بسم الله الرحمن الرحيم

جـــامعة السـودان للعلوم والتكنولوجيـا

كلـية الـعلوم

قسم الرياضيات

بحث تكميلي لنيل درجة البكالريوس

بعنوان :

تـكــامــل ستـلـتـجـس

إعـداد الطالبات

نمارق صفوت نور الدائم محمد نور

ميساء جمال الدين محمد

آيات عوض عبدالله

إشراف الدكتورة

سلوي محمد الامين

2014م

الآيـــــة

قال تعالى :

اللهُ لاَ إِلَهَ إِلاَّ هُوَ الْحَيُّ الْقَيُّومُ لاَ تَأْخُذُهُ سِنَةٌ وَلاَ نَوْمٌ لَّهُ مَا فِي
وَاتِ وَمَا فِي الأَرْضِ مَن ذَا الَّذِي يَشْفَعُ عِنْدَهُ إِلاَّ بِإِذْنِهِ
مَا بَيْنَ أَيْدِيهِمْ وَمَا خَلْفَهُمْ وَلاَ يُحِيطُونَ بِشَيْءٍ مِّنْ عِلْمِهِ
إِلاَّ بِمَا شَاء وَسِعَ كُرْسِيُّهُ السَّمَاوَاتِ وَالأَرْضَ وَلاَ يَؤُودُهُ
حِفْظُهُمَا وَهُوَ الْعَلِيُّ الْعَظِيمُ {255})

صدق الله العظيم

(سورة البقرة : الآية 255)

الإهـــــداء

إلى من يسعد قلبي بلقاها
إلى روضة الحب والحنان التي تنبت الأزهار

أمي ،،،،،
إلى رمز الرجولة والتضحية
إلى من دفعني إلى العلم وبه ازداد افتخاراً
أبى ،،،،
إلى من هم اقرب إلى من روحي
إلى من شاركني حضن الأم وبهم استمد عزتي و إصراري
إلى اخواني ،،،،،
إلى من آنسني في دراستي وشاركني همومي تذكارا وتقديرا
إلى أساتذتي الأجلاء،،،،

الشكر و التقدير

الشكر من قبل ومن بعد لله سبحانه و تعالي وقال سيدنا محمد صلي الله عليه وسلم (من لم يشكر الناس لم يشكر الله) .

من منطق قول رسولنا الكريم الأمي الصادق نتقدم بشكرنا وتقديرنا اللا محدود إلي جامعتنا العريقة التي خرجت الأجيال ولازالت وستظل مضرباً للأمثال في تحصيل العلم و المعرفة جامعة السودان للعلوم و التكنولوجيا .

في مثل هذه اللحظات يتوقف اليراع ليفكر أن يخط الحروف ليجمعها في كلمات . تتبعثر الأحرف عبث و يحاول تجميعها في سطور كثيرة تمر في الخيال ولا بقي لنا في نهاية المطاف إلا قليلاً من الذكريات وصور تجمعنا برفاق كانوا بحياتنا.... فواجب علينا شكرهم ووداعهم ونحن نخطو

خطواتنا الأولي في غمار الحياة و نخص بالجزيل الشكر والعرفان إلي كل من أشعل شمعة في دروب عملنا و إلي من وقف بجانبنا علي المنابر و أعطي من حصيلة فكره لينير دربنا إلي الأساتذة الكرام في كلية العلوم قسم الرياضيات .

كما نزجي أجزل شكرنا إلي الدكتورة سلوى محمد الأمين التي نقول لها قول رسول الله صلي الله عليه وسلم (إن الحوت في البحر و الطير في السماء ليصلون علي معلم الناس الخير) .

فهرس المحتويات

الخلاصة :-

درسنا في هذا البحث مفهوم تكامل ستلتجس ووضحنا شروط وجوده وعلاقته بتكامل ريمان.

في الباب الأول ذكرنا بعض التعاريف التي لها علاقة بتكامل ستلتجس ، وفي الباب الثاني تناولنا مفهوم تكامل ستلتجس وا ٍستعرضنا بعض خواصه ورده لتكامل ريمان والمفهوم الـهندسي لتكامل ستلتجس ونظريات القيمة المتوسطة وبعض الأمثلة هذا ما درسناه في الباب الثالث.

الباب الاول

المقدمـــة

تعريف (1): (أصغر حد علوي) :-

إذا كان : $f(x)$ أصغر حد علوي للدالة L_0 فإنه يقال أن $f: X \to Y$ إذا كانت

$L_0 = \sup f(x)$ ونرمز له بالرمز $L \geq L_0$حد علوي فإن حد علوي (2) إذا كان $_0$

(1)

تعريف (2): (**أكبر حد سفلي) :-**

إذا كان :$f(x)$ أكبر حد سفلي للدالة L_0 فإنه يقال أن $f: X \to Y$ إذا كانت

L_0 حد سفلي (2) إذا كان L حد سفلي فإن $L_0 \geq L$ ونرمز له بالرمز $L_0 = \inf f$

(1)

مثال (1) :-

أوجد أصغر حد علوي وأكبر حد سفلي للدالة

$$f(x) = x^2 \qquad\qquad -1 < x < 5$$

الحل

$f(x) \geq 0 \,, x \in [-1,5]$ ، أصغر حد علوي هو $f(5) = 25$

أكبر حد سفلي للدالة هو $f(-1) = 1$

تعريف (3) : (الدالة التزايدية):

متزايدة إذا تحققت لأي $x_1, x_2 \in I$ حيث أن $x_1 < x_2$ إذن $F(x_1) \leq F(x_2)$

الدالة $F(x)$

أما إذا تحقق $F(\ \ _1) < F(x_2)$ إذن $F(x)$متزايدة تماماً .

مثال (2):-

أثبت أن الدالة$(x) = x^2$ دالة متزايدة في الفترة $[0, \infty]$

الحل

$$2,3 \in [0, \infty] \qquad f(2) = 2^2 = 4 \text{ ، } f(3) = 3^2 = 9$$

$\because 2 < 3, f(2) < f(3)$

$\therefore$ الدالة $f(x) = x^2$ دالة تزايدية

تعريف (4): **(نقطة الانقطاع) :-**

$F(x)$تعاني إنقاطاً من النوع الاول في النقطة x_0 إذا وجدت النهاية من اليمين والنهاية

الدالة

من اليسار وإختلفتا

أي أن :-

$$\lim_{x \to x_0} F(x) \neq \lim_{x \to x_0} F(x)$$

مثال (3):

$$F(x) = \begin{cases} 5 & x < 2 \\ x + 2 & x \geq 2 \end{cases}$$

الحل

$$\lim_{x \to x_0^+} F(x) = \lim_{x \to 2^+} x + 2 = 4$$

$$\lim_{x \to X_0^-} F(x) = \lim_{x \to 2^-} 5 = 5$$

$\because \lim_{x \to 2^+} f(x) \neq \lim_{x \to 2^-} f(x)$

$\therefore$ إذن الدالة تعاني إنقاطاً من النوع الاول .

تعريف (5): (الإتصال) :-

الدالة $F(x)$ المعرفة في الفترة I يقال بانها متصلة عند النقطة $a \in I$ إذا كان :

$$\lim_{x \to a} F(x) = F(a)$$

أي أن $\forall \varepsilon > 0$ توجد $\delta > 0$ بحيث أن

$$|x - a| < \delta \ , \ |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

مثال (4):

إبحث ما إذا كانت الدالة

$(x) = \frac{1}{x} \quad |x| \geq 2$ متصلة

الحل

$|f(x)$

$1 \leq x \leq 3$إذن$|x - x_0| < 2\varepsilon$

باختيار$\delta = 2\varepsilon$. تكون الدالة متصلة

مثال (5) :-

أثبت أن الدالة $f(x) = x^2$ متصلة عند $x = 2$

الحل

باختبار $\delta = \frac{\varepsilon}{3}$ تكون الدالة متصلة عند $x = 2$.

مثال (6):-

أثبت أن الدالة $g(x) = x$ متصلة عند النقطة $x = 1$.

الحل

باختبار $\delta = \varepsilon$

∴تكون الدالة متصلة عند $x = 1$.

تعريف (6) : (الإشتقاق):-

لتكن الدالة f معرفة $f: I \to R$

فإن$\delta(\varepsilon) > 0, \varepsilon > 0$ إذا كان c عند النقطة f تمثل مشتقة الدالة L نقول للعدد الحقيقي

ولتكن$c \in I$

أي أن L لـ $f(c)$ وتكتب c قابلة للإشتقاق عند النقطة fإذن

مثال (7):-

إذا كانت الدالة f معرفة كما يلي

أوجد $f'(x)$

الحل

لإيجاد $'(x)$ عندما$x = 0$

تعريف (7) : (التقارب المنتظم):-

تكون الدالة f متقاربة بإنتظام إذا كان $\forall\ n > 0$ يوجد عدد طبيعي N بحيث يحقق

لجميع قيم $n > N$ و x من الفترة $[a, b]$.

تعريف (8): (نظرية القيمة المتوسطة):-

إذا كانت $f(x)$ دالة متصلة في الفترة $[a, b]$ وقابلة للتفاضل فإنه توجد $c \in [a, b]$: حيث أن

$f'(c$

مثال (8):-

إذا كانت $f(x) = x^3$ متصلة في الفترة $(-2,2)$ هل تحقق f؟ نظرية القيمة المتوسطة

الحل

$=$

إذن الدالة تحقق نظرية القيمة المتوسطة

تعريف (9) : **(نظرية القيمة المتوسطة للتكامل) :**

إذا كانت الدالة $f(x)$ دالة متصلة في الفترة $[a, b]$ وقابلة للتكامل فإنه توجد $\varepsilon \in [a, b]$ حيث أن

$\int_a^b f($

مثال (9):-

حقق نظرية القيمة المتوسطة للتكامل للدالة $f(x) = 2x$ في الفترة $[1,3]$

الحل

نفرض$\varepsilon = 2$ إذن $f(\varepsilon) = f(2) = 4$

تعريف (10): التجزئة :-

التجزئة هي تقسم الفترة $[a, b]$ الي أجزاء متساوية ، بحيث أن :

تعريف(11): (تعريف مجموع ريمان):-

لتكن $p = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ تقسيم للفترة $[a, b]$ وكانت $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n)$

و$i \in \{0,1, \dots, n-1\}$ نسمي المجموع

مجموع ريمان حيث أن

تعريف(12): (تكامل داربو- ريمان):-

إذا كانت f دالة محدودة علي $[a, b]$ لكل $\varepsilon > 0$ توجد p $\delta > 0$ تجزئة $\|p\| < \delta$ فإن ،

وبأخذ النهاية

تعريف (13)$(\cup\ (\boldsymbol{f}))$:

هو تكامل الدالة f العلوي علي الفترة $[a, b]$.

تعريف (14)$(\boldsymbol{L}(\boldsymbol{f}))$-:

هو تكامل الدالة f السفلي علي الفترة $[a, b]$.

تعريف (15): (تكامل ريمان) :-

نطلق علي الدالة أنها قابلة لتكامل ريمان إذا كان تكامل f العلوي يساوي تكامل f السفلي

ويرمز له بالرمز$f \in R$ حيث R: يمثل تكامل ريمان أي أن

تعريف (16) : (التغير الكلي) :-

حيث أن : p وتخضع للتجزئة $[a,b]$ معرفة في الفترة المحدودة $f(x)$إذا كانت الدالة

نشكل المجموع

ويرمز له بـ : $f(x)$ يسمي التغير الكلي للدالة Vالحد الاعلي لـ

وإذا كان

ذات تغير محدود ، أما إذا كان :$f(x)$يقال عن

ليست ذات تغير محدود .$f(x)$فإن

مثال (10):-

ذات تغير محدود $f(x)$أثبت أن الدالة

[0,1]معرفة علي الفترة

الحل

$$V = \sum_{k=1}^{n} |f$$

$$= 1 - x_1 + x_2 - x_1 + \cdots + x_{n-1} - x_{n-2} + 5 - (1 - x_{n-1})$$

$= 5$ -

تعريف (17): (التكامل بالتجزئة) :-

، إذا كان$[a, b]$ ولها مشتقة علي $[a, \infty)$ دالتان متصلتان علي u, vإذا كانت

وكان أحدالتكاملين متقارباً فإن :

مثال (11): -

أحسب التكامل

الحل :

بإستخدام التكامل بالتجزئة

الباب الثاني

مفهوم تكامل ستلتجس

: [illegible]وم تكامل ستلتجس وشروط وجوده (

تعريف (2-1-1)

نجزئ الفترة الي فترات جزئية في الصورة :$[a, b]$ دالتين في الفترة المغلقه $f(x)$ و
ولتكن$g(x)$

من كل فترة جزئية ε_k نختار نقطة $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$حيث
وليكن العدد$\lambda = \max_{1 \le k \le n} \Delta x_k$
$[x_{k-1}, x_k]$ حيث$x_{k-1} \le \varepsilon_k \le x_k$
ولحساب قيمة$f(\varepsilon_k)$ للدالة$f(x)$ والتغير Δg

ولنكون المجموع :$g(x)$ للدالة

$$\sigma = \sum_{k=1}^{n} f$$

الذي يسمي بمجموع ستلتجس .

$[a,b]$ يمثل تكامل ستلتجس في الفترة I فان $\lambda \to 0$ مع $\{\sigma\}$ للمجموعة I اذا وجدت نهاية

ونرمز له بالرمز

$$I =$$

$$= \lim_{\lambda \to}$$

ملاحظة (2-1-1):-

- عندما $g(x) = x$ فإن تكامل ستلتجس يصبح تكامل ريمان اذن يمكننا القول ان تكامل تكون ستلتجس هو تعميم لتكامل ريمان .

- الفرق بين مجاميع ستلتجس ومجاميع ريمان هو ان في مجاميع ستلتجس نضرب الحد $f(\varepsilon_k)$ في القيمة $\Delta g(x_k)$ في مجاميع ريمان نضرب الحد $f(\varepsilon_k)$ في القيمة Δx_k

الشروط العامة لوجود تكامل ستلتجس :-

- يمكننا القول ان في الحالة التي تكون $g(x)$ داله تزايدية في الفترة $[a,b]$ اي ان $g(x_k) > 0$ باعتبار $x_{k\ (k=1,2,..,n)}$ النقط الواردة في (1) وهو شكل متماثل لتكامل ريمان حيث $\Delta x > 0$

$$M_k = \sup_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x)\,, m_k = \inf_{x_{k-1} \le x \le x_k} f(x) \quad , \quad k = (1,2,\dots,n)$$

نكون مجموعي(داربو- ستلتجس) الاعظمي والاصغري

$$S = \sum_{k=1}^{n} M_k\, \Delta g(x_k) \quad , \qquad s = \sum_{k=1}^{n} m_k\, \Delta g(x_k)$$

لاي تجزئة $s \le \sigma \le S$ تحقق مجاميع (داربو – ستلتجس) الخواص التالية :-

- لاي فترة $[a,b]$ عند اضافة نقطة او مجموعة من النقط فإن المجموع الاصغري s لايصغر والمجموع الاعظمي S لايكبر .

- لاي $[a,b]$ المجموع الاصغري s هي مجموعة المجاميع الاصغرية هو أصغر من تجزئة في الفترة اي مجموع اعظمي من مجموعة المجاميع الاعظمية اي ان :

$$s \leq I_* = \sup\{s\} \leq I^* = \inf\{s\} \leq s \ldots \qquad (4)$$

نظرية (2-1-1):-

لوجود تكامل ستلتجس يلزم ويكفي تحقق الشرط :-

$$\lim_{\lambda\to 0}(S - s) = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{k=1}^{n} w_k \Delta g(x_k) = 0$$

حيث $w = M_k - m_k$ يمثل تواتر $f(x)$ في الفترة $[x_{k-1}, x_k]$

البرهان :

نفرض ان $\int_a^b f dg$ موجود لاي $\in > 0$, يوجد $\delta > 0$ عندما $\lambda < \delta$ فإن

$|\sigma - 1| < \epsilon$ اي $I - \in < \sigma < I + \epsilon$

بما ان ε_k في الفترة $[x_{k-1}, x_k]$اي ان $I - \in \leq s \leq S \leq I + \in$

وهذا يعني

$$\lim_{\lambda\to 0} s = I \quad , \quad \lim_{\lambda\to 0} S = I$$

وبالتالي

$$\lim_{\lambda\to 0}(S - s) = 0$$

نفرض ان

$$\lim_{\lambda\to 0}(S - s) = 0$$

من (4) $\qquad I_* = I^*$

$S \leq \sigma \leq s$ فان S توافق تجزئة ما موافقة ل σ لاي $S \leq I \leq s$ الرمز المشترك بينهما Iحيث

فإن $S > \lambda$ واذن لتجزئة تحقق ان

وهذا يعني ان :$|I - \sigma| < S - s < \in$

عندما تكون الدالة $f(x)$ متصلة و$g(x)$ دالة متزايدة فإن :

يكون موجوداً .

ملاحظة (2-1-2):

عندما يكون للدالة $g\ (x)$ - تغير محدود فإنه يمكن تمثيل هذه الدالة كفرق دالتين

وعندما

$$\sigma = \sum_{k=}^{n}$$

ذات تغير محدود ، فإن التكامل $g(x)$ و $[a,b]$ متصلة علي الفترة $f(x)$- اذا كانت

في الواقع $g(x)$ للدالة x_0 يمثل دالة متصلة في كل نقطة اتصال xكتكامل تابع لحده الاعلي

$$|I(x_0 + .$$

حيث

فإننا نجد :$[a,b]$في الفترة k دالة محدودة بالعدد $f(x)$ وان$g(x)$ دالة متصلة في نقطة اتصال الدالة

وبجعل $\Delta x \to 0$ نجد ان الدالة$I(x)$ متصلة في النقطة x_0.

(2-2) اصناف الدوال القابلة للتكامل بمفهوم ستلتجس :-

ولهذا نناقش الحالات التالية: $g(x)$عندما نضع شروط علي $f(x)$عادة نضع شروط اضعف علي

1- اذا كانت $f(x)$ قابلة للتكامل علي $[a,b]$ بمفهوم ريمان و$g(x)$ تحقق شروط ليبشتز من المرتبة الاولي اي :

$$|g(x'') - g(x')| \le L|x'' - x'|: x', x'' \in [a,b], L = const$$

فإن التكامل (3)يكون موجوداً .

البرهان :

نفرض ان الدالة $g(x)$ تحقق شروط ليبشتز ومتزايدة بإطراد فإن :

$$\Delta g(x_k) \le L.\Delta x_k$$

ومنه

$$\sum_{k=0}^{n} w_k \,.\Delta g(x_k) \le L \sum_{k=1}^{n} w_k.\Delta \mathrm{x_k}$$

المجموع يؤول الي الصفر مع $\lambda \to 0$ نجد التكامل (3)يكون موجوداً .
اي دالة تحقق شروط ليبشتز تمثل بالفرق

$$g(x) = Lx - [L.x - g(x)] = g_2(x) - g_1(x)$$

والدالة $g_2(x) = Lx$ فهي تحقق شروط ليبشتز ومتزايدة باعداد وكذلك الثانية

$$g_1(x) = Lx - g(x)$$

فهي تحقق لاي :

$$a \le x \le y \le b$$

ان

$$g_1(y) - g_1(x) = L(y-x) - [g(y) - g(x)] \ge 0$$

وهي متزايدة باطراد واضافة الي ذلك

$$|g_1(y) - g_1(x)| \le L(y-x) + |g(y) - g(x)| \le 2L(y-x)$$

الدالة تحقق شروط ليبشتز في اعلاه ليكون $g_1(x)$و $g_2(x)$ مطردة وتحقق شروط كل من
ليبشتز وتكامل ستلتجس يكون موجوداً .

نتيجة (1-2-2):

1- اذا كانت $f(x)$ متصلة علي $[a,b]$ و $g(x)$ تحقق شروط ليبشتز من المرتبه الاولي فإن تكامل ستلتجس يكون موجوداً .

2- اذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للتكامل بمفهوم ريمان و $g(x)$ يمكن ان تمثل بالشكل

$$g(x) = c + \int_a^x \emptyset(t)dt \qquad a \le x \le b$$

حيث $\emptyset(t)$ قابله للتكامل علي $[a,b]$
$\int_a^b |\emptyset(t)d(t)| < \infty$ عندها يكون تكامل (3) .

البرهان :

نفرض $\emptyset(t) \ge 0$ وان $g(x)$ متزايدة ومن وجود التكامل للدالة $\emptyset(t)$ علي $[,b]$ فإنها تكون محدودة .

$$|\emptyset(t)| \le L \quad \text{لجميع} \quad a \le x < y < b$$

فإن

$$g(y) - g(x) = \int_x^Y \emptyset(t)dt \le L(y-x)$$

هذا يؤدي ان $g(x)$ تحقق شروط ليبشتز وتكامل ستلتجس موجود .

اما $\emptyset(t)$ دالة قابلة للتكامل كتكامل معتل عندها لاي $\varepsilon > 0$ يوجد $\eta > 0$ بحيث ان اذا كانت

$$\int_{b-\eta}^{b} \emptyset(t)dt < \frac{\varepsilon}{2\Omega}$$

Ω تواتر الدالة $f(x)$ علي $[a,b]$ اي ان :

$$\Omega = supf(x) - inff(x) = M - m$$

نجزئ $[a,b]$ بشكل عشوائي لنحصل علي

$$\sum_{k=1}^{n} w_k . \Delta g(x_k)$$

الي مجموعين

$$\sum = \sum(1) + \sum(2)$$

حيث يوافق $\sum(1)$ المجموع من اجل الفترة

$[a, b - \frac{\eta}{2}]$ و $\sum(2)$ يوافق بقية الفترة $[a,b]$ فإذا اخذنا

$$\lambda = \max_k \Delta x_k < \frac{\eta}{2}$$

عندها

$$\sum(2) < \Omega \int_{b-\eta}^{b} \emptyset(t)dt < \frac{\varepsilon}{2}$$

ومن $\emptyset(t)$ قابلة للتكامل علي $[a, b - \frac{\eta}{2}]$ عندها لاجل تجزئ مناسب اجزاءه صغيرة جهة اخري

سيتحقق $\frac{\varepsilon}{2} > \sum(1)$ ولهذا فإن $\sum < \varepsilon$ فإن التكامل (3)موجوداً .

3- في الحالة العامة عندما تكون الدالة $\emptyset(t)$ قابلة للتكامل علي $[a,b]$ لنتأمل الدالتين

$$\emptyset_2(t) = \frac{|\emptyset(t)| - \emptyset(t)}{2} \quad , \qquad \emptyset_1(t) = \frac{|\emptyset(t)| + \emptyset(t)}{2}$$

غير سالبتين ولكون $\emptyset(t) = \emptyset_1(t) - \emptyset_2(t)$ فإن تكامل ستلتجس موجود .

ملاحظة (1-2-2) :

- اذا $g(x)$ متصلة في $[a,b]$ فان المشتق الاول قابل للتكامل كتكامل معتل او غير كانت

معتل من a الي b عندها العلاقة التالية صحيحة

$$g(x) = g(a) + \int_{a}^{x} g'(t)dt$$

نقطة انقطاع $a < c < b$ من الدالتين $g(x)$،$f(x)$ فإن تكامل ستلتجس غير موجود.

c -

في الواقع سنميز بين حالتين :
الحالة الاولى :
$g(c+0) \neq g(c-0)$ لدي مجاميع ستلتجس نجزئ الفترة ولاندخل c كنقطة تجزئة .
$x_{k-1} < c < x_k$ نختار ε_k مرة لاتساوي c لنجد المجموع σ' ومرة تساوي c وبفرض
لنجد المجموع $''$ فإن

$$\sigma' - \sigma'' = [f(\varepsilon_k) - f(c)][g(x_k) - g(x_{k-1})]$$

نجد ان :

$$g(x_k) - g(x_{k-1}) \to g(c+0) - g(c-0) \neq 0$$

نختار ε_k بحيث يكون الفرق بين $|(\varepsilon_k) - f(c)|$ يكون اكبر عدد موجب وعندها نجد $\sigma' - \sigma''$ تؤول الي $\lambda \to 0$ وهذا يعني ان التكامل(3) غير موجود .
الحالة الثانية:
اذا كانت $g(c+0) = g(c-0) \neq g(c)$
عندها ندخل c في عداد نقطة التجزئة ولتكن $c = x_{k-1}$ فاذا كانت الدالة $f(x)$ نقطة انقطاع في هذه $x = c$ من اليمين عندها $\varepsilon_k = c$ وفي الثاني اي نقطة بين x_k و c النقطة
من جديد لنجد ان $\sigma' - \sigma''$ لا يؤول الي الصفر مع $\lambda \to 0$ ومرة اخري، هذا يعني الفرق
ان تكامل ستلتجس غير موجود .

(2-3) خواص تكامل ستلتجس ورده لتكامل ريمان :
خواص تكامل ستلتجس :
بأخذ $f(x) = 1$ و $a \le x \le b$

$$1) \int_a^b dg(x) = g(b) - g(a)$$

البرهان :

$$\int_a^b dg(x) = g(x)\Big|_a^b$$

$$= g(b) - g(a)$$

$$= \int_a^b dg(x) \ = g(b) - g(a)$$

$$2) \int_a^b [f_1(x) \mp f_2(x)]\, dg(x) = \int_a^b f_1(x) dg(x) \mp \int_a^b f_2(x) dg(x)$$

البرهان :

$$\int_a^b [f_1(x) \mp f_2(x)]dg(x)$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k}$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f_1(x)dg(x) \mp \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f_2\,(x)dg(x)$$

$$= \int_a^b f_1(x)dg(x) \mp \int_a^b f_2(x)dg(x)$$

$$3) \int_a^b f(x)d[g_1(x) \mp g_2(x)]$$

$$= \int_a^b f(x)dg_1(x) \mp \int_a^b f(x)dg_2(x)$$

البرهان:

$$\int_a^b f(x)d[g_1(x) \mp g_2(x)]$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x)dg_1(x) \mp \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(x)dg_2(x)$$

$$4) \int_a^b [pf($$

البرهان:

$$\int_a^b [pf(x)]\,.\,d[qg(x)]$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} [pf(\varepsilon_k)].\,d[qg(x_k)]$$

$$= \lim_{\lambda \to 0} pq \sum_{k=1}^{n} f(x) dg(x) = pq \int_a^b f(x) dg(x)$$

5) اذا كان كل من التكاملين $[a,b]$ دالة متزايدة علي $g(x)$

لتكن

$$\int_a^b h(x) dg(x) \quad , \quad \int_a^b f(x) dg(x)$$

موجودا واذا كانت $f(x) \leq h(x)$ $(a \leq x \leq b)$ فإن :

$$\int_a^b f(x) dg(x) \leq \int_a^b h(x) dg(x)$$

البرهان :

بما أن

$$f(x) \leq h(x)$$

$$\sum_{k=1}^{n} f(x) \leq \sum_{k=1}^{n} h(x)$$

$$\lim_{\lambda \to 0} \sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k) dg(x_k) \leq \lim_{\lambda \to 0} \sum_{k-1}^{n} h(\varepsilon_k) dg(x_k)$$

$$\int_a^b f(x) dg(x) \leq \int_a^b h(x) dg(x)$$

6) $\left| \int_a^b f(x) dg(x) \right| \leq \int_a^b |f(x)| \, dg(x)$

البرهان :

لاي $x', x'' \in [x_{k-1}, x_k]$ المتباينة

$$\big| |f(x')| - |f(x'')| \big| \leq |f(x') - f(x'')|$$

ولهذا فإن:

$$sup \big| |f(x')| - |f(x'')| \big| \leq sup |f(x') - f(x'')|$$

ومنه

$$w_k(|f(x)|) \leq w_k(f(x))$$

حيث

$w_k(f(x))$ تواتر الدالة $f(x)$ و$_k(|f(x)|$ تواتر الدالة $|f(x)|$

في الفترة $[x_{k-1}, x_k]$

مجاميع داربو ستلتجس حققه s وSحيث

موجود فإن $f(x)dg(x)$ عندما يكون تكامل ستلتجس$\int_a^b$

إذن

فإن

$\int_a^b |f(x)|dg(x).$ يكون موجوداً

(5) ومن الخاصية $a \le x \le b \quad , \quad \pm f(x) \le |f(x)|$

فإن

وهذا يعني ان

وهو المطلوب .

$c7)$ موجودا فانه باعتبار $\int_a^b f(x)dg(x)$ اذا كان التكامل $[a,b]$ دالة متزايدة

علي $g(x)$

يكون كل من التكاملين $a < c < b$ حيث

موجوداً .

البرهان:

ليست نقطة تقسيم c والثانية (σ) نقطة تقسيم ولتكن c نقسم مجاميع ستلتجس الي

مجموعتين الاولي فيها

ولتكن (σ') ونوضح ان

الى مجموعتين σ نقسم المجموع $[a,b]$ الي مجموعة نقط اي تجزئه للفترة c ويمكن

ان نضيف النقطة

بحيث :

يكون مجموعي S, s علي الفترة $[a,b]$ و S_2, s_1 علي $[a,c]$ و S_2, s_1 علي $[c,b]$

داربو- ستلتجس

الدينا $\lim_{\lambda\to 0}(S - s) = 0$

وباعتبار $(i = 1,2) \;\; S_i - s_i \le S - s$

لهذا فإن :

وكل من التكاملين

$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2$ يكون موجوداً اضافة الي ان
لهذا فإن

وهذا يعني ان

نتيجة (1-3-2):
إذا فرضنا ان $a = c_0 < c_1 < \cdots < c_m = b$
وان التكامل

$\int_a^b f(x)dg(x)$ موجود

اذن توجد التكاملات

ويتحقق أن

ملاحظة (1-3-2):
إذا وجدت التكاملات

حيث $(a = c_0 < c_1 < \cdots < c_m = b)$
فليس بالضرورة وجود التكامل

ينتج وجود $a < c < b$ حيث c متصلة بجوار النقطة $f(x)$ و $g(x)$ واذا كانت
احدي الدالتين
وتحقق المساواة : $\int_a^b fdg$

$[a,b]$ لاتدخل في نقطة التجزئة للفترة cفإن المجموعين سوف يسعيان للنهاية وفق الفرض الان نفرض ان
ويبقي ان نثبت ان :$\lambda \to 0$ مع σ بدلا من σ' لنقط التجزئة فتحصل علي المجموع باضافة النقطةc

عندها المجموعان مختلفان بفرق المقدارين : المقدار الاول $[x_{k-1}, x_k]$ تقع في الفترة نفرض انc

الموجود فيσ
والمقدار الثاني

حيث$c \le \varepsilon'' \le x_k \quad , \quad x_{k-1} \le \varepsilon' \le c$
ونضع للبساطة$\varepsilon' = \varepsilon'' = c$ فنجد ان

عندما$\lambda \to 0$ و $f(x)$ متصلة فان$\sigma - \sigma' \to 0$
وهو المطلوب .

نظرية (1-3-2) : التكامل بالتجزئة
في وجود احد التكاملين

يوجد التكامل الثاني وتتحقق المساواة

ويسمي قاعدة التكامل بالتجزئة
البرهان :
لنفرض وجود$\int_a^b g(x)df(x)$ ولنجزئ الفترة $[a,b]$ الي فترات$[x_{k-1}, x_k]$ التكامل

نختر النقط $_k$ بالشكل

$a =$

هو $g(x)$ بالنسبة لـ $f(x)$عندها مجموع ستلتجس للدالة

يمكن كتابته كالتالي :

$$\sum_{k=1}^{n} f(\varepsilon_k)$$

باضافة وطرح المقدار

نجد

$$\sigma = f(x$$

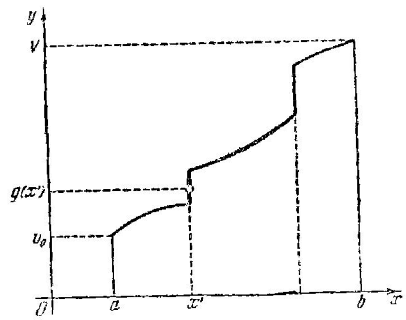
بنقط التقسيم $[a,b]$ وهذا يقابل تجزئة الفترة $\int_a^b gdf$ هي مجموع ستلتجس للتكامل {
والعبارة بين }

إذا اخترنا النقط ε_{k-1} كنقط من الفترات $[\varepsilon_{k+1}, \varepsilon_k]$ $[k = 1,2, \dots, n]$
بإعتبار أن $\lambda = \max{(x_k - x_{k-1})}$
ن تصبح العلاقة $\int_a^b gdf$ اذ يسمي التكامل { } فإن المجموع الواقع بين القوسين
وعندما $\lambda \to 0$
المطلوبة صحيحة.

رد تكامل ستلتجس لتكامل ريمان :

شروط رد تكامل ستلتجس لتكامل ريمان :

يمكن $\int^{b} f(x)dg(x)$ متزايدة فان التكامل $g(x)$ و $[a, b]$ متصلة في الفترة
لتكن$f(x)$
ان يؤدي الي تكامل ريمان .$v = g(x)$بوضع التحويلة
البرهان :
عندما نصل $x = x'$ متصلة وانها تعاني انقطاع في النقطة $v = g(x)$ متصلة لذلك
نفرض ان $g(x)$
علي هذا النحو $(x', g(x' + 0))$ و $(x', g(x' - 0))$قطعة مستقيمة بين النقطتين



بذلك يصبح المنحني متصل بحيث تقع كل قيم الدالة $v = g(b)$ و $v_0 = g(a)$ بين
$g(x)$
هي دالة مطردة $x = g^{-1}(v)$ والدالة $[a, b]$ من x تقابل قيمة للمتغير $v =$
وكل قيمة$g(x)$
$x = x'$ المقابلة لـ $v = v' = g(x')$ نختار قيمة واحدة هي $v = g(x)$متصلة
عكسية للدالة
والان نثبت ان : xوالقيم الاخري لاتقابل اي قيمة لـ

$$(S)\int_a^b f(x)dg(x) = (R)\int_{v_0}^{v} f\left(g^{-1}(v)\right)dv \qquad (*$$

نختار التكامل في الطرف الايمن$g^{-1}(v)$ و $f(g^{-1}(v))$)
بمفهوم ريمان لان الدوال
متصلتين ولنجزئ الفترة$[a, b]$

ونكون مجموع ستلتجس :

وبوضع $v_k = g(x_k)$ ولدينا$v_0 < v_1 < \cdots < v_n = v$
بإعتبار$\Delta v_k = v_k - v_{k-1},\ x_k = g^{-1}(v_k)$
فإن

ومجموع ريمان هو$\int_{v_0}^{v} f(g^{-1}(v))dv$
فإن $max\Delta v_k$ لا يؤول الي الصفر مثلا لو كانت x' محتواه بين x_k, x_{k-1}
اذا كانت$\lambda \to 0$
وحيث$g(x)$: يعاني انقاطا فيكون علي النحو التالي

وبالتالي

$$\sigma - \int_{v_0}^{v} f($$

وبفرضΔx_k صغيراً و$(k = 1,2, \dots, n)$, $v_{k-1} \le v \le v_k$, $\varepsilon > 0$
فان$x_{k-1} \le g^{-1}(v) \le x_k$ وبالوقت $|f(x_k - f(g^{-1}(v))| < \varepsilon$
وعندها يكون

وبهذا نثبت ان

وهذا يعني ان العلاقة (*) محققة .
يمكن ان تمثل بالشكل $g(x)$و $[a, b]$ قابلة للتكامل بمفهوم ريمان علي الفترة
اذا كانت 2-$f(x)$

وحيث$\emptyset(t)$ دالة قابلة للتكامل في الفترة $[a, b]$ فإن

البرهان :
فإن مجموع ستلتجس هو $[a,b]$ موجبة في الفترة $\emptyset(x)$بفرض الدالة

$\sigma =$

ويمكن كتابتها

ولهذا فإن

σ

من اجل$x_{k-1} \leq x \leq x_k$
نجد

حيث $_k$ تواتر الدالة $f(x)$ في الفترة $[x_{k-1}, x_k]$
ينتج لنا

$\left|\sigma - \int\right.$

نجد ان $\lambda \to 0$المجموع الايمن يؤول الي الصفر مع

وهو المطلوب .
متصلة ولها مشتقة$g(x)$و الدالة $[a,b]$ دالة قابلة للتكامل بمفهوم ريمان علي الفترة
3- اذا كانت$f(x)$
عندها $\int_a^b |g'(x)|dx < \infty$ في كل نقطة ماعدا عددا منتهيا من النقاط وبحيث ان
$g'(x)$

ويمكن كتابتها

في حال وجود مشتق .
انقاطاعات من النوع الاول ولنأخذ ابسط هذه الاشكال حيث $g(x)$اما عندما تعاني

$(a$

عندها$g(+0)-g(-0)=1$
نجد أن$x=0$ متصلة في $f(x)$ وبفرض $x=0$والنقطة

لاتساوي الصفر يكون تكامل ستلتجس غير معدوم بينما $f(x)$من اجل

والمساواة غير محققة والسبب هو أن $g(x)$ دالة متصلة في الفترة $[a,b]$.
4- لتكن الدالة $f(x)$ متصلة في الفترة $[a,b]$ و $g(x)$ تعاني في عدد منته من النقاط
في كل النقط $g'(x)$انقطاعا من النوع الاول ولها مشتق $a=c_0<c_1<\cdots<$
$c_{m+1}=b$
ماعدا عدداً منتهياً من النقط بحيث
عندها يوجد تكامل ستلتجس ويساوي: $\int_a^b|g'(x)|<\infty$

$$(s)\int_a^b f$$

$$+\sum_{k=1}^{m}$$

البرهان :
الدالة$g(x)$ تعاني انقطاعاً من النوع الاول لذلك

من الشكل c_k في النقاط $g(x)$نحصل علي قفزات الدالة

(

ونعرف الدالة المساعدة

لما $x<c_k$ وصفرا فيما عدا ذلك والدالة $\rho(c_k-x)=1$ لما $x<c_k$
حيث ان$\rho(x-c_k)=1$
وصفر في ماعدا ذلك.
وبالتالي $[a,b]$متصلة في الفترة $h(x)$ نجد ان $h(x)=g(x)-J(x)$

$$(s)\int_a^b$$

وايضاً

ومن$g(x) = h(x) + J(x)$ و $(s)\int_a^b fdg$ موجود وان

$(s)\int_a^b f($

وهو المطلوب .
ثابتة علي كل مجال جزئي $g(x)$ متصلة و $f(x)$5- حالة خاصة عندما تكون

حيث$a < c_1 < \cdots < c_m < b$
فإنه يكون

البرهان :

$\bigvee_a^b ($

فإن $[a,b]$ وبالتالي علي كل جزء من $[a,b]$ ذات تغير محدود علي $g(x)$ ولكن

حيث $c_m = b\ , c_0 = a$
والآن نحسب التكامل

ولهذا نقسم الفترة $[c_{k-1}, c_k]$ الي اجزاء ونشكل المجموع

$\sigma = f($

وبأخذ النهاية نجد

من العلاقة

ينتج المطلوب .

4) (2- -: أمثلة

مثال (2-4-1) :-

أثبت أن $(S)\int_0^2 x^2 dg(x) = -\frac{17}{4}$

إذا كان $g(x) = \begin{cases} -1 & ,0 \le x \le \frac{1}{2} \\ 0 & ,\frac{1}{2} < x < \frac{3}{2} \\ 2 & ,x = \frac{3}{2} \\ -2 & ,\frac{3}{2} < x < 2 \end{cases}$

الحل:

$$(S)\int_a^b f($$

$$+\sum_{k=r}^{m} f($$

$$(R)$$

$$= 0 + f$$

مثال(2-4-2):

إذا كانت $g(x) = \begin{cases} x+2 & , -2 \le x \le -1 \\ 2 & ,-1 \le x < 0 \\ x+3 & , 0 \le x \le 2 \end{cases}$

أثبت أن :

$$(1)\ (S$$

الحل

$(R)\int_a^b$

$(R)\int_{-2}^2$

$\frac{1}{2}+$

$+f$

$(2)\ (S)\int$

الحل

$(S)\int_{-2}^2 x^2$

$\frac{1}{3}x^3$

$(R)\int_a^b f$

$+f(b)[g$

مثال(2-4-3):-

أثبت أن$(S)\int_{-1}^{3} xdg(x) = 6$

إذا كان

،

الحل

$\int_a^b f(x$

$+\sum_{k=r}^{m} f($

$= I$

$+f(2)[g$

مثال(2-4-4):-

أثبت أن$(S)\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\, dsin\, x = \frac{\pi}{2} - 1$:

بإستخدام قانون التجزئة

$(S)\int_0^{\frac{\pi}{2}} xcosx = \frac{\pi}{2} - 1 \ , \int udv = uv - \int vdu$

u

$\int_0^{\frac{\pi}{2}}$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\cos\frac{\pi}{2}\right) - 0 - [\sin\frac{\pi}{2} - \sin(0)] = \frac{\pi}{2} - 0 - 1 + 0 = \frac{\pi}{2} - 1$$

مثال (2-4-5):-

أثبت أن$\int_{-1}^{1} xd\tan^{-1} x = 0$

البرهان

d t

مثال (6-4-2):

أثبت أن

الحل:

$(S)\int_0^2 x^2$

$, \ (S)\int_0^2 \frac{x^2}{x+1} = (R)\int_0^2 \frac{x^2}{x+1}$

إذن $dt = dx \ , x^2 = (t-1)^2 , x = t-1$ عندما $t = 1 \ , \ x = 0$ عندما

بأخذ $t = x + 1$

$t = 3 \ , \ x = 2$ بالتعويض

(R)

$=$

المعنى الهندسي لتكامل ستلتجس

3-) المفهوم الهندسي لتكامل ستلتجس :(

مطردة ومتزايدة تماما$f(t)$ دالة متصلة وموجبة و$g(t)$وحيث

$(s)\int_a^b f(t)dg(t)$ ليكن التكامل

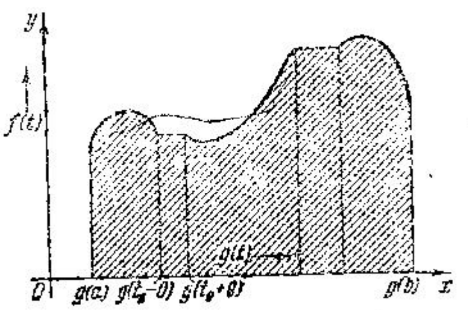
ويمكن ان تكون للدالة إنقطاع من النوع الاول.

شكل متقطع واذا كان للدالة (k) تعبر عن منحني $x = g(t)$ و $y = f(t)$ وجملة المعادلتين الوسيطيتين .

$f(t)$ تقابلان قيمة واحدة للدالة $g(t_0 - 0), g(t_0 + 0)$ فان النهايتين t_0 انقطاعا عند النقطة $g(t)$

يصل بين النقطتين t_0 بقطع افقية في كل نقطة انقطاع (k) ولنعمم المنحني $f(t_0)$ مساوية

ليد المنحني متصلاً $(g(t_0 + 0), f(t_0))$ $g((t_0 - 0), f(t_0))$



والمستقيمين (k) الذي يحتوي (L) عندها يمثل تكامل ستلتجس اعلاه السطح المحصور بين المنحني المتصل

بالنقط $[a, b]$ نقسم الفترة OX والمحور $x = g(b), x = g(a)$

نجد ان OX علي $[g(a), g(b)]$ وعندها للفترة المقابلة

ولنكتب مجموعي $f(t)$ في الفترة الجزئية الموافقة للدالة M_k, m_k ولنوجد اعظم واصغر قيمة

داربو- ستلتجس .

وهما يمثلان سطح الشكل المؤلف من المستطيلات الخارجية والداخلية حيث السطح المطلوب يقع بينهما وعندما $\Delta t_k \to 0$ فإن كلا من s, S تؤول لنهاية هي التكامل

تقيمات لتكامل ستلتجس :

-1 إذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة والدالة $g(x)$ ذات تغير محدود علي الفترة $[a, b]$ عندها يكون

نكتب $[a,b]$في الواقع من اجل تجزئة إختيارية للفترة

$|\sigma| =$

وذلك لان

لنفس الشروط الواردة في التعميم (1)$I = \int_a^b f(x)dg(x)$قريباً من σ 2- يمكن
إيجاد مجموع

و

وبالتالي

σ -

حيث

$|f(x$

موجب اختياري نجد ان ε بحيث k لاي ε > w_kالي فترات جزئية بحيث ان
واذا قسمنا$[a,b]$

(3-2) نظريات القيمة المتوسطة :

نظرية (3-2-1): (نظرية القيمة المتوسطة الاولي)

لتكن الدالة$f(x)$ محدودة علي $[a,b]$-: اي

متزايدة فإذا وجود $\int^{b} f(x)dg(x)$ عندها يوجد عدد μ بحيث $m \le \mu \le M$
و$g(x)$ التكامل

وبخاصة عندما $f(x)$ متصلة علي $[a,b]$ فعندها توجد x_0 من الفترة $[a,b]$ بحيث
تكون الدالة

تمثل هذه النظرية نظرية القيمة المتوسطة لتكامل ستلتجس وإثباتها يتم من المتباينة

وبالإنتقال للنهاية مع $\lambda \to 0$ نجد ان

أو

وبايراد الرمز μ للقيمة في الوسط نجد أن

وتوجد نقطة واحدة علي $f(x)$ هي احدى قيم الدالة μ فان $[a,b]$ متصلة في الفترة
واذا كانت $f(x)$
وتاخذ المساواة الواردة الشكل $f(x_0) = \mu$ بحيث ان $a \le x_0 \le b$ الاقل

$(s)\int_a^b f($

نظرية (3-2-2) (القيمه المتوسطة الثانية) **:**
لتكن $f(x)$ دالة متزايدة على الفترة $[\,,b]$ و $g(x)$ متصلة عندئذ توجد نقطة x_0 من الفترة $[a\,,b]$

بحيث يكون $\int_a^b f(x)\,dg(x) = f(a)\int^{x_0} dg(x) + f(b)\int_{x_0}^{b} dg(x)$ (s)

من نظرية التكامل بالتجزئة نجد أن :

$(s)\int_a^b$

وبتطبيق نظرية القيمة المتوسطة الاولي علي التكامل الثاني في الطرف الايسر نجد أن :

$(s)\int_a^b f($

وبالتالي

$(s)\int_a^b$

إذن علاقة القيمة المتوسطة الثانية محققة .

(3-3) إنتقال النهاية لما تحت رمز التكامل : -

شروط إنتقال النهاية :

فيما يلي شروط انتقال النهاية لما تحت التكامل بالنظريتين التاليتين :

نظرية (3-3-1):

متقاربة بانتظام للدالة $\{f_n(\quad)\}$ ومتتالية الدوال المتصلة $[a,b]$ د.ت.م علي الفترة

وبفرض $g(x)$

عندما $f(x)$

البرهان : من التقارب المنتظم

من الفترة x و $n > N$ لجميع $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ بحيث يحقق N يوجد عدد

طبيعي $0 < \varepsilon$ لكل

عندها $[a,b]$

$\left|\int_a^b f_n\right.$

حيث ان

اختياري فهذا يعني ان علاقة النهاية محققة .εولان

نظرية (3-3-2):

متقاربة في كل نقطة من الفترة $\{g_n(\quad)\}$ ومتتالية الدوال $[a,b]$متصلة علي الفترة

لتكن الدالة $f(x)$

وبفرض $g(x)$ للدالة $[a,b]$

فإنه يكون

البرهان :
نبرهن اولاً

إذا قسمنا الفترة $[a, b]$ بشكل عام فاننا نجد من اجل لكل n حيث $(n = 1,2,3, \dots)$

فإن $n \to \infty$

ولان التقسيم عشوائي للفترة $[, b]$ فإن

الي اجزاء $[a, b]$ ولنقسم الفترة $\varepsilon > 0$ ليكن $[a, b]$ دالة ذات تغير محدود علي الفترة g اي ان
في كل فترة جزئية اصغر $f(x)$ بحيث يكون تواتر الدالة $(k = 1,2, \dots, m)$ حيث
بالنقاط $\{x_k\}$
عندها $\frac{\varepsilon}{3k}$ من

$$\int_a^b f(x) d$$

ولكن

سيكون $[x_{k-1}, x_k]$ومن جهة أخري علي الفترة

بما ان$|f(x) - f(x_k)| < \frac{\varepsilon}{3k}$
وبالتالي

وبهذا يكون

$\int$

وبشكل مماثل $|\theta_n| \leq 1$حيث

$\int_a^b$

ليكون $n > n_0$ ومن اجل $|\theta_n| \leq 1$حيث

$\left|\sum_{k=1}^{m} f(x_k\right.$

ينتج ان nلجميع

إذن

بشكل منتظم يمكن تغير هذا الشرط للدالة $f(x)$ $\{f_n(x)\}$في النظرية الاولي اشترطنا تقارب المتتالية
$[a,b]$من الفترة x و n و M $|f_n(x)| \leq$بالمحدودية المنتظمة لمتتالية الدوال وهو وجود عدد
دالة مستمرة ولاثبات الشرط هذا يكفي اثباته فقط عندما تكون الدالة $f(x)$ونشترط ان تكون النهاية
د.ت.م فإنها تكتب كفرق دالتين متزايدتين) ولهذا نستخدم تغير $g(x)$ متزايدة (عندما تكون $g(x)$
وعندها $V = g(x)$التحول

و

والمسألة ردت لتكاملات ريمان إذن يمكن طرح مسألة ايجاد التكامل $\int_a^b f(x)dg(x)$
دالة ما ذات تغير محدود $g(x)$ مستمرة لتكن $g(x)$ ذات تغير محدود و $g(x)$
حيث $f(x)$ مستمرة و
اي $g(x)$ دالة القفزات للدالية $s(x)$ و

$s(x) =$

عندها من تعريف الاتصال في الفصل الاول نجد أن :-

دالة متصلة ذات تغير محدود ومنه ينتج $\gamma(x)$ حيث

يمكن حساب التكامل الاول في الطرف الايمن حيث أن المتسلسلة لايجاد التكامل

متقاربة .
من جهة أخرى نجد أن :-

$\bigvee_a^b (S$

ولهذا فإن

نحسب التكامل

x_k في نقط الانقطاع الداخلية $g(x)$ للدالة $g(x_k)$ قيم $g(x)$ دالة مستمرة من مركبات
$\gamma(x)$حيث
لاتؤثر في قيمة التكامل$\int_a^b f(x)dg(x)$
لانx_k يمكن اختيارها من نقاط التقسيم عند تشكيل مجموعة المجاميع $\{\sigma\}$.

مثال (1-4-3):-

وأحسب قيمته إذا كانت$[-1,+1]$علي الفترة $g(x)$ بالنسبة لـ$f(x)$أثبت وجود تكامل ستلتجس للدالة

$$g(x) = \begin{cases} 1 \\ \frac{1}{2} \\ -1 \end{cases}$$

الحل

تكامل ستلتجس إذا كانت $[-1,+1]$ د.م.ت في الفترة $g(x)$ دالة متصلة و
بما أن$f(x) = e^x + 1$
$f(x)$ متصلة علي الفترة$[a,b]$ $g(x)$,د.م.ت
فإن التكامل
$\int_a^b f(x)dg(x)$ يكون موجوداً

$$(S)\int_a^b$$

$$+\sum_{k=1}^{n} f($$

$$= (R)$$

$$= 0 + f$$

مثال(2-4-3):-

لتكن $f(x)$ متصلة و $g(x)$ د.م.ت علي الفترة [a , b] ولنفرض أن مجموعة انقطاع $g(x)$ (من النوع الأول) داخل تلك الفترة على الاكثر قابلة للعد وبين ان قيمة التكامل $(s)\int_{a}^{b} f(x)dg(x)$ لا يرتبط بقيم الدالة $g(x)$ في نقط إنقطاعها

الحل

ذ.م.ت ولها إنقطاع من النوع الاول اي أن $g(x)$متصلة و $f(x)$من المعطي الدالة

$g(x_0+0) \neq g(x_0-0)$و

من تعريف تكامل ستلتجس نجد أن :

بما ان

إذن $|g(x_k)-g(x_{k-1})| < \infty$

وبالتالي

$(S)\int_{a}$

في $g(x)$ لايرتبط بقيم الدالة $(S)\int_{a}^{b} f(x)dg(x)$ متصلة إذن قيمة التكامل

$f(x)$وحيث أن الدالة

إنقطاعها .

حل آخر :

من الخاصية

$(S)\int_{a}^{b}$

$+\sum_{k=1}^{n} f($

$\therefore c_0$ تمثل نقطة إنقطاع

$\therefore (S) \int_a$

$g(x)$ د.م.ت من المعطيات
إذن$|g(x_k) - g(x_{k-1})| < \infty$
وبالتالي
$(S) \int_a^b f(x)dg(x)$ موجود ولا يرتبط بقيم الدالة $g(x)$. عند نقط إنقطاعها

مثال(3-4-3):-
أثبت وجود تكامل$f(x)$ بالنسبة لـ $g(x)$ علي الفترة $[-1,+1]$ حيث $g(x)$ دالة ستلتجس للدالة
ومتصلة في النقطةx_0 $[-1,+1]$متزايدة علي

ثم أحسب قيمته
الحل

$\int$

بوضع$x = g^{-1}(v) \quad , \quad g(x) = v$

مثال(3-4-4):-

إذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة علي الفترة $[a,b]$ و $g(x)$ ذات تغير محدود علي فأثبت أن الدالة

ذات تغير محدود ومتصلة في كل نقطة إتصال للدالة $g(x)$

الحل

من الملاحظة رقم (3) نجد أن

$|F(x_0 +$

بما أن

$$\sum_{k=1}^{n} |f(x$$

نجد أن الدالة $F(x)$ متصلة وبالتالي تكون متصلة في كل نقطة إتصال للدالة $g(x)$.

مثال(3-4-5):-

لتكن $g(x)$ ذات تغير محدود علي الفترة $[a,b]$ ولنفرض أن $g(x)$ مطابقة للصفر علي تلك الفترة

بإستثناء عدد منتهي أو قابل للعد من نقط $[a,b]$ عندئذ يكون

وذلك مهما تكن الدالة المتصلة $f(x)$ وتوجد نقطة $x_0 \in [a,b]$ متزايدة

(S)

حسب نظرية التكامل بالتجزئة نكتب

$(S)\int_a^b f($

مطابقة للصفر نحصل علي $g(x)$ وبأخذ

المصادر و المراجع :

1. التحليـل 5 للـدكتور محـي الـدين بحبـوح و الـدكتور جمـال يوسـف مللـي ، منشورات جامعة دمشق 1995م .
2. الرياضيات العالمية ، الجزء الخـامس ، (القسم الأول) للأستاذ ف.ي سميرنوف سلسلة الكتب العلمية 4 ، وزارة التعليم العالي ، 1973م .
3. Theorie der Funktionen einer reellen veranderlichen , I.P Natanson (Berlin 1969)
4. Theorem of Real Function E.P Natanson MOSCOW .
5. Short Course Theorem of Real Function B.Z VOLEAKH MOSCOW .
6. Broblems and Theorem J.C ATCHAN MOSCOW .