل لتقارب المسلسلات يمكن استخدامه في اختيار تقارب التكامل المعتل أيضاً .

مثال 6 :

أدرس تقارب المسلسلة

$$\sum_{\mathrm{n}=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^{\propto}}$$

الحل

$$\int_{2}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^{\propto}} = \lim_{b \to \infty} \int_{2}^{b} \frac{dx}{x(\ln x)^{\propto}} = \frac{1}{(\propto -1)(\ln 2)^{\propto -1}}$$

إذا كان $\propto \geq 1$

و يتباعد عندما يكون $\propto \geq 1$.

∴المسلسلة $\sum_{\mathrm{n}=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln(n))^{\propto}}$ تكون متقاربة عندما $\propto \geq 1$ متباعدة عندما $\propto \geq 1$.

خواص التكامل المعتل من النوع الثاني :

(2-3) الدالة غير محدودة على فترة التكامل :

الخواص المعطاة هنا على التكامل $\int_a^b f(x,y)$ عندما يكون $x = a$ خط تقارب عمودي للدالة $f(x)$ لأن الحالة الأخرى والتي يكون فيها خط التقارب عند $x = a$ يمكن دراستها كما يلي :

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = -\int_{b-\varepsilon}^{a} f(x)dx$$

و بالتالي يمكن تعميم الخواص التي تدرس الحالة $\int_a^b f(x)dx$ عندما يكون $x = b$ خط تقارب عمودي للدالة f .

الحالة و التي يكون فيها خط التقارب العمودي للدالة f عند $x = c$ حيث $a < c < b$ هي تركيبة خطية للحالتين اللتان فيها خط التقارب العمودي للدالة عند نهاية الفترة و ذلك بتقسيم الفترة $[a\,,b]$ إلى الفترتين $[a\,,c]$ و $[c\,,b]$.

نظرية 8 :

إذا كان $\int_a^b f(x)dx$ متقارباً و كان λ عدد حقيقي ، فإن التكامل $\int_a^b \lambda f(x)dx$ يكون متقارباً أيضاً و يكون :

$$\int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx$$

أما إذا كان $\int_a^b f(x)dx$ متباعداً و كان $\lambda \neq 0$ فمن الضروري أن يكون $\int_a^b \lambda f(x)dx$ متباعداً .

البرهان

من خواص التكامل المحدد الخاصية التالية :

$$\int_a^{b-\varepsilon} \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$$

وبالتالي فإن :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon}\lambda f(x)dx = \lambda\int_a^{b-\varepsilon}\lambda f(x)dx$$

من خواص النهايات ، و هذا يوضح الشق الأول من الخاصية الأولى .

لبرهنة الشق الثاني نفرض أن $\int_a^b \lambda f(x)dx$ متقارب .

اعتماداً على الشق الأول من الخاصية نجد أن :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{1}{\lambda}\int_a^b f(x)dx$$

و بالتالي نصل إلى أن $\int_a^b f(x)dx$ متقارباً و لكن هذا ينافي الفرض .

إذن $\int_a^b \lambda f(x)dx$ متباعداً كلما كان $\int_a^b f(x)dx$ متباعداً .

نظرية 9 :

إذا كان $\int_a^b f(x)dx$ متقارباً فإن :

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

يمكن استخدام طريقة التعويض لإيجاد التكامل $\int_a^b f(x)dx$ و كذلك يمكن إيجاد بطريقة التجزئ عندما يكون متقارب .

لنفرض أن :

$\int_a^b f(x)dx$ تكامل معتل من النوع الثاني و لنفرض أن $x = b$ خط تقارب عمودي للدالة f على $[a\ ,b]$ من الواضح أن $\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx$ تكامل محدد .

إذا كان $x = b - \frac{1}{t}$ فإن :

$dx = \frac{1}{t^2}dt$ حيث $\frac{1}{b-a} \le t \le \frac{1}{\varepsilon}$

الآن :

$$\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \int_a^{b} f\left(b-\frac{1}{t}\right)\left(\frac{1}{t^2}dt\right)$$

إذا كان التكامل المعتل $\int_a^b f(x)dx$ متقارباً فإن :

$$\int_a^{b} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{b-\varepsilon} f(x)dx = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{\varepsilon}} f\left(b-\frac{1}{t}\right)\left(\frac{1}{t^2}dt\right)$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\frac{1}{b-a}}^{0} f\left(b-\frac{1}{t}\right)\left(\frac{1}{t^2}dt\right)$$

و هذا يعني أنه تم تحويل التكامل المعتل $\int_a^b f(x)dx$ من النوع الثاني إلى تكامل من النوع الأول وواضح أن تقارب التكامل المعتل من النوع الثاني يؤدي إلى تقارب التكامل المعتل من النوع الأول و الذي تم ترتيبه من التحويل .

مثال 7 :

إذا كان $h(x) = x$ و $f(x) = \frac{1}{x^2}$ فإن $f(x)h(x) = \frac{1}{x}$ و نعلم أن تكاملاً معتلاً متقارباً و لكن :

$$\int_0^1 f(x)h(x)dx = \int_0^1 \frac{1}{x}dx$$

تكاملاً معتلاً متباعداً .

يوضح هذا المثال أن حاصل ضرب دالتين قابليتين للتكامل المعتل من النوع الثاني قد لا تكون قابلة للتكامل المعتل من النوع الثاني .

(3-3) اختبارات التقارب للتكاملات المعتلة :

لنفرض أن f دالة قابلة للتكامل الريماني على أي فترة جزئية$[a , b-\varepsilon]$ من الفترة$[a , b]$ حيث$0 < \varepsilon$ و أن f دالة لها خط تقارب عند $x = b$.

الاختبارات التالية توضح لنا الشروط اللازمة لكي يكون التكامل $\int_a^b f(x)dx$ متقارباً .

نظرية 10 :

لنفرض أن $f(x) \geq 0$ لكل $x \in [a , b]$.

إذا كان هناك عدد موجب M حيث :

$$\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx \leq M$$

حيث $\varepsilon > 0$ و $\varepsilon \in (0\,, b-c)$.

عندئذ يكون $\int_{a}^{b} f(x)dx$ متقارباً و يكون :

$$\int_{a}^{b} f(x)dx = \ln b \left[\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx :\ \varepsilon \in [0, b-c]\right]$$

البرهــان

لنفرض أن $f(\varepsilon)\ \int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx$

إذا كان $\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2$ فإن $f(\varepsilon_1) \geq f(\varepsilon_2)$ وهذا يوضح أن الدالة f دالة تناقصية على $[a\,, b]$

و بالتالي يكون لهذه الدالة نهاية محدودة لأنها محدودة من أعلى .

$$\lim_{\varepsilon\to 0} f(\varepsilon) = \ln b \left[\int_{a}^{b-\varepsilon} f(x)dx :\ \varepsilon \in [0, b-a]\right]$$

مثال 8 :

أدرس تقارب $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$

الحل

لاحظ أن الدالة $f(x) = \frac{dx}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$ دالة موجبة على $[0\,, 1]$ و أن $x = 1$ خط تقارب عمودي لهذه الدالة .

$$\int_0^{1-\varepsilon} \frac{dx}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} = -2\sqrt{1-x\int_0^{1-\varepsilon} = -2\sqrt{3}} + 2 \leq 3$$

و بالتالي يكون $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$ متقارب

المصادر و المراجع :

1. حساب التفاضل و التكامل المؤلف فرانك إيرس و إليون مندلسون ، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ، اختصار جورج ، هاريمينوي – ترجمة أستاذ مساعد دكتور / طارق حسين المهدي ، كلية الهندسة بالمطرية ، جامعة حلوان ، الطبعة الأولي عام 2001م ، ملخصات شوم إيزي .
2. التحليل الحقيقي – تأليف رمضان محمد جهمية ، الطبعة الأولة 1999م ، الدار الدولية للنشر التوزيع .
3. التفاضل و التكامل المتقدم – شوم ، الطبعة العربية السابعة 2004م ، تأليف مواري راشبيحل .