جامعة السودان للعلوم و التكنولوجيا

كلية التربية

قسم الرياضيات

بحث تكميلي لنيل درجة البكالريوس الشرف في الرياضيات

بعنوان :

المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية

إعداد الطلاب :

إسماعيل محمد إسماعيل بالي
عامر علي محمد أحمد
نصر الدين حسن محمد حسن
يعقوب أبكر محمد مطر

إشراف الأستاذ
عبد القادر البشرى
الضي

2014م

بسم الله الرحمن الرحيم

الآيـــــــة

قال تعالى :

(اللَّهُ نُورُ السَّمَاوَاتِ وَالْأَرْضِ مَثَلُ نُورِهِ كَمِشْكَاةٍ فِيهَا مِصْبَاحٌ الْمِصْبَاحُ فِي زُجَاجَةٍ الزُّجَاجَةُ كَأَنَّهَا كَوْكَبٌ دُرِّيٌّ يُوقَدُ مِنْ شَجَرَةٍ مُبَارَكَةٍ زَيْتُونَةٍ لَا شَرْقِيَّةٍ وَلَا غَرْبِيَّةٍ يَكَادُ زَيْتُهَا يُضِيءُ وَلَوْ لَمْ تَمْسَسْهُ نَارٌ نُورٌ عَلَى نُورٍ يَهْدِي اللَّهُ لِنُورِهِ مَنْ يَشَاءُ وَيَضْرِبُ اللَّهُ الْأَمْثَالَ لِلنَّاسِ وَاللَّهُ بِكُلِّ شَيْءٍ عَلِيمٌ)

صدق الله العظيم

(النور : 35))

الإهـــــداء

بـدأنـا بـأكـثر مـن يـد وقـاسينـا أكـثـر مـن هم
وعـانـينـا الـكثير مـن الـصعوبـات وهـا نـحن
الـيوم والـحمد لله نـطوي سهـر الـلـيالـي
وتـعب الأيـام وخلاصة مشوارنـا بـين دفـتي
هـذا الـعمل الـمتـواضع
إلـي مـنـارة الـعلم و الإمـام الـمصطفـي إلـي
الأمـي الـذي علم الـمتعلمين سيد الـخلق
إلـي رسولـنـا الـكريـم سيدنـا مـحمد صلـي الله
عليـه وسلم .
إلـي الـينبـوع الـذي لا يـمل الـعطاء إلـي مـن
حـاكت سعـادتـي بـخيـوط مـنسوجة مـن قـلـبهـا
إلـي
والـداتـي الـعزيـزة
إلـي مـن سعي وشقـي لأنـعم بـالـراحة والـهنـاء
الـذي لـم يـبخل بـشئ مـن أجل دفـعي فـي
طريـق الـنجاح الـذي علـمنـي أن أرتـقـي سلـم
الـحيـاة بـحكمة وصبـر إلـي
والـدي الـعزيـز
إلـي مـن حبـهم يـجري فـي عروقـي و يـلـهج
بـذكـراهـم فـؤادي إلـي
إخـوتـي وإخـوانـي
إلـي مـن سرنـا سويـاً ونـحن نـشق الـطريـق معـاً
نـحو الـنجاح والإبـداع إلـي مـن تـكاتـفـنـا
يـداً بـيد ونـحن نـقطف زهـرة تـعلـمنـا إلـي
أصدقـائـنـا وزمـلائـنـا
إلـي مـن علـمونـا حروفـاً مـن ذهـب وكـلـمات مـن
درر وعبـارات مـن أسمـي واجلـي عبـارات فـي
الـعلم مـن صاغـوا لـنـا علـمهم حروفـاً ومـن
فـكرهـم مـنـارة تـنير لـنـا سيـرة الـعلم
والـنجاح إلـي
أساتـذتـنـا الـكرام

الشكر والتقدير

في مثل هذه اللحظات يتوقف اليراع ليفكر قبل أن يخط الحروف ليجمعها في كلمات تبعثر الأحرف وعبثاً أن يحاول تجميعها في سطور .

سطوراً كثرة تمر في الخيال لا يبقي لنا في نهاية المطاف إلا قليلاً من الذكريات وصور تجمعنا برفاق إلي جانبنا ......

فواجب علينا شكرهم ووداعهم ونحن نخطو خطوتنا الأولي في غمار الحياة

ونخص بالجزيل الشكر والعرفان إلي كل من أشعل شمعة في دروب عملنا و إلي من وقف علي المنابر وأعطي من حصيلة فطره لينير دربنا .

إلــي الأســاتذة الكــرام فــي كليــة التربيــة ونتوجــه بالشــكر الجزيــل إلــي الأستـــاذ / عبـد القـادر البشـرى الضـي الذي تفضل بالإشراف علي هذا البحث فجزاه الله عنا كل خير .
فلها منا كل التقدير والاحترام .

المقدمة :

ما زالت المعادلات التفاضلية منذ عهد نيوتن يستخدم في فهم العلوم الفيزيائية والهندسية والحيوية بالإضافة إلي مساهمتها في دراسة التحليل الرياضي وامتدت استخداماتها في العلوم الاقتصادية والاجتماعية وتطورت المعادلات التفاضلية وتزايدت أهميتها في جميع مجالات العلوم وتطبيقاتها .

وفي هذا البحث درسنا كيفية تكوين المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية وبعض طرق حلها سواء كانت خطيه او غير خطيه متجانس هاو غير متجانسة وذات معاملات ثابتة أو متغيره من الرتبة الثانية وتناولنا بعض التطبيقات المختلفة في شتى فروع العلوم الفيزيائية والهندسي.

أهداف البحث:

1) التعرف على المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الثانية
2) التعرف على بعض طرق حلول المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الثانية
3) التعرف على تطبيقات المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الثانية في بعض مجالات العلوم .

أهمية البحث:

تكمن أهمية هذا البحث في تناوله للمعادلات التفاضلية العادية بخاصة المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الثانية وذلك لارتباط هذا الفرع من علم الرياضيات بالتطبيقات المختلفة في العلوم ومجالات الحياة اليومية ونسبة لهذه الأهمية تناولنا في هذا البحث المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية وبعض تطبيقاتها .

(1-1) المعادلة التفاضلية

هي علاقة تساوي بين متغير مستقل وليكن x ومتغير تابع وليكن(y(x وواحد أو أكثر من المشتقات التفاضلية ....y', y'', y''' أي أنها على الصورة العامة

$$f(x, y, y', y'', \dots\dots) = 0$$

وهذه المعادلة تسمى معادله تفاضلية عادية.

أما إذا كان عدد المتغيرات المستقلة أكثر من واحد وليكن x , y مستقلان وكان

$Z(x\ ,y)$متغير تابع قابل للاشتقاق بالنسبه لكل من x , y جزئيا , سميت المعادلة المشتملة على المتغيرات المستقلة والمتغير التابع ومشتقاته الجزئية , معادله تفاضلية جزئيه , وهي الصورة :

$$G\left(x\ , y, z, \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial z^2}{\partial x^2}\ , \dots .\right) = 0$$

وعلى سبيل المثال المعادلات التفاضلية:

1. $y'''^2 + 2y'^3 - 5y = \sin x$
2. $y' + xy = x^2$
3. $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2xy\frac{\partial^2 z}{\partial xy} + \frac{\partial z}{\partial y} = x$

نلاحظ أن المعادلتين 1و2كلا منهما معادله تفاضلية عاديه بينما المعادلة 3 معادله تفاضلية جزئيه

(1-1-1) رتبة المعادلة: هي رتبة أعلى معامل تفاضلي في المعادلة.

(2-1-1) درجة المعادلة: هي درجة (قوة) أعلى معامل تفاضلي في المعادلة بشرط أن تكون جميع المعاملات التفاضلية خاليه من القوه الكسرية.

مثال(1)

اوجد رتبة ودرجة كلا من المعادلات التالية:

1) $y''=(5x + 2y')^2 = 0$

2) $Y'-3y^4=0$

الحل:-

1) المعادلة من الرتبة الثانية والدرجة الثانية
2) المعادلة من الرتبة الرابعة والدرجة الأولى

مثال(2)

اوجد الرتبة والدرجة في كلا من المعادلات التالية:

1) $t\,y''+t^2y'-(\sin)\sqrt{\boldsymbol{y}}=t^2-t+1$

2) $5\left(\frac{d^4b}{dp^4}\right)^5+7\left(\frac{db}{dp}\right)^{10}+b^7-b^5=p$

الحل:-

1) المعادلة من الرتبة الثانية والدرجة الأولى
2) المعادلة من الرتبة الرابعة والدرجة الخامسة

(2-1) حل المعادلة التفاضلية:

الدالة $y=y(x)$ حلا للمعادله التفاضليه $f(x,y,y',y'',\dots)=0$ اذا كانت:

1) قابله للاشتقاق n من المرات
2) تحقق المعادلة التفاضلية أي $f(x,y(x),y'(x),\dots y^n(x))=0$

مثال(3)

اثبت أن $y(x)=c\sin\theta$ حلا للمعادله التفاضليه $y''+y=0$ حيث c ثابت

الحل:-

$$y(x)=c\sin\theta \qquad , \qquad y'(x)=c\cos\theta \qquad , \qquad y''(x)=-c\sin\theta$$

وعلى ذلك نجد ان

$$y''(x)+y(x)=-x\sin x+x\sin x=0$$

مثال(4)

اثبت إن $\ln y+\frac{x}{y}=c \qquad ,y>0 \ \dots\dots\dots(1)$ حيث c ثابت هو حل للمعادلة

$$(y - x)\frac{dy}{dx} + y = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(2)$$

الحل:-

نفاضل طرفي المعادلة $\ln y + \frac{x}{y} = 0$ **بالنسبه ل** x

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx} + \frac{y - x\frac{dy}{dx}}{y^2} = 0 = \left(\frac{1}{y} - \frac{x}{y^2}\right)\frac{dy}{dx} + \frac{1}{y} = 0 \qquad , y \neq 0$$

$$\therefore \quad (y - x)\frac{dy}{dx} + y = 0$$

أي أن المعادلة (1) حل للمعادلة (2)

مثال (5):

حقق أن الدالة المعرفة بالصورة $y=f(x)= e^{2x}$ تكون حلا للمعادلة $y' - 2y = 0$

$, x \in (-\infty, \infty)$

الحل:-

بالتعويض عن y, y' في المعادلة التفاضلية نحصل على

$(e^{2x}) - 2(e^2$

لجميع قيم x وأيضا الدالة $y = g(x) = e^x$ حيث $x \in (0,1)$

حلا للمعادلة التفاضلية $y' - 2y = 0$

مثال(6)

هل الدالة $y^2 = 3x^2 + x^3$ هو حل للمعادله $yy'' + (y')^2 - 3x = 5$

الحل:-

$$y^2 = 3x^2 + x^3$$

$$= 2yy' = 6x + 3x^2$$

$$= 2y(y'') + y'(2)y' = 6 + 6x$$

بالقسمة على 2

$$y\,y'' + (y') = 3 + 3x$$

$$\text{LHS} \quad = y\,y'' + (y')^2 - 3x = 3 \neq 5$$

وعليه $y^2 = 3x^2 + x^3$ ليس حلا للمعادله التفاضليه

مثال(7)

هل $y = x^3 + x - 2$ حلا للمعادله التفاضليه $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$ ؟

الحل:-

$$y = x^3 + x - 2$$

$$\frac{dy}{dx} = 3x^2 + 1 \qquad = \qquad \frac{dy^2}{dx^2} = 6x$$

وعليه$y = x^3 + x - 2$ هو حل للمعادله التفاضليه $\frac{d^2y}{dx^2} = 6x$ ؟

(3-1) حلول المعادلات التفاضلية:

(1-3-1) الحل العام (التابع):-

هو علاقة بين المتغيرات وتحتوي على n ثابتا اختياريا اساسيا.

مثل: $y = x^4 + cx$, $y = ax^2 + bx$ تسمى تابعا أصليا (الحل العام).

تدعى هذه أل n ثابتا بثوابت أساسيه وتمثل دائما بحروف كبيره, يعطى كل تابع أصلي يحوي n ثابتا اختيارا معادله تفاضلية من الرتبة n خاليه من الثوابت الاختيارية , يمكن أن نحصل على المعادلة بعد حذف أل n ثابتا بين (n-1) المعادلة المكونة من التابع الأصلي والn معادله التي نحصل عليها باشتقاق التابع الأصلي n مره متتالية بالنسبة للمتغير الداخلي في هذا التابع.

مثال(8)

اوجد المعادلة التفاضلية المرافقة للتابع الأصلي (الحل العام) الأتي:

y=Ae^{2x} + Be^{x} + c

الحل:-

$\frac{dy}{dx}$=2Ae^{2x} + Be^{x} , $\frac{d^2x}{dx^2}$ = 4Ae^{2x} + Be^{x}

, $\frac{d^3x}{dx^3}$ = 8Ae^{2x} + Be^{x}

وعلى ذلك فان $\frac{d^2x}{dx^2} - \frac{dy}{dx}$ = 2Ae^{2x} , $\frac{d^3x}{dx^3} - \frac{d^2x}{dx^2}$ = 4Ae^{2x},

وبالتالي $\frac{d^3x}{dx^3} - \frac{d^2x}{dx^2}$ =2($\frac{d^2x}{dx^2} - \frac{dy}{dx}$)

وعليه فان المعادلة المطلوبة هي $\frac{d^3x}{dx^3} - 3\frac{d^2x}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx}$

مثال(9)

اوجد المعادلة التفاضلية للحل العام: y=cx^2 + c^2

الحل:-

بما أن $c = \frac{1}{2x}\frac{dy}{dx}$, $\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}$ = 2cx

y=cx^2 + c^2 = $\frac{1}{2x}\frac{dy}{dx}x^2 + \frac{1}{4x^2}\left(\frac{dy}{dx}\right)^2$

إذن المعادلة المطلوبة هي2 + $\left(\frac{\mathrm{dy}}{\mathrm{dx}}\right)^2$ $x^3\frac{}{dx} - 4x^2y = 0$

الحل الخاص:-

هو حل نحصل عليه من الحل العام (التابع الأصلي) بإعطاء قيم معينه للثوابت الاختيارية الداخلة في تكوينه.

مثال(10)

اوجد الحلول الخاصة للمعادلة $y = x^2 + 2x + 3$

الحل:-

$A=1 \quad , \quad B=2 \quad , \quad C=3$

مثال (11)

اوجد الحل الخاص للمعادل التفاضلية : $y = 6x + 2$

مع الشروط الحدية $y(2) = 8 \qquad y(0) = 2$

الحل:-

بتكامل طرفي المعادلة مرتين بالنسبة إلي x نجد ان :

$$y=x^3 + x^2 + Ax + B$$

بالتعويض من الشروط الحدية فنحصل على $\therefore 2 = B \qquad y(0) = 2$

$y(2)=8 \quad \therefore \quad 8=8+4+2A+2 \quad , \quad A=-3$

وعليه فان الحل المطلوب هو : $y=x^3 + x^2 - 3x + 2$

(4-1) تكوين المعادلة التفاضلية:-

إذا أعطينا الحل العام لمعادله تفاضلية من الرتبة n نجد أن ذلك الحل يعتمد nمن الثوابت الاختيارية ويكون على الصورة: (1)______ $f(x \,,\, y \,, c_1 \,, c_2 \,, \dots \dots \dots c_n) = 0$

حيث c_n ... ... , c_2 , c_1 ثوابت اختياريه , وللحصول على المعادلة التفاضلية للحل المعطي نجري nمن المشتقات للمعادلة (1)

يكون لدينا n+1من المعادلات عبارة عن المعادلة (1) بالإضافة إلي nمعادله من العمليات التفاضلية التي عددها n وبذلك يمكن حذف الثوابت الاختيارية ومنها نحصل على المعادلة التفاضلية .

مثال(12)

اوجد المعادلة التفاضلية التي حلها العام (1)_________ y = c sinx

الحل:-

نفاضل مره واحده (2)____________ $y = con\ x$

نحذف c من المعادلة (1) و (2) بقسمة (2) على (1) وتكون المعادلة التفاضلية المطلوبة هي

$$y' = y\ cos\,x\ \ x \_\_\_\_\_(2)$$

حل أخر :

يمكن لحذف c من (2) و(1) نستخدم المحدد :

$$\begin{vmatrix} y & sinx \\ y' & cosx \end{vmatrix} = 0$$

$$y\ cos\,x\ - y'\,sin\,x\ = 0 \qquad \therefore y' = cosx$$

مثال(12)

اوجد المعادلة التفاضلية التي حلها العام : (1)__________ $y{=}c_1e^{2x} + c_2e^{3x}$

حيث c_2 , c_1 ثابتان اختياريان

الحل:-

بتفاضل (1) مرتين

$$y' = 2c_1e^{2x} + 3c_2e^{3x} \_\_\_\_\_\_\_ (2)$$

$$y'' = 4c_1e^{2x} + 9c_2e^{3x} \_\_\_\_\_\_\_ (3)$$

لحزف , $c_2 c_1$:

$$\begin{bmatrix} y & e^{2x} & e^{3x} \\ y' & 2e^{2x} & 3e^{3x} \\ y'' & 4e^{2x} & 9e^{3x} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} y & 1 & 1 \\ y' & 2 & 3 \\ y'' & 4 & 9 \end{bmatrix} = 0$$

$$y\,(18-12) - y'(9-4) + y''(3-2) = 0$$

$$\therefore y'' - 5y' + 6y = 0$$

مثال (13)

اوجد المعادلة التفاضلية التي حلها العام $y=c_1 + c_2x + x^2$

الحل:-

نضع الحل العام على الصورة $y\text{-}x^2 = c_1 + c_2x$

نفاضل هذا الحل مرتين ثم نحذف c_1 , c_2 فنحصل على:

$$\begin{bmatrix} y - x^2 & 1 & x \\ y' - 2x & 0 & 1 \\ y'' - 2 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0$$

وتكون المعادلة المطلوبة هي : $\therefore \quad y'' = 2$ $\qquad y'' - 2 = 0$

(5-1) الشروط الابتدائية والشروط الحدية:

في بعض مسائل المعادلات التفاضلية العادية نعطي بعض الشروط التي يجب أن تحقق المعادلة التفاضلية العادية. وهذه الشروط هي التي تمكننا من تحديد الثوابت الاختياري التي تظهر في الحل العام نتيجة لعمليات التكامل المستخدمة لإيجاد الحل العام .

مثال(14)

اوجد حل المعادلة $y' = 2x$ التي تحقق الشرط $y(2) = 3$

الحل:-

بتكامل المعادلة التفاضلية $y(x)=x^2 + c$

بالتعويض في الشرط $c=-1 \quad \therefore \quad 3=4+c$

إذن الحل المطلوب هو $y(x)=x^2 - 1$

ولما كان الحل العام للمعادلة التفاضلية العادية من الرتبة الثانية يحتوي على ثابتين اختياريين , لذا يستلزم لتحديد الثابتين وجود شرطان إضافيان للمعادلة و هذان الشرطان يأخذان صورا مختلفة منها:-

1) إذا أعطي هذان الشرطان عند النقطة $x_\circ$ مثل :

$$y'(x_\circ) = b \quad , \quad y(x_\circ) = a$$

فان تلك الشروط تعرف بالشروط الابتدائيه عند $(x_\circ)$ وتسمى المعادلة التفاضلية بالإضافة إلي الشروط مسالة القيمة الابتدائية Initial value

2) إذا أعطي الشرطان عند نقطتين مختلفتين $y(x_1) = y_1$, $y'(x_2) = y_2$

كانت الشروط شروطا حديه وسميت المعادلة التفاضلية بالإضافة إلي الشروط الحدية مسالة القيمة الحدية Boundary Value Problem

مثال(15)

اوجد حل مسالة القيمة الابتدائية $y'(0) = -1$, $y(0) = 1$, $y'' = x$

الحل:-

بإجراء التكامل مرتين $y = \frac{1}{6}x^3 + c_1 x + c_2$

الذي يمثل الحل العام للمعادلة المعطاة حيث $y' = \frac{1}{2}x^2 + c_1$

بالتعويض في الشروط الابتدائية

$y'(0) = -1 \qquad -1 = c_1 \quad c_1 = -1$

$y(0) = 1 \qquad 1 = c_2 \quad c_2 = 1$

ويكون حل المسالة المعطاة هو :

$$y = \frac{1}{6}x^3 - x + 1$$

(1-2) المعادلات التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية

تعريف المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية:

هي معادلات جبرية مناظرة للمعادلة التفاضلية وتكب على الصورة:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0 \rightarrow 1$$

حيث أن a_1, a_2 ثابتان وتكون المعادلة على الصورة:

وتسمى بالمعادلة المميزة (المساعدة) ويمكن الحصول عليها مباشرة من المعادلة التفاضلية الأصلية بدلالة المؤثر (D) وذلك بوضع (ʎ) بدلا من (D) وهزه المعدلة عبارة عن معادلة تربيعي (من الدرجة لثانية فيʎ) وبالتالي لها جذران $ʎ_2$, $ʎ_1$

تعريف الحل العام:

إذا كان y_1 , y_2 للمعادلة (1) فإن : $y = c_1 y_1 + c_2 y_2$ يمثل الحل العام للمعادلة (*1*) , حيث c_2, c_1 ثابتان اختياريان

(2-1-1) إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتبة الثانية ذات المعاملات الثابتة :

1- نفترض أن المعادلة $y'' + a_1 y' + a_2 = 0$ حيث $c_2 c_1$ ثابتان :

للحصول على الحل العام لتلك المعادلة , نحاول إيجاد حلين خاصين مستقلين خطيا .

2- نحاول استخدام ($y = e^{ʎx}$) حلا للمعادلة (*1*) حيث (ʎ) مقدار ثابت .

3- نضع المعادلة على الصورة :

$(D^2 + a_1 D + a_2) y = 0$ ثم نعوض بالحل المفروض

$$D_y = De^{ʎx} = ʎe^{ʎx} , D^2 y = D^2 e^{ʎx} = ʎ^2 e^{ʎx}$$

4- نحصل على المعادلة: $(ʎ^2 + a_1 ʎ + a_2) e^{ʎx} = 0$

5- حيث $e^{\lambda x} \neq 0$ ينتج أن : $\lambda^2 + a_1 \lambda + a_{2=0}$

(2-2) طرق حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية

(1-2-2) طريقة المؤثر التفاضلي:

- تعريف المؤثر التفاضلي D

$D = \frac{d}{dx}$ ≡ المشتقة الأولى بالنسبة إلى x

$D^2 = \frac{d^2}{dx^2}$ ≡ المشتقة الثانية بالنسبة إلى x

وهكذا 0000 $D^K = \frac{d^K}{X^K}$

- بعض خواص المؤثر التفاضلي D :

i. $D[f_1(x) \pm f_2(x)] = Df_1(x) \pm Df_2(x)$

ii. $D[\, k\, f(x)\,] = K\, d\, f(x)$

iii. $F(D)e^{ax} = f(a)e^{ax}$, f كثيرة حدود في D

مما سبق يمكن كتابة المعادلة

$$a_{0(y)^n} + a_1(y)^{n-1} + a_2(y)^{n-2} \ldots\ldots a_{n-1}y + a_n y = f(x)$$

على الصورة $(a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + a_2 D^{n-2} + \cdots + a_{n-1}D + a_n D)y = f(x)$

حيث نجد أن: $\emptyset(D) = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \ldots . a_{n-1} D + a_n$

دالة كثبره حدود في D من الدرجة n

ويزلك تصبح المعادلة على الصورة الرمزية $\emptyset\,(D)y=f(x)$ وهي معادلة خطية غير متجانسة أما المعادلة $\emptyset\,(D)y=0$ فهي معادلة خطية متجانسة

(2-2-2)يمكن الحصول على الحل العام بثلاث حالات :

A. جزرا المعادلة المميزة حقيقيان ومختلفان:

أي أن : $\lambda_2 \neq \lambda_1$ نجد أن $y_1 = e^{\lambda_1 X}$, $y_2 = e^{\lambda_1 X}$ حلان خاصان للمعادلة التفاضلية .

بالتالي فإن الحل العام يكون على الصورة :

$y = c_1 e^{\lambda_1 X} + c_2 e^{\lambda_2 X}$ c_1, c_2 ثابتان اختياريان

مثال1

اوجد الحل العام للمعادلة $y'' + 3y' - 4y = 0$

الحل

نضع المعادلة على صورة $(D^2+3D-4)y=0$ حيث $D=\frac{d}{dx}$

$y=e^{\lambda X}$ حلا للمعادلة : $\lambda^2+3\lambda-4=0$

فإن المعادلة المساعدة هي : $(\lambda+4)(\lambda-1)$ $\lambda_1=-4, \lambda_2=$

فيكون الحل العام هو: $y=c_1e^{-4X}+c_2e^{X}$

B . جزرا المعادلة المميزة حقيقيان متساويان :

أي آن $\lambda_1=\lambda_2$ في هزه الحالة يكون $y_1=e^{\lambda_1 x}$ الحل الأول مرتبط بالحل $\lambda_2=e^{\lambda_2 x}$ لذا نبحث عن حل آخر ل y_2 غير مرتبط بالحل y_1 وقد ثبت أن y_2 يمثل حلا للمعادلة وغير مرتبط بالحل الأول y_1

وعلى ذلك يكون الحل العام على الصورة $c_1e^{\lambda_1 x}+c_2xe^{\lambda_2 x}$

أو $y=(c_1+c_2x)e^{\lambda x}$ حيث $\lambda_1=\lambda_2=\lambda$

مثال 2

أوجد الحل العام للمعادلة $y''-4y'+4y=0$

الحل

نضع المعادلة على صورة

$(D^2-4D+4)Y=0$

نفرض أن $y=e^{yx}$ حلا للمعادلة المعطاة

المعادلة المساعدة: $\lambda^2-4\lambda+4=0$ $(\lambda-2)^2$

ويكون جزر المعادلة

ويكون الحل العام هو :

$y=(c_1+c_2x)e^{\lambda x}$

مثال 3

اوجد الحل العام للمعادلة

y''-8y'+16y=0

نضعها في الصرة

$Y=e^{ƛx}$ حلا للمعادلة المعطاة

∴المعادلة المساعدة هي :

فيمكن تحليلها إلي

فيكون جزراها :

∴الحل العام هو :

$$Y=(c_1 + c_2 x)e^{4x}$$

مثال 4

حل المعادلة : y''=0

تكون المعادلة المساعدة : $ƛ^2 = 0$

فيكون جزراها $ƛ_1 = ƛ_2 = 0$

∴الحل العام هو :

$$Y=(c_1 + c_2 x)$$

مثال 5

حل المعادلة

$$X + 4\ddot{X} + 4\dot{X} = 0$$

نضع المعادلة على الصورة

$$(D^2 + 4D + 4)X = 0$$

المعادلة المساعدة هي

نحللها إلى $(\lambda + 2)^2$

∴ يكون الجذران هما $\lambda_1 = \lambda_2 = -2$

الحل العام هو :

$$X=(C_1 + C_2 t)e^{2x}$$

C. جزرا المعادلة المميزة مركبان (الصيغة الربيعية) :

إذا كان احد جزري المعادلة عدد مركب $\lambda_1 = \mathbf{a} + \mathbf{i}\beta$ حيث $i=\sqrt{-1}$ فان الجزر الاخر λ_2 يكون على صورة $\lambda_2 = a - iB$ (الجزر المرافق)، حيث B=0 من ذلك فان $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ويكون الحل العام هو

$$Y=A_1 e^{(a+iB)x} + A_2 e^{(a-iB)x} \text{—1}$$

ويمكن إثبات إن الحل العام يكون على صورة :

$$Y=e^{ax}[c_1 \, cosBx + c_2 sinBx]$$

نضع الحل —1على الصورة :

$$Y=A_1 e^{ax} e^{iB} + A_2 e^{ax} e^{-iBx} = e^{ax}[A_1 e^{iBx} + A_2 e^{-iBx}]$$

ونعلم أن :

$$\boldsymbol{e^{iBx} = c}$$

وعلى ذلك فان :

$$Y=e^{ax}[A_1(cosBx + isinBx) + A_2(cosBx - isinBx)]$$

$$=e^{ax}[(A_1 + A_2)cosBx + i(A_1 - A_2)sinBx]$$

فيكون الحل هو :

$$Y=e^{ax}[c_1 cosBx + c_2 sinBx]$$

مثال6

اوجد **الحل العام للمعادلة** $y''+2y'+5y=0$

نضع المعادلة في الصورة $(D^2 + 2D + 5)y = 0$

$Y=e^{ƛx}$ **حلا** للمعادلة المعطاة

المعادلة المساعدة هي $ƛ^2 + 2ƛ + 5 = 0$

نحولها إلى الصورة التربيعية :

$$ƛ=\frac{-2\pm\sqrt{4-20}}{2} \quad =-1\pm 2i$$

الحل العام هو :

$$Y=e^{-x}[c_1 \cos 2x + c_2 \sin 2x]$$

(3-2)طرق إيجاد الحل الخاص للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة المؤثر العكسي :

حيث أن $y\ p$ حل يحقق المعادلة $\emptyset(D)y = f(x)$

$\emptyset(D)y\ p = f(x)$

باستخدام التأثير العكسي على الطرفين $\frac{1}{\emptyset(D)}\emptyset(D)yp = \frac{1}{\emptyset(D)} f(x)$

$$yp = \frac{1}{\emptyset(D)}f(x)$$

استخدام التأثير العكسي على الدالة f(x) له صور مختلفة :

1. إذا كان $\emptyset\ f(x) = e^{ax}$

$$\emptyset(a)\frac{1}{\emptyset(D)}e^{ax} = e^{ax}$$

بالقسمة على $\emptyset(a) \neq 0$

أي أن $\frac{1}{\emptyset(a)}e^{ax} = \frac{1}{\emptyset(a)}e^{ax}$, $\emptyset$ (a) ≠ 0 ≠

2. **إذا كان $f(x) = e^{ax}y(x)$**

نعلم أن

$$D[e^{ax}v(x)] = e^{ax}Dv(x) + ae^{ax}v(x) = e^{ax}(D + a)v(x)$$

أيضا

$$D^2[e^{ax}v(x)] = D[e^{ax}(D + a)v(x)$$
$$e^{ax}[D^2v(x) + adv(x) + ae^{ax}(D + a)v(x)$$
$$= e^{ax}[D + a]^2v(x)$$

وهكذا نجد أن

$$D[e^{ax}v(x)]=e^{ax}\emptyset(D + x)v(x)$$

ومن ذلك يمكن إثبات أن

بالتأثير على الطرفين بالمؤثر$\emptyset$ (D)

$$L.H.S = \emptyset(D)\frac{1}{\emptyset(D)}e^{ax}v(x) = e^{ex}v(x)$$

$$R.H.S = \emptyset(D)e^{ax}\frac{1}{\emptyset(D+x)}v(x)$$

$$= e^{ax}(D + a)\frac{1}{\emptyset(D+a)}v(x)$$

$$= e^{ax}v(x)$$

3. إذا كان $\frac{1}{D}f(x) = \int f(x)dx$

الإثبات :

$$\frac{1}{D}f(x) = z \rightarrow f(x) = D_z = \frac{dz}{dx}$$
$$\therefore z= \int f(x)dx = \frac{1}{D}f(x)$$

حيث $\frac{1}{D}$ التأثير العكسي للمؤثر D ، أي $\frac{1}{D}$يمثل التكامل بالنسبة إلى x ،بينما $\frac{1}{D^k}$ يمثل التكامل بالنسبة x عدد k من المرات

4. إذا كان f(x) دالة كثيرة حدود من درجة n وكان $\emptyset$ (D) نأخذ إحدى صور

$(1+D)$, $(1-D)$, $(1+D^2)$, $(1-D^2)$, ...

$$\frac{1}{(1+D}f(x) = [1 - D + D^2 + \cdots + (-1)^n D^n]f(x)$$

$$\frac{1}{1-D}f(x) = [1 + D + D^2 + \cdots + D^n]f(x)$$

$$\frac{1}{1-D}f(x) = [1 + 2D + 3D^2 + \cdots + (n+1)D^n]f(x)$$

أو نتبع القسمة المطلوبة لإيجاد $\frac{1}{\emptyset(D)}$

5. إذا كان $f(x) = c$
حيث c مقدار ثابت

- $\frac{1}{\emptyset(D)}c = \frac{1}{\emptyset(D)}ce^{ax} = c\frac{1}{\emptyset(D)}e^{ax} = \frac{c}{\emptyset(D)}$

$\emptyset(D) \neq 0$

فإذا كان $\emptyset(D) = D^3 - 3D^2 + 2D + 5$

$$\emptyset(D) = 5$$

$$\frac{1}{\emptyset(D)}c = \frac{c}{\emptyset(D)} = \frac{c}{5}$$

- $\emptyset(D) = D^3 - 2D^2 + 6D \rightarrow \emptyset(D) = 0$

$$\therefore \frac{1}{\emptyset(D)}c = \frac{1}{D^3-2D^2+6D}c = \frac{1}{D}.\frac{1}{D^2-2D=6}c = \frac{1}{D}.\frac{1}{6} = \frac{C}{6}x$$

6. إذا كان $f(x) = \begin{cases} \sin(ax +) \\ \cos(ax + B) \end{cases}$

فإن $\begin{cases} \sin(ax + B) \\ \cos(ax + B) \end{cases} \frac{1}{\emptyset(-a^2)} = \begin{cases} \sin(ax + B) \\ \cos(ax + B) \end{cases} \frac{1}{\emptyset(D^2)}$

نعلم أن $D\sin(ax +) = a\cos(ax + B)$

$$D^2 \sin(ax + B) = -a^2 \sin(ax + B)$$

$$D^3 \sin(ax + B) = -a^3 \cos(a^4 \sin(ax + B))$$

$$D^4 \sin(ax + B) = D^4 \sin(ax + B) = (-a^4)^2 \sin(ax + B)$$

ومن ذلك يمكن استنتاج

$$\rightarrow (D^2)^k \sin(ax + B) = (-a^2)^k \sin(ax + B)$$

وبالمثل يمكن نثبت أن

$$(D^2)^k \cos(ax + B) = (-a^2)^k \cos(ax + B)$$

وعلى ذلك فإن

$\emptyset(D$

بأخذ $f(x) = \sin(ax + B)$

$\therefore \emptyset(D^2)\sin(ax + B) = \emptyset(-a^2)\sin(ax + B)$

وبالتأثير على الطرفين بالمؤثر العكسي $\frac{1}{\emptyset(D^2)}$

$\therefore \frac{1}{\emptyset(D^2)}\emptyset(-a^2)\sin(ax + B) = \sin(ax + B)$

وحيث $\emptyset(-a^2)$ مقدار ثابت

$\therefore \emptyset(-a^2)\frac{1}{\emptyset(D^2)}\sin(ax + B) = \sin(ax + B)$

بالقسمة على $\emptyset(-a^2) \neq 0$

$\therefore \frac{1}{\emptyset(D^2)}\sin(ax + B) = \frac{1}{\emptyset(-a^2)}\sin(ax + B) = \sin(ax + B)$

7. من الحالة 1 إذا كان *f(x)=0*

نضع $e^{ax} = e^{ax}.1 = e^{ax}, v(x)$

من 2

$\therefore \frac{1}{\emptyset(D)}e^{ax} = \frac{1}{\emptyset(D)}(e^{ax}.1) = e^{ax}\frac{1}{\emptyset(D)}(1)$

8. من الحالة 6 إذا كان $\emptyset(-a^2) = 0$

في هزه الحالة نضع $\sin(ax + B) = Ie^{i(aa+B)}$

$\therefore \frac{1}{\emptyset(D}$

أمثلة متنوعة :

مثال 7

اوجد الحل العام للمعادلة $(D^2 + 2D = 3)y = 42e^{4x}$

الحل

أولا: نوجد حل $(D^2 + 2D - 3)y = 0$

نفرض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة

ازن المعادلة المميزة هي $\lambda^2 + 2\lambda - 3 = 0$

$$(\lambda - 1)(\lambda + 3) = 0 \rightarrow \lambda = 1 , \lambda = -3$$

$$y\lambda = c_1 e^x + c_2 e^{-3x}$$

ثانيا: نوجد حلا خاصا yp

$$yp = \frac{1}{D^2+2D-3} 42e^{4x} = 42 \frac{1}{(D-1)(D+3)} e^{4x} = 42 \frac{1}{(3)(7)} e^{4x} = 2e^{4x}$$

ثالثا: الحل العام

$$yg = y\lambda + yp$$

$$yg = c_1 e^x + c_2 e^{-3x} + 2e^{4x}$$

حيث c_1 , c_2 ثابتان اختياريان

مثال 8

اوجد حل مسألة القيمة الابتدائية

$$(D^2 + 4D + 3)y = 8xe^x - 6 , y(0) = \frac{-I1}{4} , y'(0) = \frac{1}{4}$$

الحل

أولا: نوجد حل المعادلة المتجانسة

نفرض أن $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة وتكون ا لمعادلة المميزة هي

$$\lambda^2 + 4\lambda + 3 = 0$$

$$(\lambda + 1)(\lambda + 3) = 0 \rightarrow \lambda = -1 , -3$$

$$y\lambda = c_1 e^{-x} + c_2 e^{-3x}$$

ثانيا: نوجد الجل الخاص yp

$$\frac{1}{(D+1)(D+3)}8xe^{x} = 8e^{x}\frac{1}{(D+2)(D+4)}x$$

$$= \frac{8}{(2)(4)}e^{x} = \frac{1}{\left(1+\frac{D}{2}\right)\left(1+\frac{D}{4}\right)}x = e^{x}\left(1-\frac{D}{2}\right)\left(1-\frac{D}{4}\right)x$$

$$= e^{x}\left(1-\frac{D}{2}\right)\left(x-\frac{1}{4}\right) = e^{x}\left[x-\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right] = \frac{1}{4}e^{x}(4x-3)$$

وكذلك

$$\frac{1}{(D+1)(D+3)}6 = \frac{6}{3} = 2$$

$$yp = \frac{1}{4}e^{x}(4x-3) + 2$$

ثالثا: نوجد الحل العام

$$yg = y\text{ג} + yp$$

$$yg = c_1e^{-x} + c_2e^{-3x} + \frac{1}{4}e^{x}(4x-3) + 2 \ \rightarrow 1$$

ولإيجاد الحل الذي يحقق الشروط الابتدائية نوجد

$$y' = -c_1e^{-x} - 3c_2e^{-3x} + \frac{1}{4}e^{x}(4+4x-3)$$

$$\therefore y' = -c_1e^{-x} - 3c_2e^{-3x} + \frac{1}{4}e^{x}(4x+1) \rightarrow 2$$

من*1*و*2* والشروط الابتدائية

$$y(0) = \frac{-I1}{4} \ \rightarrow \frac{-I1}{4}c_1 + c_2 - \frac{3}{4} - 2 \ \rightarrow 3$$

$$y'(0) = \frac{1}{4} \ \rightarrow \frac{-1}{4} = -c_1 - 3c_2 + \frac{1}{4} \ \rightarrow 4$$

بجمع 3 و4 $\therefore \frac{-10}{4} = -2c_2 - \frac{5}{2} \rightarrow 2c_2 = 0 \rightarrow c_2 = 0$

وبالتعويض في 3 $c_1 = \frac{-I1}{4} + \frac{I1}{4} = 0 \rightarrow c_1 = 0$

$\therefore$ الحل المطلوب هو $y = \frac{1}{4}e^{x}(4x-3) - 2$

مثال 9

اوجد الحل العام للمعالة $(D^3 - D^2)y = 2\cos x$

الحل

أولا: نوجد حل $(D^3 - D^2)y = 0$

$$\left(ג^3 - ג^2\right) = 0 \rightarrow ג^2\left(ג - 1\right) = 0 \rightarrow ג = 0,0, ג = 1$$

نجد أن $yג = c_1 + c_2x + c_3e^x$

ثانيا: نوجد yp حيث

$$yp = \frac{1}{(D^3 - D^2)} 2\cos x = 2\frac{1}{-D+1}\cos x$$

بالضرب في مرافق $1 + D$

$$yp = 2\frac{1+D}{1-D^2}\cos x = 2\frac{1+D}{1+1}\cos x = (1 + D)\cos x = \cos x - \sin x$$

ثالثا:الحل العام

$$y = yג + yp = c_1 + c_2e^{-x} + \cos x - \sin x$$

مثال 10

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(D^2 - D + 5)y = \sin 2x$$

الحل

أولا :نحل المعادلة المتجانسة $(D^2 - D + 5)y = 0$

بافتراض أن الحل هو

$y = e^{ גx}$ بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي $ג^2 - ג + 5 = 0$

بالتحليل نجد أن $ג = \frac{1 \pm \sqrt{-19}}{2} = \frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{19}}{2}i$

بذلك حل المعادلة المتجانسة هو

$$yג = e^{\frac{1}{2}x}\left(A\cos\frac{\sqrt{19}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{19}}{2}x\right)$$

حيث A , B ثابتان اختياريان

ثانيا: الحل الخاص yp يعطى من

$$yp = \frac{1}{D^2 - D + 5}[\sin 2x]$$

$$= \frac{1}{-(2)^2 - D + 5}[\sin 2x]$$

$$= \frac{1}{1 - D}[\sin 2x]$$

$$= \frac{1 + D}{(1 + D)(1 - D)}[\sin 2x]$$

$$\frac{1 + D}{(1 - D)^2}[sin\, 2x] = \frac{1 + D}{5}[sin\, 2x]$$

$$= \frac{1}{5}(\sin 2x + 2\cos 2x)$$

أي أن $yP = \frac{1}{5}(\sin 2x + 2\cos 2x)$

يزلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = e^{\frac{1}{2}x}\left(A\cos\frac{\sqrt{19}}{2}x + B\sin\frac{\sqrt{19}}{2}x\right) + \frac{1}{5}(\sin 2x + \cos 2x)$$

حيث B , ثابتان اختياريان

ملاحظة : في المثال أدناه نناقش الحل عندما يكون $\emptyset(-\mathbf{a}^2) = \mathbf{0}$

مثال 11

اوجد الحل للمعادلة التفاضلية $(D^2 + 4)y = \sin 2x$

الحل

أولا :نوجد المعادلة المتجانسة هو $(D^2 + 4)y = 0$

بافتراض أن الحل هو $y = e^{\lambda x}$ بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2 + 4 = 0 \rightarrow \lambda_{1,2} = \pm 2i$$

يزلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو $y\lambda = A\cos 2x + B\sin 2x$

حيث A, B ثابتان اختياريان

ثانيا:نوجد الحل الخاص yp يعطى $\qquad yp = \frac{1}{\ ^{2}+4}[\sin 2x]$

واضح أن $0 = (-4)Ø = (-m^{2})Ø$ في هزه الحالة نستخدم الطريقة التالية :

من نظرية ديموقر نجد أن $\quad e^{ix} = \cos x + i \sin x$

أي أن $Rel(e^{ix}) = \cos x =$ الجزء الحقيقي

$Im(e^{ix}) = \sin x =$ الجزء التخيلي

وعلى هذا فان $\quad yp = \frac{1}{D^{2}+4} Im\left[e^{2ix}\right] = Im.\, e^{2ix} \frac{1}{(D+2i)^{2}+4}[1]$

$$yp = Im.\, e^{2ix} \frac{1}{D^{2}+4iD-4+4}[1] = Im.\, e^{2ix}.\frac{1}{D^{2}+4iD}[1]$$

$$Im.\, e^{2ix}.\frac{1}{4iD}\left(1-\frac{D}{4i}+\cdots\right)[1] = Im.\, e^{2ix}.\,(\frac{1}{4iD}+\frac{1}{16}+\cdots)[1]$$

$$= Im.\, e^{2ix}.\,(\frac{x}{4i}+\frac{1}{16})$$

$$= Im(\cos 2x + i \sin 2x)(-\frac{x}{4}i+\frac{1}{16})$$

ومنها $\quad yp = \frac{1}{16}\sin 2x - \frac{x}{4}\cos 2x$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = A\cos 2x + B\sin 2x + \frac{1}{16}\sin 2x - \frac{x}{4}\cos 2x$$

حيث B , ثابتان اختياريان

9. إذا كان $f(x)$ على الصورة $\qquad f(x) = [\begin{matrix}\cosh mx \\ \sinh mx\end{matrix}$

في هزه الحالة فإننا نستخدم الحالة (6) حيث

$$\frac{1}{Ø(D^{2})} = [\begin{matrix}\cosh mx \\ \sinh mx\end{matrix} = \frac{1}{Ø(m^{2})} = [\begin{matrix}\cosh mx \\ \sinh mx\end{matrix}$$

بشرط أن $0 \neq (\ ^{2})Ø$

مثال 12

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $\quad (D^{4}-8D^{2}-9)y = 50\sinh 2x$

الحل

أولا:نحل المعادلة المتجانسة $(D^4 - 8D^2 - 9)y = 0$

بافتراض أن الحل هو $y = e^{\lambda x}$ بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$\lambda^4 - \lambda^2 - 9 = 0$ والتحليل هو $\left(\lambda^2 - 9\right)\left(\lambda^2 + 1\right) = 0$

$$(\lambda - 3)(\lambda + 3)\left(\lambda^2 + 1\right) = 0$$

الجذور هي $\lambda = 3\,, \lambda = -3, \lambda = \pm i$

ثانيا: الحل الخاص yp هو

$$yp = \frac{1}{D^4-8D^2-9}[50\sinh 2x]$$

ومنها $yp = -2\sinh 2x$

وبذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1e^{3x} + c_2e^{-3x} + c_3\cos x + c_4\sin x - 2\sinh 2x$$

حيث c_1, c_2, c_3, c_4 ثوابت اختيارية

مثال 13

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية $(D^4 - 1)y = 10\cos x.\cosh x$

الحل

المعادلة المتجانسة هي $(D^4 - 1)y = 0$

بافتراض أن الحل هو $y = e^{\lambda x}$ بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$\left(\lambda^4 - 1\right) = 0$ بالتحليل نجد أن $\left(\lambda^2 - 1\right)\left(\lambda^2 + 1\right) = 0$

ومنها الجذور هي $\lambda = 1, \lambda = -1, \lambda = \pm i$

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو $y\lambda = c_1 \quad {}^{x} + c_2e^{-x} + c_3\cos x + c_4\sin x$

حيث c_1, c_3, c_3, c_4 ثوابت اختيارية

ويكون الحل الخاص هو $yp = \frac{1}{D^4-1}[10\cos x.\cosh x]$

$$= Re \ \frac{1}{(D^2-1)(D^2+1)}\left[e^{ix}\frac{e^x+e^{-x}}{2}\right]$$

$$= 5. Re \ \frac{1}{(D^2-1)(D^2+1)}[e^{(1+i)x} + e^{(1-i)x}]$$

$$= 5. Re \ [\frac{e^{(1+i)x}}{(\ (1+i)^2-1)(\ (1+i)^2+1)} + \frac{e^{(i-1)x}}{(\ (i-1)^2-1)(\ (i-1)^2+1)}]$$

$$= 5. Re \ \left[\frac{e^x e^{ix}}{-5} + \frac{e^{-x}e^{ix}}{-5}\right]$$

$$= \ -Re.(e^x+e^{-x})e^{ix} - Re.2\cosh x(\cos x + i\sin x)$$

$$= -2\cosh x.\cos x$$

ذلك يكون الحل العام هو

$$y = c_1e^x + c_2e^{-x} + c_3\cos x + c_4\sin x - 2\cosh x.\cos x$$

حيث c_1, c_2, c_3, c_4 ثوابت اختيارية

مثال14

اوجد حل المعادلة التفاضلية $(D-1)^2(D+1)y = -2e^x$

الحل

المعادلة المتجانسة هي $(D-1)^2(D+1)y = 0$

نفرض أن الحل هو $y = e^{\lambda x}$ بالتفاضل والتعويض نجد أن المعادلة المساعدة هي

$(\lambda-1)^2(\lambda+1) = 0$ بالتحليل نجد أن $\lambda = -1$ ، $\lambda = 1$ مكرر مرتين

بذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو $y_\lambda = c_1 \ ^{-x} + (c_2 + c_3x)e^x$

حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية

ويكون الحل الخاص yp هو $yp = \frac{1}{(D-1)^2(D+1)}[-e^x]$

$$= \frac{-2}{(D-1)^2(1+1)}[e^x] = \frac{-2e^x}{2(D+1-1)^2}[1]$$

$$= -e^x\frac{1}{D^2}[1] = -\frac{1}{2}x^2e^x$$

$\therefore yp = -\frac{1}{2}x^2e^x$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y = c_1 e^x + (c_2 + c_3 x)e^x - \frac{1}{2}x^2 e^x$$

حيث c_1, c_2, c_3 ثوابت اختيارية

(4-2)معادلة أويلر التفاضلية من الرتبة الثانية :

تأخذ الصورة $a_2 x^2 y'' + a_1 x y' + a_0 y = f(x) \quad \rightarrow 1$

حيث a_2 , a_1 , a_0 ثوابت

لحل المعادلة *1* فإننا نستخدم التعويض $x = e^x , or\ t = \ln x$

نفترض أن $\theta = \frac{d}{dt} \quad , \quad D = \frac{d}{dx}$

بذلك نجد أن $\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} . \frac{dt}{dx} = \frac{1}{x} . \frac{dy}{dt}$

أي أن $x\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dt} \quad \rightarrow 2$

ومنها $xD = 0 \quad \rightarrow 3$

وأيضا $D^2 = \frac{d^2}{dx^2} = \frac{d}{dx}(\frac{d}{dx}) = \frac{d}{dx}(\frac{d}{dt}\frac{dt}{dx})$

$$= \frac{d}{dx}\left(\frac{d}{dt} . \frac{1}{x}\right) = \frac{d}{dt} . \frac{-1}{x^2} + \frac{1}{x}\frac{d}{dx}(\frac{d}{dt})$$

$$= \frac{-1}{x^2}\frac{d}{dt} + \frac{1}{x}\left(\frac{d}{dt}\right) . \frac{dt}{dx}$$

بذلك يكون $D^2 = \frac{-1}{x^2}\theta + \frac{1}{x^2}\theta^2$

أي أن $x^2 D^2 = \theta(\theta - 1) \quad \rightarrow 4$

من العلاقة 4 و3 يمكن بسهولة إثبات أن

$$x^3 D^3 = \theta(\theta - 1)(\theta - 2)$$

$$\cdots \qquad \cdots \quad \cdots \quad \cdots$$

$$x^3 D^3 = \theta(\theta - 1)(\theta - 2) \ldots (\theta - n + 1)$$

وألان بالتعويض من المعادلتين 4و3 في المعادلة 1 نجد أن

$$a_2 \theta(\theta - 1)y + a_1 \theta y + a_0 y = f(e')$$

ومنها $DQ\ (a_2\theta^2(a_1-a_2)\theta+a_0)y = f(e')$,

هزه معادلة تفاضلية غير متجانسة من الرتبة الثانية ذات معاملات ثابتة

مثال15

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

$$(XD^2 - 2XD + 2)Y = 4X^3$$

الحل :

باستخدام التعويض $x = e^t$ ونفرض ان $\emptyset = \frac{dy}{dt}$ فان $XD = \emptyset$

$$(X^2D^2 = \emptyset(\emptyset - 1)$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية المعطاة نجد أن $\big(\emptyset(\emptyset - 1) - 2\emptyset + 2\big)Y = 4e^{3t}$

$$(\emptyset^2 - 3\emptyset + 2)y = 4e^{3t}$$

و هزه معادلة تفاضلية من الرتبة الثانية غير متجانسة ذات معاملات ثابتة

لحل المعادلة المتجانسة $(\emptyset^2 - 3\emptyset + 2)y = 0$

نفترض أن الحل هو $y=e^{\lambda x}$ بالتفاضل والتعويض نجد ان المعادلة المساعدة هي

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = 0$$

وبالتحليل نجد أن الجذور هي $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$

وبذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو $y_h = c_1e^t + c_2e^{2t}$

حيث c_1 , $_2$ ثابتان اختياران

ويكون الحل الخاص y_p هو :

$$y_p = \frac{}{\emptyset^2}$$

وبذلك يكون الحل هو

ولكن $x = e^t$

ذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$Y = c_1x + c_2x^2 + 2x^3$

حيث c_2 , c_1 ثابتان اختياران

(5-2)معادلة لاجرانج التفاضلية :

هذه معادلة تأخذ صورة عامة لمعادلة أويلر السابقة وهي على الصورة

$F[(a\,]x + b)D]y = F(x)$

a, b *ثوابت*اD لمؤثر التفاضلي $\frac{d}{dx}$ وعلى الصورة الخطية نأخذ الصورة

$a_0(a_x + b)^n y^n + a_1(a_x + b)^{n-1}y^{n-1} + a_{n-1}(a_x + b)y' + a_n y = f(x)$

حيث a_{n-1} , ... , a_1 , a_0 , a , b ,m ثوابت $a_0 \neq 0$

واضح انه عندما نأخذ $b = 0$, $a = 0$

*فان معا*دلة لاجرانج تتحول إلى معادلة اويلر التفاضلية أي أن معادلة أويلر التفاضلية صورة خاصة من معادلة لاجرانج التفاضلية ولحل معادلة اويلر التفاضلية فإننا نستخدم التعويض

$z = ax + b$, $z = e^t$ فتتحول المعادلة إلى معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة

مثال *16*

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية

(:

الحل:

باستخدام التعويض $z=3x+2$ فان :

$$\frac{dy}{dx} = 3\frac{dy}{dz},\quad \frac{d^2y}{dx^2} = 9\frac{d^2y}{dz^2}$$

وبالتعويض في المعادلة التفاضلية نحصل علي

$$9z^2\frac{d^2y}{dz^2} + 9z\frac{dy}{dz} - 36y = 3\left(\frac{z-2}{3}\right)^2 + 4\left(\frac{z-2}{3}\right) + 1$$

$$= \frac{1}{3}(z^2 - 4z + 4 + 4z - 8 + 3) = \frac{1}{3}(z^2 - 1)$$

باستخدام التعويض $z=e^t$ وبوضع $\theta=\frac{d}{dt}$ فان :

$$(9\theta(\theta-1)+9\theta-36)y = \frac{1}{3}(e^{2t} - 1)$$

ومنها$(\theta^2-4)=\frac{1}{27}(e^{3t}-1)$

وهزه معادلة تفاضلية ذات معاملات ثابتة

المعادلة المتجانسة $(\theta^2-4)y=0$هي

نفرض أن الحل العام علي صورة $y=e^{\lambda x}$ بالتفاضل والتعويض نحصل علي المعادلة المساعدة $\lambda^2-4=0$ وبالتحليل نجد جذورها هما $\lambda_1=2\,,\lambda_2=-2$ وبذلك يكون حل المعادلة المتجانسة هو $y_H=c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}$حيث $c_1\,,c_2$ ثابتان اختياريان

الحل الخاص يعطى :

$$Yp=\frac{1}{\theta^2-4}\left[\frac{1}{27}(e^{2t}-1)\right]$$

$$=\frac{1}{27}\left[\frac{e^{2t}}{(\theta+2)^2-4}(1)+\frac{1}{108}\left(1-\frac{\theta^2}{4}\right)^{-1}[1]\right]$$

$$=\frac{e^{2t}}{27}\left(\frac{1}{\theta^2-4\theta}\right)(1)+\frac{1}{108}\left(1-\frac{\theta^2}{4}\right)(1)$$

$$=\frac{e^{2t}}{108}\left(\frac{1}{\theta}\right)\left(1+\frac{\theta}{4}\right)^{-1}(1)+\frac{1}{108}$$

$$=\frac{e^{2t}}{108}\left(\frac{1}{\theta}-\frac{1}{4}+\cdots\right)(1)+\frac{1}{108}$$

$$Y=c_1e^{2t}+c_2e^{-2t}.\frac{e^{2t}}{108}\left(t-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{108}$$

ولكن $z=e^t$ ومنها $t=lnx$ وأيضا $z=3x+2$

بذلك يكون الحل العام للمعادلة التفاضلية المعطاة هو

$$y=c_1(3x+2)^2+c_2(3x+2)^{-2}+\frac{(3x+2)^2}{108}\left(ln(3x+2)-\frac{1}{4}\right)+\frac{1}{108}$$

حيث c_1,c_2 ثابتان اختياريان

(1-3) مسائل الزنبرك:

يتكون نظام الزنبرك البسيط من كتلة متصلة بالطرف السفلي لزنبرك معلق رأسياً من مكان مرتفع.

يكون النظام في موضع الاتزان عندما يكون في حالة السكون وتبدأ الكتلة بوسيلة أو أكثر مما يلي :

- إزاحة الكتلة من موضع اتزانها بإعطائها سرعة ابتدائية أو تعويضها بقوة خارجية f(t).

(1-1-3) قانون هوك :

تكون قوة استرداد الزنبرك (f)مساوية ومضادة للقوى المؤثرة على الزنبرك وتتناسب مع الاستطالة (الانكماش) للزنبرك كنتيجة للقوة المؤثرة أي أن : (f=-kl)حيث (k) هو ثابت التناسب ،ويسمى عادة بثابت الزنبرك.

مثال(1)

علقت كرة من الصلب وزنها 128lb في زنبرك فأحدث استطالة قدرها 2ft في طوله الطبيعي،يكون وزن الكتلة 128lb هو القوة المؤثرة المسؤلة عن الاستطالة (2ft) وبالتالي فإن : f=-128lb ومن قانون هوك نجد أن: -128=-k(2) أو k=64lb/ft نختار الاتجاه الرأسي إلى أسفل هو الاتجاه الموجب لنأخذ نقطة الأصل هي مركز ثقل الكتلة في موضع الاتزان وذلك للملائمة .نفرض أن كتلة الزنبرك ناقصة ويمكن إهمالها وأن مقاومة الهواء عند وجودها تتناسب مع سرعة الكتلة .وبالتالي عند أي لحظة (t) ، توجد ثلاث قوى تؤثر على النظام:

(1) (t) وتقاس في الاتجاه الموجب.

(2) قوة الاسترداد المعطاة بقانون هوك وهي $f\_s = -kx, k > 0$

(3)قوة مقاومة الهواء وتعطى هكذا $f_{a=-ax\ ,a>0}$ حيث a ثابت , لاحظ أن قوة الاسترداد f_s تؤثر دائماً بحيث تعيد النظام لموضع الإتزان.

إذا كانت الكتلة أسفل موضع الاتزان فإن xتكون سالبة ويكون kx-موجباً ، بينما إذا كانت الكتلة أعلى موضع الاتزان فإن x تكون موجبة ويكون kx –سالباً. نلاحظ أيضا أن قوة مقاومة الهواء f_a تؤثر فى الإتجاه المضاد للسرعة وتعمل على تضاؤل حركة الكتلة وذلك لأن $a>0$ وينتج الآن من قانون نيوتن الثاني أن :

$M\ x\ = -kx - ax\ + f(t)$ او $\ddot{x} + \frac{a}{m}\dot{x}\frac{k}{m} + f\frac{(t)}{m} = x$ ———(1)

إذا بدأ النظام الحركة عندما $t\ = 0$ بسرعة ابتدائية v_0 من موضع إبتدائي x_0 فيكون لدينا الشروط الإبتدائية :

لاتظهر قوة الجاذبية في المعادلة (1)صراحة، وعلى الرقم من ذلك نعوض على هزه القوة بقياس المسافة من موضع اتزان الزنبرك ، إذا أردنا النص على قوة الجاذبية صراحة فإنه: يجب قياس المسافة من الطرف السفلي لطرف الزنبرك الطبيعي . أي أنه يمكن أن تعطى تزبزب الزنبرك بالعلاقة :-

$$\ddot{x} + \frac{a}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = g + \frac{f(t)}{m}$$

إذا كانت نقطة الأصل $x\ = 0$ هي نقطة نهاية طرف الزنبرك غير المشدود قبل تعلق الكتلة m.

مثال(2)

علقت كرة من الصلب وزنها $128\ lb$ في زنبرك، فاستطال الزنبرك *2ft* في طوله الطبيعي .

بدأت الكرة الحركة بدون سرعة ابتدائية بإزاحتها 6inأعلى موضع الاتزان .بإهمال مقاومة الهواء أوجد :

(أ) تعبيرا عن موضع الكرة عند أي لحظة t.

(ب) موضع الكرة عندما $t=\frac{\pi}{12}$.

الحل:-

(أ) تعطى معادلة الحركة بالمعادلة (*1*) . لا توجد قوة خارجية وبالتالي $f(t) = 0$ وبإهمال مقاومة الهواء في الوسط المحيط ، وعليه فإن a=0تكون الحركة حرة وغير متضائلة ،ويكون لدينا $m = 128/32 = 4slugs$ ، $y = 32ftsec^2$ينتج من المثال الأول أن $k = 64lb/ft$ تصبح المعادلة (1) على الصورة $\ddot{x} + 16x = 0$ ويكون جزراء المعادلة المميزة هما : $\lambda \pm 4i$ ويكون حلها هو : $x(t) = c_1 \cos 4t$

عندما *t=0* يكون موضع الكرة هو$x_0 = \frac{1}{2}\ ft$ (الإشارة السالبة تكون مطلوبة لأن الكرة فى البداية أزيحت أعلى موضع الإتزان، أي أنها في الإتجاه السالب).

باستخدام الشرط الابتدائي في المعادلة (*1*) نجد أن$x(0)=c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = \frac{1}{2}$

وبالتالي تصبح المعادلة (*1*) على الصورة :

$$X(t) = -1/2 \cos 4t + c_2 \sin 4t \quad \text{———}(2)$$

وقد أعطينا السرعة الابتدائية وهي : v_0=0ft/sec بتفاضل (2) نحصل على :

$V(t) = \dot{x}(t) = 2\sin 4t + 4c_2 \cos 4t$ وعليه فإن:

$0 = v(0) = 2\sin 0 + 4c_2 \cos 0 = 4c_2$ ، وبالتالي فإن $c_2 = 0$ وتصبح المعادلة (2):

(3) $\rightarrow$ $X(t) = -\frac{1}{2}\cos 4t$ كمعادلة الحركة لكرة عند أي لحظة (t).

(ب)وعندما $t=\frac{\pi}{12}$ فإن :

$$X(\frac{\pi}{12}) = -\frac{1}{2}\cos\frac{4\pi}{12} = -\frac{1}{n}ft$$

مثال(3)

عين التردد الدائري والتردد الطبيعي والزمن الدوري للحركة التوافقية البسيطة المبينة في المثال السابق ؟

الحل :ـ

التردد الدائري $W = 4\text{eycles/sec} = 4h_2$

التردد الطبيعي $F = -\frac{4}{2\pi} = 0.6366h_2$

الزمن الدوري $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\sqrt{5}} = 2.8/\text{sec}$

مثال(4)

علقت كتلة $2kg$ في زنبرك معلوم ثابتة ألزنبركي وهو $10N/M$ وبعد أن أصبح في حالة السكون وضع في حركته بإعطائه سرعه ابتدائية 150cm/sec . أوجد تعبيراً عن حركة الكتلة ،بإهمال مقاومة الهواء ؟

الحل:ـ

تعطى معادلة الحركة بالمعادلة (1) وهي تمثل حركه غير متضائلة حرة لأنه لا توجد قوة خارجية مؤثرة على الكتلة $f(t) = 0$ ، ، ولا توجد مقاومة من الوسط المحيط و أن $a = 0$، وقد أعطيت كتلة وثابت الزنبرك أي $m = 2kg, k = N/M$ على الترتيب . وبالتالي تصبح المعادلة (1) على الصورة $\ddot{x} + 5x = 0$ ويكون جزراء المعادلة المميزة تخيلين ويكون حلها هو :

وعندما $t = 0$، يكون موضع الكتلة عند موضع الاتزان هو $x_0 = 0$ وبإستخدام هزا الشرط الإبتدائي في المعادلة (1) ، نجد أن :

$0 = x(0) = c_1 \cos 0 + c_2 \sin 0 = 0$ وتصبح المعادلة (1)على الصورة :

وقد أعطيت السرعة الإبتدائية وهي : $X(t) = c_2\, sin\sqrt{5}\ t \rightarrow (2)$

وعليه فإن: v_0 =150cm/sec=1.5m/sec

$1.5 = v_{(0)} = \sqrt{5}c_2 \cos 0 = \sqrt{5}c_2$

ومنها : $c_2 = \frac{1.5}{\sqrt{5}} = 0.6708$ وتصبح المعادلة (2) على الصورة :

$x_{(t)} = 0.6708(\sin\sqrt{5}\ t)$ وهو موضع الكتلة عند أي لحظة .

مثال(5)

علقت كرة 10kg في زنبرك فأحدثت إستطالة 0.7m في طوله الطبيعي .بدأت الكتلة الحركة من موضع الاتزان بسرعة ابتدائية $1m/sec$في اتجاه رأسي إلى أعلى . أوجد الحركة التالية إذا كانت قوة مقاومة الهواء هي $-40xn$ ؟

الحل:ـ

لدينا فيكون $w = mg = 98N$, $K = W/L = 140N/M$ وعلاوة $Y = 9.8m/sec^2$ على ذلك تكون

$A = 90$, $f(t) = 0$(لا توجد قوة خارجية) ، وتصبح المعادلة (1) على الصورة :

ويكون جزرا المعادلة المميزة المصاحبة هما $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = -7$ هما جزران حقيقيان ومختلفان ، وهزا مثال لحركة زائدة التضائل . ويكون حل المعادلة هو :

وتكون الشروط الابتدائية : $x(0) = 0$ هي (الكتلة بدأت في الاتجاه السالب) وباستخدام هذين الشرطين نجد أن : $c_1 = -c_2 = 1/5$ وبالتالي فإن :

لاحظ أن $X = -1/5\,(e^{-7t} - e^{-2t})$ عندما $x \to 0$ أن $t \to 0$، فبالتالي هزه الحركة عابرة

مثال(6)

أثبت أن أنواع الحركة الناتجة في مسائل الحركة المتضائلة أن الحركة تتعين تماماً بالمقدار

(a^2-4k)

الحل:-

يكون للحركة المتضائلة الحركة$f(t) = 0$ ، وتصبح المعادلة (1)على الصورة :

$\ddot{x} + \frac{a}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$، ويكون جزرا المعادلة المميزة المصاحبة هما :

$\lambda_1 = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-4km}}{2m}$, $\lambda_2 = \frac{-a \pm \sqrt{a^2-4km}}{2m}$إذا كان $a^2 - 4km > 0$ فإن: الجزرين حقيقيان ومختلفان ، وإذاكان $a^2 - 4km$ يكون جزرا المعادلة متساوية ، أما إذا كان

$a^2 - 4km < 0$فإن الجزرين مركبان مترافقان .

فتكون الحركة المناظرة هي زائدة المضائلة ، مضائلة حرجة تزبزبية مخمدة على الترتيب ، وحيث أن الجزء الحقيقي في كل من الجذرين يكون سالباً دائما فإن الحركة الناتجة في الحالات الثلاثة عابرة . (للحركة الزائدة المضائلة ، نحتاج لملاحظة $a^2 - 4km < a$، بينما في كل من الحلتين الآخرتين يكون الجزر الحقيقي هو $(-\frac{a}{2m})$.

مثال(7)

علقت كتلة10kg في زنبرك له الثابت الزنبركي $140N/M$. بدأت الكتلة الحركة من موضع الاتزان بسرعة ابتدائية 1m/secفي الاتجاه الرأسي إلى أعلى وبقوة مؤثرة خارجية $f(t)=5\sin t$. أوجد الحركة الناتج لكتلة إذا كانات قوة مقاومة الهواء هي: $-90\dot{x}$N ؟

الحل:-

وبالتالي تصبح معادلة الركة (1) على $f(t)=5\sin t$, $m = 10$, $k = 140$, $a = 90$

الصورة : $\ddot{x} + 9\dot{x} + 14x = \frac{1}{2}\sin t \rightarrow (1)$ ويكون الحل العام للمعادلة المتجانسة

المصاحبة $\ddot{x} + 9\dot{x} + 14x$ وبإستخدام طريقة المعاملات غير المعينة نجد أن :

وبالتالي يكون الحل العام للمعادلة (1) هو :

$$X= x_h + x_p = c_1e^{-2t} + c_2e^{-7t} + \frac{13}{500}\sin t - \frac{9}{500}\cos t$$

وباستخدام الشرطين الابتدائيين $x(0) = 0$, $\dot{x}(0) = 1$ نحصل على :

$$X = \frac{1}{500}\left(-90e^{-2t} + 99e^{-7t} + 13\sin t + 9\cos t\right)$$

لاحظ أن الحدود الآسية ناتجة من x_h وبالتالي تمثل حركة وتكون هزه الحدود هي الجزء العابر في الحل .

(2-3) مسائل الدوائر الكهربية:

تتكون الدوائر الكهربية البسيطة من مقاومه **R**بالاوم , ومكثف بالفاراد وحث بالهنري , وقوه دافعه كهربيه (ق.د.ك) $E(t)$ بالفولت , وبطارية أو مولدان مستقلان جميعهم على التوالي , يقاس التيلر **I** المار في الدائرة بالأمبير والشحنة q على المكثف بالكولوم.

(1-2-3) قانون عقدة كيرشوف

المجموع الجبري لفروق الجهد حول دائرة بسيطة مغلقه يساوي صفرا , من المعلوم إن فروق الجهد خلال مقاومه , مكثف وحث يكونوا RI , $\left(\frac{I}{C}\right)q$, $L\left(\frac{dI}{dt}\right)$ على الترتيب ، حيث q هي الشحنة على المكثف.

يكون فرق الجهد خلال (ق.د.ك) هو $E(t)$ وبالتالي من قانون كرشوف يكون لدينا :

وتكون العلاقة بين I،q هي: $RI = L\frac{dI}{dt} + \frac{I}{C}q - E(t) = 0 \rightarrow (3)$

وبتعويض هاتين القيمتين في (3) نحصل على المعادلة $I = \frac{dq}{dt}$, $\frac{dI}{dt} = \frac{d^2q}{dt^2} \rightarrow (4)$
التفاضلية للشحنة على المكثف

ويكون الشرطان الابتدائيان على q هما :

$q(0) = q_0$, $\frac{dq}{dt}|t = 0 , I(0) = I_0$

للحصول على معادلة تفاضلية للتيار ، نفاضل المعادلة (3) بالنسبة إلى t ثم نعوض المعادلة (4) مباشرة في المعادلة الناتجة فنحصل على :

ويكون الشرط الابتدائي الأول هو $I(0) = I_0$ ونحصل على الشرط الثاني من المعادلة (3)وبحلها بالنسبة إلى $\frac{}{dt}$ ثم نضع t=0 وبالتالي فإن:

يمكن الحصول على تعبير للتيار إما بحل المعدلة (7)مباشرة أو بحل المعادلة (5) بالنسة إلى الشحنة ثم نفاضل هزا التعبير .

مثال(8)

وصلت دائرة (R C L) على التوالي لها $R = 1800hms$, $C = I/280farad$, $L = 20henry$ وجهد مؤثر $E(t) = 10 \sin t$. وبفرض عدم وجود شحنة ابتدائية على المكثف ولكن يوجد تيار ابتدائي 1ampere عند t = 0 وذلك تأثير الجهد أولاً . أوجد الشحنة الناتجة على المكثف ؟

الحل:-

بتعويض القيم المعطاة في المعادلة (5)نحصل على $\ddot{} + 9\dot{q} + 14q = \frac{1}{2}\sin t$ وتكون هزه المعادلة مطابقة في الصورة للمعادلة (1) :

$$q = c_1e^{-2t} + c_2e^{-7t} + \frac{1}{500}\sin t - \frac{9}{500}\cos t$$

وباستخدام الشرطين الابتدائيين $q(0) = 0 , q(0) = 1$ نحصل على :

وبالتالي : $c_1 = \frac{110}{500}$, $c_2 = -\frac{101}{500}$

$$q = \frac{1}{500}\left(-110e^{-2t} - 101e^{-7t} + 13\sin t - 9\cos t\right)$$

مثال(9)

وصلت دائرة $(R\ C\ L)$ على التوالي لها $C = 10^{-2} farad$, $R = 100 hms$ L=0.5henry وجهد مؤثر$E(t) = 12$volts وبفرض عدم وجود تيار ابتدائي ولا شحنة عند $t = 0$وذلك عند تأثير الجهد أولاً أوجد التيار الناتج في النظام ؟

الحل:-

بتعويض القيمة المعطاة في المعادلة (7) نحصل على معادلة متجانسة وهي :

ويكون جذرا المعادلة المميزة المصاحبة هما:

وبالتالي يكون هذا مثالاً للنظام الحر غير المضائل للتيار . ويكون الحل هو :

$I = \epsilon$

ويكون الشرطان الابتدائيان هما: $I(0) = 0$; $q(0) = 0$ ومن المعادلة (8) يكون :

$\frac{dI}{dt}|t$

وبتطبيق هذين الشرطين على المعادلة (1) نحصل على $c_2 = \frac{12}{5}$; $c_1 = 0$ وبالتالي :

وهو تيار عابر تماماً.

مثال(10)

حل المثال السابق بإيجاد الشحنة على المكثف أولاً ؟

الحل:-

نحل أولاً بالنسبة للشحنة q ثم نستخدم العلاقة $I = \frac{dq}{dt}$ لنحصل على التيار بتعويض القيم المعطاة في المثال في المعادلة (5) فيكون لدينا

$$\ddot{q} + 20\dot{q} + 200\ddot{q} = 24$$

والتي تمثل نظاما قسريا للشحنة على العكس للنظام المضائل الحر الذي حصلنا عليه للتيار في المثال السابق باستخدام طريقة المعاملات غير المعينة لايجاد حل خاص , فنحصل على الحل العام

$q = e^{-10t}[(c_1 \cos 10t) + (c_2 \sin 10t)]$ ويكون الشرطان الابتدائيان

$q(0) = 0$, $I(0) = 0$ ونحصل على $c_{1}=c_2 = \frac{-3}{25}$

وبالتالي

q =

ومنها $I = \frac{dq}{dt} = \frac{12}{5} e^{-10t} \sin 10t$

ملاحظه:-

بالرغم من أن التيار يكون عابرا تماما فان الشحنة على المكثف تكون هي مجموع حدود كل من الحل العابر وحل حالة الاستقرار

(3-3) مسائل الطفو

اعتبر جسما كتلته m مغمورا أما جزئيا أو كليا في سائل كثافته ρ مثل هذه الجسم يخضع الي قوانين قوة الجاذبيه الي اسفل وقوه معاكسه تحكم بالاتي :-

(1-3-3) مبدا ارشمندس

يخضع جسم في سائل إلي قوة دفع متجه إلي أسفل تساوي وزن السائل المزاح بالجسم .

يحدث الاتزان عندما تكون قوة دفع السائل المزاح (الطفو) تساوي قوة الجاذبية على الجسم

بافتراض اسطوانة نصف قطرها r وارتفاعها H وارتفاع الاسطوانة المغمور h وحده من ارتفاعها عند حالة الاتزان .

عند الاتزان يكون حجم الماء المزاح بالاسطوانة هو $\pi r^2 h$ والذي يعطي قوه الدفع (الطفو) التي يجب أن تساوي وزن الاسطوانة mg وعليه فان : $\pi r^2 h = mg \rightarrow (9)$

تحدث الحركة عند إزاحة الاسطوانة من موضع الاتزان . نأخذ اختياريا الاتجاه الراسي لأعلى هو اتجاه x الموجب . القوه لأسفل أو السالبة على الجسم تبقى mg ولكن قوة الدفع (الطفو) أو الموجبة تختزل إلى π r^2[h-x (t)] p وينتج من قانون نيوتن الثاني أن

ويمكن تبسيط هذه المعادله باستحدام المعادله (9) إلي

$$m\ddot{x} = -\pi r^2 x(t) p \quad \text{او} \quad X + \frac{\pi r^2 p}{m} x = 0 \quad \rightarrow (10)$$

مثال(11)

عين ما إذا كانت اسطوانة نصف قطرها $4\ in$ وارتفاعها $10\ in$ ووزنها $15\ Ib$ يمكن ان تطفو في بركة مياه عميقه كثافتها $62.5\ Ib/pt^3$

الحل:-

ليكن h هو ارتفاع الجزء المغمور من الاسطوانة (بالاوم) في موضع الاتزان , حيث أن $r=\frac{1}{3}ft$ فانه ينتج من المعادله ان :

$$h=\frac{mg}{\pi r^2 p} = \frac{15}{\pi(\frac{1}{3})^2\ 62.5} = 0.688\ ft = 8.25\ in$$

وبالتالي فان الاسطوانة تطفو بارتفاع 10-8.25=1.75 فوق خط الماء عند موضع الاتزان.

مثال(12)

عين ما إذا كانت اسطوانة نصف قطرها 10 cm وارتفاعها $15\ cm$ ووزنها $19.6\ N$ يمكن ان تطفو في بركة مياه عميقه $980\ dynes/cm^2$.

الحل:-

ليكن h هو ارتفاع الجزء المفتوح من الاسطوانة (بالسم) عند موضع الاتزان عندما $r = 5\ cm,$

$M\ g = 19.6\ N = 1.98 * 10^6\ dynes$ فانه ينتج من المعادلة (9)

أن $h = \frac{mg}{\pi r^2 p} = \frac{1.98*10^6}{\pi(5)^2(980)} = 25.5\ cm$

وحيث أن هذا أطول من ارتفاع الاسطوانة فان الاسطوانة لا يمكن أن تربح مياه كافيه لتطفو وبالتالي سوف تغوص إلي قاع البركة.

مثال(13)

عين ما إذا كانت اسطوانة نصف قطرها $10\ cm$ وارتفاعها $15\ cm$ ووزنها $19.6\ N$ يمكن ان تطفو في بركه مياه عميقه كثافتها $2450\ dynes/cm^2$

الحل:-

ليكن h هو ارتفاع الجزء الغمور من الاسطوانة (بالسنتمتر) عند موضع الاتزان عند

r = 5cm

$M\ g=19.6\ N=1.96*10^6 dynes$ فان المعادله *(9)* تصبح

وبالتالي فان الاسطوانة ستطفو بارتفاع $15 - 10.2 = 4.8\ cm$ وتكون أعلى موضع السائل.

المصادر والمراجع :

1- المعــادلات التفاضــلية – الجــزء الأول تــأليف الأســتاذ الــدكتور حســن مصــطفى العويضــي , أســتاذ الرياضــيات بجامعــة الأزهــر كليــة التربيــة للبنــات –الريــاض والـدكتور عبـد الوهـاب عبـاس رجـب أسـتاذ الرياضـيات بجامعـه الأزهـر كليـة التربيـة للبنــات – والــدكتورة ســناء علــي زراع أســتاذة الرياضــيات المســاعدة كليــة التربيــة للبنات –الرياض , مكتبة الرشيد الناشرون

2- مقدمــه فــي المعــادلات التفاضــلية – تــأليف الــدكتور احمــد حمــد بالريــاض قســم الرياضــيات والــدكتور شــوقي فهمــي حســنين كليــة المعلمــين بالريــاض قســم الرياضــيات , حقــوق الطبــع الطبعــة الأولــى (1426هـ – 2005م) مكتبــة الرشــيد الناشرون المملكة العربية السعودية الرياض

3- المعــادلات التفاضــلية العاديــة حلــول وتطبيقــات – إعــداد الــدكتور إســماعيل بوقفــه والدكتور عايش الهنادوه .