بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا

كلية التربية

قسم العلوم - شعبة الرياضيات

بحث تكميلي لنيل درجة بكالوريوس الشرف في تربية الرياضيات

بعنوان:

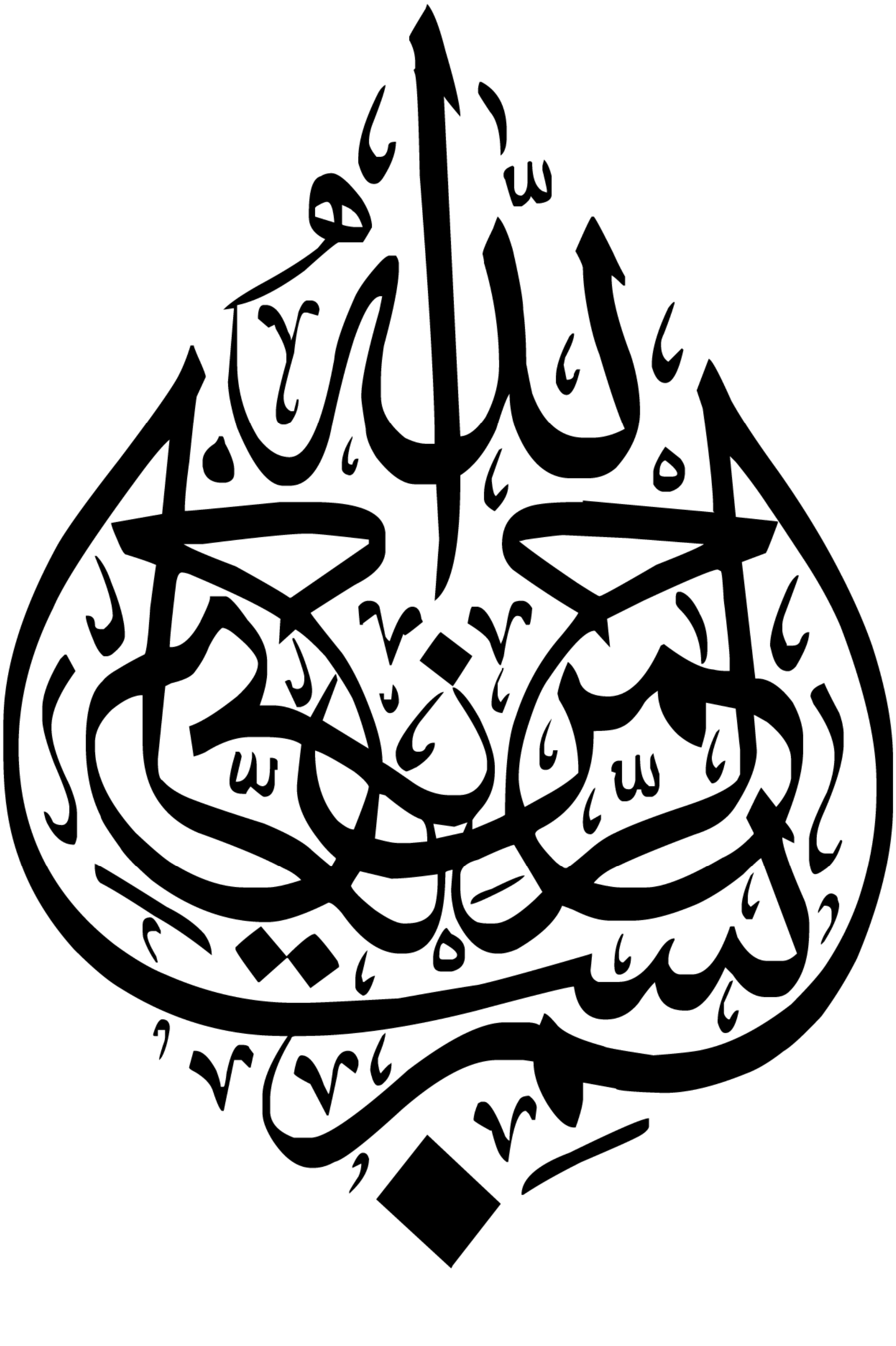
التكامل المعتل وتطبيقاته

إعداد:

- رنا عبد الله محمد جودة عبد الرحمن
- عاطف محمد أحمد محمد
- فاطمة كمال الدين مالك علي
- فاطمة محمد أحمد علي

إشراف الدكتور:

عمر الفاروق حمزة


بسم الله الرحمن الرحيم

الآية الكريمة

قال تعالى في محكم تنزيله:

" إِنْ أُرِيدُ إِلَّا الإِصْلَاحَ مَا اسْتَطَعْتُ وَمَا تَوْفِيقِي إِلَّا بِاللَّهِ عَلَيْهِ تَوَكَّلْتُ وَإِلَيْهِ أُنِيبُ "

صدق الله العظيم

(سورة هود - الآية 88)

الإهداء

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على خاتم الأنبياء والمرسلين الهي لا يطيب
الليل إلا بشكرك ولا يطيب النهار إلا بطاعتك ولاتطيب اللحظات إلا بذكرك
ولاتطيب الآخرة إلا بعفوك ولا تطيب الجنة إلا برؤيتك
إلي من بلغ الرسالة وأدي الأمانة ونصح الأمة
إلي نبي الرحمة ونور العالمين
سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم

إلي من أسقتني الحب والحنان إلي رمز الحب وبلسم الشفاء إلي القلب الناصع
بالبياض إلي من أكبر على يديها وعليها أعتمد
إلي شمعة تنير ظلمة حياتي إلي من بوجودها أكتسب قوة ومحبة لا حدود لها إلي من
عرفت معها معني الحياة
أمي الحبيبة

إلي من كلله الله بالهيبة والوقار إلي من علمني العطاء بدون إنتظار
غلي من أحمل أسمه بكل إفتخار
أرجو أن يمد الله في عمره ليرى ثمارا قد حان قطفها بعد طول إنتظار
تبقي كلماتك نجوماً أهتدي بها اليوم وفي الغد وإلي الأبد
إلي القلب الكبير والدي

إلي من هم أقرب إلي من روحي إلي من شاركوني حضن الأم
وبهم أستمد عذتي وإصراري
أخوتي الأعزاء

إلي من يحلو بهم الإخاء تميزوا بالوفاء والعطاء
إلي ينابيع الصدق إلي من سعدت برفقتهم
أصدقائي ورفقاء دربي

إلي من وهبوني الأمل والتفاؤل في الحياة ونهلت من تجاربهم وكانوا ومازالوا عوناً
في حياتنا
الأساتذة الأجلاء
إلي ذلك الصرح الشامخ جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا

الشكر والعرفان

بحروف نكتبها لكم من نور ... صدقاً وأمانة نطوقها بالعهد والوفاء
نترجمها شكراً وتبجيلاً لفضائل وجلائل أعمالكم التي إشرأبت لها هامة
الزمان وتظل أعمالكم شعلاً تضئ عزة وشموخاً

فعندما يتوارث الناس روائع الأشياء .. تكون منبعاً للأصالة
وفي ألق التهذيب ... هكذا عرفناكم ... وانصهرت هممكم العالية بذلاً
وعطاءً وامتزجت أرواحكم بالنبل والنقاء وكنتم قناديلاً تحترق لتهب
غيرها الضياء

وتختبئ الكلمات بعيداً عن عيون القلم لأنها طعم المستحيل في التعبير
عن الشكر والثناء ويبقى ما نكتب وثيقة للصدق والمحبة
إعترافاً لما قدمته لنا الأب الروحي وقائد السرب

د.عمر الفاروق حمزة

بكل فخر وإعزاز نتوجك اليوم ملكاً في بحور العلم والمعرفة
ونزف لك أسمى آيات الشكر المعبقة
بعطر الفل والياسمين

فهرس المحتويات

الفصل الاول

محتويات الفصل الأول:

نبذة تاريخية (1-1)

توجد دلالات تاريخية على إستخدام التكامل في عهد قدماء المصريين (حوالي 1800 قبل الميلاد) فقد دلت بردية موسكو الرياضية وطريقة الإستنذاف من أوائل الطرق المستعملة في إيجاد التكاملات حيث تعود إلى 370 قبل الميلاد وكانت تحسب بها الحجوم والمساحات وذلك بتقسيمها إلى أشكال صغيرة معلومة المساحة أوالحجم كما تم تطوير هذه الطريقة من قبل أرشميدس .

طورت طرق مماثلة في الصين في القرن الثالث الميلادي بواسطة ليوهوي والذي إستخدمها لإيجاد مساحة الدائرة ، و أستعملت هذه الطرق في القرن الخامس الميلادي من قبل رياضيين(زوجنغ ـ تسوتشونغ) لإيجاد حجم الكرة كما إستخدم االهندي اريابهاتا نفس الطرق لإيجاد حجم المكعب.

أتت الخطوة التالية والهامة في علم التفاضل والتكامل في القرن الحادي عشرعندما إخترع الحسن إبن الهيثم مايعرف بمعادلة الحسن نسبة لإسمه والتي تقود إلى معادلة الدراجة بينما كان يحل هذه المسألة قام بعملية تكامل لإيجاد حجم السطح المكافيءوقد إستطاع بالإستقراء الرياضي إيجاد الدوال كثيرة الحدود حتى الدرجة الرابعة بالتالي كان قادراً على إيجاد صيغة عامة لتكاملات الدوال كثيرة الحدود لكنه لم يعر ذلك أهمية أنذاك .

لم يبدأ التقدم الملحوظ في علم التفاضل والتكامل إلا مع القرن السادس عشر وفي هذا الوقت عمل كافاليري بطريقته الكل لا التجزئ بدأ بوضع الأساس لعلم التفاضل ، وكان لإسحق نيوتن وتورشيلي دوراً هاماً أيضاً في توسيع هذا العلم في أوائل القرن السابع عشر اللذان قدما التلميحات الأولى لوجود صلة بين التكامل والإشتقاق في الوقت الذي كان الرياضيون اليابانيون قد أسهمو في أعمال مثيلة وبشكل خاص على يد سيكي كاوا ومنها طرق إيجاد مساحات الأشكال بالتكامل بتوسيع طريقة الإستنذاف، وتم صياغة التكامل بإستعمال النهايات من قبل بيرنارد ريمان.

أما علامة التكامل فقد إستخدمها نيوتن كعمود صغير فوق المتغير للإشارة إلى عملية التكامل . أما الرمز الحديث للتكامل الغير محدود تم تقديمه على يد ليبينز كتمثيل للحرف Sبعد إطالته ، وإستعمل جوزيف فورير حدود التكامل بإضافة الحدود أسفل وأعلى الرمز السابق.

المقدمة(2-1):

يعتبر علم الحسبان من العلوم القديمة قدم البشرية ولاشك أنه يشكل ركيزة هامة في حياة الفرد ،وبالرغم من أنه تبلور في القرن السابع عشر الميلادي إلا أنه كان من أكثر العلوم إستخداماً في مجال الحياة التطبيقية .
هذا البحث جهد مبزول لإقتباس الأفكارالرئيسة للتكامل بوجه عام والتكامل المعتل بوجه خاص،في الأبواب الأولى منه تحدثنا عن التكامل بصورة عامة وهذا سيكون مفيدا للأفراد الذين قد نسوا بعض مفاهيم التكامل الذي درس مسبقاً ويحتاجون إلى جرعة منشطة ،هذا ربما أيضاً يخدمنا بتزويدنا بخلفية عامة للطلبة الذين درسوا أنماطاً مختلفة من مقررات علم التفاضل والتكامل الأولى وفي الأبواب الأخيرة نتطرق لموضوعات أكثر تقدماً فتناولنا في التكامل المعتل وحالته والإختبارات التي يمكن إجرائها لمعرفة هل التكامل متقارب أم متباعد؟ وكذلك تحدثنا عن بعض خواص التكامل المعتل في شكل نظريات متبوعة بالبراهين والأمثلة .
كل باب يبدأ بعبارات ونصوص واضحة للتعريفات وثيقة الصلة بالموضوع وكذلك الأساسيات والنظريات سويا مع مادةعلمية موضحة وأخرى وصفية لها ويتبع هذا فئات مصنفة من المسائل المحلولة توضح وتفصل النظريات ثم أعقبناها ببعض تطبيقات التكامل المعتل التي تمثلت في بعض الدوال الخاصة مع البراهين والأمثلة لكي يدرك الدارس أهمية التكامل المعتل، وكذلك كان علينا كتابة ما خلصنا إليه من خلال تناولنا لموضوع البحث.

أهمية البحث(3-1):

تظهر أهمية التكاملات بصورة عامة والتكاملات المعتلة بصورة خاصة في العديد من الحالات التطبيقية ، فمثلا إذا إعتبرنا بركة سباحة مستطيلة أو مربعة فيمكن إيجاد مساحتها وحجمها بالطرق العادية وكذلك إيجاد حجم الماء الذي يمكن إحتواؤه لملئها وكذلك إيجاد مساحتها السطحية أما إذا كانت البركة بيضاوية ومدورة من القعر فإنها تستدعي إستخدام التكاملات وكافة التطبيقات الفيزيائية للرياضيات وميكانيكا الموائع تتطلب الإيفاء بأنواع التكاملات، قد تكون التقريبات التطبيقية كافية في مثل هذه الأمثلة البسيطة ولكن الدقة الهندسية تتطلب قيما مضبوطة ودقيقة لهذه العناصر ،نظراً لذلك كان للتكاملات المعتلة أهميتها في النواحي التطبيقية والنظرية .

أهداف البحث(1-4)

- التعرف على التكامل والطرق الأساسية لإيجاد التكامل
- التعرف على التكامل المعتل وأنواعه .
- التمكن من إستخدام إختبارات التكامل لمعرفة تقارب وتباعد التكامل المعتل
- التطبيق على التكامل المعتل من خلال بعض الدوال.

أعددنا هذا البحث لدارس علم التكامل حيث أكثرنا فيه بالأمثلة مع عرض النظريات بصورة مبسطة دون الإخلال بالدقة الرياضية وهدفنا هو نمو المفاهيم العلمية وصولاً إلى أحدث الإكتشافات والإختراعات وذلك بهدف غرس منهجية التفكير العلمي لدى الطلاب وتوسيع مداركهم إلىأبعد من حدود الموضوعات الدراسية.

أسباب إختيار مشكلة البحث(1-5):

قد يكون حساب عملية التكامل صعباً في بعض الحالات أو يأخذ كثير من الوقت والجهد - كما في بعض الدوال الخاصة - لذلك كان التكامل المعتل بأصنافه وخواصه وتطبيقاته حلاً لهذه المشكلة من خلال بعض الخواص والصيغ الإختزالية ولكن معرفة أن التكامل موجود أم غيرموجود أهم بكثير من حساب ذلك التكامل ،لأنه في أسوأ الحالات نستطيع إستخدام الطرق العددية لتقريب قيم التكامل عند معرفة أن التكامل موجود ، فالتكامل المعتل هو حل لمشكلة حدود التكامل أو عدم إتصال الدالة عند نقطة أو أكثر خلال التكامل ولذلك كان هذا البحث عوناً للدارس للإلمام بماهية التكامل المعتل .

مصطلحات البحث(6-1) :

ـ الإتصال:

تكون الدالة $f(x)$ متصلة أو مستمرة على الفترة $[a,b]$إذا كانت معرفة عند جميع نقاط الفترة والنهاية موجودة.

ـ المشتقة:

هي المعامل التفاضلي أو هي ميل المماس لمنحنى الدالة.

ـ التكامل:

أفرض أن $f(x)$ هي مشتقة الدالة $F(x)$ أي أن $F(x)$ هي تكامل الدالة $f(x)$ ويعبر عنه في الصورة:

$$F(x) = \int f(x)dx$$

ـ الحد العلوي والحد السفلي:

إذا كان لدينا التكامل المحدد على الصورة:

$$F(x) = \int_a^b f(x)dx$$

فإن a تسمى الحد السفلي و b الحد العلوي.

ـ التكامل اللانهائي:

يكون التكامل لانهائي إذا كان أحد حدود التكامل أو كلاهما يساوي مالانهاية.

ـ النقطة الشاذة:

تسمى x بالنقطة الشاذة إذا كانت الدالة $f(x)$ غير محدودة عند نقطة أو أكثر في الفترة $a \leq x \leq b$.

ـ التكامل الأسي أو الهندسي:

يكون التكامل الأسي على الصورة $\int_a^\infty e^{-tx}dx$ حيث t عدد حقيقي.

ـ التقارب والتباعد:

نقول أن الدالة $f(x)$ تقاربية إذا كانت النهاية موجودة وتساوي عدد حقيقي وغير ذلك تكون متباعده.

ـ خط تقارب عمودي:

إذا كانت الفترة المراد التكامل عليها محدودة ولكن الدالة غير معرفة عند تلك الفترة أي أن الدالة يكون لها خط تقارب عمودي عند نقطة داخل الفترة المراد التكامل عليها.

ـ دالة المضروب:

هي دالة جاما عندما تكون x عدد صحيح موجب

الفصل الثاني

محتويات الفصل الثاني:

التكامل
(Integral)

مقدمة(2-1):

سنتناول في هذا الباب وجود تكامل يعرف ايضاً بإسم أصل المشتقة ، وعملية ايجاده هي في الواقع عكس عملية ايجاد المشتقة .فإذا كان f اقتران فإننا نبحث عن اقتران اخر F يحقق $F'(x) = f(x)$ لكل x ينتمي الى مجال مناسب .
والنوع الثاني من التكامل هو التكامل المحدد ويرتبط أصلاً بمسألة حساب مساحة منطقة تحدها منحنيات معينة .

تعريف التكامل(2-2):

(Integral Definition)

أفرض أن $f(x)$ مشتقة الدالة $F(x)$ ، أي أن $F(x)$ تكون تكامل للدالة $f(x)$ ، ونعبر عنها في الصورة :

$$\int f(x)dx = F(x)$$

الدالة المراد تكاملها تسمى المكامل ، وعلامة التكامل تعني عملية التكامل وdx تحدد أن متغير التكامل هو x ، ولإيجاد قيمة التكامل نوجد دالة f تكون مشتقتها هي $f(x)$.
ثابت التكامل :
هذه الخاصية مشتركة لكل مقابلات المشتقات ، وعليه يكون التكامل :

$$\int f(x)dx = F(x) + c$$

cهو ثابت التكامل .

بعض صيغ التكامل(2-3):

(Some Integration Formulas)

1. $\int d(x) = x + c$
2. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$
3. $\int x^n dx = \left\{\frac{x^{n+1}}{n+1}\right\} + c$

$4.\int \frac{dx}{x} = \ln x + c$
$5.\int e^{x}\, dx = e^{x} + c$
$6.\int a^{u}\, dx = \frac{a^{u}}{\ln a} + c$

وهنالك بعض التكاملات تأتي عن طريق التفاضل وهي:

$7.\int \sec u^{2}\ \ du = tanu + c$
$8.\int secu\ tanu\ du = secu + c$
$9.\int cscucotu\ du = -cscu + c$

وكل هذه الصيغ للتكاملات تسمى بالتكاملات غير المحددة .

مثال(1):

أوجد التكاملات الآتية :

i. $\int x^{2}dx$

الحل:

$$\int x^{2}dx = \frac{x^{3}}{3} + c$$

ii. $\int e^{2x}dx$

الحل:

$$\int e^{2x}\, dx = 2e^{2x} + c$$

iii. $\int \frac{cos(lnx)dx}{x}$

الحل:

Let:$= lnx$ ←:$du = \frac{dx}{x}$

التكامل يصبح :

$$\int \frac{cos(lnx)dx}{x} = \int \cos u\ du = \sin u + c$$

$$\int \frac{cos(lnx)dx}{x} = \sin u + c$$

بعض طرقإيجاد التكامل(4-2) :

(Some Methods of Integration)

التكامل بالتجزئة(1-4-2):

(The Integration by Parts)

تعريف:

اذا كان الاقترانات $u = u(x)$ و$v = v(x)$قابلين للاشتقاق فان مشتقة اقتران الضربuvموجودة وهي حسب القاعدة:

$$\frac{d}{dx}(uv)=\frac{du}{dx}v+\frac{dv}{dx}u$$

نستخدم تفاضلات هذه الاقترانات ونعيد ترتيبها لنحصل على:

$$udv = d(uv) - vdu$$

وعندما نكامل كل طرف نحصل على قاعدة التكامل التالي:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

والتي تعرف بقاعدة التكامل بالأجزاء.

مثال(2):

احسب التكامل

$$\int ln(x+1)dx$$

الحل:

نفرض أن : $u = ln(x+1)$ ؛ dv=dx

$$du = \frac{1}{x+1}\,\mathrm{dx} \leftarrow$$

$$u = ln(x+1) = \int udv = uv - \int vdu$$

$$= xln(x+1) - \int \frac{x}{x+1}dx$$

$$= xln(x+1) - \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right)dx$$

$$= xln(x+1) - x + ln(x+1) + c$$

التكامل بالتعويض(2-4-2):

(Integration by Substitution)

تعريف:

إذا كان F مشتقة للإقتران f فيمكننا إجراء التكامل لإقتران مركب كالاتي :

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x) = \int F'(g(x))g'(x)dx = F\big(g(x)\big) + c$$

وذلك استناداً لقاعدة السلسلة للمشتقة.

ونحصل على النتيجة نفسها عن طريق إدخال متغير جديد $u = g(x)$

و $du = g'(x)dx$ (تفاضل).وبالتعويض في التكامل :

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x) = \int f(u)du = F(u) + c$$

ثم نستبدل u بما تساويه بدلالة x نحصل على :

$$\int f\big(g(x)\big)g'(x) = F\big(g(x)\big) + x$$

مثال(3):

جد قيمة التكامل

$$\int \sqrt{2x+3}$$

الحل:

نضع

$$u = 2x + 3 ، dx = \frac{1}{2}du ؛ du = 2dx \leftarrow$$

$$\int \sqrt{2x+3}dx = \int \frac{1}{2}\sqrt{u}du = \int \frac{1}{2}u^{1/2} = \frac{1}{3}u^{3/2} + c$$

$$= \frac{1}{3}\sqrt{(2x+3)^3 + c}$$

تكامل الدوال المثلثية(2-4-3):

(Integration of Trigonometric Function)

تعريف:

بصفة عامة تكامل الدوال المثلثية يساوي تكامل النسبة المثلثية لنفس الزاوية مقسوماً على إشتقاق الزاوية عندما تكون من الدرجة الأولى ، أما إذا كانت الدالة المثلثية ليست من الدرجة الأولي وليست على إحدي الصيغ الأساسية للتكامل يمكن تحويلهالصيغة قياسية بإستخدام بعض قوانين حساب المثلثات.

i. $\int \sin u du = -cos u + c$
ii. $\int \cos u du = sin u + c$
iii. $\int tan u du = \ln|\sec u| + c$
iv. $\int \cot u du = \ln|\sin u| + c$
v. $\int \sec u du = ln|\sec u + \tan u| + c$
vi. $\int \csc u du = ln|\csc u - \cot u + c|$

التكامل المحدد(2-4-4):

تعريف:

إذا كان $f(x)$ اقتران معرف على الفترة $[a, b]$ ، فإن تعريف التكامل المحدد للاقتران من a إلى b هو قيمة التكامل:

$$\int_a^b f(x)dx$$

شرط أن تكون النهاية في الطرف الأيمن موجودة,a و b هي حدود التكامل ، a يسمى الحد السفلي و b يسمى الحد العلوي للتكامل .

مثال(4):

أوجد قيمة التكامل

i. $\int_a^b t^{1/3} dt$

الحل:

$$\int_a^b t^{1/3} dt = \frac{3}{4} t^{4/3} \Big|_a^b$$
$$= \frac{3}{4}\left\{b^{4/3} - a^{4/3}\right\}$$

ii. $\int_1^8 x^2 dx$

الحل:

$$\int_1^8 x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 \Big|_1^8 = \frac{1}{3}\{8^3 - 1^3\} = \frac{511}{3}$$

وموضوع دراستنا في هذا البحث حول أحد أنواع التكامل هو التكامل المعتل.

التكامل المعتل(5-2):

Improper Integral

تعريف:

يُعنى بدراسة التكاملات التي تكون على الصورة $\int_a^b f(x)dx$ بحيث تكون لدينا $a=\infty$ أو $b=\infty$ أو كليهما أي أن أحد حدود التكامل أو الأثنين معاً لا نهائي ويسمى التكامل في هذه الحالة بالتكامل اللانهائي "Infinity Integral"

وإما أن تكون الدالة $f(x)$ غير محدودة عند نقطة أو أكثر في الفترة $a \le x \le b$ وتسمى بالنقطة الشاذه.

تعريف:

إذا كانت :

$$\lim \int_a^b f(x)dx = l$$

أي أن النهاية موجودة لأي عدد محدود فإن هذه النهاية تسمى تكامل$f(x)$ من a إلى ∞ ويرمز لها بالرمز $\int_a^\infty f(x)dx$ ويقال في هذه الحالة أن التكامل متقارب وبخلاف ذلك متباعد بالمثل :

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

ويسمى التكامل في الطرف الأيسر متقارب أو متباعد تبعاً لوجود أو عدم وجود نهاية الطرف الأيمن. وبالمثل يمكن تعريف:

$$\int_{-\infty}^\infty f(x)dx = \lim_{a\to\infty}\int_a^c f(x)dx + \lim_{b\to\infty}\int_c^b f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^c f(x)dx + \int_c^\infty f(x)dx$$

حيثc عدد حقيقي ويسمى التكامل متقارب أو متباعد تبعاً لتكامل أو تباعد التكاملات الموجودة في الطرف الأيمن.

ملاحظة:

إذا كانت $f(x)$ غير سالبة ومتصلة على الفترة $[a,\infty[$ فإن التكامل له تفسير هندسي هام لكل $b > a$ فإن التكامل المعين $\int_a^\infty f(x)dx$ يمثل المساحة تحت المنحنى $y = f(x)$ على الفترة المحدوده والمغلقة $[a,b]$ وعندما $b \to \infty$ فإن هذه المساحه تؤول إلى المساحة تحت المنحنى. $y = f(x)$ في الفترة الكلية $[a,b]$.

حالات التكامل المعتل(2-6):

Cases of Improper Integral

1/ إذا كانت أحد حدود التكامل أو كليهما تؤول إلى قيمة لا نهائية .
2/ أن تكون الدالة $f(x)$ غير محدودة عند نقطة أو أكثر من نقاط الفترة المحدودة والمغلقة $[a,b]$ وتسمى مثل هذه النقاط بالنقاط الشاذة أو المنفردة.
3/ أن تكون الدالة $f(x)$ غير مستمرة عند نقطة أو أكثر من نقاط الفترة $[a,b]$.

الفصل الثالث

محتويات الفصل الثالث:

مقدمة(3-1)

لكي تكون الدالة قابلة للتكامل لابد من توفر الشرطيين التاليين :
1/ أن تكون الدالة المراد تكاملها دالة محدودة على مجموعة المجموعة المراد التكامل عليها .
2/ أن تكون المجموعة المراد التكامل عليها محدودة ومغلقة .
الكثير من الدوال التي تواجهنا والمراد التكامل عليها إما تكون على فترة غير محدودة أو يكون للدالة خط تقارب عمودي داخل الفترة المحدودة (هذا يعني أن الدالة غير محدودة) ولذلك وسعت نظرية التكامل إلي تكامل على فترات غير محدودة ولدوال غير محدودة أيضا على تلك الفترات وفي كلا الحالات يعرف التكامل المعتل على أنه نهاية هذا التكامل.ويقسم هذا التكامل إلى عدة أصناف هي:

التكاملات المعتله من الصنف الأول(3-2)

Improper Integral of first kind

ينقسم التكامل المعتل من الحالة الأولى إلى عدة أقسام هي:

1. الداله f معرفه على الفتره (a,∞) حيث a عدد حقيقي ، وقابلة للتكامل على أي فتره محدودة ومغلقة $[a,b]$.

لنفرض أن:

$$A = \int_a^b f(x)\,dx$$

التكامل المعتل $\int_a^\infty f(x)dx$ هو نهاية التكامل $\int_a^b f(x)dx$ عندما $b\to\infty$.

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

تعريف:

إذا كانت $\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$ موجودة وتساوي عدد حقيقي L فإننا نقول أن التكامل المعتل متقارب وفي هذه الحالة يكون:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx$$

أما إذا كانت النهاية غير موجودة أو تساوي$\pm\infty$ فإننا نقول أن التكامل المعتل متباعد.

❖ لاحظ أن $\int_a^\infty f(x)dx$: تحمل تشابهاً قريباً للمتسلسلة اللانهائية $\sum_{n=1}^\infty u_n$ حيث $u_n = f(n)$ بينما $\int_a^b f(x)dx$ يناظر حواصل الجمع الجزئيه اللانهائية .

مثال(1) :

هل التكامل الآتي متباعد أم متقارب

$$\int_0^\infty \sin x \, dx$$

الحل

$$\int_0^\infty \sin x \, dx = \lim_{b\to\infty} \int_0^b \sin x \, dx$$
$$= \lim_{b\to\infty} (-\cos b + 1)$$

ولكن هذه النهاية الأخيرة غير موجوده مما ينتج عنه أن يكون التكامل المعتل متباعداً.
نلاحظ المعنى الهندسي لهذا التكامل والذي هو عبارة عن مساحة والتي يمكن الحصول عليـها بجمع وطرح المساحات المستـوية عدد لانهائي من المرات .

مثال(2):

هل التكامل الآتي متباعد أم متقارب

I. $\int_1^\infty \frac{1}{x} \, dx$

الحل

$$\int_1^\infty \frac{1}{x} \, dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x} dx$$
$$\lim_{b\to\infty} \ln b = \infty$$

وهذا يعني أن التكامل المعتل متباعد

II. $\int_1^\infty \frac{1}{x^2} \, dx$

الحل

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^2} \, dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b \frac{1}{x^2} \, dx$$
$$\lim_{b\to\infty} (1 - \frac{1}{b}) = 1$$

ولهذا يكون هذا التكامل المعتل متقارباً إلي 1.

نظرية(3-1):

التكامل ادناه يكون متقارب او متباعد حسب القيمة الفعلية للمتغير n

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{n}}\, dx$$

البرهان:

$$\int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{n}}\, dx = \lim_{b\to\infty} \int_{1}^{b} \frac{1}{x^{n}}\, dx$$

$$\lim_{b\to\infty} \frac{1}{n-1}\left(1-b^{1-n}\right)$$

الآن إذا كان $0 < n < 1$ فإن $b \to \infty$ ويكون التكامل المعتل في هذه الحالة متباعداً .

أما إذا كان $n > 1$ فإن $b \to 0$ وبذلك فإن:

$$\lim_{b\to\infty} \frac{1}{n-1}\left(1-b^{1-n}\right)$$

$$= \frac{1}{n-1}$$

وفي هذه الحاله يكون التكامل متقارباً .

$$\therefore \int_{1}^{\infty} \frac{1}{x^{n}}\, dx = \begin{cases} \dfrac{1}{n-1} & ; \quad n > 1 \quad ; \text{متقارب} \\ \infty & ; \quad 0 < n \le \quad ; \text{متباعد} \end{cases}$$

2. الداله f معرفه على الفتره $(-\infty, b)$ وقابلة للتكامل في الفتره المحدودة والمغلقة $[a,b]$.

في هذه الحالة يكون لدينا التكامل المعتل

$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx.$

تعريف:

إذا كانت $\lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{b} f(x)dx$ موجودة وتساوي عدد حقيقي ، فإننا نقول بأن التكامل المعتل $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ متقاربا وفي هذه الحالة يكون:

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{b} f(x)dx$$

أما إذا كانت النهاية غير موجودة أو تساوي$\pm\infty$ فإننا نقول أن التكامل المعتل متباعد.

مثال(*3*):

هل التكامل متقارب أم متباعد

$$\int_{-\infty}^{b} \frac{2xdx}{1+x^2}$$

الحل:

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{2x}{1+x^2}\, dx = \lim_{a\to\infty} \int_{-a}^{1} \frac{2x}{1+x^2}\, dx$$

ولكن التكامل الأخير يمكن الحصول عليه بطريقة التعويض أي أن:

$$\int_{-\infty}^{1} \frac{2x}{1+x^2}\, dx = \lim_{a\to\infty} [\ln(1+x^2)$$

$$\lim_{a\to\infty} [\ln 2 - \ln(1+a^2)] = -\infty$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{1} \frac{2x}{1+x^2}\, dx \qquad \text{متباعد}$$

نظرية (*3* - 2):

إذا كان b عدد حقيقي حيث $a < b$ وكان التكامل $\int_a^\infty f(x)dx$ متقارباً فإن التكامل $\int_b^\infty f(x)dx$ يكون متقارب ايضاً ويكون:

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_b^\infty f(x)dx$$

أما إذا تباعد أحد التكاملين فأن الآخر يتباعد ايضاً.

3. إذا كانت الدالة f قابلة للتكامل على أي فترة محدودة ومغلقة *[a,-a]* لتوسيع نطاق التكامل حتى يشمل خط الأعداد الحقيقية نحتاج إلي دراسة التكامل $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$.

تعريف:

إذا كانت الدالة f قابلة للتكامل على الفترة المحدودة والمغلقة $[-a, a]$فإن :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to\infty}\int_{c}^{b} f(x)dx$$

حيث c عدد حقيقي .

ويكون التكامل $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ متقارباً إذا كان كل من التكامل $\int_{-\infty}^{c} f(x)dx$ و $\int_{c}^{\infty} f(x)dx$ متقارب .

لاحظ أن:

تقارب أو تباعد التكامل لا يعتمد على إختيار العدد c لأنه يمكن كتابة التكامل على الصورة :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{d} f(x)dx + \int_{d}^{\infty} f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{d} f(x)dx + \int_{d}^{\infty} f(x)dx$$

مثال(*4*):

أختبر التكامل

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

الحل:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

الآن:

$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} \frac{1}{1+x^2}\, dx$$

$$\lim_{b\to\infty}[\tan^{-1} b - \tan^{-1} 0]$$

$$\lim_{b\to\infty}[\tan^{-1} b] = \frac{\pi}{2}$$

و

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{1}{1+x^2}\, dx = \lim_{a\to\infty}\int_{-a}^{0}\frac{1}{1+x^2}\, dx$$

$$\lim_{a\to\infty}[\tan^{-1}0 - \tan^{-1}(-a)]$$

$$\lim_{a\to\infty}[\tan^{-1}(-a)] = \frac{\pi}{2}$$

$$\therefore \int_{-\infty}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\, dx = \int_{-\infty}^{0}\frac{1}{1+x^2}\, dx + \int_{0}^{\infty}\frac{1}{1+x^2}\, dx =$$

$$\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2} = \pi$$

:.التكامل المعتل متقارب

خواص التكامل المعتل من النوع الأول(3-3) :

Properties of improper integrals of first kind

عند دراسة خواص التكامل المعتل من النوع الأول فإننا ندرس خواص التكامل المعتل $\int_a^\infty f(x)dx$ لأن $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$ يمكن تحويله إلى التكامل $\int_a^\infty f(x)dx$ وذلك بوضع $-x$ بدلاً من x .

أما التكامل $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$ فهو تركيبة خطية للتكاملين $\int_a^\infty f(x)dx$ و $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$.

نعطي خواص التكامل المعتل في شكل نظريات وتتبعها بعض الأمثلة.

نظرية(3-3):

إذا كانت $f(x) \geq 0$ وقابلة للتكامل علي $[a,x]$ لكل $x \geq a$ وإذا وجد عدد k حيث $\int_a^x f(x)dx \leq k$ ، فإن $\int_a^\infty f(x)dx$ متقارب.

البرهان:

لبرهنه ذلك نفرض ان

$$F(x) = \int_a^x f(x)dx$$

حيث أن $f(x) \geq 0$ لكل $x \geq a$ فإن الدالة $F(x)$ دالة تزايدية على $[a, x]$.
إذا كان $x_1 \leq x_2$ في $[a, x]$ ، فإن :

$$F(x_2) - F(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)\, dx$$

وبذلك فإن $F(x_2) \geq F(x_1)$ كذلك $F(x) \leq k$ لكل $x \geq a$
إذن :
$\lim_{x\to\infty} F(x) = \int_a^\infty f(x)$ موجودة .

أي أن $\int_a^\infty f(x)\, dx$ متقارب .

التكاملات المعتلة من النوع الثاني(3-4) :
Improper Integral of second kind

في هذه الحالة تكون الفترة المراد التكامل عليها محدودة ولكن الدالة غير معرفة عند نقطة داخل تلك الفترة (أي أن الدالة يكون لها خط تقارب عمودي عند النقطة داخل الفترة المراد التكامل عليها).
نقسم ذلك إلى:
1- الدالة f لها خط تقارب عمودي عند $x = a$ وفترة التكامل هي$]a, b[$ وتكون الدالة قابلة للتكامل على أي فترة جزئية على شكل $[a+\epsilon, b]$ من الفترة $]a, b]$.
في هذه الحالة يكون التكامل المعتل :

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

متقارباً إذا كانت النهاية :

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x)\, dx$$

موجودة وتساوي عدد حقيقي ، ويكون التكامل المعتل :

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

متباعداً إذا كانت النهاية :
$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x)\, dx$ غير موجودة

مثال(5):

أحسب التكامل:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^a}$$

الحل:

الدالة $f(x) = \frac{1}{x^a}$قابلة للتكامل على أي فترة $[\epsilon, 1]$

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^a} = \lim_{\epsilon\to 0}\int_\epsilon^1 \frac{dx}{x^a} = \lim_{\epsilon\to 0}\frac{x^{1-a}}{1-a}\begin{matrix}\epsilon\\1\end{matrix}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0}\left\{\frac{1}{1-a} - \frac{\epsilon^{1-a}}{1-a}\right\}$$

إذا كان $a < 1$ فإن

$$\lim_{\epsilon\to 0}\left\{\frac{1}{1-a} - \frac{\epsilon^{1-a}}{1-a}\right\} = \frac{1}{1-a}$$

وفي هذه الحالة يكون التكامل متقارباً .

أما إذا كان $a \geq 1$ فإن التكامل يكون متباعداً ؛ لأن النهاية تساوي ∞ .

$$\int_0^1 \frac{dx}{x^a} = \begin{cases} a < 1 & \text{متقارب} \\ a \geq 1 & \text{متباعد} \end{cases}$$

مثال(6):

أحسب التكامل:

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

الحل:

حسب تطبيق النظرية السابقة حيث $a = \frac{1}{2}$ يكون

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$$

اذن التكامل متقارب .

2- الدالة f لها خط تقاربي عمودي عند $x = b$ وفترة التكامل هي $[a, b[$ وتكون الدالة f قابلة للتكامل على أي فترة جزئية مغلقة $[a, b-\epsilon]$ للفترة $[a, b[$.

في هذه الحالة يكون التكامل المعتل $\int_a^b f(x)dx$ متقارباً إذا كانت النهاية $\lim_{\epsilon\to 0}\int_a^{b-\epsilon} f(x)dx$ موجودة وتساوي عدد حقيقي .

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon\to 0}\int_a^{b-\epsilon} f(x)dx$$

عدا ذلك يكون التكامل $\int_a^b f(x)dx$ متباعداً .

مثال(7):

أحسب التكامل:

1) $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$

الحل:

$x = 1$ خط تقارب عمودي للدالة ، فإن :

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \sin^{-1} x \Big| \begin{matrix} 1-\epsilon \\ 0 \end{matrix}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \sin^{-1}(1-\epsilon) = \frac{\pi}{2}$$

إذن التكامل متقارب .

2) $\int_0^1 \frac{dx}{x-1}$

الحل:

$x = 1$ خط تقارب عمودي للدالة ، فإن:

$$\int_0^1 \frac{dx}{x-1} = \lim_{\epsilon\to 0}\int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{x-1}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \ln|x-1| \ \Big| \begin{matrix} 1-\epsilon \\ 0 \end{matrix}$$

$$= \lim_{\epsilon\to 0} \ln|-\epsilon| = -\infty.$$

إذن التكامل متباعد .

3 - الدالة f لها خط تقارب عمودي عند النقطة c حيث$a < c < b$ وتكون فترة التكامل $[a, b]$.

إذا كان $\int_a^c f(x)dx$ و $\int_c^b f(x)dx$ متقاربان فإن التكامل $\int_a^b f(x)dx$ متقارباً.ويكون :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon_1 \to 0} \int_a^{c-\epsilon_1} f(x)dx + \lim_{\epsilon_2 \to 0} \int_{c+\epsilon_2}^{b} f(x)dx$$

حيث

$0 < \epsilon_2 < b - c$؛ $0 < \epsilon_1 < c - a$

عدا ذلك يكون التكامل متباعدا

قد تعمم هذه الفكرة في حالة ما يكون للدالة f عدد منته من خطوط التقارب العمودية ، أي أنه إذا كان :

$x = c_1, c_2, \dots c_n$ خطوط تقارب عمودية للدالةf حيث :

$c_1, c_2, \dots c_n \in]a, b[$ فإن :

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\epsilon_1 \to 0} \int_a^{c_1-\epsilon_1} f(x)dx + \lim_{\epsilon_2 \to 0} \int_{c_1+\epsilon_2}^{c_2-\epsilon_2} f(x)dx + \cdots + \lim_{\epsilon_n \to 0} \int_{c_{n-1}+\epsilon_n}^{b} f(x)dx$$

ويكون التكامل $\int_a^b f(x)dx$ متقارباً إذا تقاربت جميع التكاملات التي في الطرف الأيمن من المعادلة أعلاه ، عدا ذلك يكون متباعداً .

مثال(8):

أحسب

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^3}$$

الحل:

$x = 1$ خط تقارب للدالة ، $1 \in]0,2[$ فإن:

$$\int_0^2 \frac{dx}{(x-1)^3} = \lim_{\epsilon_1 \to 0} \int_0^{1-\epsilon_1} \frac{dx}{(x-1)^3} + \lim_{\epsilon_2 \to 0} \int_{1+\epsilon_2}^{2} \frac{dx}{(x-1)^3}$$

بوضع$u = x - 1$ فإن$du = dx$: وبذلك يكون

$$\int_0^{1-\epsilon_1} \frac{dx}{(x-1)^3} = \int_0^{-\epsilon_1} \frac{du}{u^3}$$

و التكامل $\int_0^{-\epsilon_1} \frac{du}{u^3}$ متباعد

إذن الآخر يكون متباعد أيضا

خواص التكامل المعتل من النوع الثاني(5-3) :

Properties of improper integrals of second kind

الخواص هنا على التكامل $\int_a^b f(x)dx$ عندما يكون $x = b$ خط تقارب عمودي للدالة ؛لأن الحالة الأخرى والتي يكون فيها خط التقارب عند$x = a$ يمكن دراستها كما يلي :

$$\int_a^{b-\epsilon} f(x)dx = -\int_{b-\epsilon}^{a} f(x)dx$$

بالتالي يمكن تعميم الخواص التي تدرس للحالة $\int_a^b f(x)dx$ عند $x = b$ خط تقارب عمودي للدالة f .

الحالة التي يكون فيها خط التقارب العمودي للدالة f عند $x = c$ حيث $a < c < b$ هي تركيبة خطية للحالتين اللتان فيهما خط التقارب العمودي للدالة عند نهاية الفترة ، وذلك بتقسيم الفترة $[a, b]$ إلى الفترتين $[a, c]$ و $[c, b]$.

نظرية(4-3):

يمكن إستخدام طريقة التعويض لإيجاد التكامل $\int_a^b f(x)dx$ وكذلك يمكن إيجاده بطريقة التجزئة عندما يكون متقارب .

لنفرض أن :$\int_a^b f(x)dx$تكامل معتل من النوع الثاني ولنفرض أن $\int_a^{b-\epsilon} f(x)dx$:تكامل محدد ،

إذا كان: $x = b - \frac{1}{t}$ فإن $dx = \frac{1}{t^2} dt$

حيث:$\frac{1}{b-a} \le t \le \frac{1}{\epsilon}$

$$\int_a^{b-\epsilon} f(x)dx = \int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{\epsilon}} f\left(b - \frac{1}{t}\right)\left(\frac{1}{t^2}\, dt\right)$$

إذا كان التكامل المعتل متقارب فإن :

$$\int_a^{b} f(x)dx = \lim_{\epsilon \to 0} \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx$$

$$\lim_{\epsilon \to 0} \int_{\frac{1}{b-a}}^{\frac{1}{\epsilon}} f\left(b - \frac{1}{t}\right)\left(\frac{1}{t^2}\, dt\right)$$

وهنا تم تحويل التكامل المعتل $\int_a^b f(x)dx$ من النوع الثاني إلى تكامل معتل من النوع الأول والذي تم ترتيبه من التحويل .

مثال(9):

إذا كان : $h(x) = x$ ؛ $f(x) = \frac{1}{x^2}$ فإن:

$$f(x)h(x) = \frac{1}{x^2}$$

والتكامل $\int_0^1 x^2$ تكامل معتل متقارب

ولكن :

$$\int_0^1 f(x)h(x) = \int_0^1 \frac{1}{x} dx$$

تكامل معتل متباعد.

نخلص إلى أن :حاصل ضرب دالتين قابلتين للتكامل المعتل من النوع الثاني قد لا تكون قابلة للتكامل المعتل من النوع الثاني.

الفصل الرابع

محتويات الفصل الرابع:

مقدمة(4-1):

نحتاج لمعرفة هل التكامل متقارب أم متباعد ن وذلك من خلال بعض الاختبارات وعموماً يعتمد تقارب وتباعد التكاملات على قيمة النهاية إذا كانت موجودة يكون التكامل متقارب وإذا كانت غير موجودة او تساوي قيمة لانهائية يكون التكامل متباعد.

إختبارات التقارب للتكاملات المعتلة من الصنف الأول(4-2)

Improper Integral of First Kind

1) إختبار المقارنة(4-2-1) :

ليكن لدينا $0 \le f(x) \le g(x)$ لكل $x \ge a$ فإن:

i. إذا كان $\int_a^\infty g(x)dx$ متقارب فإن $\int_a^\infty f(x)dx$ يكون متقارب أيضاً.

ii. إذا كان $\int_a^\infty f(x)dx$ متباعداً فإن $\int_a^\infty g(x)dx$ يكون متباعداً أيضاً.

البرهان:

إذا كان $\int_a^\infty g(x)dx$ متقارب فإن هنالك عدد M بحيث :

$$M = \int_a^\infty g(x)dx$$

لكل $x \ge a$ لدينا :

$$0 \le \int_a^x f(t)dt \le \int_a^x g(t)dt \le \int_a^\infty f(x)dx = M$$

$$\Rightarrow \int_a^\infty f(x)dx = M$$

إذن التكامل متقارب.

مثال(1):

وضح أن $\int_1^\infty \frac{1}{1+x^3}dx$ متقارب؟

الحل:

لكل $x > 1$ لاحظ أن :

$$\frac{1}{1+x^3} < \frac{1}{x^2}$$

ولكن$\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,dx$ متقارب

إذن $\int_1^\infty \frac{1}{1+x^3}dx$ متقارب ايضاً .

مثال(2):

إختبر التكاملات الآتية :-

i. $\int_1^\infty \frac{1}{1+e^x}dx$

الحل:

$$\frac{1}{1+e^x} \le \frac{1}{e^x} = e^{-x}$$

وبما أن $\int_0^\infty e^{-x}dx$ تقاربية

إذن $\int_1^\infty \frac{1}{1+e^x}dx$ ايضا تقاربية .

ii. $\int_2^\infty \frac{dx}{\ln x} \forall \mathrm{x} \ge 2$

الحل:

لنأخذ الدالة $\frac{1}{x}$ وهي دالة تباعدية

ولكن

$$\frac{1}{\ln x} > \frac{1}{x}$$

إذن $\int_2^\infty \frac{dx}{\ln x}$ ايضاً تباعدية .

قاعدة:

التكامل الأسي أو الهندسي يكون على الصورة $\int_a^\infty e^{-tx}dx$ حيث t مقدار ثابت فإن:
التكامل المعتل يتقارب إذا كانت $0 < t$ ويتباعد إذا كانت $t \le 0$.

2) إختبار القسمة(4-2-2) :

لنفرض أن $f(x)$ و $g(x)$ دالتان موجبتان وقابلتان للتكامل على الفترة المغلقة والمحدودة $[a,b]$ وكانت $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}\neq 0$ عندئذٍ يكون $\int_a^\infty f(x)dx$ و$\int_a^\infty g(x)dx$ متقاربان معاً أو متباعدان معاً.

البرهان :

نستنتج من $\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$ أن هنالك عددان M_2, M_1 حيث:

$$M_2 g(x) \leq f(x) \leq M_1 g(x)$$

لكل$x \geq n$ (n عدد حقيقي).

من النظرية السابقة ـ إختبار المقارنة ـ نستنتج أن $\int_a^\infty f(x)dx$ و$\int_a^\infty g(x)dx$ متقاربان معاً أو متباعدان معاً.

- ❖ هذا الإختبار لـه إرتباط بإختبار المقارنـة وهو غالباً مفيد جداً بالتبـادل معـه وبوجه خاص عند أخذ $g(x)=\frac{1}{x^p}$ فيكون لدينا من الحقائق المعرفة عن تكامل p ما يأتي :

أفرض أن $\lim_{x\to\infty} x^p f(x) = A$:

- ـ التكامل$\int_a^\infty f(x)dx$ يتقارب إذا كانت $p>1$ والمقدار A محدود.
- ـ التكامل $\int_a^\infty f(x)dx$ يتباعد إذا كانت $p\leq 1$ والمقدار A غير محدود.

نظرية(4-1) :

إذا كان $\int_a^\infty f(x)dx$ متقارباً وكان λ عدد حقيقي ، فإن $\int_a^\infty \lambda f(x)dx$ يكون متقارباً أيضاً ويكون

$$\lambda\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^\infty \lambda f(x)dx$$

أما إذا كان $\int_a^\infty f(x)dx$ متباعداً وكان $\lambda \neq 0$ فإن: $\int_a^\infty \lambda f(x)dx$ يكون متباعداً كذلك .

البرهان :

لاحظ أن :

$$\int_a^\infty \lambda f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_a^b \lambda f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\lambda\int_a^b f(x)dx$$

$$\lambda \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx = \lambda \int_a^\infty f(x)dx$$

وبذلك يكون :

$$\lambda \int_a^\infty f(x)dx = \int_a^\infty \lambda f(x)dx$$

في حالة التباعد:

إذا كان $\int_a^\infty \lambda f(x)dx$ متقارب فإن :

$$\int_a^\infty f(x)dx = \frac{1}{\lambda}\int_a^\infty \lambda f(x)dx$$

متقارباً كذلك ولكن $\int_a^\infty f(x)dx$ متباعد مما يؤدي إلى تناقض .

نظرية(2-4) :

إذا كان $\int_a^\infty f(x)dx$ و $\int_a^\infty g(x)dx$ متقاربان فإن :

$\int_a^\infty [f(x) \pm g(x)]dx$ يكون متقارباً ايضاً ويكون :

$$\int_a^\infty [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^\infty f(x)dx \pm \int_a^\infty g(x)dx$$

البرهان:

من خواص التكامل المحدد الخاصية :

$$\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$$

$$\int_a^\infty [f(x) \pm g(x)]dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx$$

وهذا يؤدي إلي أن :

$$\int_a^\infty [f(x) \pm g(x)]dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx \pm \lim_{b\to\infty} \int_a^b g(x)dx$$

نظرية(3-4) :

إذا كانت $f(x) \geq 0$ لكل $x \in [a,b]$ فإن: $\int_a^\infty f(x)dx \geq 0$

البرهان:

إذا كانت $f(x) \geq 0$ لكل $x \in [a,b]$ فإنه من خواص التكامل المحدد $\int_a^b f(x)dx \geq 0$: ولذلك فإن :
إذا كانت $f(x) \geq 0$ لكل $x \in [a,b]$ فإن :

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b\to\infty} \int_a^b f(x)dx \geq 0$$

نظرية(4-4):

إذا كان $\int_a^\infty f(x)dx$ متقارباً فإن $\int_\infty^\infty f(x)dx = 0$
البرهان :

$$\int_a^a f(x)dx = 0$$

ولكن :

$$\int_\infty^\infty f(x)dx = \lim_{a\to\infty} \int_a^a f(x)dx = 0$$

النظرية الأساسيه لحساب التفاضل والتكامل توضح أنه إذا كانت f دالة على$[a,b]$ حيث $F'(x) = f(x)$، فإن :

$$\int_a^x f(t)dt = F(x) - F(a)$$

يمكن تعميم هذه النظرية للتكامل المعتل ولكن بشرط وجود النهاية $\lim_{x\to\infty} f(x)$ حيث يكون التكامل المعتل $\int_a^\infty f$ متقارباً .

نظرية(5-4):

إذا كانت $\lim_{x\to\infty} F(x)$ موجودة فإن التكامل $\int_a^\infty f(x)dx$ متقارب ويحسب :

$$\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{x\to\infty} \int_a^x f(t)dt = \lim_{x\to\infty} F(x) - F(a)$$

مثال(3):

أحسب قيمة التكامل $\int_1^\infty e^{ax}\,dx$ حيث $a > 0$ ؟

الحل:

$$F(x) = -\frac{1}{a}e^{-ax}$$

$$\int_1^\infty e^{ax}\,dx = \lim_{x\to\infty}[F(x) - F(1)] = 0 - \left(-\frac{1}{a}e^{-a}\right) = \frac{1}{a}e^{-a}$$

يمكن تعميم فكرة التكامل بالتعويض إلى التكاملات المعتله والنظرية الآتية توضح ذلك

نظرية(6-4):

إذا كان f دالة متصلة على الفترة $[a,\infty)$ وكان $x = g(u)$ حيث g دالة تزايدية على $[a,\infty)$ و $a = g(a)$ ، فإنه إذا تقارب أحد التكاملين $\int_a^\infty f(g(u))g'(u)du$ و $\int_a^\infty f(x)dx$ فإن الآخر يكون متقارباً ويكون

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_a^\infty f(g(u))g'(u)du$$

مثال(4):

ناقش تقارب التكامل $\int_0^\infty \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$.

الحل:

الدالة $f(x) = \frac{e^x}{1+e^{2x}}$ دالة متصلة على $[a,\infty)$

إذا كان $x = \ln u$ فإن $f(\ln u) = \frac{u}{1+u^2}$ و $(\ln u)' = \frac{1}{u}$

وبذلك يكون :

$$\int_0^\infty \frac{\mathrm{e^x}}{1+\mathrm{e^{2x}}}\mathrm{dx} = \int_1^\infty \frac{\mathrm{du}}{1+\mathrm{u^2}} =)\cot\infty - \cot 1) = \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{4}$$

يمكن كذلك نقل فكرة التكامل بالتجزئة إلى التكاملات المعتلة .

نظرية(7-4):

إذا كانت u, v دالتان متصلتان على $[a, \infty)$ ولهما مشتقة متصلة على$[a, b]$ وإذا كان $\lim_{x\to\infty} u(x)v(x) = K$ فإنه إذا كان أحد التكاملين $\int_a^\infty u\,dv$ و $\int_a^\infty v\,du$ متقارباً فإن الآخر يكون متقارباً ايضاً ويكون

$$\int_a^\infty u\,dv = K - u(a)v(a) - \int_a^\infty v\,du$$

مثال(5):

أحسب التكامل $\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$ ؟

الحل:

لنفرض أن :

$u(x) = x^n$ و $dv = e^{-x}$ وبذلك فإن

$v = -e^{-x}$ و $du = nx^{n-1}$

الآن:

$$\lim_{x\to\infty} u(x)v(x) = \lim_{x\to\infty}(-x^n e^{-x}) = -\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}$$
$$= \lim_{x\to\infty}\frac{n!}{e^x}$$

وذلك بتطبيق قاعدة لوبيتال .

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx$$
$$= \lim_{x\to\infty}(-x^n e^{-x}) - u(0)v(0) - n\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx$$

وبحساب التكامل $\int_0^\infty x^{n-1}e^{-x}\,dx$ مره أخرى نصل إلى :

$$\int_0^\infty x$$

وهكذا نصل إلى أن:

$$\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = n!$$

مثال(6):

ناقش تقارب التكامل $\int_1^\infty e^{-x^2} dx$؟

الحل:

$x^2 \geq x$ لكل $x \geq 1$ ولذلك فإن، $e^{-x^2} \leq e^{-x}$

ومن ذلك نصل إلى أن

$\int_1^\infty e^{-x^2} dx$ متقارب إذا كان $\int_1^\infty e^{-x} dx$ متقارب.

الآن:

$$\int_1^\infty e^{-x} dx = \lim_{b\to\infty} \int_1^b e^{-x} dx = \lim_{b\to\infty} (-e^{-b} + e^{-1}) = \frac{1}{e}$$

إذن $\int_1^\infty e^{-x} dx$ متقارب وهذا يؤدي إلى تقارب $\int_1^\infty e^{-x^2} dx$

3) إختبار المتسلسلة(4-2-3) :

إذا كانت f دالة متصلة وتناقصية وموجبة على $[a,\infty)$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^\infty f(n)$ والتكامل $\int_a^\infty f(x)dx$ متقاربان معاً او متباعدان معاً .

مثال(7):

ادرس تقارب المتسلسلة $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\ \ln(n)^a}$ ؟

الحل:

$$\int_2^\infty \frac{1}{x(\ln x)^a} dx = \lim_{b\to\infty} \int_2^b \frac{1}{x(\ln x)^a} dx = \frac{1}{(a-1)(\ln 2)^{a-1}}$$

إذا كان $a > 1$ متقارب

ويتباعد عندما يكون $a \leq 1$

المتسلسلة $\sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\ \ln(n)^a}$ تكون تقاربية عندما $a > 1$ ومتباعدة عندما $a \leq 1$.

التقارب المطلق والتقارب المشروط (3-4):

$\int_0^\infty f(x)dx$ تسمى تقاربية مطلقة إذا كانت $\int_0^\infty |f(x)|dx$ تتقارب لكن $\int_0^\infty f(x)dx$ تتباعد إذا كانت $\int_0^\infty |f(x)|dx$ تتباعدوتسمى تقارباً شرطياً.

نظرية(8-4):

إذا كانت $f(x)$ قابلة للتكامل على الفترة $[a,x]$ وإذا كانت $\int_a^\infty |f(x)|dx$ متقارباً فإن $\int_a^\infty f(x)dx$ يكون كذلك متقارباً .

البرهان:

من الملاحظ أن:

$f^+(x) \le |f(x)|$ وكذلك $f^-(x) \le |f(x)|$

لكل $x \ge \text{a};\int_0^\infty f^+(x)dx$ و $\int_0^\infty f^-(x)dx$ متقاربان.

$$\int_a^\infty f(x)dx = \int_0^\infty f^+(x)dx + \int_0^\infty f^-(x)dx$$

وهذا يعني أن $\int_a^\infty f(x)dx$ متقارب.

مثال(8):

أثبت أن $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}dx$ تتقارب تقارباً مطلقاً

الحل:

الطريقة الاولى:

$\left|\frac{\cos x}{x^2}\right| \le \frac{1}{x^2}$ بإختبار المقارنة :

بما أن $\int_1^\infty \frac{1}{x^2}dx$ تتقارب فإن $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}dx$ تتقارب .

الطريقة الثانية:

بما أن

$\lim_{x\to\infty} \left|\frac{\cos x}{x^{1/2}}\right| = \lim_{x\to\infty} x^{3/2}\left|\frac{\cos x}{x^2}\right|$ =0

نجد أن $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}dx$ تتقارب تقارباً مطلقاً.

مثال(9):

أثبت أن $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ تتقارب

الحل:

بما أن $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ تتقارب(لأن $\frac{\sin x}{x}$ مستمرة في $(0 < x \le 1$

فنحتاج فقط أن نوضح $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ تتقارب.

نكامل بالتجزئة نحصل على :

$$\int_1^m \frac{\sin x}{x} dx = -\frac{\cos x}{x}\Big|_1^m + \int_1^m \frac{\cos x}{x^2} dx = \cos 1 - \frac{\cos m}{m} + \int_1^m \frac{\cos x}{x^2} dx$$

وبأخذ النهاية عندما $m \to \infty$ وبإستعمال الحقيقة $\lim_{m\to\infty} \frac{\cos m}{m} = 0.$

$$\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx = \cos 1 + \int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx$$

ولكن $\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2} dx$ متقارب وبذلك يكون $\int_1^\infty \frac{\sin x}{x} dx$ أيضاً متقارب.

مثال(10) :

إختبر تقارب التكاملات المعتلة الاتية :

I. $\int_1^\infty \frac{x}{3x^4+5x^2+1} dx$

الحل:

أفرض أن :

$f(x) = \frac{x}{3x^4+5x^2+1}$ و $g(x) = \frac{1}{x^3}$

بإستخدام إختبار القسمة :

نجد أن $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1}{3}$

إذن الدالتان تتقاربان معا أو تتباعدان معاً

ولكن $g(x)$ تتقارب وبذلك تكون $f(x)$ متقاربة .

II. $\int_2^\infty \frac{x^2-1}{\sqrt{x^6+16}}dx$

الحل:

بإستخدام إختبار المقارنة

عندما تكون x كبيرة فإن التكامل يقترب من

$$\frac{x^2}{\sqrt{x^6}} = \frac{x^2}{x^3} = \frac{1}{x}$$

$$\frac{x^2-1}{\sqrt{x^6+16}} \geq \frac{1}{2x}$$

بما أن $\frac{1}{x}$ متباعد يكون $\int_2^\infty \frac{x^2-1}{\sqrt{x^6+16}}dx$ ايضا متباعد

III. $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$

الحل:

$$\lim_{x\to\infty} e^{-x^2} = \lim_{x\to\infty} x^2e^{-x^2} = 0$$

(بإستخدام قاعدة لوبيتال)

إذن التكامل متقارب

IV. $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x+a}dx \qquad ; a \equiv const$

$$\lim_{x\to\infty} x.\frac{\ln x}{x+a} = \infty$$

(p=1 A=∞)

إذن التكامل متباعد

V. $\int_0^\infty \frac{(1-\cos x)}{x^2}dx$

الحل:

$$\lim_{x\to\infty} x^{3/2}(\frac{1-\cos x}{x^2})$$

*(p=*0 *A=*$^3/_2$*)*

إذن التكامل متقارب

VI. $\int_{-\infty}^{-1} \frac{e^x}{x}dx$

الحل:

أفرض أن: $x = -y$يصبح التكامل

$$-\int_1^\infty \frac{e^{-y}}{y}dy = \lim_{y\to\infty} y^2(\frac{e^{-y}}{y})$$

$$\lim_{y\to\infty} ye^{-y} = 0$$
$$(\mathrm{p} = 2 \quad \mathrm{A} = 0)$$

التكامل متقارب.

VII. $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^3+x^2}{x^6+1}dx$

الحل:

يمكن كتابة التكامل المعطى على الصورة :

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{x^3+x^2}{x^6+1}dx + \int_{0}^{\infty} \frac{x^3+x^2}{x^6+1}dx$$

أفرض أن: $x = -y$ في التكامل الأول ليصبح:

$$-\int_0^\infty \frac{y^3-y^2}{x^6+1}$$

بما أن :

$$\lim_{y\to\infty} y^2\left(\frac{y^3-y^2}{x^6+1}\right) = 1$$

إذن التكامل المعطى متقارب.

إختبارات التقارب للتكاملات المعتلة من الصنف الثاني(4-4) :

Improper Integral of Second Kind

لنفرض أن : f دالة قابلة للتكامل على أي فترة جزئية $[a, b-\epsilon]$ من الفترة $[a, b[$ حيث $\epsilon > 0$ وأن f دالة لها خط تقارب عمودي عند $x = b$.

النظريات التالية توضح الشروط اللازمة لكي يكون التكامل $\int_a^b f(x)dx$ متقارب

.

نظرية(9-4):

لنفرض أن $f(x) \geq 0$: لكل $x \in [a,b[$ ؛ إذا كان هنالك عدد موجب M حيث:

$$\int_a^{b-\epsilon} f(x)dx \leq M$$

$\epsilon \in [0, b-a]$، $\epsilon > 0$

عندئذٍ يكون $\int_a^{b-\epsilon} f(x)dx$ متقارباً ويكون :

$$\int_a^b f(x)dx = lub\left\{\int_a^{b-\epsilon} f(x)dx \colon \epsilon \in [0, b-a]\right.$$

البرهان:

لنفرض أن :

$$f(\epsilon) = \int_a^{b-\epsilon} f(x)dx$$

إذا كان $\epsilon_1 \geq \epsilon_2$: فإن : $f(\epsilon_1) \leq f(\epsilon_2)$ وهذا يوضح أن الدالة تنناقصية على $[a,b[$ وبالتالى يكون لهذه الدالة نهاية محدودة لأنها محدودة من أعلى :

$$\lim_{\epsilon \to 0} f(\epsilon) = lub\left\{\int_a^{b-\epsilon} f(x)dx; \epsilon \in [0, b-a]\right.$$

مثال(11):

ادرس تقارب $\int_0^1 \frac{dx}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$

الحل:

الدالة $f(x) = \frac{1}{(1-x)^{\frac{1}{2}}}$ دالة موجبة على $[0,1[$ وأن $x = 1$ خط تقارب عمودي لهذه الدالة .

$$\int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{(1-x)^{\frac{1}{2}}} = -2\sqrt{1-x}\Big|\begin{matrix} 1-\epsilon \\ 0 \end{matrix} = -2\sqrt{\epsilon} + 2$$

إذن التكامل متقارب .

نظرية(4-10):

إذا كان$0 \le f(x) \le g(x)$: وكان $x = b$خط تقارب عمودي للدالتين $f\ , g$ فإنه:

- تقارب$\int_a^b g(x)dx$يؤدي إلى تقارب$\int_a^b f(x)dx$.
- تباعد $\int_a^b f(x)dx$ يؤدي إلى تباعد $\int_a^b g(x)dx$.

نظرية(4-11):

إذا كانت $f(x) \ge 0$: وكذلك $g(x) \ge 0$ على $[a, b]$ ويكون للدالتين كل على حدة خط تقارب عمودي عند $x = b$. إذا كان :

$$\lim_{x \to b} \frac{f(x)}{g(x)} = K$$

فإن: $\int_a^b g(x)dx$ و$\int_a^b f(x)dx$ متقاربان معاً أو متباعدان معاً.

الفصل الخامس

محتويات الفصل الخامس:

بعض تطبيقات التكامل المعتل

دالة جاما(2-5):

Gamma function

تعريف:

تعرف دالة جاما على أنها التكامل المعتل على الصورة $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ ويرمز لها بالرمز:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \qquad ; x > 0$$

هذا التكامل المعتل يسمى -أيضاً-تكامل أويلر من النوع الثاني

Euler Integral of the second kind.

خصائص دالة جاما(3-5):

1. دالة جاما هي دالة تقاربية لكل $0 < x < \infty$ وتباعدية لكل $x \leq 0$

أي يشرط وجود النهاية :

$$\lim_{R\to\infty}\int_0^R t^{x-1}e^{-t}\,dt$$

ويكون التكامل تقاربي إذا كانت Γx أيضاً تقاربية .

2. يوجد للدالة جاما صيغتين اختزاليتين تفيدان حساب قيم الدالة :

الأولى في حالة $x < 0$ والثانيةفي حالة $x > 0$.

<u>الصيغة الاختزالية الأولى لدالة جاما(1-3-5):</u>

First Recurrence Formula:

الصيغة الاختزالية الأولى لدالة جاما عند $x > 0$ وتعطى الصيغة الرياضية:

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) ؛ x > 0$$

البرهان:

بوضع $x+1$ بدلاً من x في دالة جاما(التعريف) نحصل على:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \qquad ; x > 0$$

تصبح:

$$\Gamma(x+1) = \int_0^\infty t^{x}e^{-t}dt \;=\; \lim_{R\to\infty} t^{x}\,e^{-t}dt$$

وبإجراء التكامل بالتجزئة :

$$\Gamma(x+1) = \lim_{R\to\infty}\left\{-t^{x}(e^{-t})\Big|_{0}^{R} - \int_0^R -e^{-t}xt^{x-1}dt\right\}$$
$$= \lim_{R\to\infty}\{-R^{x}+0\} = 0$$
$$\therefore \Gamma(x+1) = x\left\{\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt\right\} = x\Gamma(x)$$

3. من أهم صفات دالة جاما سهولة حساب قيمتها في حالة ما كانx عدداً صحيحاً موجباً ولذلك فهي تسمى " دالة المضروب "

.(Factorial Function)

الصيغة الاختزالية الثانية لدالة جاما(2-3-5):

Second Recurrence Formula:

$$\Gamma(n+1) = n!$$

البرهان:

إذا وضعنا في الصيغة الرياضية الأولى أي عدد صحيح موجب nبدلا منx فإننا نحصل على:

$$\Gamma(n+1) = n\Gamma(n) = n(n-1)\Gamma(n-1) = \cdots = n!\,\Gamma(1)$$

ولكن:

$$\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = 1$$
$$\Gamma(n+1) = n!$$

4. الصيغة الإختزالية الثانية لدالة جاما في حالة $0 > x$وبشرط أن xليس عدداً صحيحاً أي وبشرط أن : $x \neq -1, -2, -3, \ldots$

هي:

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1), \forall x < 0; x \neq -1, -2, -3,$$

سؤال:

كيف نحصل على صيغة جاما الإختزالية الأخيرة ؟

الإجابة على هذا السؤال بسيطة ، بما أن دالة جاما تعرف على أنها التكامل المعتل وحيث أن هذا التكامل تباعدي إذا كان$0 \geq x$: فلا يمكن تعريف دالة جاما في هذه الحالة .

ولكن هل يمكن إيجاد تعريف لدالة جاما في حالة$0 > x$ و ليس عدداً صحيحاً سالباً؟

للإجابة علي هذا السؤال نبدأ كما يلي:

في حالة $0 < x$ فإن :.$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$

:. يمكن القول أن هذه الصيغة يجب أن تعكس في هذه حالة $0 > x$ لتصبح على شكل الصيغة الإختزالية

$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\Gamma(x+1)$. بهذه الطريقة نجد أنه يمكننا حساب دالة جاما في حالة ما إذا كان x ليس عدداً صحيحاً سالباً ، ولكنه أقل من الصفر.

5. للحصول على رسم منحنى دالة جاما ، أولاً نفاضل الدالة $\Gamma(x)$:

المشتقة الأولى $\Gamma'(x) = \int_0^\infty t^{x-1}(\ln t)e^{-t}\,dt \rightarrow$

المشتقة الثانية $\Gamma''(x) = \int_0^\infty t^{x-1}\,(\ln t)^2\,e^{-t}dt \rightarrow$

أيضاً يمكن الحصول على الخطوط التقاربية المختلفة عن طريق حساب النهايات

$$\lim_{x\to 0}\Gamma(x) = \lim_{x\to 0}\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \rightarrow \infty\,,$$

$$\lim_{x\to \infty}\Gamma(x) = \lim_{x\to \infty}\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \rightarrow \infty$$

$$\because\ \Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}dt = 1; \Gamma(2) = \int_0^\infty te^{-t}dt = 1$$

حسب نظرية رول يوجد على الأقل العدد$x_\circ$ بحيث:$\Gamma'(x_\circ) = 0$

وبما أن:

$$\begin{cases}\Gamma'(x) < 0\ ؛\ \forall x < x_\circ \\ \Gamma''(x) > 0\ ؛\ \forall x > x_\circ\end{cases}$$

فإن منحنى دالة جاما يحتوى على قيمة واحدة صغرى محلية في الفترة$(0,\infty)$ توجد عند النقطة $x_\circ \approx 1.461$.

مثال(1):

أحسب $\Gamma\left({}^1\!/_2\right)$

الحل:

بوضع$x = {}^1\!/_2$ في التعريف:

$$\Gamma\left({}^1\!/_2\right) = \int_0^\infty t^{-1/2}e^{-t}dt$$

نفرض أن:$t = y^2$ نحصل على :

$$dt = 2ydy$$

$$\Gamma\left({}^1\!/_2\right) = 2\int_0^\infty (y^2)^{-1/2}\,e^{-y^2}ydy$$

$$\Gamma\left({}^1\!/_2\right) = 2\int_0^\infty e^{-y^2}dy$$

لأن متغير التكامل y هو متغير حر " مستقل" يمكن إستبداله بالمتغير z فتصبح :

$$\Gamma\left({}^{1}\!/_{2}\right) = 2\int_{0}^{\infty} e^{-z^2} dz$$

وبالتالي نجد أن:

$$\Gamma\left({}^{1}\!/_{2}\right) \times \Gamma\left({}^{1}\!/_{2}\right) = 2\int_{0}^{\infty} e^{-y^2} dy \times 2\int_{0}^{\infty} e^{-z^2} dz$$

$$4\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-(y^2+z^2)}\, dy\, dz$$

وبإستخدام الإحداثيات القطبية:

$$y = r\cos\theta\ , z = r\sin\theta\ ,\ dydz = r\ dr\ d\theta$$

نحصل على :

$$(\Gamma\left({}^{1}\!/_{2}\right))^2 = 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\infty} e^{-r^2}\ r\ dr\ d\theta$$

$$= 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left[\lim_{R\to\infty}\int_{0}^{R} e^{-r^2}\ r\ dr\right] d\theta$$

$$= 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left[\lim_{R\to\infty} -\frac{1}{2}e^{-r^2}\Big|_{0}^{R}\right] d\theta$$

$$= 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\left[\lim_{R\to\infty}\left(-\frac{1}{2}e^{-R^2} + \frac{1}{2}\right)\right] d\theta$$

$$= 4\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{2}d\theta = 2\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}d\theta = \pi$$

$$(\Gamma\left({}^{1}\!/_{2}\right))^2 = \pi\ ; \Gamma\left({}^{1}\!/_{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

مثال(2):

أحسب كل من :

I. $\frac{\Gamma(6)}{2\Gamma(3)}$

الحل:

$$\frac{\Gamma(6)}{2\Gamma(3)} = \frac{\Gamma(5+1)}{2\Gamma(2+1)} = \frac{5!}{2.2!} = \frac{5.4.3.2.1}{2.2.1} = 30$$

II. $\frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(1/2)}$

الحل:

$$\frac{\Gamma(5/2)}{\Gamma(1/2)} = \frac{\Gamma(3/2+1)}{\Gamma(1/2)} = \frac{3/2\,\Gamma(3/2)}{\Gamma(1/2)} = \frac{3/2\,\Gamma(1/2+1)}{\Gamma(1/2)}$$

$$= \frac{3/2\,.\,1/2\,\Gamma(1/2)}{\Gamma(1/2)} = \frac{3}{4}$$

مثال(3):

أحسب قيمة التكاملات الاتية:

i. $\int_0^\infty t^3 e^{-t} dt$

الحل:

$x - 1 = 3 \Rightarrow x = 4$

$\Gamma(4) = \Gamma(3+1) = 3! = 3.2.1 = 6$

$$\int_0^\infty t^6 e^{-2t} dt \ \Rightarrow$$

Let:

$t = \frac{y}{2} \Rightarrow 2t = y$

$$\int_0^\infty t^6 e^{-2t} dt \Rightarrow \int_0^\infty \frac{y^6 e^{-y}}{2^7} dy =$$

$$\frac{1}{2^7}\int_0^\infty y^6 e^{-y}\, dy$$

$$\Rightarrow x - 1 = 6 \Rightarrow x = 7 \Rightarrow \Gamma(7)$$

$$\frac{\Gamma(7)}{2^7} = \frac{\Gamma(6+1)}{2^7} = \frac{6!}{2^7} = \frac{45}{8}$$

ii. $\int_0^\infty \sqrt{y} e^{-y^3} dy$

الحل:

Let:

$x = y^3 \quad ; \qquad y = x^{1/3}$

$$\int_0^\infty \sqrt{x^{1/3}} e^{-x} . \frac{1}{3} x^{-2/3} dx$$

$$\frac{1}{3}\int_0^\infty x^{-1/2} e^{-x} dx = \frac{1}{3}\Gamma\left(1/2\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{3}$$

دالة بيتا(4-5):

Beta Function

تعريف:

تعرف دالة بيتا على أنها التكامل المعتل على الصورة :

$$\int_0^1 t^{p-1}(1-t)^{q-1}dt \quad ; \qquad p>0, q>0$$

ويرمز لها بالرمز (p,q) ويسمى التكامل المعتل أيضاً بتكامل أويلر من النوع الأول.

Euler Integral of the first kind.

خصائص دالة بيتا(5-5):

1) دالة بيتا دالة تقاربية .

2) دالة بيتا متماثلة *"Symmetric Function"*
بالنسبة إلى p, q

أي أن:

$$(p,q) = (q,p)$$

البرهان:

Let: $x = 1-t \Rightarrow 1-x = t\,, dt = -dx$

في دالة بيتا نحصل على :

$$(p,q) = -\int_1^0 x^{q-1}(1-x)^{p-1}dx$$

$$= \int_0^1 x^{q-1}(1-x)^{p-1}dx$$

$$= (q,p)$$

3) يمكن تعريف دالة بيتا من خلال الدوال المثلثية في الشكل:

$$(p,q) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}(\varphi)\cos^{2q-1}(\varphi)\,d\varphi$$

البرهان:

نستخدم التعويض:$t=\sin^2(\varphi)$ فنجد أن:

$$dt = 2\sin(\varphi)\cos(\varphi)d\varphi \qquad , \varphi = 0 \to \frac{\pi}{2}$$

وتتحول دالة بيتا المعطاه إلى:

$$(p,q) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin^2(\varphi)]^{p-1}(1-\sin^2(\varphi))^{q-1} \times 2\sin(\varphi)\cos(\varphi)d\varphi$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} [\sin^2(\varphi)]^{p-1}[\cos^2(\varphi)]^{p-1}(\,2\sin(\varphi)\cos(\varphi)d\varphi)$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{2p-1}(\varphi)\cos^{2q-1}(\varphi)\, d\varphi$$

4) يمكن كتابة دالة بيتا على الصورة :

$$(p,q) = \int_0^{\infty} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}} dy$$

البرهان:

نستخدم التعويض:

$$t = \frac{y}{1+y} \quad , \quad dt = \frac{dy}{(1+y)^2} \quad , y\text{: } 0 \to \infty$$

في دالة بيتا فتتحول إلى:

$$(p,q) = \int_0^{\infty} \left(\frac{y}{1+y}\right)^{p-1}\left(1-\frac{y}{1+y}\right)^{q-1}\frac{dy}{(1+y)^2}$$

$$= \int_0^{\infty} \frac{y^{p-1}}{(1+y)^{p+q}} dy$$

العلاقة بين دالة بيتا ودالة جاما(6-5)

يمكن وضع العلاقة بينهما في الصورة الاتية:

$$(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)} \qquad ,p,q>0$$

البرهان:

بوضع $t=y^2$ في دالة جاما$\Gamma(p)$ ، نحصل على :

$$\Gamma(p)=\int_0^\infty y^{2p-2}e^{-y^2}.2ydy=2\int_0^\infty y^{2p-1}e^{-y^2}dy$$

بالمثل يمكن اعتبار أن :

$$\Gamma(q)=2\int_0^\infty z^{2q-1}e^{-z^2}dz$$

$$\therefore \Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^\infty\int_0^\infty y^{2p-1}z^{2q-1}e^{-(y^2+z^2)}dydz$$

وبإستخدام الإححداثيات القطبية:

$$y=\gamma\cos\varphi \qquad ,z=\gamma\sin\varphi \qquad ,dydz=\gamma d\gamma d\varphi$$

نحصل على:

$$\Gamma(p)\Gamma(q)=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty(\gamma\cos\varphi)^{2p-1}\,(\gamma\sin\varphi)^{2q-1}\,e^{-\gamma^2}\gamma d\gamma d\varphi$$

$$=4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty \gamma^{2p+2q-2+1}e^{-\gamma^2}\cos^{2p-1}(\varphi)\sin^{2q-1}(\varphi)d\gamma d\varphi$$

$$4\left[\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}(\varphi)\sin^{2q-1}(\varphi)d\varphi\right]\left[\int_0^\infty \gamma^{2(p+q)-1}e^{-\gamma^2}d\gamma\right]$$

بإستخدام التعويضات $,dt=2\gamma d\gamma$ $\quad t=\gamma^2$ نحصل على التكامل الأخير في الصورة:

$$\int_0^\infty p^{2(p+q)-1}e^{-p^2}dp=\frac{1}{2}\int_0^\infty t^{(p+q)-1}\,e^{-t}dt=\frac{1}{2}\lceil(p+q)$$

أيضاً بما أن :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}(\varphi)\sin^{2q-1}(\varphi)d\varphi=\frac{1}{2}B(p,q)$$

فإن:

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = 4 * \frac{1}{2}B(p,q) * \frac{1}{2}\Gamma(p+q)$$

$$\Gamma(p)\Gamma(q) = B(p,q)\Gamma(p+q)$$

وهكذا نجد أن:

$$B(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$$

مثال(4):

أحسب التكاملات الاتية:

1. $\int_0^1 x^4 (1-x)^3 dx$

الحل:

$$p - 1 = 4 \rightarrow p = 5$$
$$q - 1 = 3 \rightarrow q = 4$$

إذن فإن:

$$\int_0^1 x^4 (1-x)^3 dx = B(5,4) = \frac{\Gamma(5)\Gamma(4)}{\Gamma(5+4)} = \frac{4!\,3!}{8!} = \frac{1}{280}$$

2. $\int_0^{\pi/2} sin^6 (\theta) d\theta$

الحل:

يمكن مقارنته مع دالة بيتا في الصيغة المثلثية:

$$2q - 1 = 0 \rightarrow q = \frac{1}{2}\ ; 2p - 1 = 6\ ; p = \frac{7}{2}$$

وبالتالي فإن:

$$\int_0^{\pi/2} sin^6 (\theta) d\theta = \frac{1}{2}B\left(\frac{7}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma(\frac{7}{2})\Gamma(\frac{1}{2})}{2\Gamma(\frac{7}{2}+\frac{1}{2})} = \frac{5\pi}{32}$$

3. $\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{2-x}} dx$

الحل:

$$\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{2-x}}\,dx$$
$$= 4\sqrt{2}\int_0^1 \frac{t^2}{\sqrt{1-t}}\,dt$$
$$= 4\sqrt{2}\int_0^1 t^{2(}1-t)^{-1/2}dt = 4\sqrt{2}\ B\left(3,\frac{1}{2}\right)$$
$$= 4\frac{\Gamma(3)\,\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(3+\frac{1}{2})} = 64\frac{\sqrt{2}}{15}$$

تكاملات فورير(7-5)

Fourier Integral

تعريف:

يعرف تكامل فورير على أنه التكامل المعطى ادناه:

$\int_0^{\infty} A(\lambda)\cos(\lambda x) + B(\lambda)\sin(\lambda x) d\lambda \,;\, x \in (-\infty, \infty)$

يسمى تكامل فورير للدالة $f(x)$ المتقطعة الإتصال على كل فترة $[-l, l]$ وهذا التكامل يعتبر تمثيلاً للدالة $f(x)$ على طول خط الأعداد $(-\infty, \infty)$ ويساويها عند كل نقطة إتصال للدالة $f(x)$.

بحيث يكون :

$$\int_0^{\infty} A(\lambda)\cos(\lambda x) + B(\lambda)\sin(\lambda x) d\lambda$$

تقارب تكاملات فورير(8-5) :

نظرية(1-5):

نعتبر الدالة $f(x)$المتصلة على فترات $[-l, l]$ وإن المشتقات الأولى اليمنى واليسرى لها وجود عند كل نقطة في نطاقها ، ونفترض أن التكامل$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ يعطي قيمة جبرية محدودة ولنفرض ايضا أن كل من:

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\lambda t) dt$$

$$B(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\lambda t)\, dt$$

عندئذ فإن تكامل فورير يتقارب إلى الدالة $f(x)$ نفسها وذلك أينما كانت الدالة $f(x)$ متصلة ، ويتقارب إلى القيمة :

$$\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to x_\circ^+} f(x) + \lim_{x\to x_\circ^-} f(x)\right]$$

عند كل نقطة عدم إتصال$x_\circ$بشرط وجود المشتقات الأولى اليمنى واليسرى عندها.

ملاحظة :

لاحظ إختلاف تقارب تكامل فورير عن تقارب متسلسلة فورير ، حيث عدم وجود تقارب لتكامل فورير عند نقط النهايات يسبب كون الدالة معرفة على طول خط الأعداد$(-\infty, \infty)$.

مثال(5):

أوجد تكامل فورير وأدرس تقاربه للدالة :

$$f(x) = \begin{cases} e^{x} & ,x \leq 0 \\ e^{-x} & ,x > 0 \end{cases}$$

الحل:

بما أن الدالة المعطاه تحقق شروط النظرية السابقة بالإضافة إلى أن

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|dt = \int_{-\infty}^{0} e^{x} dx + \int_{0}^{\infty} e^{-x} dx = 2$$

إذاً نجد أن لكل $\lambda \geq 0$ أن:

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{t}\cos(\lambda t)\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t}\cos(\lambda t)\,dt\right]$$

$$= \frac{2}{\pi}\left[\frac{1}{1+\lambda^{2}}\right]$$

$$B(\lambda) = \frac{1}{\pi}\left[\int_{-\infty}^{0} e^{t}\sin(\lambda t)\,dt + \int_{0}^{\infty} e^{-t}\sin(\lambda t)\,dt\right] = 0$$

بتعويض كل من$A(\lambda), B(\lambda)$ في تكامل فورير نحصل على:

$$f(x) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{\cos(\lambda x)}{1+\lambda^{2}}\,d\lambda\,, \forall x \in (-\infty, \infty)$$

مثال(6):

أوجد تكامل فورير للدالة

$$f(x) = \begin{cases} 1 & ,|x| < 1 \\ 0 & ,|x| > 1 \end{cases}$$

الحل :

بما أن الدالة المعطاه تحقق شروط النظرية السابقة بالإضافة إلى أن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|dx = \int_{-\infty}^{-1} 0\,.\,dx + \int_{-1}^{\infty} 0\,.\,dx = 2$$

لكل $0 \geq \lambda$نجد أن:

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\lambda t)dt$$

$$B(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\lambda t)\,dt$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \sin(\lambda t)dt = 0$$
بتعويض كل من $A(\lambda), B(\lambda)$ في تكامل فورير نحصل على:
$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\lambda}\sin(\lambda)\cos(\lambda x)\,d\lambda$$
ولدراسة تقارب تكامل فورير إلى الدالة المعطاه $f(x)$ فنجد أن نقط عدم الإتصال هي $x = \pm 1$.

عند $x = 1$ يتقارب تكامل فورير إلى القيمة :
$$\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to 1^+} f(x) + \lim_{x\to 1^-} f(x)\right] = \frac{1}{2}[0+1] = \frac{1}{2}$$
عند $x = -1$ يتقارب تكامل فورير إلى القيمة :
$$\frac{1}{2}\left[\lim_{x\to -1^+} f(x) + \lim_{x\to -1^-} f(x)\right] = \frac{1}{2}[1+0] = \frac{1}{2}$$
وبما أن الدالة متصلة على الفترة Ω حيث:
$$\Omega = (-\infty,-1) \cup (-1,1) \cup (1,\infty)$$
ولذلك فإن تكامل فورير يتقارب إلى الدالة $f(x)$ نفسها عند كل نقطة تنتمي إلى الفترة Ω أي أن :
$$\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\lambda}\sin(\lambda)\cos(\lambda x)\,d\lambda = \begin{cases} 1 & ,|x| < 1 \\ 0 & ,|x| > 1 \\ \frac{1}{2} & ,x = \pm 1 \end{cases}$$
إذن:
$$\int_{0}^{\infty} \frac{1}{\lambda}\sin(\lambda)\cos(\lambda x)\,d\lambda = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & ,|x| < 1 \\ 0 & ,|x| > 1 \\ \frac{\pi}{4} & ,x = \pm 1 \end{cases}$$

الفصل السادس

محتويات الفصل السادس:

ملخص البحث

تحدثنا في هذا البحث عن التكامل بصفة عامة وعن التكاملات المعتلة بصفة خاصة وأحياناً يصعب إيجاد قيمة التكامل بالتحديد لذلك نكتفي بمعرفة هل التكامل موجود أم لا؟ وللإجابة على هذا السؤال تطرقنا لمفاهيم عدة من خلال البحث فتناولنا في الفصل الأول مقدمة عن التكامل وتعريفه.

ومن ثم بعض قوانين التكاملات وطرق إيجادها والصيغة العامة لإيجاد التكامل وبعض الصيغ القياسية الأخرى وطرق إيجاد التكامل مثل التكامل بالتعويض وتكامل الدوال المثلثية والتكامل بالتجزئه.

كذلك تطرقنا من خلال تناولنا لهذا الفصل لمفهوم التكامل المعتل وسبب علته فالتكامل يسمى تكاملاً معتلاً إذا كانت الدالة غير مستمرة في الفترة أو إذا كانت غير محدودة عند أحد حدود التكامل أو كليهما ومن ثُم تناولنا حالات التكامل المعتل بصورة مبسطة من خلال الفصل الثاني وهي:

1. $a = -\infty$ و $b = \infty$ أو كليهما أي أن نهاية التكامل لمقدار واحد أو كليهما هو مالانهاية.
2. $f(x)$ غير محدودة عند نقطة أو أكثر من نقاط الفترة $a \leq x \leq b$ ومثل هذه النقطة تسمى نقطة منفردة أو منعزلة أو نقطة شاذة .
3. إذا كانت $f(x)$ غير مستمرة عند a أو b على الفترة $[a, b]$.

وهنا كان منطلق الحديث حول التكاملات المعتلة من الصنف الأول والخواص التي تندرج تحتها وهي تنقسم إلى:

i. الداله f معرفه على الفتره $(-\infty, b)$ وقابلة للتكامل في الفتره المحدودة والمغلقة $[a, b]$.

في هذه الحالة يكون لدينا التكامل المعتل $\int_{-\infty}^{b} f(x)dx$.

ii. إذا كانت الدالة f قابلة للتكامل على أي فترة محدودة ومغلقة *[a,-a]* لتوسيع نطاق التكامل حتى يشمل خط الأعداد الحقيقية نحتاج إلى دراسة التكامل

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

iii. إذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للتكامل على أي فترة محدودة ومغلقة $[-a, a]$

وبعد ذلك إنتقلنا إلى دراسة الحالة الثانية من حالات التكامل وهي تنقسم إلي :

i. الدالة f لها خط تقارب عمودي عند $x = a$ وفترة التكامل هي $]a, b]$ وتكون الدالة قابلة للتكامل على أي فترة جزئية على شكل $[a + \epsilon, b]$ من الفترة $]a, b]$.

ii. الدالة f لها خط تقاربي عمودي عند $x = b$ وفترة التكامل هي $[a, b[$ وتكون الدالة f قابلة للتكامل على أي فترة جزئية مغلقة $[a, b - \epsilon]$ للفترة $[a, b[$.

أما الفصل الثالث من هذا البحث فكان محور الحديث عن إختبارات تقارب وتباعد التكاملات المعتلة وهي تشبة إلى حد كبير إختبارات تقارب وتباعد المتسلسلات ، وهذه الإختبارات هي :

1. إختبار المقارنة:

ليكن لدينا $0 \leq f(x) \leq g(x)$ لكل $x \geq a$ فإن:

iii. إذا كان $\int_a^\infty g(x)dx$ متقارب فإن $\int_a^\infty f(x)dx$ يكون متقارب أيضاً.

iv. إذا كان $\int_a^\infty f(x)dx$ متباعداً فإن $\int_a^\infty g(x)dx$ يكون متباعداً أيضاً.

2. إختبار القسمة:

لنفرض أن $f(x)$ و $g(x)$ دالتان موجبتان وقابلتان للتكامل على الفترة المغلقة والمحدودة $[a,b]$ وكانت $\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} \neq 0$ عندئذٍ يكون $\int_a^\infty f(x)dx$ و$\int_a^\infty g(x)dx$ متقاربان معاً أو متباعدان معاً.

3. إختبار المتسلسلة:

إذا كانت f دالة متصلة وتناقصية وموجبة على $[a,\infty)$ فإن المتسلسلة $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$ والتكامل $\int_a^\infty f(x)dx$ متقاربان معاً او متباعدان معاً .

وتنطبق هذه الإحتبارات على كل أنواع التكاملات المعتلة على حد سواء متبوعة ببعض الأمثلة والنظريات الهامة التي توضح مدى تقارب وتباعد هذه التكاملات .

ونحن بصدد الحديث عن التكاملات المعتلة ،كان لابد لنا من دراسة التقارب المطلق والتقارب الشرطي حيث :

$\int_0^\infty f(x)dx$ تسمى تقاربية مطلقة إذا كانت $\int_0^\infty |f(x)|dx$ تتقارب لكن $\int_0^\infty f(x)dx$ تتباعد، إذا كانت $\int_0^\infty |f(x)|dx$ تتباعد تسمى تقارباً شرطياً .

أما في الفصل الرابع فكان لنا لابد من دراسة تطبيقات التكاملات المعتلة متمثلة في بعض الدوال الخاصة مثل:

- دالة جاما
- دالة بيتا
- دالة بيسل

وبعض التحويلات التي لها أهميتها في دراسة التفاضل وحل المعادلات التفاضلية مثل تحويلات لابلاس ، وكذلك بعض المتسلسلات الخاصة والتي لها تكاملاتها وتقاربها وتباعدها ولها تطبيقاتها في الحياة العملية مثل متسلسلة فورير.

وإخترنا من هذه التطبيقات على سبيل المثال لا الحصر بعض من هذه التطبيقات أولها دالة جاما وهي:

تعرف دالة جاما على أنها التكامل المعتل على الصورة $\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt$ ويرمز لها بالرمز:

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \qquad ; x > 0$$

هذا التكامل المعتل يسمى -أيضاً-تكامل أويلر من النوع الثاني، ولها عدة صيغ إختزالية يمكن كتابتها من خلالها وتعرضنا أيضاً لبعض خواصها.

ودالة بيتا وهي:

تعرف دالة بيتا على أنها التكامل المعتل على الصورة :

$$\int_0^1 t$$

ويرمز لها بالرمز (p, q) ويسمى التكامل المعتل أيضاً بتكامل أويلر من النوع الأول، ومن ثم دراسة خواص دالة بيتا ، وكذلك العلاقة بين دالة جاما وبيتا و التي يمكن وضعها في الصورة الاتية:

$$(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(\mathrm{q})}{\Gamma(\mathrm{p}+\mathrm{q})} \qquad , p, q > 0$$

وختاماً درسنا تكامل متسلسلة فورير وهو:

التكامل المعطى ادناه:

$$\int_0^\infty A(\lambda)\cos(\lambda x) + B(\lambda)\sin(\lambda x)d\lambda \,; x \in (-\infty, \infty)$$

يسمى تكامل فورير للدالة $f(x)$ المتقطعة الإتصال على كل فترة $[-l, l]$ وهذا التكامل يعتبر تمثيلاً للدالة $f(x)$ على طول خط الأعداد $(-\infty, \infty)$ ويساويها عند كل نقطة إتصال للدالة $f(x)$

بحيث يكون :

$$\int_0^\infty A(\lambda)\cos(\lambda x) + B(\lambda)\sin(\lambda x)d\lambda$$

حيث:

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\cos(\lambda t)dt$$

$$B(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(t)\sin(\lambda t)\,dt$$

المراجع:

1/ أساسيات الرياضيات
حساب التفاضل والتكامل والمصفوفات والمتجهات،
د. فوزي محمد عون ، دار الكتب العالمية للنشر والتوزيع ،رقم الإيداع(14005/2002)
2/ التفاضل والتكامل
حساب التكامل الجزء الثاني، أ.د.حسن مصطفي العويضي، الطبعة الأولى (1427/2006) مكتبة الرشد بالمملكة العربية السعودية ـ الرياض.
3/ نظريات ومسائل في التفاضل والتكامل المتقدم
سلسلة شوم ، تأليف: د.موراي ر شبيجل ، ترجمة:د.محمد السمري، الطبعة العربية الثانية ، دار النشر الدولية ، رقم الإيداع(15187/2003).
4/ التحليل الحقيقي
تأليف :د. رمضان محمد جهيمة ، الدار الدولية للنشر والتوزيع،رقم الإيداع(1568/99).
5/ الرياضيات الهندسية المتقدمة
النظريات والمفاهيم والتطبيقات العملية ، تأليف: أ.د.أميل صبحي سعد شكر الله ، الطبعة الأولى2007 ،دار النشر للجامعات القاهرة .
6/ منتديات ستار تايمز.