كلية العلوم

قسم الرياضيات

بحث تخرج لنيل درجة البكالريوس بعنوان :

الأنظمة الخطية للمعادلات التفاضلية

إعداد الطلاب:

حمزة بشير عوض الباري يوسف

مؤيد دفع الله عثمان احمد

محمد الحاج علي فضل الله

اشراف :

د.محمد حسن محمد خبير

اغسطس 2014

بسم الله الرحمن الرحيم

الأية

﴿ قُلِ اعْمَلُوا فَسَيَرَى اللَّهُ عَمَلَكُمْ وَرَسُولُهُ وَالْمُؤْمِنُونَ ﴾ [التوبة: 105]

إهداء

إلى من جرع الكأس فارغاً ليسقيني قطرة حب

إلى من كلّت أنامله ليقدم لنا لحظة سعادة

إلى من حصد الأشواك عن دربي ليمهد لي طريق العلم

إلى القلب الكبير

إلى رمز الرجولة والتضحية

إلى من دفعني إلى العلم و به ازداد افتخار (والدي العزيز)

إلى من أرضعتني الحب والحنان

إلى من يسعد قلبي بلقياها
إلى روضة الحب التي تنبت أزكى الأزهار
إلى رمز الحب وبلسم الشفاء
إلى القلب الناصع بالبياض (والدتي الحبيبة)

إلى القلوب الطاهرة الرقيقة والنفوس البريئة إلى رياحين حياتي (إخوتي)

الآن تفتح الأشرعة وترفع المرساة لتنطلق السفينة في عرض بحر واسع مظلم هو بحر الحياة وفي هذه الظلمة لا يضيء إلا قنديل الذكريات ذكريات الأخوة البعيدة إلى الذين أحببتهم وأحبوني (أصدقائي)

إلى هذه الصرح العلمي الفتي والجبار

جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا

كلمة شكر

لابد لنا ونحن نخطو خطواتنا الأخيرة في الحياة الجامعية من وقفة نعود إلى أعوام قضيناها في رحاب الجامعة مع أساتذتنا الكرام الذين قدموا لنا الكثير باذلين بذلك جهودا كبيرة في بناء جيل الغد لتبعث الأمة من جديد...
وقبل أن نمضي تقدم أسمى آيات الشكر والامتنان والتقدير والمحبة إلى الذين حملوا أقدس رسالة في الحياة...
إلى الذين مهدوا لنا طريق العلم والمعرفة...
إلى جميع أساتذتنا الأفاضل.......

"كن عالما .. فإن لم تستطع فكن متعلما ، فإن لم تستطع فأحب العلماء ،فإن لم تستطع فلا تبغضهم "

وأخص بالتقدير والشكر

الدكتور محمد حسن محمد خبير

الذي نقول له بشراك قول رسول الله صلى الله عليه وسلم:
"إن الحوت في البحر ، والطير في السماء ، ليصلون على معلم الناس الخير "

وكذلك نشكر كل من ساعد على إتمام هذا **البحث** وقدم لنا العون ومد لنا يد المساعدة وزودنا بالمعلومات اللازمة لإتمام هذا **البحث** .
الذين كانوا عونا لنا في بحثنا هذا ونورا يضيء الظلمة التي كانت تقف أحيانا في طريقنا.
إلى من زرعوا التفاؤل في دربنا وقدموا لنا المساعدات والتسهيلات والأفكار والمعلومات، ربما دون يشعروا بدورهم بذلك فلهم منا كل الشكر

خلاص البحث

- في الفصل الاول تناولنا الانظمة من الدرجة الاولي وتطبيقات وعرفنا تحويل نظام الرتب العليا الي نظام يعادل المعادلات من الدرجة الاولي . وعرفنا النظام المتجانس ، وتحدثنا عن نظرية الوجود والتعدد للانظمة الخطية كما تحدثنا عن الجاذبية وقوانين كبلر لحركة الكواكب وطرق حسابها، وعرفنا طريقة الحذف وايضا المؤثرات التفاضلية لكثيرة الحدود . واخيرا تطرقنا الي الاهتزازات الميكانيكية .
- في الفصل الثاني تناولنا المصفوفات والانظمة الخطية ومقدمة للمصفوفات وطرق جمع وضرب وايجاد المعكوس لها ، وكذلك معرفة ابعادها ، كما

تحدثنا عن المحددات وطرق حسابها ، وايضا الي دوال القيم الذاتية او دالة المصفوفة ومعرفة مبدأ التركيب ، وكذلك الاستقلال والحل العام وحلول رونسكايان . كما عرفنا الحلول المتجانسة والغير مجانسة .

- في الفصل الثالث تناولنا طريقة القيم الذاتية للانظمة الخطية المتجانسة وفيه عرفنا القيم الذاتية λ ومعرفة الحقيقية منها والمركبة ، وايضا تطرقنا الي التحليل الجزئي ومنه معرفة ايجاد كمية الملح كمثال الصهاريج الثلاثة .
- في الباب الرابع تناولنا الانظمة الخطية والمصفوفات الاسية وفيه عرفنا ايجاد حلول المصفوفة الاساسية $\boldsymbol{\phi}$ وكذلك حل المصفوفة الاسية ومنه عرفنا طريقم ايجاد المصفوفة بالمؤثر $\boldsymbol{e^A}$. كما عرفنا بعض النظريات المهمة كنظرية المتجه الذاتي العامة .

الفهرست

الباب الاول

نظم من الدرجة الاولي وتطبيقاتها

بسم الله الرحمن الرحيم

نظم من الدرجة الأولي وتطبيقاتها

(1-1) مقدمة:

العديد من التطبيقات تتطلب استخدام المتغيرات التابعة اثنين أو أكثر ، كل دالة فيها متغير مستقل وحيد (في المعتاد) . بطبيعة الحال هذه المسألة تؤدي إلي نظام المعادلات التفاضلية العادية سوف نقوم عادة للدلالة علي المتغير المستقل بالحرف t وللمتغيرات التابعة (الدوال غير المعرفة في t) بالحروف .... , x_1, x_2, x_3 أو ....x,y,z, علامة الشرطة سوف تشير أو تدل علي المشتقات بدلاله المتغير t .

سوف نحصر انتباهنا الي نظم فيه عدد من المعادلات هو نفس عدد المتغيرات التابعة (علي سبيل المثال) نظام من معادلتين من الدرجة الأولي من المتغير المستقل x وy علي الشكل العام

$$f(t,x,y,x',y')=0$$

$$g(t,x,y,x',y')=0 \qquad (1-1)$$

حيث الدوال g,f معطي . حل هذا النظام هو زوج من دوال t التي تحقق كل المعادلات بصوره مماثله علي قيم الفترة في t علي سبيل المثال نظام المعادلات من الدرجة الثانية , الجسيم زو الكتلة m التي تتحرك تحت تأثير القوة f والتي تعتمد علي الزمن يصنع (t) , x(t) z(t) , من الجسيمات وسرعتها(x'(t) , y'(t) , z'(t . وتطبيق قانون نيوتن $F=m\,a$, نحصل علي النظام

$$mx''=f_1(t,x,y,z,x',y',z')$$

$$my''=f_2(t,x,y,z,x',y',z') \qquad (2-1)$$

$$mz''=f_3(t,x,y,z,x',y',z')$$

مثال: نظام من ثلاثة لنعتبر هذا النظام من اثنين من الكتل واثنين من الزنبرك مع اعطاء قوة خارجية f(t) علي كتلة الطرف الايمن m_2 نعرف x(t) بالإزاحة من الكتلة m_1 عندما يكون في حاله التوازن f(t)=0 ,y(t) الكتلة m_2 من موقعها الثابت . فإن الزنبرك يكون غير ممتد

ومنكمش لذلك yوx تساوي صفر في التكوين يمتد F بامتداد x والزنبرك الثاني بمقدار y-x وبتطبيق قانون نيوتن للحركة للجسمين في الشكل وبالتالي نحصل علي النظام

$M_1x''=-k_1x+k_2(y-x)$ (3-1)

$M_2y^2=-k_2(y-x)+f(t)0$

من المعادلات التفاضلية التي دوال الموضع $x(t), y(t)$

نفرض أن $m_1=2$, $m_2=1$,$k_1=4$, $k_2=2$

$F(t)=40\sin(3t)$

من وحدان فيزيائية صحيحة وبالتالي فان المعادلة(3-1) يمكن أن تختزل في الصيغة

$$2x'' = -6x + 2y \qquad (4-1)$$

$$y'' = 2x - 2y + 40\sin 3t$$

مثال:

اعتبر وعاءين منفصلين من بعضهما البعض يحتويين علي محلول ملحي الوعاء الاول يحتوي x(t) رطل من الملح في 100جالون من المحلول الملحي والوعاء الثاني يحتوي علي y(t) رطل من الملح ي 200جالون من المحلول الملحي .

المحاليل في كل وعاء محفوظة بنفس الطريقة وضع المحلول من كل وعاء للاخر بمعدلات موضحه في الرسم ، الوعاء الاول اضيفت له 20جالون في الدقيقة من الماء والوعاء الثاني المحلول الملحي يخرج 20جالون في الدقيقة (أي ان الحجم الكلي للمحلول في الوعاءين يظل ثابت)

تركيز الملح في الوعاءين $\frac{x}{100}$ و $\frac{y}{200}$

عندما نحسب معدلات التغيير في كميه الملح في الوعاءين نحصل علي نظام معادلات تفاضلية تحقق x(t) ,y(t)

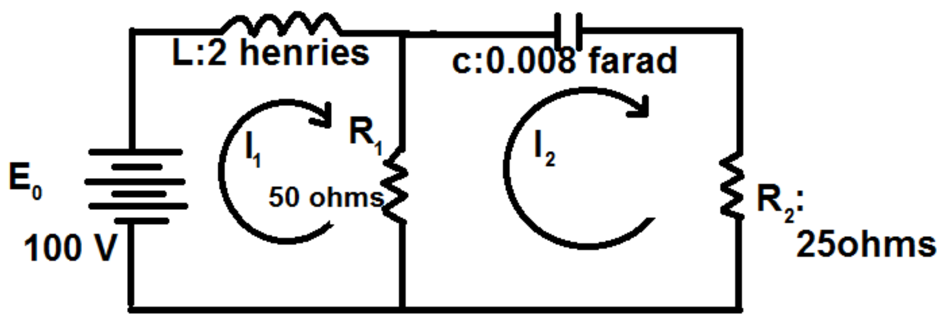
$x'=-30\frac{x}{100}+10\frac{y}{200}=-3\frac{x}{10}+\frac{1}{20}y$,

وبالتالي $y'=30\frac{x}{100}-10\frac{y}{200}-20\frac{y}{200}=\frac{3}{10}x-\frac{3}{20}y$

$$20x' = -6x + y \qquad (5-1)$$

$$20y' = 6x - 3y$$

مثال(3):



اعتبر الدائرة الكهربية الموضحة في الشكل اعلاه وفيها $I(t)$ ترمز الي التيار في الاتجاه المستحث عبرالملف (L) و$I_2(t)$ ترمز للتيار عبر المقاومة R_2 والتيار عبر المقاومة R_1 هو $I=I_1-I_2$ في اتجاه الموضع .باسترجاع قانون كرينشوف للفولتية الذي ينص علي ان المجموع الجبري للفولتيه حول أي عقده مغلقه للدائره الكهربية يساوي صفر .كما ان الفولتيه عبر الانواع الثلاثة من العناصر في الدائرة كما في الشكل أعلاه وبتطبيق قانون كرينشوف للعقدة من الشمال لليمين في الدائره لحساب

$$2\frac{dI_1}{dt} + 50(I_1 + I_2) - 100 = 0 \qquad (6\text{-}1)$$

ولان الفولتيه حول كل عقدة من القطب السالب للموجب في البطارية يساوي 100- فان العقده في الجانب الايمن تنتج المعادلة

$$125Q_2 + 25I_2 + 50(I_1 + I_2) = 0 \qquad (7\text{-}1)$$

بحيث $Q_2(t)$ هي الشحنة في المكثف ولأن $\frac{dQ_2}{dt}=I_2$

وبتفاضل طرفي المعادلة (7-1) حصل علي :

$$125I_2 + 75\frac{dI_2}{dt} - 50\frac{dI_1}{dt} = 0 \qquad (8\text{-}1)$$

بعد قسمه المعادلة (1-6) و(1-8) علي 2 و 25- علي التوالي نحصل علي نظام المعادلات التفاضلية

$$\frac{dI_1}{dt} + 25I_1 - 25I_2 = 50 \qquad (9\text{-}1)$$

$$\frac{dI_1}{dt} - 3\frac{dI_2}{dt} - 5I_2 = 0$$

حيث التيار $I_1(t)$ و $I_2(t)$ يجب ان يتحقق .

الأنظمة من الدرجة الاولي :

يعتبر نظام المعادلات التفاضلية والتي يمكن حلها للمشتقات ذات الرتب العليا في متغيرات تكون في دوال في (t) وكذلك المشتقات ذات ترتيب اقل للمتغير التابع .

علي سبيل المثال في حاله وجود نظام معادلتين من الدرجة الثانية , افترضنا انه مكتوب علي الصيغة

$$x_1'' = f_1(t, x_1, x_2, x_1', x_2') \qquad (10\text{-}1)$$

$$x_2'' = f_2(t, x_1, x_2, x_1', x_2')$$

من الناحيتين العملية والنظرية من أعلاه يكمن معرفه أن أي نظام من الرتبة العليا يمكن أن يتحول الي نظام يعادل المعادلات من الدرجة الاولي .

لوصف كيف يمكن التحول نعتبر أولا أن النظام يتكون من معادلات من الدرجة النونية

$$x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots, x^{(n-1)}) \qquad (11\text{-}1)$$

ونقدم المتغيرات المستقلة $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ المعرفة كما في الصوره

$$x_1 = x,\ x_2 = x',\ x_3 = x'',\ \ldots,\ x_n = x^{(n-1)} \qquad (12\text{-}1)$$

بملاحظة أن :

$x_1' = x' = x_2,\ x_2' = x'' = x_3$, وهكذا

وبالتالي يمكن تعويض (12-1) في المعادلة (11-1) تعطي نظام من n معادله من الرتبة الاولي.

$x_1'=x_2$

$x_2'=x_3$ ......

$x_{n-1}'=x_n$ (13-1)

$x_n'=f(t,x_1,x_2,....,x_n)$

من الواضح أن هذا النظام يعادل الأصلي من الدرجة النونية في (11-1) بمعني أن $x(t)$ هي حل المعادلة (11-1) اذا وفقط اذا كانت الدوال $x_1(t), x_2(t), ..., x_n$ المعرفه في (12-1) تحقق المعادلات في (13-1) .

مثال (4):

المعادلة من الرتبة الثالثة

$X^{(3)}+3x''+2x'-5x=\sin(2t)$

علي الصيغة في المعادلة (11-1)

$f(t,x,x',x'')=5x-2x'-3x''+\sin(2t)$

وبالتالي استبدال $x_1' = x' = x_2 , x_2' = x'' = x_3$ وهكذا ,

تحقق نظام من ثلاثة معادلات من الرتبة الاولي .

$x_1'=x_2$

$x_2'=x_3$

$x_3'=5x_1-2x_2-3x_3+\sin(2t)$

قد يبدو أن نظام الدرجة الاولي التي تم الحصول عليها في المثال(4) يقدم مزايا قليله .ولكن لنفرض أن المعادلة غير خطية ليست علي أي من الاساليب السابقة التي يمكن تطبيقها لدينا $x''=x^3+(x')^3$ نظام المقابلة من الدرجة الاولي هو

$x_1'=x_2$

$x_2'=(x_1)^3+(x_2)^3$ (14-1)

سنري في فصل آخر أن هنالك تقنيات عددية فعالة تمثل حل اساس الي نظام من الدرجة الاولي مفيد . من وجهه نظر عمليه أنظمه كبيره من المعادلات التفاضلية ذات الرتب العليا عاده يتم حلها عدديا من جهاز الكمبيوتر والخطوة الاولي هي تحويل هذا النظام الي نظام من الدرجة الاولي علي الوضع المتاح لبرنامج الحاسوب .

مثال(5):

نظام المعادلات من الرتبة الثانية تم اشتقاقه من المثال(1)

$2x''=-6x+2y$

$y''=2x-2y+40\sin(3t)$

حول هذا النظام الي ما يعادله من نظام الدرجة الاولي

-: الحل :-

باستخدام المعادلات في (12) , نعرف

$x_1' = x' = x_2$, $x_1=x$, $y_1=y$, $y_1' = y' = y_2$

ومن ثم في النظام (4) تعطي نظام من أربعة معادلات من الرتبة الاولي ي المتغيرات التابعة x_1,x_2,y_1,y_2 .

$x_1' = x_2$, $x_2' = -x_1+2y_1$ (15-1)

$y_1' = x_2$, $y_2' = 2x_1-2y_1+40\sin(3t)$

<u>الأنظمة ذات البعدين البسيطة:-</u>

المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية (ذات المعاملات والمتغير المستقل t)

$$x'' + px' + qx = 0 \qquad (16-1)$$

يحول عن طريق تعويض x'=y , x''=y' في النظام الخطي ثنائي الابعاد

$$x'=y \quad , \quad y'=-qx-py \qquad (17-1)$$

علي العكس لا يمكننا حل هذا النظام في (17-1) عن طريق حل معادلة واحدة مألوفة في (16-1).

مثال(6) :

لحل نظام ثنائي الابعاد

$$x'=-2y \qquad (18-1)$$

$$y'=\frac{1}{2}x$$

نبدأ ب

بأخذ $A=C\cos(\alpha)$ and $B=C\sin(\alpha)$ اذا

$$Y(t)=\frac{1}{2}x'(t)=-\frac{1}{2}(-A\sin(t)+B\cos(t))$$

$$=\frac{1}{2}C\sin(t-\alpha) .$$

المطابقة $\sin^2(x)+\cos^2(x)=1$

وبالتالي يقتضي أن لكل قيمه (t) , النقطة (x(t),y(t)) تقع علي القطع الناقص

$$\frac{x^2}{c^2}+\frac{y^2}{(\frac{c}{2})^2}=1$$

مع شبه المحاور c , c/2 ،الشكل يبين بعض الحزف علي المحور xy–

الحل (x(t),y(t)) نظام ثنائي الابعاد

$x'=f(t,x,y)$

$y'=g(t,x,y)$

يمكن اعتبار البارمترات من منحني حل أو مسار النظام علي محور xy– وبالتالي مسارات النظام في (18) هي الحذف من الشكل , اختبار نقطه ابتدائية $(x(0),y(0))$ يحدد أي من المسارات البارمترية يمثل حل .

الشكل يظهر مسارات النظام في المستوي xy– يسمي المستوي مرحله لنكشف علي درجه الدقة كيف أن النقطة $(x(t),y(t))$ تتحرك علي طول مساره .اذا كانت الدوال f,g لا تتضمن المتغير المستقل (t) ومن ثم فان الاسهم تمثل اتجاه الحقل وكذلك تمثل متجهات مع عناصر تتناسب مع المشتقات

$y'=g(x,y)$, $x'=f(x,y)$ ويمكن رسمه لان النقطة المتحركة $(x(t),y(t))$ لديها متجه السرعة $(x'(t),y'(t))$ نعتبر اتجاه هذا الحقل الي اتجاه نقطه للحركة علي طول مساره . علي سبيل المثال , رسم مجال اتجاه في الشكل يشير أن كل النقاط تتحرك عكس عقارب الساعة حول مسار بيضاوي الشكل ، يمكن أن تظهر معلومات إضافية في رسوم بيانيه منفصلة من $x(t)$ و $y(t)$ من دوال في t .

من الشروط الابتدائية $y(0)=0$, $x(0)=2$ يكون الحل العام للمثال (6)

$X(0)=A=2 \quad ,y(0)=-\frac{1}{2}B=0$

يتم اعطاء حل معين الناتج من

$X(t)=2\cos(t) \quad , y(t)=\sin(t)$

تظهر الرسوم البيانية من دالتين في الشكل ونري $x(t)$ ابتدائية في حين $y(t)$ تزايدية . يترتب علي ذلك كلما نزيد t نقطه الحل $(x(t),y(t))$ يقطع مسار $\frac{1}{4}x^2+y^2=1$ في اتجاه عكس عقارب الساعة كما يتضح من متجهات في مجال الاتجاه في الشكل .

مثال(7):

لايجاد الحل العام للنظام

$x'=y$

$y'=2x+y$ (19-1)

نبدأ مع ملاحظة ان

$x''=y'=2x+y=x'+2x$

هذا يعطي المعادلة من الدرجة الثانية

$x''-x'-2x=0$

مع المعادلة المميزة

$r^2-r-2=(r+1)(r-2)=0$

والحل العام

$X(t)=x'(t)=-Ae^{-t}+Be^{2t}$ (20-1)

فان $y(t)=x'(t)=-Ae^{-t}+2Be^{2t}$ (21-1)

مسارات مستوي المرحلة النموذجية رسم للنظام (19) بارمتر بواسطة المعادلات (20-1) و(21-1) وتظهر في الشكل (5.1.8) هذه المسارات قد تشبه القطوع الزائدة وتشترك في الخطوط المتقاربة المشتركة ولكن المعادلة (23-1) تظهر اكثر تعقيدا .

مثال 8:

حل مسألة القيم الابتدائية

$x'=-y$,

$y'=(1.01)x-(0.2)y$ (22-1)

$x(0)=0$, $y(0)=-1$

نبدأ مع الملاحظة أن

$x''=-y' = -[(1.01) x-(1.01)y]=(-1.01)x-(0.2)x'$

وهذا يعطي معادله خطيه واحده من الدرجة الثانية

x''+(0.2)x'+(1.01)x=0

مع معادله مميزه

$$r^2 + (0.2)r + 1.01 = (r + 0.1)^2 + 1 = 0$$

مع الجذور المميزه i±0.1- والحل العام

$$x(t) = e^{-\frac{t}{10}}\left(A\cos(t) + B\sin(t)\right)$$

X(t)=A=0 فان

ولذلك $x(t) = Be^{-\frac{t}{10}}\sin(t)$

$$y(t) = -x'(t) = \frac{1}{10}Be^{-\frac{t}{10}}\sin(t) - Be^{-\frac{t}{10}}\cos(t)$$

واخيرا y(0)=-B -1

وبالتالي فان الحل المطلوب للنظام في (1-22) هو

$$x(t) = e^{-t/10}\sin(t) \qquad (23-1)$$

$$y(t) = \frac{1}{10}e^{-\frac{t}{10}}(\sin(t) - 10\cos(t))$$

هذه المعادلات البارمترية في مسار حلزوني في الشكل المسار يقترب من نقطة الأصل عندما $t \to +\infty$ الشكل يوضح x , y التي تمثل الحل للمنحني المعطي في (1-23).

عندما ندرس المعادلات الخطية بواسطة نظرية القيم الذاتية سوف نتعلم بشكل سطحي نظام مشابهه للمثال (6و7و8) يوجد لديها مسارات مختلفة بشكل تظهر في الأشكال .

(2-1)الانظمة الخطية:

بالاضافة الي مزايا عمليه الحوسبة ,النظرية العامة للنظم التقنية حل التكنولوجيا اسهل واكثر وضوحا عند معادلات الرتبة الاولي اكثر من معادلات الرتب العليا , علي سبيل المثال, اعتبر النظام الخطي من الرتبة الاولي علي الصيغ

$$x_1' = p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + \cdots + p_{1n}x_n + f_1(t),$$

$$x_2' = p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 + \cdots + p_{2n}x_n + f_2(t), \qquad (24\text{-}1)$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$

$$x_n' = p_{n1}(t)x_1 + p_{n2}(t)x_2 + \cdots + p_{nn}x_n + f_{n(t)}$$

نقول هذا النظام متجانس اذا كانت الدوال $f_1, f_2, \dots, f_n$ كلها أصفار ,وبطريقة أ ُخري غير متجانسة .وبالتالي ان النظام الخطي في (5) غير متجانس في حين ان النظام الخطي في (15) غير متجانس . النظام في (14) غير خطي لان الجانب الأيمن من المعادلة ليست دالي خطي للمتغير يعتمد علي x_1 , x_2 .

حل النظام في (24) هو نوني مركب من الدوال $x_1(t),x_2(t),\dots,x_n(t)$ (علي بعض الفترات) تلي بصوره مماثله لكل من المعادلات في (24) سوف نري ان النظرية العامة للدرجة النونية وترتيب المعادلات التفاضلية الخطية من الدرجة الاولي لهما كثير من الشبه للنظرية العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة النونية .

نظرية (1) : <u>الوجود والتعدد للانظمة الخطية</u>

لنفرض أن الدوال $p_{11}, p_{12}, \dots, p_{nn}$ والدوال $f_1, f_2, \dots, f_n$ مستمرة علي الفترة المفتوحة I التي تحوي النقطة a . وايضا معطي الاعداد n

$b_1,b_2,\dots,b_n$ والنظام في (24) له حل وحيد علي كل الفترة I التي تحقق الشروط الابتدائية :

$$x_1(a)=b_1 \text{ , } x_2(a)=b_2 \text{ , } \dots \text{ , } x_n(a)=b_n \qquad (25\text{-}1)$$

الشروط الابتدائية الn الاولية المطلوبة لتحديد الحل لهذا النظام الذي به n معادله خطية من الرتبة الاولي وبالتالي فاننا نتوقع لهذا الحل العام لمثل هذا النظام لاحتوائه n ثابت ,علي سبيل المثال راينا في المثال (5) ان النظام الخطي من الرتبة الثانية

$2x''=-6x+2y$,

y"=2x-2y+40sin(3t) ,

الذي يصف وضع الدوال x(t) و y(t) في المثال (1) ما يعادل نظام من اربعة معادلات خطية من الرتبة الاولي في (15) وبالتالي سوف تكون هنالك اربعة شروط ابتدائية لتحديد حركة الكتلتين في المثال (1) . السرعات الابتدائية النموذجية x(0) و y(0) والسرعات الابتدائية x'(0) و y'(0) وجدنا ان الكميات x(t) ,y(t) من الملح في المثال (2) في وعائيين يوصف بنظام من معادلتين خطيتين من الرتبة الاولي

20x'=-6x+y ,

20y'=6x-3y ,

وبالتالي القيمتين الاوليتين x(t) ,y(t) تكون كافية لتحديد الحل تعطي الانظمة العليا , ونحن في كثير من الاحيان يكون نظام من الدرجة الاولي متعادل , لاكتشاف الشروط الابتدائية وهنالك حاجة لتحديد حل وحيد , النظرية(1) تخبرنا ان عدد هذه الشروط بالتحديد نفس عدد المعادلات في نظام من الرتبة الاولي المتعادلة .

(3-1) الجاذبية وقوانين كبلر لحركة الكواكب :

في مطلع القرن ال 17 استخلص كبلر ان حركة الكواكب حول الشمس والتي وصفها بالافتراضات الثلاثة الاتية وتعرف الان بقوانين كبلر.

1- المدار لاي كوكب عبارة عن قطع ناقص حيث تقع الشمس في احدي بؤرتيه.
2- متجه نصف القطر من الشمس الي كل كوكب تشكل مساحات بمعدل ثابت .
3- مربع الزمن الدوري للكوكب يتناسب مع مكعب نصف المحور الرئيسي لمدار بيضاوي الشكل .

في كتابته لمبادئ الرياضيات (1687م) استنتج اسحق نيوتن معكوس مربع قانون الجاذبية من قانون كبلر . ي هذا التطبيق يؤدي الي (في الاتجاه المعاكس) من خلال اشتقاق اول قانون لكبلر من قوانين نيوتن للجاذبية

افترض ان الشمس تقع في المركز في مستوي الحركة للكوكب وتكتب متجه الموضع للكوكب في الصيغة

$$r(t) = (x(t), y(t)) = x\, i + y\, j \qquad (1)$$

حيث $i=(0,1)$ و $j(1,0)$ يرمز لوحده المتجهات في الاتجاه الموجب ل x ,y ثم قانون ومعكوس مربع الجاذبية يعطي (مسألة 29) ان المتجه $r''(t)$ للكوكب يعطي بالمعادلة :

$$\boldsymbol{r}'' = \frac{-\mathrm{k}\mathbf{r}}{\mathrm{r}^3} \qquad (2)$$

حيث $r = \sqrt[2]{x^2 + y^2}$ هي المسافة من الشمس للكوكب . اذا كانت الاحداثيات القطبية للكوكب في اللحظة الزمنية t هي ($(r(t), \theta(t))$ فان متجهات الوحده لنصف القطر العرضي وتظهر في الشكل هي

$$u_r = i\cos\theta + j\ \sin\theta\ \text{ and } u_\theta = -i\ \sin\theta + \ j\cos\theta \quad (3)$$

متجهات الوحده لنصف القطر u_r (عندما وضع في موضع الكوكب) يشير دائما بشكل مباشر بعيدا عن المركز لذلك $u_r = \boldsymbol{r}/r$ ومتجه الوحده العرضية u_θ نحصل عليها من u_r بالدوران 90 درجه عكس عقارب الساعة .

الخطوة الاولي : تفاضل المعادلات (3) حدا حدا لاثبات ان:

$$\frac{du_r}{dr} = u_\theta \frac{d\theta}{dt}\ and\ \frac{du_\theta}{dt} = -u_r \frac{d\theta}{dt} \qquad (4)$$

الخطوة الثانية : باستخدام المعادلات (4) نفاضل متجه الموضع للكوكب $\boldsymbol{r} = ru_r$ وبالتالي يعطي متجه السرعة .

$$v = \frac{d\boldsymbol{r}}{dt} = u_r \frac{dr}{dt} + r\frac{d\theta}{dt}u_\theta \qquad (5)$$

الخطوة الثالثة: نفاضل مره اخري لاظهار ان تسارع متجه الكوكب $a = \frac{dv}{dt}$ تعطي

$$a = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]u_r + [\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right)]u_\theta \qquad (6)$$

الخطوة الرابعة : المكونات القطرية والمستعرضة علي الجانب الايمن في المعادلة (2) و(6) ينبغي ان تتوافق مع بعضها البعض بمساواة بين العناصر المستعرضة (وهذا هو معاملات u_θ) نحصل علي

$$\frac{1}{r}\frac{d}{dt}\left(r^2\frac{d\theta}{dt}\right) = 0 \qquad (7)$$

ويترتب علي ذلك

$$r^2\frac{d\theta}{dt}=h \qquad (8)$$

حيث h ثابت لان الاحداثيات القطبية لعنصر المساحة A(t) في الشكل تعطي من قبل $dA=\frac{1}{2}r^2d\theta$ المعادلة (8) يعطي ان المشتقة A'(t) ثابت هو بيان من قانون كبلر الثاني .

الخطوة الخامسة : بمساواة المكونات القطرية في (2) و(6) ثم باستخدام النتيجة في المعادلة (8) لاثبات ان داله الاحداثيات القطرية r(t) للكوكب تحقق المعادلة التفاضلية ذات الرتبة الثانية التالية:

$$\frac{d^2r}{dt^2}-\frac{h^2}{r^3}=-\frac{k}{r^2} \qquad (9)$$

الخطوة السادسة : بالرغم من ان المعادلة التفاضلية (9) غير خطية لكن يمكن تحويلها لمعادلة خطية باستخدام تعويضات بسيطة لهذا الفرض افترض ان المدار يمكن ان يكتب في الاحداثيات القطبية من المعادلة r=r(θ) اولا استخدام قاعدة السلسلة والمعادلة (8) لاثبات انه اذا كانت $r=\frac{1}{z}$ فان

$$\frac{dr}{dt}=-h\frac{dz}{d\theta}$$

فاضل مره اخري لاستنتاج من المعادلة (9) ان الدالة z(θ)=1/r(θ) تحقق المعادلة من الرتبة الثانية

$$\frac{d^2z}{d\theta^2}+z=\frac{k}{h^2} \qquad (10)$$

الخطوة السابعة : اثبت ان الحل العام للمعادلة (10) هو

$$z(\theta)A\sin\theta+B\cos\theta+\frac{k}{h^2} \qquad (11)$$

الخطوة الثامنة : اخيرا ، استنتج من المعادلة (11) ان r(θ)=1/z(θ) تعطي ب :

$$r(\theta)=\frac{L}{1+e\cos(\theta-\alpha)} \qquad (12)$$

حيث ان :. $e=Ch^2/k$, $C\cos\alpha=B$,$L=h^2/k$ والمدار الاهليجي في المعادلة (12) يمثل قطع مخروطي , واذا كان معامل الاختلاف $0 \leq e \leq 1$ يمثل قطع ناقص , واذا كان e=1, يمثل قطع مكافئ , ويمثل قطع ذائد اذا كان e>1 .

مع تمركز في نقطه الاصل .المدارات الكويكبية محدودة لذلك هي عبارة عن قطوع ناقصية (e<1) كما موضح في الشكل ,المحور الاساسي للقطع الناقص يقع علي طول الخط النصف قطري α=θ .

الخطوة التاسعة : ارسم بعض المدارات الاهليجية النموذجية كما موضح ب(12) مع اصطلاحات مركزية مختلفة واتجاهات مختلفة من الاحداثيات المتقاربة يمكن كتابته

$$x(t) = r(t)\cos t\,, y(t) = r(t)\sin t\,, 0 \leq t \leq 2\pi$$

لرسم مدار اهليجي مع اختلاف مركزي (e) خالي الشكل وبزاوية دوران α الاختلاف المركزي لمدار الارض هو $e \approx 0.0167$ مع الاقتراب من الصفر يظهر المدار دائري تقريبا (ومن ثم ان الشمس هي المركز) والاختلافات المركزية للمدارات للكويكبات الاخري في المدي من 0.0068 للزهرة و0.0933 للمريخ و0.2056 لعطارد و0.2486 لبلوتو ولكن عدد من المذنبات لها مدارات ذات اختلاف مركزي كبير مثل المذنب هالي مع $e \approx 0.97$.

(4-1) طريقه الحذف (الاقصاء) :

أكثر طريقه أوليه للمعادلات التفاضلية ذات الأنظمة الخطية تتضمن استبعاد المتغيرات التابعة عبر طريقة الجمع بين زوجين من المعادلات بصوره صحيحة ، الهدف من هذه الطريقة هو استبعاد المتغيرات التابعة في تتابع حتي تبقي معادلة منفردة تحتوي علي متغير تابع واحد غالبا معادلة خطية ذات رتبة عليا ويمكن ان تحل عن احد الطرق . ولكن ايجاد الحل للمتغيرات التابعة الاخري يمكن ايجادها تراجعيا باستخدام المعادلات التفاضلية الاصلية او التي ظهرت في عملية الحذف.

طريقة الحذف للمعادلات التفاضلية ذات الانظمة الخطية مشابهه لحل الانظمة الخطية للمعادلات الجبرية عن طريق عملية استبعاد المتغيرات غير المعلومة , أي ان حتي يتبقي متغير غير معلوم منفرد يعتبر أكثر ملائمة للانظمة البسيطة مهلة التحكم تلك التي لا تحتوي علي اكثر من اثنين أو ثلاثة معادلات تمثل هذه الانظمة طريقة الاستبعاد توفر تقارب بسيط

ومحدد يتطلب نظرية تمهيدية بسيطة أو آلية اساسية لكن للانظمة الاكبر للمعادلات التفاضلية - كما في النقاش النظري - طريقة المصفوفة للاجزاء التالية في هذا الفصل تعتبر (مفضلة) اكثر (الا يتم تفضيلها علي الطرق الاخري).

مثال (1) :

اوجد الحل الخاص للنظام

$$x' = 4x - 3y \quad , \quad y' = 6x - 7y \qquad (1)$$

التي تحقق الشروط الابتدائية $x(0)=2$, $y(0)=-1$

الحل

اذا قمنا بحل المعادلة الثانية في (1) لx, نحصل علي

$$x = \frac{1}{6}y' + \frac{7}{6}y \, , \qquad (2)$$

ولذلك

$$x' = \frac{1}{6}y'' + \frac{7}{6}y' \quad , \qquad (3)$$

ثم نعوض هذه المقادير ل x و x' في المعادلة الاولي للنظام في (1) هذا ينتج

$$\frac{1}{6}y'' + \frac{7}{6}y' = 4\left(\frac{1}{6}y' + \frac{7}{6}y\right) - 3y$$

والتي يمكن ان تبسط الي

$$y'' + 3y' - 10y = 0$$

هذه المعادلة الخطية من الرتبة الثانية لها معادلة مميزة

$$r^2 + 3r - 10 = (r-2)(r+5) = 0$$

وبالتالي الحل العام هو

$$y(t) = c_1 e^{2t} + c_2 \qquad (4)$$

ثانيا ، نعوض (4) في (2) لتعطي

$$x(t) = \frac{1}{6}(2c_1e^{2t} - 5c_2e^{-5t}) + \frac{7}{6}(c_1e^{2t} + c_2e^{-5t}) \text{ ,}$$ وهي

$$x(t) = \frac{3}{2}c_1e^{2t} + \frac{1}{3}c_2e^{-5t} \qquad (5)$$

وهذه المعادلة (4) و(5) يكونان الحل العام للنظام (1) الشرط الابتدائي المعطاة تقتضي ان

$$x(0) = \frac{3}{2}c_1 + \frac{1}{3}c_2 = 2 \quad ,$$ وهذا

$$y(0) = c_1 + c_2 = -1$$

وهذه المعادلات تمكن حلها بسهولة مختزلة ل $c_1=2$, $c_2=-3$ الحل المرغوب فيه هو

$$x(t) = 3e^{2t} - e^{-5t}\ ,\ y(t) = 2e^{2t} - 3e^{-5t}$$

الشكل يوضح هذا الحل وحلول منحنيات اخري نموذجية معلمات بالمعادلات

$$x(t) = \frac{3}{2}c_1e^{2t} + \frac{1}{3}c_2e^{-5t}\ \ ,\ \ y(t) = c_1e^{2t} + c_2e^{-5t}$$

لقيم مختلفة الثوابت الاحتياطية c_1 , c_2 نري عائلتين من المنحنيات القطوع الذائدية تنشأ في نفس زوج الثنائي المعرف .

ملاحظه :-

الحل العام المعرف بالمعادلة (4) و (5) يمكن ان يعتبر متجه (x(t) ,y(t)) وباسترجاع جميع المتجهات (او ضرب المتجهات في اعداد) ,يمكن كتابه الحل العام في (4) و (5) علي الصيغة :

$$(\ x(t), y(t)\ ) = \left(\frac{3}{2}c_1e^{2t} + \frac{1}{3}c_2e^{-5t}, c_1e^{2t} + c_2e^{-5t}\right)$$
$$= c_1\left(\frac{3}{2}e^{2t}, e^{2t}\right) + c_2\left(\frac{1}{3}e^{-5t}, e^{-5t}\right).$$

هذا التعبير يظهر الحل العام للنظام (1) كمزيج خطي من حلين خاصين

$$(x_1, y_1) = \left(\frac{3}{2}e^{2t}, e^{2t}\right) and\ (x_2, y_2) = \left(\frac{1}{3}e^{-5t}, e^{-5t}\right).$$

(5-1) المؤثرات التفاضلية لكثيرة الحدود :

في المثال (1) استخدمنا الطرق (ad hoc) لاستبعاد واحد من المتغيرات المستقلة عن طريق التعبير عنه كداله في الآخر . الان نصف طريقة استبعاد منظمة . رمز المؤثر اكثر ملائمة لهذه الاغراض . المؤثر التفاضلي لكثيرة الحدود هو احد الاشكال

$$L = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_1 D + a_0 , \qquad (6)$$

حيث D ترمز للتفاضل بالنسبة للمتغير المستقل t .

اذا كانت L_1 , L_2 مؤثرين ، فان حاصل ضربهما يعرف بالطريقة

$$L_1L_2[x]=L_1[L_2x] \qquad (7)$$

مثلا: اذا كان $L_1=D+a$, $L_2=D+b$ فان

$$L_1L_2[x]=(D+a)[(D+b)x] = D(Dx+bx)+a(Dx+bx)$$

$$=[D^2+(a+b)D+ab]x .$$

هذا يوضح حقيقة ان مؤثرين تفاضليين كثيري حدود مع معاملات ثابتة يمكن ان نضرب اذا كانا كثيرا حدود عادية في المتغير D . لان ضرب كثيرات الحدود تلك تبادلي . ينتج

$$L_1L_2[x]=L_2L_1[x] \qquad (8)$$

اذا وجدت المشتقات الضرورية ل x(t) . بالتباين هذه الخاصية التبادلية عموما تفشل في المؤثرات كثيرات الحدود التي لها معاملات متغيرة .

أي نظام لمعادلتين تفاضليتين خطيتين ذات معاملات ثابتة يمكن ان تكتب هكذا:

$$L_1x + L_2y = f_1(t),$$

$$L_3x + L_4y = f_2(t),$$

حيث L_1, L_2, L_3, L_4 مؤثرات تفاضلية كثيرة حدود (ربما لها رتب مختلفة) كما في المعادلة (6) . و $f_1(t), f_2(t)$ دوال معطاة . مثلا النظام (1) (مثال (1)) يمكن ان يكتب علي الصورة :

$$(D-4)x+3y=0 \qquad (10),$$

$$-6x+(D+7)y=0$$

وله $L_1=D-4$, $L_2=3$, $L_3=-6$, $L_4=D+7$

لاستبعاد المتغير التابع x من النظام في (9) ، نؤثر ب L_3 علي المعادلة الاولي وب L_1 علي المعادلة الثانية . هكذا نحسب النظام :

$$L_3L_1x+L_3L_2y=L_3f_1(t) \qquad (11)$$

$$L_1L_3x+L_1L_4y=L_1f_2(t)$$

بطرح الاولي من الثانية لهذه المعادلات ينتج لنا المعادلة المنفردة في المتغير التابع المنفرد y .

$$(L_1L_4-L_2L_3)y=L_1f_2(t)-L_3f_1(t) \qquad (12)$$

بعد الحل ل $y=y(t)$ يمكن ان تعوض النتيجة في كلتا المعادلتين الاصليتين في (9) ثم حل $x=x(t)$.

بدلا عن ذلك . يمكن استبعاد ي طريقة مشابهه المتغير التابع y من النظام الاصلي في (9) . اذا قمنا بذلك سوف نحصل علي المعادلة

$$(L_1L_4-L_2L_3)x=L_4f_1(t)-L_2f_2(t) \qquad (13)$$

والتي يمكن ان نحل الان ل $x=x(t)$ لاحظ ان نفس المؤثر $L_1L_4-L_2L_3$ يظهر الطرف الايسر في كلتا المعادلتين (12) و(13) هذه هي المحددة للنظام (9) .

$$\begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} = L_1L_4-L_2L_3 \qquad (14)$$

في طريقة المحددة المعادلات (12) و(13) يمكن كتابتها علي الشكل

$$\begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} f_1(t) & L_2 \\ f_2(t) & L_4 \end{vmatrix}, \qquad (15)$$

$$\begin{vmatrix} L_1 & L_2 \\ L_3 & L_4 \end{vmatrix} y = \begin{vmatrix} L_1 & f_1(t) \\ L_3 & f_2(t) \end{vmatrix}$$

من المهم ملاحظه ان المحددات علي الطرف الايمن في المعادلة (15) عوضت بمعني المؤثرات التي تؤثر علي الدوال . المعادلات (15) تذكر بقاعدة كرامر لحل معادلتين خطيتين في متغيرين (جبريين) ولذلك سهله التذكر.

في الحقيقة يمكن ان تحل نظام من معادلتين تفاضليتين خطيتين عن طريق عملية استبعاد منتظم موصوفة هنا او عن طريق استخدام المحددة مباشرة في (15) .اي عملية تكون سهله خاصة اذا كان النظام متماثل $(f_1(t) = 0 , f_2(t) = 0)$ لان في هذه الحالة الطرف الايمن من المعادلة في (12) و (13) و (15)يساوي صفراً .

مثال (2) :-

اوجد الحل العام للنظام

$$(D-4)x + 3y = 0 , \qquad (10)$$

$$-6x + (D+7)y = 0$$

الحل

المحددة العملية لهذا النظام هي

$$(D-4)(D+7) - 3.(-6) = D^2 + 3D - 10 \qquad (16)$$

بما ان المعادلات (13) و (12) هي

$$x'' + 3x' - 10x = 0 ,$$

$$y'' + 3y' - 10y = 0 .$$

المعادلة المميزة لاي منهما هي

$$r^2 + 3r - 10 = (r-2)(r+5) = 0$$

لذلك الحل العام لها هو

$$x(t) = a_1 e^{2t} + a_2 e^{-5t}\,, \qquad (17)$$

$$y(t) = b_1 e^{2t} + b_2 e^{-5t}$$

عند هذه النقطة يظهر ان لدينا اربعة ثوابت اختيارية هي a_1,a_2,b_1,b_2 لكن يتضح من النظرية ان الحل العام للنظام من معادلتين من الرتبة الاولي يحتوي فقط علي ثابتين اختياريين هذا واضح يتطلب اعادة حل .

التفسير بسيط يجب ان تكون هنالك علاقة مخفية عبر الثوابت الاربعة يمكننا اكتشافها بتعويض الحلول في (17) في المعادلة الاصلية (10) بالتعويض في المعادلة الاولي نحصل علي

$$0 = x' - 4x + 3y$$

$$= (2a_1 e^{2t} - 5a_2 e^{-5t}) - 4(a_1 e^{2t} + a_2 e^{-5t}) + 3(b_1 e^{2t} + b_2 e^{-5t})$$

وهذه هي $0 = (-2a_1 + 3b_1)e^{2t} + (-9a_2 + 3b_2)e^{-5t}.$

ولكن e^{-5t}, e^{2t} دوال مستقلة خطيا لذلك يتضح ان

$$a_1 = \frac{3}{2} b_1 \,, a_2 = \frac{1}{3} b_2$$

لذلك الحل المطلوب يعطي ب

$$x(t) = \frac{3}{2} b_1 e^{2t} + \frac{1}{3} b_2 e^{-5t}\,,\ y(t) = b_1 e^{2t} + b_2 e^{-5t}$$

لاحظ ان النتيجة متطابقة مع الحل العام (للمعادلات) (4) و(5) التي حسبت بطريقة مختلفة في المثال (1) كما موضح بالمثال (2) طريقة الاستبعاد ونستخدم كثيرا لحل الانظمة الخطية سوف نعرف عدد منا الثوابت المترابطة التي يمكن ان تظهر اعتباطيا . لكن في الواقع ليست مستقلة .الثوابت (الاضافية) يجب ان تستمر لاحقا بتعويض الحلول العامة في واحده او اكثر

من المعادلات التفاضلية الاصلية . العدد الصحيح للثوابت الاختيارية المستقلة في الحل العام للنظام (9) يكون مساو لدرجة المحددة ككثيرة حدود في D .

اذا كان الحل العام للنظام (10) في المثال (2) يتضمن ثابتين اختياريين لاي محددة العملية $D^2+3D-10$ من الرتبة الثانية .

اذا كانت المحددة العملية مماثلة للصفر فان النظام يقال عنه انه متدهور ، ربما لا يكون له حل اوله عدد لا نهائي من الحلول المستقلة مثلا المعادلات

$$Dx-Dy=0$$

$$2Dx-2Dy=1$$

لها محدده تساوي صفر من الواضح انها غير متناسقين ولذلك ليس لها حل من ناحية اخري المعادلات

$$Dx-Dy=t\ ,$$

$$2Dx-2Dy=2t$$

لها محدودة تساوي الصفر من الواضح انها يمكن ان تعرف أي دوال قابلة للتفاضل باستمرار ل x(t) ثم تكامل لايجاد y(t) . تقريبا يمكننا القول بان أي نظام غير متناسق بالرغم من ان الطرق والنتائج التي ذكرت سابقا وضعت لحالة نظام مكون من معادلتين يمكننا ان نعمم بسهولة لانظمة من ثلاث معادلات أو أكثر للنظام

$$L_{11}x+L_{12}y+L_{13}z=f_1(t)$$

$$L_{21}x+L_{22}y+L_{23}z=f_2(t) \qquad (18)$$

$$L_{31}x+L_{32}y+L_{33}z=f_3(t)$$

المكون من ثلاثة معادلات خطية المتغير التابع x(t) يحقق المعادلة المنفردة خطيا

$$\begin{vmatrix} L_{11} & L_{12} & L_{13} \\ L_{21} & L_{22} & L_{23} \\ L_{31} & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix} x = \begin{vmatrix} f_1 & L_{12} & L_{13} \\ f_2 & L_{22} & L_{23} \\ f_3 & L_{32} & L_{33} \end{vmatrix}$$

مع معادلات متشابهه ل y=y(t) , z=z(t) لمعظم الانظمة التي تتكون من اكثر من ثلاث معادلات مع ذلك طريقة المحددات العملية تعتبر مرهقة ومعقدة الحسابات .

الاهتزازات الميكانيكية:

النظام الميكانيكي عادة يهتز دوريا في طريق محدد واحد او أكثر ,النظرية ي هذا الفصل تطبق لتحليل الاوضاع الطبيعية للاهتزاز لنظام معطي .مثال (3) يوضح هذا التقريب.

- **مثال (3) :**

في مثال (1) في هذا الفصل ، تم اشتقاق المعادلات

$$(D^2+3)x+(-1)y=0 \qquad (20)$$

$$-2x+(D^2+2)y=0$$

لازاحة كتلتين في الشكل السابق . اذا $f(t)\equiv 0$ لاننا فرضنا انه لا توجد قوة خارجية .
اوجد الحل العام في النظام في (20)

الحل

لعمل المحددات للنظام في (20) هو

$$(D^2 3+)(D^2+2)-(-1)(-2)=D^4+5D^2+4=(D^2+1)(D^2+4)$$

ومنه المعادلات ل$x(t),y(t)$ هي

$$(D^2+1)(D^2+4)x=0 \qquad (21)$$

$$(D^2+1)(D^2+4)y=0$$

المعادلة المميزة $(r^2+1)(r^2+4)=0$ لها الجذور $i\,,-i\,,2i\ and-2i$ ، اذاً الحلول العامة للمعادلات في (21) هي

$$x(t)=a_1\cos t+a_2\sin t+b_1\cos 2t+b_2\sin 2t \qquad (22)$$

$$y(t)=c_1\cos t+c_2\sin t+d_1\cos 2t+d_2\sin 2t$$

لان عمل المحددات من الرتبة (4) ، الحل العام يجب ان يحتوي اربعة (بدلا من ثمانية) ثوابت اختيارية . عندما نعوض $x(t),y(t)$ من (22) في المعادلة الاولي في (20) نحصل علي

$$0=x''+3x-y$$

$$\begin{aligned}=(-a_1\cos t-a_2\sin t-4b_1\cos 2t-4b_2\sin 2t)\\ +3(\,a_1\cos t+a_2\sin t+b_1\cos 2t+b_2\sin 2t)-(c_1\sin t\\ +c_2\sin t+d_1\cos 2t+d_2\sin 2t\end{aligned}$$

وبالتالي

$$\begin{aligned}0=(2a_1-c_1)\cos t+(2a_2-c_2)\sin t+(-b_1-d_1)\cos 2t\\ +(-b_2-d_2)\sin 2t\end{aligned}$$

لان $\cos t\,,\sin t\,,\cos 2t\,,\sin 2t$ هي مستقلة خطيا ، ومنه نري انه توجد معاملات في المعادلة الاخيرة هي صفر . ومن ثم

$$c_1=2a_1\,,c_2=2a_2\,,d_1=-b_1\ and\ d_2=-b_2$$

ومن ثم

$$x(t)=a_1\cos t+a_2\sin t+b_1\cos 2t+b_2\sin 2t \qquad (23)$$

$$y(t)=2a_1\cos t+2a_2\sin t-b_1\cos 2t-b_2\sin 2t$$

وهذا يحقق الحل العام للنظام في (22).

فان عرض الحل العام للنظام (20) كتركيب خطي من اربعه حلول خاصة ، وعلاوه علي ذلك ، اول اثنين من هذه الحلول الخاصة تمثل شكل مشابه التذبذب للكتلات ، كما تفعل اخر اثنين .

في الواقع .نستطيع (بطريقة المتطابقة المثلثية المعتادة) كتابة

$$a_1 \cos t + a_2 \sin t = A \cos (t - \alpha)$$

$$2a_1 \cos t + 2a_2 \sin t = 2A \cos (t - \alpha)$$

و

$$b_1 \cos 2t + b_2 \sin 2t = B \cos(2t - \beta)$$

$$-b_1 \cos 2t - b_2 \sin 2t = -B \cos(2t - \beta)$$

بحيث $A = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, $\tan \alpha = \frac{a_2}{a_1}$, $B = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$, $and\ \beta = \frac{b_2}{b_1}$. فان المعادلة (24) تأخذ الصيغة

$$(x, y) = A(x_1, y_1) + B(x_2, y_2) \qquad (25)$$

مع الحل الخاص

$$\big(x_1(t), y_1(t)\big) = (\cos(t - \alpha), 2\cos(t - \alpha)) \qquad (26)$$

$$\text{and } \big(x_2(t), y_2(t)\big) = (\cos(2t - \beta), -\cos(2t - \beta)) \qquad (27)$$

يصف الصيغتين الطبيعيتين لتذبذب الكتلة وللنظام الزنبركي . وعلاوه علي ذلك ، تظهر الترددات الطبيعية (الدائرية)$w_1 = 1$, $w_2 = 2$.

التركيب الخطي في المعادلة (25) يمثل تذبذبات حرة اختيارية للكتلتين والنظام الزنبركي مثل اعلي موضع للصيغة الطبيعية للتذبذبات مع محددات الثوابت A,B ,α,β عن طريق الشروط الابتدائية .

الباب الثاني

المصفوفات والانظمة الخطية

المصفوفات والانظمة الخطية

(1-2) مقدمة:

علي الرغم من تقنيات الحذف البسيطة تكفي لحل الانظمة الخطية الصغيرة التي تحوي اثنين او ثلاثة من المعادلات بمعاملات ثابتة . الخصائص العامة للأنظمة الخطية - وكذلك طريقة حل مناسب للأنظمة العليا – هي الاكثر سهولة وتوصف بايجاز باستخدام اللغة وتدوين للمتجهات والمصفوفات . وكمراجعة جاهزة، يبدأ هذا الفصل بتدوين المصفوفة والمصطلحات اللازمة كاملة. التقنيات الخاصة بالجبر الخطي – خصوصا المرتبطة بالقيم الذاتية والمتجهات الذاتية – يتم تقديمها حسب الحاجة في هذا الفصل .

(2-2) المصفوفة ومصطلح المصفوفة:

المصفوفة A ذات البعد $m \times n$ عبارة ترتيب في شكل مستطيل به m*n عدد او عناصر مرتبة في m من الصفوف وn من الاعمدة .

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \dots a_{1j} \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \dots a_{2j} \dots a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \dots a_{3j} \dots a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & a_{i3} \dots a_{ij} \dots a_{in} \\ \vdots & \vdots & \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} \dots a_{mj} \dots a_{mn} \end{bmatrix} \qquad (1-2)$$

عادة نرمز للمصفوفة بحروف بارزه كبيرة أحياناً نستخدم الاختصار $A = [a_{ij}]$ للمصفوفة التي تتكون من عناصر a_{ij} في الصف i والعمود j ,كما في المعادلة (1) . تعرف المصفوفة الصفرية التي تكون كل عناصرها اصفارا.

$$0 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 \dots & 0 \end{bmatrix} \qquad (2-2)$$

في الواقع لكل زوج من الاعداد الصحيحة الموجبة m,n هنالك $m \times n$ مصفوفة صفرية لكن الرمز العدد 0 يكفي لكل المصفوفة الصفرية .

المصفوفتان ذات البعد $m \times n$, $A = [a_{ij}], \ B = [b_{ij}]$ يكونان متساويان اذا كانت العناصر المتناظرة متساوية ,أي اذا كان

$$a_{ij} = b_{ij} \quad , \forall 1 \le i \le m \,, \quad \forall 1 \le j \le n$$

تجمع المصفوفة A والمصوفة B عن طريق جمع العناصر المتناظرة مع بعضها البعض

$$A + B = [a_{ij}] + [b_{ij}] = [a_{ij} + b_{ij}] \qquad (3-2)$$

العنصر في الصف الاول i والعمود jللمصفوفة

$C = A + B$ هو $C = a_{ij} + b_{ij}$

لضرب المصفوفة A في عدد ثابت c سوف يضرب كل عدد في العدد c

$$cA = Ac = [ca_{ij}] \qquad (4-2)$$

مثال(1) :-

اذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -13 & 10 \\ 7 & -5 \end{bmatrix}, and \quad C = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$$

فان $A + B = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 7 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -13 & 10 \\ 7 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -11 & 7 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}$

و $6C = 6.\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 5 & -7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 18 & 0 \\ 30 & -42 \end{bmatrix}$

نرمز ل A(1-) ب A- ونعرف طرح المصفوفات ادناه :

$$A - B = A + (-B) \qquad (5-2)$$

العمليات علي المصفوفات المعرفة انها لها الخواص التالية لكل واحدة منها مشابهه لخاصية جبرية مألوفة لنظام الاعداد الحقيقية .

$$A + 0 = 0 + A = A \,, \qquad A - A = 0 \qquad (6-2)$$

$A + B = B + A ,$ الابدالية (7 − 2)

$A + (B + C) = (A + B) + C ,$ التجميعية (8 − 2)

$c(A + B) = cA + cB),$

$(c + d)A = cA + dA .$ التوزيعية (9 − 2)

أي من هذه الخواص يمكن اثباتها بسهولة عن طريق تطبيق الخاصية المناظرة في الاعداد الحقيقية مثلا $a_{ij}+b_{ij}=b_{ij}+a_{ij}$ لاي قيمة i أو j لان جمع الاعداد الحقيقية ابدالي تبعا لذلك

$$A + B = [a_{ij} + b_{ij}] = [b_{ij} + a_{ij}] = B + A$$

منقول المصفوفة A ذات البعد $m \times n$ هو A^T ذات البعد $n \times m$ ذات العمود i والصف j ، $A^T = [a_{ji}]$, بالرغم من ان ذلك غير مكتمل ترميزيا يجب ان تتذكر ان A^T ليس لها نفس البعد كما A .ما لم تكن A مصفوفة مربعة أي ان m=n

المصفوفة ذات البعد $(m \times 1)$ لها عمود واحد فقط تسمي متجه عمود أو متجه غالبا . نرمز لمتجه العمود بالحروف العادية كما في :

$$b = \begin{bmatrix} 3 \\ -7 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{او} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

بنفس الطريقة متجه الصف في مصفوفة ابعادها $1 \times n$ لها صف واحد فقط مثلا

$c = [5 \quad 17 \quad 0 \quad -3].$ لاسباب الكتابة والشكل ، سوف نكتب متجه العمود كمنقول لمتجه الصف . مثلا متجه عمود يمكن ان يكتب علي الشكل

$$b = [3 \ \ -1 \ \ \ 0]^T \qquad , \qquad \text{و} \quad x = [x_1 \ \ x_2 \ldots \ \ x_m]^T$$

احيانا من المناسب ان يضيف المصفوفة $m \times n$ علي اشكال اما في متجهات الصف او متجهات العمود

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{bmatrix} \qquad \text{و} \qquad B = [b_1 \quad b_2 \ \dots \ b_n]$$

يفهم ان $a_1 , a_2 , \dots , a_m$ هي متجهات الصف للمصفوفة A و $b_1 , b_2 , \dots , b_n$ هي متجهات العمود للمصفوفة B .

ضرب المصفوفة :-

الخواص المذكورة في المعادلات (6) الي (9) طبيعية و متوقعة . اول المفاجات في حساب المصفوفات هي عملية الضرب . نعرف اولا الضرب القياسي لمتجه الصف a ومتجه العمود b . ولها نفس عدد العناصر p اذا كان

$$a = [a_1 \ \ a_2 \ \ \dots \ a_p], and \quad b = [b_1 \ \ b_2 \ \ \dots \ \ b_p]^T$$

فان a.b تعرف بالاتي :

$$a.b = \sum_{k=1}^{p} a_k b_k = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \ \dots + a_p b_p \ . \qquad (10-2)$$

بالضبط كما في الضرب القياسي لمتجهين يكون معرفا فقط اذا كان عدد اعمدة المصفوفة A مساويا لصفوف المصفوفة B .

اذا كان A مصفوفة ابعادها $m \times p$ و B مصفوفة ابعادها $p \times n$. فان حاصل الضرب AB ينتج مصفوفة $C = [c_{ij}]$ ابعادها $m \times n$ ، حتي c_{ij} حاصل الضرب القياسي لمتجه الصف i ل a للمصفوفة A . ومتجه العمود j ل b في المصفوفة B .

$$C = AB = [a_i . b_j]. \qquad (11-2)$$

في الشكل مدخلات مفردة ل $B = [b_{ij}]$ و $A = [a_{ij}]$ المعادلة (11) يمكن أن نعيد صياغتها كالاتي :

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ij} b_{ij} \ , \qquad (12-2)$$

لاغراض الحساب اليدوي التعرف في المعادلات (11) و(12) سهلة التصور عن طريق تصور:

$$a_i \rightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{31} & a_{i2} & \cdots & a_{ip} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mp} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{bmatrix},$$

$$\uparrow$$
$$b_j$$

والتي توضح ان واحد يشكل الضرب القياسي لمتجه الصف a_i مع متجه العمود b_j . لحساب العنصر c_{ij} في الصف a_i والعمود b_j اما شرط الضرب هو لابد من ان يكون عدد أعمده A مساويا لعدد صفوف B .

مثال(2) :

لفهم تعريف ضرب المصفوفات عن طريق اثبات أنه اذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \quad و \quad B = \begin{bmatrix} 13 & 9 \\ 4 & 0 \end{bmatrix},$$

فان

$$AB = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 13 & 9 \\ 4 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 18 \\ 7 & -9 \end{bmatrix}.$$

بنفس الطريقة نثبت أن :

$$\begin{bmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \\ 6 & -7 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2x - 3y + z \\ 4x + 5y - 2z \\ 6x - 7y \end{bmatrix}$$

و

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 3 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 7 & -1 \\ 2 & 15 & 1 \\ 4 & 23 & 3 \\ 6 & 31 & 5 \end{bmatrix}.$$

يمكن ان نثبت بالحساب المباشر علي أساس تعريف ان ضرب المصفوفات تجميعي وايضا توزيعي بالنسبة لجمع المصفوفات

$$A(BC) = (AB)C \qquad (13-2)$$

$$A(B+C) = AB + AC \qquad (14-2)$$ و

شرط ان تكون المصفوفة لها نفس البعد فان الضرب والجمع يكونان ممكنين . لكن ضرب المصفوفات ليس ابدالي . اذا كانت A,B مصفوفتان ابعادهما $n \times n$ فان حاصل الضرب AB ,BA يكون معروفان ولهما نفس الابعاد $n \times n$ عموما

$$AB \neq BA \qquad (15-2)$$

علاوة علي ذلك يمكن ان تكون

$AB = 0$ بالرغم من ان $A \neq 0$ و $B \neq 0$ $\qquad (16-2)$

الامثلة التي توضح الظواهر في (15) و(16) يمكن ان توجد في مسائل يمكن ان تنشئ امثلة باستخدام مصفوفات ابعادها (2×2) مع عناصر صحيحة صغيرة .

معكوس المصفوفة:

المصفوفة المربعة ذات البعد $n \times n$ يقال ان رتبتها n , مصفوفة الوحدة من الرتبة n هي المصفوفة المربعة

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \qquad (17-2)$$

تكون عناصر القطر الرئيسي عبارة عن 1 وباقي العناصر تكون اصفار من السهل اثبات ذلك

$$AI = IA \qquad (18-2)$$

لكل مصفوفة مربعة A من نفس رتبة I اذا كان A مصفوفة مربعة ، فان معكوس A عبارة عن المصفوفة المربعة B من نفس رتبة A فان

$$AB = I \quad \text{و} \quad BA = I$$

ليس من الصعب اثبات انه اذا كانت A مصفوفة لها معكوس فان المعكوس يكون وحيد . بناء علي ذلك يمكن ان نتحدث عن المعكوس ل A ونرمز له بالرمز A^{-1} .

$$AA^{-1} = I = A^{-1}A , \qquad (19-2)$$

من الواضح ان بعض المصفوفات المربعة ليس لها معكوس . اعتبر أي مصفوفة مربعة صفرية يمكن بسهولة اثبات ان لها معكوس A^{-1} موجود ثم $(A^{-1})^{-1}$ موجود وان $(A^{-1})^{-1} = A$.

في الجبر الخطي اثبت ان A^{-1} موجوده اذا وفقط اذا كان المحددة $\det(A)$ للمصفوفة المربعة A غير صفري . اذا كان كذلك فان المصفوفة A يقال عنها غير شاذة . اذا كان المحدد $\det(A)$ يساوي الصفر فان A تسمي مصفوفة شاذة .

(3-2) المحددات :

اذا كان $A = [a_{ij}]$ مصفوفة ابعادها 2×2 فان المحدد $\det(A) = |A|$ تعرف كتالي

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{21}$$

المحددات للمصفوفات ذات الرتب العليا يمكن ان نعرف الاستقراء كالاتي $\mathrm{A} = [\mathrm{a_{ij}}]$ هي مصفوفة ابعادها $\mathrm{n} \times \mathrm{n}$ ، افرض ان A_{ij} ترمز للمصفوفة المسحوبة ذات البعد $(n-1) \times (n-1)$ من A بحذف الصف i والعمود j . امتداد المحددة |A| علي الصف i تعطي

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}| \qquad (20\,a-2)$$

امتدادها علي طول المنحني ل j تعطي :

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} |A_{ij}| \qquad (20\ b - 2)$$

اثبت في الجبر الخطي ان أيما صف استخدم في المعادلة (20 a) وأيما عمود استخدم في المعادلة (20) .النتيجة تكون نفسها في كل الحالات 2n حالة . اذا |A| تعرف عن طريق هذا الصيغ .

مثال(3):

اذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 5 \end{bmatrix}$$

فان المفكوك في |A| علي طول الصف الثاني هو

$$|A| = -4.\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} + 2.\begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{vmatrix} - 1.\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -2 & 3 \end{vmatrix}$$

$$= -4.11 + 2.11 - 1.11 = -33\ .$$

الالات الحاسبة واجهزة الكمبيوتر مريحة لحساب محددات الابعاد العالي والمصفوفات و المصفوفات العكسية ولكن المحددات والمعكوسات من النوع 2×2 مصفوفات سهله لحساب اليد .علي سبيل المثال ، اذا كانت المصفوفة A التي ابعادها 2×2 غير صفرية المحدد

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

اي ان $\qquad |A| = ad - bc \neq 0$

فان معكوس المصفوفة هو

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \qquad (21 - 2)$$

- نلاحظ ان المصفوفة علي الجانب الايمن في المعادلة (21) يتم الحصول عليها من تبادل عناصر القطر الرئيسي و تغيير علامات العناصر غير الصفرية .
- **مثال (4) :**

اذا كانت $$A = \begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$$

فان $|A| = 6.7 - 5.8 = 2$ من المعادلة (21) تعطي

$$A^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 7 & -8 \\ -5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -4 \\ -\frac{5}{2} & 3 \end{bmatrix}$$

يجب ان نتوقف للتحقق من ان

$$AA^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{7}{2} & -4 \\ -\frac{5}{2} & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 8 \\ 5 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(4-2) دوال القيم الذاتية :

دوال القيم الذاتية للمصفوفة أو ببساطة دالة مصفوفة ، هي مصفوفة مثل

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix} \qquad (22\ a - 2)$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n(t)} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1}(t) & a_{m2}(t) & \dots & a_{mn}(t) \end{bmatrix} \qquad (22\ b - 2)$$

التي هي دوال في t . نقول ان مصفوفة داله A(t) مستمرة (أو تفاضلية) عند نقطة (أو في فترة) اذا كان كل عناصرها لديه نفس الخاصية ، يتم تعريف مشتقه مصفوفة داله تفاضلية ع طريق تفاضل عناصر المصفوفة .

$$A'(t) = \frac{dA}{dt} = \left[\frac{da_{ij}}{dt}\right] \qquad (23-2)$$

- **مثال(5) :**

اذا كان $A(t) = \begin{bmatrix} \sin t & 1 \\ t & \cos t \end{bmatrix}$ و $x(t) = \begin{bmatrix} t \\ t^2 \\ e^{-t} \end{bmatrix}$

فان $\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2t \\ -e^{-t} \end{bmatrix}$ و $A'(t) = \begin{bmatrix} \cos t & 0 \\ 1 & -\sin t \end{bmatrix}$

من قانون التفاضل

$$\frac{d}{dt}(A+B) = \frac{dA}{dt} + \frac{dB}{dt} \qquad (24-2)$$

$$\text{And } \frac{d}{dt}(AB) = A\frac{dB}{dt} + \frac{dA}{dt}B \qquad (25-2)$$

اتبع بسهوله قوانين التفاضل حدا حدا في مقدمه الحسبان دوال القيم الحقيقية . اذا كان c عدد حقيقي (ثابت) وC هي مصفوفة الثوابت فان

$$\frac{d}{dt}(cA) = c\frac{dA}{dt}, \frac{d}{dt}(CA) = C\frac{dA}{dt}, \frac{d}{dt}(AC) = \frac{dA}{dt}C \qquad (26-2)$$

بسبب عدم تبديلية مصفوفة الضرب , فم المهم عدم عكس ترتيب العوامل في المعادلات (25) و(26) .

- **انظمه خطيه من الرتبة الاولي :**

قد يبدو الترميز والمصطلحات في و المتجهات تظهر وبالاحري توضيح تواجهها اول مرة . ولكن يتم استيعابها بسهولة مع الممارسة .

استخداما الرئيسي لترميز المصفوفة سيكون مبسط الحساب مع انظمة المعادلات التفاضلية ، وخصوصا تلك الحسابات التي من شأنها ان تكون مرهقه في الترميز القياسي . نناقش هنا النظام العام ل n نظام خطي من الدرجة الاولي .

$$\begin{aligned} x_1' &= p_{11}(t)x_1 + p_{12}(t)x_2 + \cdots + p_{1n}(t)x_n + f_1(t) \\ x_2' &= p_{21}(t)x_1 + p_{22}(t)x_2 + \cdots + p_{2n}(t)x_n + f_2(t) \\ x_3' &= p_{31}(t)x_1 + p_{32}(t)x_2 + \cdots + p_{3n}(t)x_n \\ &+ f_3(t) \qquad (27-2) \end{aligned}$$

$$\vdots$$

$$x_n' = p_{n1}(t)x_{n1} + p_{n2}(t)x_2 + \cdots + p_{n3}(t)x_3 + f_3(t)$$

اذا ادخلنا مصفوفة المعاملات $p(t) = [p_{ij}(t)]$

ومتجهات العمود $x = [x_i] \quad , f(t) = [f_i(t)]$

فان النظام في (28) ياخذ صيغه معادلة مصفوفة وحيده

$$\frac{dx}{dt} = p(t)x + f(t) \qquad (28-2)$$

لاحظ ان النظرية العامة للنظام الخطي في (27) تقريبا يماثل معادلة م الرتبة n وحيده ، ترميز المصفوفة المستخدمة في (28) تؤكد ليس فقط هذا التشابه ولكن ايضا يوفر قدرا كبيرا من المساحة .

حل المعادلة (28) علي الفترة المفتوحة I هو دالة متجه العمود $x(t) = [x_i(t)]$ عناصر الدوال في x تجعل من النظام (27) يماثل I . اذا كانت الدوال $f_i(t), p_{ij}(t)$ مستمرة علي I . من النظرية 1 تضمن وجود الحل الوحيد x(t) علي I تحقق الشروط الابتدائية $x(a) =$ b .

- **مثال(6) :**

النظام من الرتبة الاولي

يمكن ان يكتب في معادلة مصفوفة وحيدة

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -7 \end{bmatrix} x = px$$

للتحقق من دالتي المتجه

$$x_1(t) = \begin{bmatrix} 3e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix} \ and \ x_2(t) = \begin{bmatrix} e^{-5t} \\ 3e^{-5t} \end{bmatrix}$$

تمثلان حل المعادلة التفاضلية للمصفوفة مع مصفوفة المعامل p ، سوف نحتاج فقط للحساب .

لايجاد الطبيعة العامة لحل المعادلات (28) ، نعتبر أولا المعادلة المتجانسة المرتبطة .

$$\frac{dx}{dt} = p(t)x \qquad (29-2)$$

التي لديها نموزج موضح في المعادلات (28) ، ولكن مع $f(t) \equiv 0$. نتوقع ان يكون لديها n حل مستقل $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ، كما ان كل حل للمعادلة (29) هو تركيبة خطية من حل خاص $x_1, x_2, \ldots, x_n$. لنكتب

$$x_j(t) = \begin{bmatrix} x_{1j}(t) \\ \vdots \\ x_{ij}(t) \\ \vdots \\ x_{nj}(t) \end{bmatrix} \qquad (30-2)$$

$x_{ij}(t)$ يدل علي عنصر الذي ترتيبه i للمتجة $x_j(t)$ ، والمخطوطة الثانية تشير الي دالة المتجة $x_j(t)$. في حين المخطوطة الاولي تشير الي عنصر من هذه الدالة

- **نظرية (1) : مبدأ التراكيب**

لنفرض أن $x_1, x_2, \ldots, x_n$ عبارة عن n حل للمعادلة الخطية المتجانسة في (29) علي الفترة المفتوحة I . اذا كان $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ثوابت ، فان التركيب الخطي

$$x(t) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \qquad (31-2)$$

تمثل ايضا حل للمعادلة (29) علي I .

البرهان

كما نعرف ان $i\ (1 \le i \le n)$ لاي $x_i' = p(t)x_i$

لذلك يترتب عليه مباشرا انه

$$\begin{aligned} x' &= c_1x_1' + c_2x_2' + \cdots + c_nx_n' \\ &= c_1P(t)x_1 + c_2P(t)x_2 + \cdots + c_nP(t)x_n \\ &= P(t)(c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n) \end{aligned}$$

وهذا هو $x' = P(t)x$ ككما نريد . وببساطة رائعة هذا دليل يبين بوضوح ميزه واحده من استخدام المصفوفة .

- **مثال (6) :**

اذا كان x_1, x_2 عبارة عن حلين ل

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}$$

نوقش في مثال (6) ، فان التركيب الخطي

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) = c_1 \begin{bmatrix} 3e^{2t} \\ 2e^{2t} \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} e^{-5t} \\ 3e^{-5t} \end{bmatrix}$$

عبارة عن حل ايضا ، من الرتبة القياسية مع $x = [x_1 \quad x_2]^T$ تعطي الحل

$$x_1(t) = 3c_1 e^{2t} + c_2 e^{-5t}$$

$$x_2(t) = 2c_1 e^{2t} + 3c_2 e^{-5t}$$

- **الاستقلال والحل العام :**

يتم تعريف الاستقلال الخطي بنفس طريقة دوال المتجهات الذاتية لدوال القيم الحقيقة ، دوال متجهات القيم $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ مستقلة خطيا علي الفترة I ويبرهن علي وجود ثوابت $c_1, c_2, \ldots, c_n$ ليست كلها اصفار لاي t في I .

$$c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n(t) = 0 \qquad (32-2)$$

و الا ، فهي مستقلة خطيا . متكافئة فهي مستقلة خطيا بشرط ان لا أحد منهم هو تركيبة خطية من الاخرين . علي سبيل المثال ، فان الحلان مستقلان خطيا لانه تظهر بشكل واضح ليس قياسية متعددة من جهه اخري .

تماما كما في حاله معادلة وحيدة من الرتبة n . من محددات رونسكايان (wronskian) يقول سواء كانت أو لم تكن تعطي n الحلول من المعادلة المتجانسة في (29) التي تعتمد خطيا . اذا كانت $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ حلول ، اذا حتي $n \times n$ تعتبر محددات رونسكايان .

$$W(t)=\begin{vmatrix} x_{11}(t) & x_{12}(t) & \dots & x_{1n}(t) \\ x_{21}(t) & x_{22}(t) & \dots & x_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ x_{n1}(t) & x_{n2}(t) & \dots & x_{nn}(t) \end{vmatrix} \qquad (33-2)$$

باستعمال الترميز في (30) تكون عناصر من الحلول . كما يمكننا ان نكتب w(t) أو $w(x_1,x_2,\dots,x_n)$. نلاحظ ان w عبارة عن محدد في المصفوفة الذي لديه متجهات عمود تمثل حلول $x_1,x_2,\dots,x_n$.

- **نظرية (2) : حلول رونسكايان**

افرض ان $x_1,x_2,\dots,x_n$ عبارة عن n حل للمعادلة الخطية المتجانسة $x'=p(t)x$ علي الفترة المفتوحة I . وافرض ان p(t) مستمرة علي الفترة I .خذ

$$W=W(x_1,x_2,\dots,x_n)$$

فان :

- اذا كانت $x_1,x_2,\dots,x_n$ مستقلة خطيا علي I ، عندما w=0 علي أي نقطة في I .
- اذا كانت $x_1,x_2,\dots,x_n$ مستقلة خطيا علي I ، عندما $w\neq 0$ في كل نقطة من I .

هكذا لدينا احتمالين للحل في النظام المتجانس ، أما w=0 عند أي نقطة في I أو w=0 , عند أي نقطة في I .

- **مثال (7) :**

فانه يتم التحقق (كما في المثال (6))

$$x_1(t)=\begin{bmatrix} 2e^t \\ 2e^t \\ e^t \end{bmatrix}, x_2(t)=\begin{bmatrix} 2e^{3t} \\ 0 \\ -e^{3t} \end{bmatrix}, x_3(t)=\begin{bmatrix} 2e^{5t} \\ -2e^{5t} \\ e^{5t} \end{bmatrix}$$

تمثل حلول للمعادلة

$$\frac{dx}{dt}=\begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}x \qquad (34-2)$$

حل رونسكايات

$$W = \begin{vmatrix} 2e^t & 2e^{3t} & 2e^{5t} \\ 2e^t & 0 & -2e^{5t} \\ e^t & -e^{3t} & e^{5t} \end{vmatrix} = e^{9t} \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$$
$$= -16e^{9t}$$

الذي لا تمثل صفرا نهائي . النظرية (2) تؤدي الي ان الحلول x_1, x_2, x_3 مستقلان خطيا (علي أي فترة مفتوحة).

النظرية (3) تقول ان الحل العام للنظام $n \times n$ المتجانس $x' = p(t)x$ هو تركيب خطي لاي n معطي حلول مستقلة خطيا $x_1, x_2, \dots, x_n$.

$$x = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \qquad (35-2)$$

- **نظرية (3) : الحل العام للنظام المتجانس**

لتكن $x_1, x_2, \dots, x_n$ عبارة عن n حل مستقل خطي للمعادلة الخطية المتجانسة $x' = p(t)x$ علي الفترة المفتوحة I . بحيث p(t) مستمرة .

اذا كان x(t) تمثل أي حل $x' = p(t)x$ علي I ، اذا يوجد أعداد ثوابت $c_1, c_2, \dots, c_n$ بحيث

$$x = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \qquad (35-2)$$

لاي t علي I .

البرهان

افرض ان a نقطه ثابتة علي I .يجب اظهار أولا وجود أرقام $c_1, c_2, \dots, c_n$ كما في الحل .

$$y = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) + \cdots + c_nx_n(t) \qquad (36-2)$$

لديها القيمة الابتدائية عند t=a التي تعطي الحل x(t) وهذا هو

$$c_1x_1(a) + c_2x_2(a) + \cdots + c_nx_n(a) = x(a) \qquad (37-2)$$

افرض ان $X(t)$ مصفوفة $n \times n$ لديها المتجهات عمود $x_1, x_2, \dots, x_n$ وافرض ان c متجه عمود مع العناصر $c_1, c_2, \dots, c_n$. فان المعادلة (37) تكتب علي الصيغة :

$$X(a)c = x(a) \qquad (38-2)$$

محدد رونسكايان $W(a) = |W(a)|$ لا يساوي الصفر لان الحل $x_1, x_2, \dots, x_n$ مستقل خطيا . ومن هنا المصفوفة X(a) لديها معكوس المصفوفة $X^{-1}(a)$.

ومن ثم المتجه $c = X(a)^{-1}X(a)$ يحقق المعادلة (38) كما نريد.
أخيرا ، نلاحظ أن الحل المعطي $x(t), y(t)$ للمعادلة (36) مع القيم المستقلة c_i ، من المعادلة $c = X(a)^{-1}X(a)$ لديها نفس القيمة الابتدائية (عند t=a) تعطي $x(t) = y(t)$ لاي t في I وهي تنشئ المعادلة (35) .

- **ملاحظه:** أي نظام $n \times n$ ، $x' = p(t)x$ مع مصفوفة المعامل المستمر التي لديها مجموعة n حل مستقل خطيا $x_1, x_2, \dots, x_n$ كما في الفرضيات في النظرية (3) . ويكفي ان نختار $x_j(t)$ الحل الوحيد بحيث

$$\boldsymbol{x_j(a)} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{1} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \leftarrow \quad \boldsymbol{j} \text{ موضع}$$

هذا متجه العمود فيه كل العناصر صفرا عدا واحده تساوي 1 عند الصف j (بصيغه اخري $x_j(a)$ مصفوفة الوحدة للعمود رقم j) فان

$$W(x_1, x_2, \dots, x_n), t = 0 \text{ عند } = |\mathrm{I}| = 1 \neq 0$$

اذا الحل $x_1, x_2, \dots, x_n$ مستقل خطيا من النظرية (2) .

(5-2) مسائل القيمة الابتدائية والعمليات الصفيةالبسيطة :

الحل العام للمعادلة (35) في النظام الخطي المتجانس $x' = p(t)x$ يمكن ان يكتب في الصيغة :

$$x(t) = X(t)c\,, \qquad (39-2)$$

$$X(t) = [x_1 \;\; x_2 \;\; \dots \;\; x_n] \quad \text{بحيث} \qquad (40-2)$$

في المصفوفة التي ابعادها $n \times n$ التي لديها متجه العمود والحل الخطي المستقل $x_1, x_2, \dots, x_n$ و $c = [c_1 \;\; c_2 \;\; \dots \;\; c_n]^T$ متجه المعامل في التركيب الخطي .

$$x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n \qquad (35-2)$$

افرض الان ان نرغب في حل مسألة القيمة الابتدائية .

المتجه الابتدائي $b = [b_1 \ \ b_2 \ \ \ldots \ \ b_n]^T$ معطي ، اذا من المعادلة (39) يكفي لكي يحل النظام لايجاد المعاملات $c_1 \ , c_2, \ldots , c_n$ في المعادلة (35)

لذا سنتعرض بايجاز الطريقة الاولية لحزف صف لحل نظام جبري خطي من $n \times n$

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{n2}x_n &= b_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n &= b_n \end{aligned} \qquad (43-2)$$

مع غير مصفوفة معامل مفردة $A = [a_{ij}]$ ، المتجة الثابت $b = [b_j]$ ، والمجاهيل $x_1, x_2, \ldots , x_n$ الفكرة الاساسية هو تحويل النظام (43) الي مثلثية علوية بسيطة بالصيغة:

$$\begin{aligned} \overline{a_{11}}x_1 + \overline{a_{12}}x_2 + \cdots + \overline{a_{1n}}x_n &= \overline{b_1} \\ \overline{a_{22}}x_2 + \cdots + \overline{a_{2n}}x_n &= \overline{b_2} \\ &\vdots \\ \overline{a_{nn}}x_n &= \overline{b_n} \end{aligned} \qquad (44-2)$$

التي فقط المجاهيل $x_j, x_{j+1}, \ldots , x_n$ تظهر بشكل واضح في المعادلة j $(j =$ $1,2,3, \ldots , n)$ نظام التحويل يتم حلها بسهولة عن طريق عملية ارجاع الاحلال . اولا المعادلة الاخيرة في (44) تحل عند x_n ثم القبل الاخيرة تحل عند x_{n-1} وهكذا حتي نرجع الي اول معادلة في الاخير تحل عند x_1 .

تحويل النظام في (43) الي شكل الثلاثي العلوي يعتبر اسهل ثم استخدام العمليات الصية البسيطة علي مصفوفة المعانلات الموسعة .

$$[A : B] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & \vdots & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & \vdots & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} & \vdots & b_n \end{bmatrix} \qquad (45-2)$$

التي يتم الحصول عليها عن طريق المجاورة للمتجة b للمصفوفة A كعمود اضافي العمليات الصفية البسيطة المقبولة هي من الانواع الثلاثة التالية :

1. ضرب أي (مفرد) صف للمصفوفة بثابت لا يساوي الصفر.
2. تبديل أي صفين في المصفوفة .
3. طرح وضرب ثابت من صف الي أي صف اخر.

الهدف هو استخدام سلسلة من مثل هذة العمليات (واحد تلو الاخر،بدورها) لتحويل $[A : b]$ الي المصفوفة المثلثية العلوية ، واحدة لديها اصفار فقط تحت الرئيسي لنظام المثلثيه العلوية كما في المعادلة (44) عملية التحويل ل $[A : b]$ تحمل خارجا عمود واحد كل مرة ، من اليسار الي اليمين كما في المثال التالي .

- **مثال (8) :**

استخدم الحل المعطي في المثال (7) لحل مسألة القيمة الابتدائية .

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} x \,, x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix} \qquad (46-2)$$

الحل

من النظرية (3) التركيب الخطي

$$= c_1 \begin{bmatrix} 2e^t \\ 2e^t \\ e^t \end{bmatrix} + c_2 \begin{bmatrix} 2e^{3t} \\ 0 \\ -e^{3t} \end{bmatrix} + c_3 \begin{bmatrix} 2e^{5t} \\ -2e^5 \\ e^{5t} \end{bmatrix}$$

الحل العام لنظام 3×3 في (46) . في الصيغة القياسية هذه تعطي الحل العام

$$x_1(t) = 2c_1e^t + 2c_2e^{3t} + 2c_3e^{5t}$$
$$x_2(t) = 2c_1e^t \qquad\qquad - 2c_3e^{5t}$$

$$x_3(t) = c_1e^t - c_2e^{3t} + c_3e^{5t}$$

سنحاول الوصول الي الحل الخاص الذي يحقق الشروط الابتدائية

$$x_1(0) = 0 \quad , x_2(0) = 2 , \; x_3(0) = 6$$

عندما نستبدل القيم الثلاثة السابقة المعادلات القياسية ، نحصل علي نظام جبري خطي .

$$\begin{aligned} 2c_1 + 2c_2 + 2c_3 &= 0 \\ 2c_1 \qquad - 2c_3 &= 2 \\ c_1 - c_2 + c_3 &= 6 \end{aligned}$$

مع توسعة مصفوفة المعاملات

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 & \vdots & 0 \\ 2 & 0 & -2 & \vdots & 2 \\ 1 & -1 & 1 & \vdots & 6 \end{bmatrix}$$

بضرب كل من الصف الاول والثاني في $\frac{1}{2}$ تعطي :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 1 & 0 & -1 & \vdots & 1 \\ 1 & -1 & 1 & \vdots & 6 \end{bmatrix}$$

ثم بطرح الصف الاول من كلا من الصف الثاني والثالث تعطي :

العمود الاول في هذه الصفوفة في الصيغة المنشودة .

لان بضرب الصف في (1-) ، ثم اضافة الاثنين علي النتيجة علي الصف الثالث . وهكذا نحصل علي مصفوفة معاملات مثلثية علوية موسعة .

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \vdots & -1 \\ 0 & 0 & 4 & \vdots & 4 \end{bmatrix}$$

وهذا يتوافق مع النظام المحول .

$$\begin{aligned} c_1 + c_2 + c_3 &= 0 \\ c_2 + 2c_3 &= -1 \\ 4c_3 &= 4 \end{aligned}$$

اخيرا يكون الحل $c_1 = 2 , c_2 = -3 , c_3 = 1$

وهو الحل المرغوب يعطي ب

$$x(t) = 2x_1(t) - 3x_2 + x_3(t)$$
$$= \begin{bmatrix} 4e^t - 6e^{3t} + 2e^{5t} \\ 4e^t \qquad\qquad - 2e^{5t} \\ 2e^t + 3e^{3t} + e^{5t} \end{bmatrix}$$

- **الحلول غير المتجانسة :**

اخيرا انتبهنا الي النظام الخطي غير المتجانس الذي علي الصيغة :

$$\frac{dx}{dt} = P(t)x + f(t) \qquad (47-2)$$

النظرية (4) تعني بالحل العام للمعادلة (47) يكون علي الصيغة :

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t) \qquad (48-2)$$

بحيث ان $x_p(t)$ الحل الخاص الوحيد للمعادلة (47) والدالة المتكاملة $x_c(t)$ تمثل الحل العام للمعادلة المتجانسة المرتبطة $x' = P(t)x$.

- **نظرية (4) : حل النظام الغير متجانس**

افرض ان x_p عن حل المعادلة الخطية غير المتجانسة في (47) في الفترة المفتوحة I التي فيها $p(t)$, $f(t)$ دوال مستمرة ، افرض ان $x_1, x_2, \dots, x_n$ الحلول الخطية المستقلة للمعادلة المتجانسة المرتبطة علي I .
اذا كان $x(t)$ عبارة عن أي حل للمعادلة (47) علي I ، اذا توجد اعداد أو ثوابت $c_1, c_2, \dots, c_n$ بحيث :

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n(t) + x_p(t) \qquad (49-2)$$

لاي t علي I .

وبالتالي لايجاد الحل العام للنظام الخطي الغير متجانس يشمل خطوتين مستقلين :

1. ايجاد الحل العام $x_c(t)$ للنظام المرتبط الغير متجانس .
2. ايجاد الحل الخاص الوحيد $x_p(t)$ للنظام المرتبط الغير متجانس .

المجموع $x(t) = x_c(t) + x_p(t)$ سيكون الحل العام للنظام الغير متجانس .

- **مثال (9):**

النظام الخطي الغير متجانس

$$x_1' = 3x_1 - 2x_2 \qquad\qquad - 9t + 13$$

$$x_2' = -x_1 + 3x_2 - 2x_3 + 7t - 15$$

$$x_3' = \qquad\qquad -x_2 + 3x_3 - 6t + 7$$

الذي علي الصيغة في (47)

$$P(t) = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \boldsymbol{f}(t) = \begin{bmatrix} -9t + 13 \\ 7t - 15 \\ -6t + 7 \end{bmatrix}$$

في المثال (7) قلنا ان الحل العام للنظام الخطي الغير متجانس المرتبط

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 0 \\ -1 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \end{bmatrix} x$$

يعطي بواسطة

$$x_c(t) = \begin{bmatrix} 2c_1e^t + 2c_2e^{3t} + 2c_3e^{5t} \\ 2c_1e^t \qquad\qquad - c_3e^{5t} \\ c_1e^t \; - \; c_2e^{3t} \; + \; c_2e^{5t} \end{bmatrix}$$

يمكننا التحقق عن طريق استبدال الدالة

$$x_p(t) = \begin{bmatrix} 3t \\ 5 \\ 2t \end{bmatrix}$$

هو الحل الخاص للنظام الاصلي الغير متجانس ، بناء علي هذا ،النظرية (4) تؤدي الي ان الحل العام للنظام الغير متجانس يعطي ب :

$$x(t) = x_c(t) + x_p(t)\,;$$

والتي تعطي ب

$$x_1(t) = 2c_1e^t + 2c_2e^{3t} + 2c_3e^{5t} + 3t\,,$$

$$x_2(t) = 2c_1e^t \qquad\qquad - c_3e^{5t} + 5\,,$$

$$x_3(t) = c_1e^t \; - \; c_2e^{3t} \; + \; c_2e^{5t} + 2t\,.$$

الباب الثالث

طريقه القيم الذاتية للانظمة الخطية المتجانسة

طريقة القيم الذاتية للانظمة الخطية المتجانسة

(3-1) مقدمة:

الان نعرف طريقة بديلة لطرقة الاستبعاد لبناء الحل العام لنظام خطي متجانس من الرتبة الاولي ذي معاملات ثابتة

$$x_1' = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n$$

$$x_2' = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \qquad (1-3)$$

$$\vdots$$

$$x_n' = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n$$

نعلم انه يكون كافيا بايجاد n متجهات حل عام مستقلة خطيا $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ، التركيب الخطي يصبح

$$x(t) = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \qquad (2-3)$$

مع ثوابت ابتدائية سوف يصبح حلا عاما للنظام (1) .

للبحث عن متجهات الحلول المستقلة خطيا ، سوف نوجد بالتناظر مع طريقة الجذر المميز لحل المعادلة الوحيدة المتجانسة ذات المعاملات الثابتة من المعقول ان نتوقع ان تكون متجهات الحلول علي الشكل

$$x(t) = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1e^{\lambda t} \\ v_2e^{\lambda t} \\ \vdots \\ v_ne^{\lambda t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} e^{\lambda t} = \boldsymbol{v}e^{\lambda t} \qquad (3-3)$$

حيث $\lambda, v_1, v_2, \ldots, v_n$ هي ثوابت قياسية صحيحة . اذا عوضنا

$$x_i = v_ie^{\lambda t} \ , \qquad x_i' = \lambda v_ie^{\lambda t} \ , (i = 1,2, \ldots, n)$$

في (1) سوف يكون كل جزء ناتج في المعادلات يحتوي علي العامل $e^{\lambda t}$ ،لذا يمكن ان نلغي في كل الحدود هذا سوف يجعل لنا n معادلة خطية – للقيم الذاتية الصحيحة λ -يمكن ان نوجد

الحل للمعاملات $v_1, v_2, \dots, v_n$ في المعادلة (3) لذلك $x(t) = \boldsymbol{v}e^{\lambda t}$ والتي هي في الحقيقة حل للنظام (1) .

للتحقق من هذه الامكانية اكثر ملائمة كتابة النظام في (1) في صيغة المصفوفة علي الشكل

$$x' = Ax \qquad (4-3)$$

حيث $A = [a_{ij}]$. عندما نعوض الحل $x = \boldsymbol{v}e^{\lambda t}$ مع المشتقة $x' = \lambda \boldsymbol{v}e^{\lambda t}$ في المعادلة (4) تكون النتيجة

سوف نلغي المعامل القياسي غير الصفري $e^{\lambda t}$ للحصول علي

$$A\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v} \qquad (5-3)$$

وهذا يعني ان $x = \boldsymbol{v}e^{\lambda t}$ سوف تكون الحل المعتبر للمعادلة (4) حيث $\boldsymbol{v}$ متجه غير صفري و λ ثابت بحيث ان المعادلة (5) تتحقق ناخذ ضرب المصفوفة $A\boldsymbol{v}$ هو ضرب قياسي للمتجه $\boldsymbol{v}$. السؤال الان هو كيف يمكننا ايجاد المتجه $\boldsymbol{v}$ والثابت λ ؟؟

لاجابة هذا السؤال سوف نعيد كتابة المعادلة (5) علي الشكل

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{v} = 0 \qquad (6-3)$$

معطي λ، هذا نظام معادلات خطية متجانسة n في $v_1, v_2, \dots, v_n$ عبر النظرية الاساسية للجبر الخطي يكون لديها حل معتبر اذا وفقط اذا كانت محدده مصفوفة المعادلات تساوي صفر هذا اذا وفقط اذا كان

$$|A - \lambda I| = \det(A - \lambda I) = 0 \qquad (7-3)$$

في ابسط صورها ، طريقة القيمة الذاتية لحل النظام $x' = Ax$ يتكون من ايجاد λ لذا المعادلة (7) تحل المعادلة (6) لهذه القيمة λ لحساب $v_1, v_2, \dots, v_n$ ثم $x = \boldsymbol{v}e^{\lambda t}$ سوف تكون متجه حل . اسم الطريقة اتي من تعريف التالي .

(2-3) تعريف : القيم الذاتية والمتجهات الذاتية

العدد λ (اذا كان صفري او غير صفري) يسمي قيمة ذاتية للمصفوفة A التي ابعادها $n \times n$ يحقق

$$|A - \lambda I| = 0 \qquad (7-3)$$

المتجة الذاتي المصاحب للقيمة الذاتية λ هو متجة غير صفري يحقق $A\boldsymbol{v} = \lambda \boldsymbol{v}$ لذا

$$(A - \lambda I)\boldsymbol{v} = 0 \qquad (6-3)$$

لاحظ انه اذا كان $\boldsymbol{v}$ متجه ذاتي المرتبط بالقيمة الذاتية λ ثم أي ثابت غير صفري يضرب قياسيا $C\boldsymbol{v}$ ل $\boldsymbol{v}$ ، هذا يعقب ضرب كل من طرفي المعادلة (6) في الثابت غير الصفري $c \neq 0$.

البادئة eigen هي كلمة المانية تترجم ذاتي (أو مميز) تقريبا في هذا السياق القيمة الذاتية والمتجه الذاتي في الاستخدام الشائع لهذا السبب المعادلة

$$|A - \lambda I| = \begin{bmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - \lambda \end{bmatrix} = 0 \qquad (8-3)$$

تسمي المعادلة المميزة للمصفوفة A . لتمديد المحددة في (8) نحصل علي كثيرة حدود من الرتبة n علي الشكل

$$(-1)^n \lambda^n + b_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + b_1 \lambda + b_0 = 0 \qquad (9-3)$$

عبر النظرية للجبر هذه المعادلة لها n جزر يمكن ان يكون بعضها مركب ويمكن ان يكون بعضها مركب ويمكن ان يكون بعضها مكرر اذا المصفوفة $n \times n$ لها n قيمة ذاتية (تكرار العد) بالرغم من اننا عناصر A حقيقية يسمح بامكانية القيم الذاتية المركبة وقيم مركبة للمتجهات الذاتية .

ناقشنا في المعادلات (4) الي (7) يوفر اثبات النظرية التالية التي تمثل اساس طريقة القيم الذاتية لحل النظام الخطي من الرتبة الاولي بمعاملات ثابتة .

- **نظرية (1) : القيم الذاتية للحلول $x' = Ax$**

افرض ان λ تكون قيمة ذاتية (ثابت) لمصفوفة المعاملات A ذات نظام خطي من الرتبة الاولي

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

اذا كان v متجة ذاتي متعلق ب λ فان

$x(t) = \boldsymbol{v}e^{\lambda t}$ هو حل غير تافة (معتبر)

- **طريقة القيم الذاتية :**

في كلمات مختصرة هذه الطريقة لحل الانظمة ذات البعد $n \times n$ المتجانسة ذات المعاملات الثابتة $x' = Ax$ تعمل كالاتي :

1. اولا نحل المعادلة المميزة في (8) للقيم الذاتية $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ للمصفوفة A .
2. بعد ذلك نحاول ان نوجد n متجة ذاتي $v_1, v_2, \dots, v_n$ مرتبط مع هذه القيم الذاتية .
3. الخطوة (2) ليست دائما تتحقق لكن اذا تحققت سوف نحصل علي n من الحلول الخطية المستقلة .

$$x_1(t) = v_1 e^{\lambda_1 t}, x_2(t) = v_2 e^{\lambda_2 t}, \dots, x_n(t) = v_n e^{\lambda_n t} \quad (10-3)$$

في هذه الحالة الحل العام ل $x' = Ax$ عبارة عن تركيب خطي

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) + \cdots + c_n x_n$$

مكون من n حلول .

سوف نناقش بطريقة منفصلة عده حالات يمكن ان تحدث معتمدة علي اذا كانت القيم الذاتية مختلفة او مكررة ، حقيقية او مختلفة . في حالة القيم الذاتية المكررة عدد من جزور المعادلة المميزة سوف توجل للدراسة في فصل آخر .

- **القيم الذاتية الحقيقية المختلفة :**

اذا كانت القيم الذاتية $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ قيم مختلفة وحقيقية فسوف نقوم بتعريفها في المعادلة (6) وتحل للمتجهات الذاتية $v_1, v_2, \dots, v_n$ المرتبطة معها . في هذه الحالة يمكن ان نثبت ان متجهات الحل المحددة في المعادلة (10) هي دائما مستقلة خطيا ، في

أي مثال معين الاستقلال الخطي يمكن ان يثبت دائما باستخدام محددة الرونسكيان ، المثال ادناه يحدد الطريقة :

- **مثال (1) :**

اوجد الحل العام للنظام

$$x_1' = 4x_1 + 2x_2 \qquad (11-3)$$
$$x_2' = 3x_1 - x_2$$

الحل

المصفوفة في النظام (11)

$$x' = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} x \qquad (12-3)$$

المعادلة المميزة لمصفوفة المعاملات هي

$$\begin{vmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-1-\lambda) - 6$$
$$= \lambda^2 - 3\lambda - 10 = (\lambda+2)(\lambda-5) = 0$$

لذا لدينا القيم الذاتية المختلفة $\lambda_2 = -2 , \lambda_1 = 5$.

لمصفوفة المعاملات A في المعادلة (12) معادلة المتجه الذاتي $(A - \lambda I)v = 0$ تأخذ الشكل

$$\begin{bmatrix} 4-\lambda & 2 \\ 3 & -1-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (13-3)$$

للمتجه الذاتي المصاحب $v = [\, a \quad b\,]^T$.

- **الحالة الاولي : $\lambda_1 = -2$**

عوض القيمة الذاتية الاولي -2 في المعادلة (13) نحصل علي النظام

$$\begin{bmatrix} 6 & 2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وهو معادلتين قياسيتين

$$6a + 2b = 0 \qquad (14-3)$$

$$3a + b = 0$$

مناقضا للانظمة الخطية غير الشاذة (الجبرية) والتي ناقشنا حلها سابقا . النظام الخطي المتجانس في (14) شاذة من الواضح ان المعادلتين القياسيتين متكافئتين لذا المعادلة (14) لها

عدد لا نهائي من الحلول غير الصفرية يمكن ان نختار قيمة ابتدائية ل a لكن لا تساوي الصفر ثم نحل بعد ذلك لايجاد b .

تعويض القيمة الذاتية λ في معادلة المتجة الذاتي $(A-\lambda I)v=0$ نظام خطي متجانس شاذ ولها عدد لا نهائي من الحلول وعموما نبحث عن حل بسيط مع قيمة عددية صغيرة (اذا امكن) انظر المعادلة الثانية في (14) وباختيار a=1 تعطي b=3 وبالتالي هو متجه ذاتي متوافق مع $\lambda_1=-2$.

$$v=\begin{bmatrix}1\\0\\3\end{bmatrix}$$

كما هو أي متعدد غير الصفر من v .

- **ملاحظة :** اذا عوضنا بدلا عن اسهل اختيار a=1 , b=-3 ، وقد قمنا قمنا باختيار آخر $b=-3c\ , c\neq 0$ وقد حصلنا علي المتجه الذاتي

$$v_1=\begin{bmatrix}c\\-3c\end{bmatrix}=c\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}$$

لان هذا ثابت مضروبا في نتيجتنا . و اي خيار يؤدي الي نفس الحل

$$x_1(t)=\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}e^{-2t}$$

- **الحالة الثانية : $\boldsymbol{\lambda_2=5}$**

بتعويض القيمة الذاتية $\lambda_2=5$ في (13) يؤدي الي الزوج

$$-a+2b=0 \qquad (15-3)$$
$$3a-6b=0$$

من المعادلات المتكافئة المدرجة مع b=1 في المعادلة الاولي ونجد ان a=2 وكذلك المتجة الذاتي المشتركة

$$v_2=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}$$

مع $\lambda_2=5$ اختيار مختلف $a=2c\ \ , c\neq 0$ وتعطي لكل بساطة (ثابت) متعدد مع v_2 وهو ان القيمتان القياسيتين والمتجهات الذاتية المرتبطة تؤدي الي الحلين

$$x_1(t)=\begin{bmatrix}1\\-3\end{bmatrix}e^{-2t}\ ,x_2(t)=\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}e^{5t}$$

هي خطية مستقلة لان الرونسكايان

$$\begin{vmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{vmatrix} = 7e^{3e}$$

غير صفري . من هنا الحل العام للنظام في (11) هو

$$x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2(t) = c_1 \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} e^{-2t} + c_2 \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} e^{5t}$$

علي الصيغة القياسية

$$x_1(t) = c_1e^{-2t} + 2c_2e^{5t}$$

$$x_2(t) = -3c_2e^{-2t} + c_2e^{5t}$$

الشكل يظهر بعض الحلول النموذجية للمنحنيات في النظام (11) نري عائلتين من القطوع الذائده مشاركة نفس الزوج من خطوط التقارب : الخط $x_1 = 2x_2$ تم الحصول علية من الحل العام عند $c_1 = 0$. الخط $x_2 = -3x_1$ تم الحصول علية عند $c_2 = 1$ معطي القيمة الابتدائية $x_1(0) = b_1 , x_2(0) = b_2$ من الواضح من الشكل ان :

- اذا كان (b_1, b_2)تقع علي اليمين في الخط $x_2 = -3x_1$ ، فان $x_1(t) , x_2(t)$ كلاهما تؤول الي $+\infty$ عندما $t \to +\infty$.
- اذا كان (b_1, b_2) تقع علي اليسار في الخط $x_2 = -3x_1$ فان $x_1(t) , x_2(t)$ كلاهما تؤول الي $-\infty$ عندما $t \to +\infty$.
- **ملاحظة:** كما في المثال (1) هي متوافقة عندما نناقش النظام الخطي $x' = Ax$ المتجهات $x_1, x_2, \dots, x_n$ تشير الي قيم المتجه المختلفة وتظهر عناصر القيمة الحل الوحيد x .

(3-3) التحليل الجزئي :

تكرار النظام او العملية المركبة يمكن ان يوزع الي نظام جزئي بسيط او (اجزاء صغيره) التي يمكن ان تحل كل علي حده . النظام برمته يمكن ان يصاغ بوصف التفاعل بين شتي الاجزاء . وبالتالي قد يتكون مصنع للكيماويات بمراحل منفصلة مختلفة (او حتي الاجزاء الفيزيائية) . في مختلف المواد المتفاعلة التي تجمع بين المنتجات أو مختلطة . في كثير

من الاحيان المعادلة التفاضلية البسيطة توصف أي جزء من النظام ، ومن ثم كل الانظمة الفيزيائية توصف عن طريق نظام المعادلات التفاضلية .

كما في نظام بسيط لنظام من ثلاثة مراحل ، الشكل السابق يظهر ثلاثة خزانات ماء ملح تحوي v_1, v_2, v_3 جالون من المحلول الملحي ،علي التوالي .

المياه النقية تتدفق فى الخزان (1) ، عندما تخلط المحلول الملحي يتدفق من الخزان (1) الى الخزان (2) ، من الخزان (2) الي الخزان (3) ، و خارج الخزان (3). افرض $x_i(t)$ تعبر عن الكمية (بالباوند) من الملح في الخزان i في الزمن t لاي $i = 1,2,3$. اذا كان لاي معدل تدفق هو r جالون علي الدقيقة ، فان حساب بسيط لتركيز الملح ، تعطي النظام من الرتبة الاولي .

$$x_1' = -k_1 x_1 ,$$

$$x_2' = k_1 x_1 - k_2 x_2 , \qquad (16-3)$$

$$x_3' = \qquad k_2 x_2 - k_3 x_3$$

بحيث

$$k_i = \frac{r}{V_i} \quad , \quad i = 1,2,3 \qquad (17-3)$$

- **مثال(2):**

اذا كان $v_1 = 20 , v_2 = 40 , v_3 = 50 , r = 10(\frac{gal}{min})$ ، والكمية الابتدائية للملح في صهاريج ماء البحر أو ماء الملح الثلاثة ، بالرطل هي

$$x_1(0) = 15 , x_2(0) = x_3(0) = 0$$

اوجد كمية الملح في كل صهريج عند الزمن $t \geq 0$.

الحل

بتعويض القيم العددية في (16) و(17) , نحصل علي مسألة القيمة الابتدائية:

$$x'(t) = \begin{bmatrix} -0.5 & 0.0 & 0.0 \\ 0.5 & -0.25 & 0.0 \\ 0.0 & 0.25 & -0.2 \end{bmatrix} x, x(0) = \begin{bmatrix} 15 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad (18-3)$$

للمتجه $x(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad x_3(t)]^T$.الشكل المبسط للمصفوفة

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} -0.5-\lambda & 0.0 & 0.0 \\ 0.5 & -0.25-\lambda & 0.0 \\ 0.0 & 0.25 & -0.2-\lambda \end{bmatrix} \qquad (19-3)$$

تؤدي حالا الي المعادلة المميزة

$$|A - \lambda I| = (-0.5-\lambda)(-0.25-\lambda)(-0.2-\lambda) = 0$$

اذا مصفوفة المعاملات A في (18) له قيمة ذاتية مميزة

$\lambda_1 = -0.5\,, \lambda_2 = -0.25\ \ and\ \ \lambda_3 = -0.2$.

- **الحالة الاولي :** $\lambda = -0.5$

بتعويض $\lambda = -0.5$ في (19) ، نحصل علي المعادلة

$$[A + (0.5).I)\boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} 0.0 & 0.0 & 0.0 \\ 0.5 & 0.25 & 0.0 \\ 0.0 & 0.25 & 0.3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

في المتجه الذاتي المرتبط $\boldsymbol{v} = [a\ \ b\ \ c]^T$. آخر صفين بعد القسمة علي 0.25 و0.05 نسبيا ينتج المعادلات القياسية

$$2a + b \qquad = 0$$
$$5b + 6c = 0$$

المعادلة الثانية تتحقق عندما $b = -6, c = 5$ و من ثم المعادلة الاولي تعطي $a = 3$. اذا المتجه الذاتي $v_1 = [3\ \ -6\ \ 5]^T$ المرتبط مع القيمة الذاتية $\lambda_1 = -0.5$.

- **الحالة الثانية:** $\boldsymbol{\lambda_2 = -0.25}$

بتعويض $\lambda = -0.25$ في (19) ، نحصل علي المعادلة

$$[A + (0.25).I]v = \begin{bmatrix} -0.25 & 0 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0.25 & 0.05 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

المتجه الذاتي المرتبط $v = [3\ \ -6\ \ 5]^T$.كل من الصفين الاولين يؤدي الي ان $a = 0$ ، وعند قسمة الصف الثالث علي 0.05 تعطي المعادلة

$$5b + c = 0$$

التي تتحقق عندما $b = 1\,, c = -5$ ، اذا المتجه الذاتي

$v_2 = [0 \quad 1 \quad -5]^T$ هو المرتبط مع القيمة الذاتية $\lambda_2 = -0.25$.

- **الحالة الثالثة: $\boldsymbol{\lambda_3 = -0.2}$**

بتعويض $\lambda = -0.2$ في (19)، نحصل علي المعادلة

$$[A + (0.2).I]v = \begin{bmatrix} -0.3 & 0.0 & 0.0 \\ 0.5 & -0.05 & 0.0 \\ 0.0 & 0.25 & 0.0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

في المتجه الذاتي v .الصف الاول والثالث يقود الي+ ان $b = 0$ و $a = 0$ بالترتيب ، لكن كل اصفار العمود الثالث تترك c تكميليا (لكن ليس الصفر). اذا $v_3 =$ $[0 \quad 0 \quad 1]^T$ هو المتجة الذاتي المرتبط مع القيمة الذاتية $\lambda_3 = -0.2$.

الحل العام

$$x(t) = c_1 v_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 v_2 e^{\lambda_2 t} + c_3 v_3 e^{\lambda_3 t}$$

بناء علي ذلك تاخذ الصيغة

$$x(t) = c_1 \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \\ 5 \end{bmatrix} e^{(-0.5)t} + c_2 \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -5 \end{bmatrix} e^{(-0.25)t} + c_3 \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} e^{(-0.2)t}$$

نتيجة المعادلات القياسية هي :

$$x_1(t) = 3c_1 e^{(-0.25)t}$$

$$x_2(t) = -6c_1 e^{(-0.5)t} + c_2 e^{(-0.25)t}$$

$$x_3(t) = 5c_1 e^{(-0.5)t} - 5c_2 e^{(-0.25)t} + x_3 e^{(-0.2)t}$$

عندما نفترض الشروط الابتدائية $x_1(0) = 15, x_2(0) = x_3(0) = 0$ ، نحصل علي المعادلات

$$3c_1 \qquad = 15$$

$$-6c_1 + c_2 \quad = 0$$

$$5c_1 - 5c_2 + c_3 = 0$$

ويكون الحل لها هو $c_3 = 125$ و $c_2 = 30$ و $c_1 = 5$.اذا اخيرا ، كمية الملح عند الزمن t في صهاريج الماء الثلاثة معطية ب

$$x_1(t) = 15e^{(-0.5)t}$$

$$x_2(t) = -30e^{(-0.5)t} + 30e^{(-0.25)t}$$

$$x_3(t) = 25e^{(-0.5)t} - 150e^{(-0.25)t} + 125e^{(-0.2)t}$$

الشكل يوضح المخططات ل $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ كما توقعنا ،الصهريج (1) غسل بسرعة بواسطة دخول الماء ، و $x_1 \to 0 \ \ as \ t \to +\infty$. كمية الملح في الصهريج (2)و(3) في قمة الدورة ثم تقترب الي الصفر مثل نظام كل الصهاريج الثلاثة تشربت الملح عند $t \to +\infty$.

(4-3) القيم الذاتية المركبة :

بالرغم من ان بعض القيم الذاتية مركبة ، حتي انها مختلفة الطريقة المعروفة مسبقا حتي تنتج n حل مستقل خطيا .القيمة المركبة الوحيدة هي ان المتجهات الذاتية المرتبطة مع القيم الذاتية المركبة وهي عادة قيمت مركبة لذلك سنحصل علي حلول قيم مركبة .

للحصول علي حلول قيم حقيقية . نلاحظ ان – لاننا افترضنا ان المصفوفة A تحتوي علي قيم حقيقية فقط)- العوامل في المعادلة المميزة في (8) كلها تكون حقيقية . اذ أي قيمة ذاتية مركبة يجب ان تظهر في شكل ازواج مركبة . لنفرض ان $\lambda = p + qi$ و $\bar{\lambda} = p - qi$ هما قيمتين ذاتيتين مترافقتين . اذا كان v هو المتجه الذاتي المرتبط مع λ ،بحيث ان

$$(A - \lambda I)v = 0$$

ثم ناخذ المرافق المركبة في هذه المعادلة تنتج

$$\left(A - \bar{\lambda} I\right)\bar{v} = 0$$

بما ان $I = \bar{I}$ و $A = \bar{A}$ (هذه المصفوفات ذات قيم حقيقية) .اذا المرافق $\bar{v}$ ل v هو متجه ذاتي مرتبط مع $\bar{\lambda}$. طبعا مرافق المتجه يكون معرفا حدا بحد ، واذا كان :

$$v=\begin{bmatrix} a_1+b_1 i \\ a_2+b_2 i \\ \vdots \\ a_n+b_n i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} i=a+bi \qquad (20-3)$$

اذا $\bar{v}=a-bi$ الحل المركب المرتبط مع λ و v وثم

$$x(t)=ve^{\lambda t}=ve^{(p+qi)t}=(a+bi)e^{pt}(\cos qt+i\sin qt)$$

ومنه

$$x(t)=e^{pt}(a\cos qt-b\sin qt) + ie^{pt}(b cos\; pt+a\sin qt) \qquad (21-3)$$

لان الاجزاء الحقيقية والتخيلية لحل القيمة المركبة تكون ايضا حلول ، اذا نحصل علي حلي القيمة الحقيقية

$$x_1(t)=Re[x(t)]=e^{pt}(a\cos qt-b\sin qt) \qquad (22-3)$$
$$x_2(t)=Im[x(t)]=e^{pt}(b\cos qt+a\sin qt)$$

المرتبطة مع مرافق القيمة الذاتية المركبة $p\pm qi$. من السهل التاكد من نفس حلول القيمة الحقيقة التي تنتج من اخذ الاجزاء الحقيقية والتخيلية ل $\bar{v}e^{\bar{\lambda}t}$. بدلا من تذكر الصيغ المذكورة في (22) ، المفضلة في المثال لتجري أو تقدم كالاتي :

- اولا اوجد حل القيمة المركبة الوحيد الواضح $x(t)$ المرتبط مع القيمة الذاتية المركبة λ .
- ثم نوجد الاجزاء الحقيقية والتخيلية $x_1(t)$ و $x_2(t)$ لنحصل علي حلول القيم الحقيقية المستقلة المطابقة لمرافق القيم الذاتية المركبة λ و $\bar{\lambda}$.
- **مثال (3) :**

اوجد الحل العام للنظام

$$\frac{dx_1}{dt}=4x_1-3x_2 \qquad (23-3)$$
$$\frac{dx_2}{dt}=3x_1+4x_2$$

الحل

مصفوفة المعاملات

$$A=\begin{bmatrix} 4 & -3 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

لديها المعادلة المميزة

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 3 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^2 + 9 = 0$$

وبما ان لديه مرافق القيمة الذاتية المركبة $\lambda = 4-3i$ و $\bar{\lambda} = 4+3i$.

بتعويض $\lambda = 4-3i$ في معادلة المتجه الذاتي $(A-\lambda I)v = 0$ ، نحصل علي المعادلة

$$[A-(4-3i).I]v = \begin{bmatrix} 3i & -3 \\ 3 & 3i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

للقيمة الذاتية المرتبطة $v = [a \quad b]^T$. بقسمة كل صف علي 3 ينتج المعادلتين القياسيتين

$$ia - b = 0$$
$$a + ib = 0$$

كل من المعادلتين تتحقق عندما $a = 1 , b = i$ ،اذا $v = [1 \quad i]^T$ هي متجه ذاتي مركب مرتبط مع قيمة ذاتية مركبة $\lambda = 4-3i$.

حل القيمة المركبة المقابل $x(t) = ve^{\lambda t}$ ل $X' = Ax$ هي اذا :

$$x(t) = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{(4-3i)t} = \begin{bmatrix} 1 \\ i \end{bmatrix} e^{4t}(\cos 3t - i\sin 3t)$$
$$= e^{4t} \begin{bmatrix} \cos 3t - i\sin 3t \\ i\cos 3t + \sin 3t \end{bmatrix}$$

الاجزاء الحقيقية والتخيلية ل $x(t)$ هي حلول القيمة الحقيقية

$$x_1(t) = e^{4t} \begin{bmatrix} \cos 3t \\ \sin 3t \end{bmatrix} , x_2(t) = e^{4t} \begin{bmatrix} -\sin 3t \\ \cos 3t \end{bmatrix}$$

الحل العام للقيمة الحقيقية $X' = Ax$ اذا هي معطاة ب

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) = e^{4t} \begin{bmatrix} c_1\cos 3t - c_2 \sin 3t \\ c_1 \sin 3t + c_2 \cos 3t \end{bmatrix}$$

اخيرا ، الحل العام للنظام في (23) في الصورة القياسية هو

$$x_1(t) = e^{4t}(c_1 \cos 3t - c_2 \sin 3t) ,$$

$$x_2(t) = e^{4t}(c_1 \sin 3t + c_2 \cos 3t)$$

الرسم السابق يوضح بعض منحنيات الحل النموذجي او المثالي في النظام في (23) . ويظهر بشكل حلزوني او لولبي عكس اتجاه عقارب الساعة كما انها تبدأ من نقطة الاصل في المستوي-$x_1 x_2$.

حاليا ، بسبب العامل e^{4t} في الحل العام نري ان :

- بجانب كل منحني للحل النقطة $(x_1(t), x_2(t))$ تصل او تقترب من نقطة الاصل عندما $t \to \infty$ ، حيث ان :
- القيم المطلقة ل $x_1(t)\ , x_2(t)$ كلا منها تزداد بدون تغير مثلا $t \to= +\infty$

الرسم السابق يوضح نظام مغلق من لثلاثة صهاريج ماء ملح بحجم v_1, v_2, v_3 . الاختلاف بين هذه الانظمة والانظمة المفتوحة هو التدفق بداخل الصهريج (1) هو التدفق بخارج الصهريج (3) مع نفس الترقيم كما في المثال (2) ، والتعديل المناسب للمعادلة (16) هو :

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= -k_1 x_1 \qquad\qquad + k_3 x_3 \\
\frac{dx_2}{dt} &= \quad k_1 x_1 - k_2 x_2 \qquad\qquad\qquad (24-3) \\
\frac{dx_3}{dt} &= \qquad\qquad k_2 x_2 - k_3 x_3
\end{aligned}$$

بحيث $k_i = r/V_i$ كما في (17).

- **مثال (4):**

اوجد كمية $x_1(t)\ , x_2(t), x_3(t)$ للملح عند الزمن t في صهاريج ماء الملح الثلاثة ، اذا كان $v_1 = 50\ gal\ , v_2 = 25\ gal\ , v_3 = 50\ gal$ و $r = 10 \frac{gal}{min}$.

الحل

بالقيم العددية المعطاة ، المعادلة (24) تعطي من

$$\frac{dx}{dt} = \begin{bmatrix} -0.2 & 0 & 0.2 \\ 0.2 & -0.4 & 0 \\ 0 & 0.4 & -0.2 \end{bmatrix} x \qquad (25-3)$$

مع $\boldsymbol{x} = [x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T$ كالعادة . عندما نوجد المحدد للمصفوفة

$$A-\lambda I=\begin{bmatrix}-0.2-\lambda & 0 & 0.2\\ 0.2 & -0.4-\lambda & 0\\ 0 & 0.4 & -0.2-\lambda\end{bmatrix} \qquad (26-3)$$

علي طول الصف الاول ، سوف نوجد المعادلة المميزة ل A وهي :

$$(-0.2-\lambda)(-0.4-\lambda)(-0.2-\lambda)+(0.2)(0.2)(0.4)$$

$$=-\lambda^3-(0.8)\lambda^2-(0.2)\lambda$$

$$=-\lambda[(\lambda+0.4)^2+(0.2)^2]=0$$

اذا A لديه قيمه ذاتية صفرية $\lambda_0=0$ ومرافق مركب للقيم الذاتية λ ، $\bar{\lambda}=-0.4\pm$. $(0.2)i$

- **الحالة 1: $\boldsymbol{\lambda_0=0}$**

بتعويض قيمة $\lambda=0$ في المعادلة (26) تعطي معادلة القيمة الذاتية

$$(A-0.I)v=\begin{bmatrix}-0.2 & 0.0 & 0.2\\ 0.2 & -0.4 & 0.0\\ 0.0 & 0.4 & -0.2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\ b\\ c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\ 0\\ 0\end{bmatrix}$$

ل $v=[a \quad b \quad c]^T$. الصف الاول يعطي $a=c$ والصف الثاني يعطي $a=2b$ ، اذا $v_0=[2 \quad 1 \quad 2]^T$ هو المتجه الذاتي المرتبط مع القيمة الذاتية $\lambda_0=0$. الحل المقابل $x_0(t)=v_0e^{\lambda_0 t}$ للمعادلة (25) هو الحل الثابت

$$x_0(t)=\begin{bmatrix}2\\ 1\\ 2\end{bmatrix} \qquad (27-3)$$

- **الحالة 2: $\boldsymbol{\lambda=-0.4-(0.2)i}$**

بتعويض $\lambda=-0.4-(0.2)i$ في المعادلة (26) تعطي معادلة القيمة الذاتية

$$[A-(-0.4-(0.2)i)I]v = \begin{bmatrix} -0.2+(0.2)i & 0 & 0.2 \\ 0.2 & (-0.2)i & 0 \\ 0 & 0.4 & -0.2+(0.2)i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

المعادلة الثانية $(0.2)a = (0.2)ib = 0$ تتحقق عندما $a = 1 \; and \; b = i$ فان
المعادلة الاولي $[0.2+(0.2)i]a + (0.2)c = 0$ تعطي $c = -1-i$ اذا
$v = [1 \quad i \quad (-1-i)]^T$ هو المتجه الذاتي المركب المرتبط مع القيمة الذاتية
المركبة $\lambda = -0.4-(0.2)i$.

قيمة الحل المركب المقابل $x(t) = ve^{\lambda t}$ للمعادلة (25) هو

$$x(t) = [1 \quad i \quad (-1-i)]^T e^{(-0.4-0.2i)t}$$

$$= [1 \quad i \quad -1-i]^T e^{(-0.4-0.2i)t}(\cos 0.2t - i\sin 0.2t)$$

$$= e^{(0.4)t}\begin{bmatrix} \cos 0.2t - i\sin 0.2t \\ \sin 0.2t + i\cos 0.2t \\ -\cos 0.2t - \sin 0.2t - i\cos 0.2t + i\sin 0.2t \end{bmatrix}$$

الاجزاء الحقيقية والتخيلية ل $x(t)$ هي القيمة الحقيقية للحلول

$$x_1(t) = e^{(-0.4)t}\begin{bmatrix} \cos 0.2t \\ \sin 0.2t \\ -\cos 0.2t - \sin 0.2t \end{bmatrix}$$

$$(28-3)$$

$$x_2(t) = e^{(-0.4)t}\begin{bmatrix} -sin 0.2t \\ \cos 0.2t \\ -\cos 0.2t + \sin 0.2t \end{bmatrix}$$

الحل العام $x(t) = c_0x_0(t) + c_1x_0(t) + c_2x_2(t)$ له المكونات القياسية

$$x_1(t) = 2c_0 + e^{(-0.4)t}(c_1\cos 0.2t - c_2\sin 0.2t)$$

$$x_2(t) = c_0 + e^{(-0.4)t}(c_1\sin 0.2t + c_2\cos 0.2t)$$

$$x_3(t) = 2c_0 + e^{(-0.4)t}[(-c_1 - c_2)\cos 0.2t + (-c_1 + c_2)\sin 0.2t] \qquad (29-3)$$

تعطي كمية الملح في الصهاريج الثلاثة عند الزمن t . نلاحظ ان

$$x_1(t) + x_2(t) + x_3(t) \equiv 5c_0 \qquad (30-3)$$

بالتاكيد الكمية الكلية للملح في النظام المقفل هي ثابتة ، الثابت c_0 في المعادلة (30) هو اول خمس من الكمية الكلية للملح . بسبب العامل $e^{(-0.4)t}$ في المعادلة (29) ،نري ان :

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) = 2c_0 \,, \lim_{t\to\infty} x_2(t) = c_0 \,, and \quad \lim_{t\to\infty} x_3(t) = 2c_0$$

اذا عندما $t \to +\infty$ الملح في النظام يصل الي الحالة الثابتة مع 40% للملح في كل اثنين 50 جالون للصهريج و 20% في 25 جالون للصهريج . اذا مهما كان التوزيع البدائي للملح ضمن الصهاريج الثلاثة ، تحديد التوزيع يكون اول تركيز موحد خلال النظام .الرسم يوضح المخطط لدوال الثلاثة حلول مع

$c_0 = 10 \,, c_1 = 30 \; and \; c_2 = -10$ في كل حالة

$x_1(0) = 50 \; and \; x_2(t) = x_3(t) = 0$.

الباب الرابع

الانظمة الخطية والمصفوفات الاسية

الانظمة الخطية والمصفوفات الاسية

(1-4) مقدمة:

متجهات الحل للنظام الخطي المتجانس $n \times n$

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} \qquad (1-4)$$

سوف يتم بناء المصفوفة المربعة $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\phi}(t)$ التي تحقق المعادلات التفاضلية للمصفوفة .

$$X' = AX \qquad (1'-4)$$

افرض ان $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ هي n حل مستقل للمعادلة (1) . فان المصفوفة $n \times n$

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ x_1(t) & x_2(t) & \cdots & x_n(t) \\ | & | & & | \end{bmatrix} \qquad (2-4)$$

لدينا متجهات الحل كمتجه عمود ، تسمي المصفوفة الاساسية لنظام واحد.

(2-4) حلول المصفوفة الاساسية :

لان متجه العمود $x = x_j(t)$ للمصفوفة الاساسية $\boldsymbol{\phi}(t)$ في (2) تحقق المعادلة التفاضلية للمصفوفة $x' = Ax$، يظهر (من التعريف لضرب المصفوفة) ان المصفوفة $\boldsymbol{X} = \boldsymbol{\phi}(t)$ نفسها تحقق المعادلة التفاضلية $\boldsymbol{X}' = \boldsymbol{A}\boldsymbol{X}$ .. لانها متجهات العمود المستقلة خطيا وايضا يظهر ان المصفوفة الاساسية $\boldsymbol{\phi}(t)$ ليست وحيدة أو شاذة . ولذلك لها معكوس المصفوفة $\boldsymbol{\phi}(t)^{-1}$. والعكس بالعكس ، وايضا حل مصفوفة غير شاذة $\Psi(t)$ للمعادلة ('1) له متجهات عمود مستقلة خطيا وتحقق المعادلة (1) .اذا$\Psi(t)$ هي المصفوفة الاساسية للنظام في (1) .

حيث المصفوفة الاساسية $\boldsymbol{\phi}(t)$ في (2) تكون الحل العام

$$x(t) = c_1 x$$

للنظام $x' = Ax$ يمكن ان يكتب علي الصيغة

$$x(t) = \boldsymbol{\phi}(t)c \qquad (4-4)$$

حيث $c = [c_1 \ \ c_2 \ \ \dots \ \ c_n]^T$ هي ثوابت متجه اختيارية .اذا كان $\Psi(t)$ هي تركيب خطي لمتجهات العمود $\boldsymbol{\phi}(t)$ ولذلك ينتج من المعادلة (4) ان

$$\Psi\ (t) = \boldsymbol{\phi}(t)C \qquad (4'-4)$$

لبعض مصفوفة الثوابت C التي ابعادها $n \times n$.

في النظام للحل $x(t)$ في (3) يحقق الشروط الابتدائية المعطاة

$$x(0) = x_0 \qquad (5-4)$$

يكفي ان يكون متجه المعامل c في (4) يصبح $\boldsymbol{\phi}(t)c = x_0$ هو

$$c = \boldsymbol{\phi}(t)^{-1}x_0 \qquad (6-4)$$

عندما نعوض (6) في المعادلة (4) نحصل علي خلاصة النظرية التالية .

- **نظرية (1) : حلول المصفوفة الاساسية**

ليكن $\boldsymbol{\phi}(t)$ مصفوفة اساسية للنظام الخطي المتجانس $x' = Ax$ فان الحل (الوحيد) لمسألة القيمة الابتدائية

$$x' = Ax \quad , x(0) = x_0 \qquad (7-4)$$

$$x(t) = \boldsymbol{\phi}(t)\boldsymbol{\phi}(t)^{-1}x_0 \qquad \text{يعطي ب} \qquad (8-4)$$

نحن نعرف كيفيه ايجاد المصفوفة الاساسية للنظام

$$x' = Ax \qquad (9-4)$$

وله مصفوفة المعاملات الثابتة A , علي الاقل يفي الحالة التي فيها A لها مجموعة n من المتجهات الذاتية $v_1, v_2, \dots, v_n$ مقابلة للقيم الذاتية $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ علي التوالي في هذه الحالة متجهات الحلول المقابلة للمعادلة (9) تعطي ب $x_i(t) = v_i e^{\lambda_i t}$ لاي $i =$ $1,2,3, \dots, n$ ، لذلك المصفوفة $n \times n$

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \begin{bmatrix} | & | & & | \\ v_1 e^{\lambda_1 t} & v_2 e^{\lambda_2 t} & \cdots & v_n e^{\lambda_n t} \\ | & | & & | \end{bmatrix} \qquad (10-4)$$

لها الحلول $x_1, x_2, \dots, x_n$ كمتجهات عمود هي المصفوفة الاساسية للنظام $x' = Ax$.

بدلا من تطبيق المعادلة (8) يجب ان نكون قادرين علي حساب معكوس المصفوفة $\boldsymbol{\phi}(t)^{-1}$. معكوس المصفوفة ذات البعد 2×2 غير الشاذة .

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \qquad \text{هو} \qquad (11-4)$$

حيث $\Delta = \det(A) = ad - bc \neq 0$ (Δ المحدد) . معكوس المصفوفة غير الشاذة $A = [a_{ij}]$ التي ابعادها 3×3 تعطي ب:

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta}\begin{bmatrix} +A_{11} & -A_{12} & +A_{13} \\ -A_{21} & +A_{22} & -A_{23} \\ +A_{31} & -A_{32} & +A_{33} \end{bmatrix}^T \qquad (12-4)$$

حيث Δ =المحدد ل $A \neq 0$ ، و A_{ij} ترمز الي محدده المصفوفة الفرعية 2×2 من المصفوفة A المحسوبة ب حزف الصف i والعمود j من A (لا تنسي رمز المصفوفات $n \times n$ في المعادلة (12)) . الصيغة في (12) ايضا متاحة بالتعميم للمصفوفات $n \times n$ لكن عمليا المعكوس للمصفوفات عادة لا يحسب بدلا من ذلك بطريق اختزال الصف أو باستخدام الحاسبة أو باستخدام نظام جبري عن طريق الحاسوب .

- **مثال (1):**

اوجد المصفوفة الاساسية للنظام

$$x' = 4x + 2y \qquad (13-4)$$

$$y' = 3x - y$$

ثم استخدمة لايجاد حل ل (13) يحقق الشروط الابتدائية

$$y(0) = -1 \ , \ \ x(0) = 1$$

الحل

الحلول الخطية المستقلة

$$x_1(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} \\ -3e^{-2t} \end{bmatrix} \ \ and \ x_2(t) = \begin{bmatrix} 2e^{5t} \\ e^{5t} \end{bmatrix}$$

نجد في المثال (1) ,ينتج المصفوفة الاساسية

$$\boldsymbol{\phi}(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{bmatrix} \qquad (14-4)$$

فان

$$\boldsymbol{\phi}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

والصيغة في (11) تعطي معكوس المصفوفة

$$\boldsymbol{\phi}(t)^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix} \qquad (15-4)$$

من هنا الصيغة في (8) تعطي الحل

$$x(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{bmatrix}\left(\frac{1}{7}\right)\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

$$= (\frac{1}{7})\begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

ومنه

$$x(t) = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 3e^{-2t} + 4e^{5t} \\ -9e^{-2t} + 2e^{5t} \end{bmatrix}$$

وبالتالي يتم اعطاء حل لمسألة القيمة الابتدائية الاصلية

$$x(t) = \frac{3}{7}e^{-2t} + \frac{4}{7}e^{5t} \, , y(t) = \frac{-9}{7}e^{-2t} + \frac{2}{7}e^{5t}$$

- **ملاحظة :** مميزات اضافية للمصفوفة الاساسية هي : بمجرد معرفة المصفوفة الاساسية $\boldsymbol{\phi}(t)$ ومعكوس المصفوفة $\boldsymbol{\phi}(t)^{-1}$ ، يمكننا الحساب بسرعة عن طريق ضرب مصفوفة الحلول مطابقة لشروط ابتدائية مختلفة, علي سبيل المثال ، افرض اننا نسعي لحل النظام (13) تحقق الشروط الابتدائية الجديدة $x(0) = 77\,, y(0) = 49$.يمكننا تعويض (14) و (15) في (8) يعطي الحل الخاص الجديد

$$x(t) = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 77 \\ 49 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -21 \\ 280 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3e^{-2t} + 80e^{5t} \\ 9e^{-2t} + 40e^{5t} \end{bmatrix}$$

(3-4) المصفوفات الاسية :

الان نناقش احتمالية بناء المصفوفة الاساسية لمعامل النظام الخطي $x' = Ax$ مباشرة من مصفوفة المعاملات A التي وضعت اولا لايجاد المجموعة الخطية المستقلة للمتجهات .

لقد راينا الدوال الاسية للدوال الاسية الدور الرئيسي لحل الانظمة والمعادلات التفاضلية الخطية . تمتد من المعادلات القياسية $x' = kx$ مع الحل $x(t) = x_0e^{kt}$ الي حل المتجه $x(t) = ve^{\lambda t}$ في النظام الخطي $x' = Ax$ بحيث مصفوفة المعاملات A لديها القيمة الذاتية λ مع المتجه الذاتي المرتبط v . الان نعرف الاسيات للمصفوفات بانه

$$x(t) = e^{t}$$

هو مصفوفة الحل للمصفوفة المعادلة التفاضلية

$$X' = \mathrm{AX}$$

مع مصفوفة المعاملات $A_{n\times n}$ في تماثل مع حقيقة ان الدالة الاسية العادية $x(t) = e^{at}$ تكون حل قياسي للمعادلة التفاضلية من الرتبة الاولي $x' = ax$.

الاسي e^{z} للعدد المركب z يمكن ان يعرف عن طريق متسلسلة الاسي

$$e^{z} = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots \qquad (16-4)$$

بنفس الطريقة اذا كانت A هي مصفوفة ابعادها $n\times n$ فان المصفوفة الاسية e^{A} هي مصفوفة ابعادها $n\times n$ تعرف بالمتسلسلة :

$$e^{A} = I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots + \frac{A^n}{n!} + \cdots, \qquad (17-4)$$

بحيث I هي المصفوفة المحايدة . المعني من المتسلسلة اللانهائية في الجزء الايمن من (17) يعطي ب

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \lim_{k\to\infty} \left(\sum_{n=0}^{k} \frac{A^n}{n!}\right) \qquad (18-4)$$

بحيث ان $A^0 = I\ , A^2 = AA\ , A^3 = AA^2$ وهكذا بالاستنتاج $A^{n+1} =$ $AA^n\ , if\ n \geq 0$. يمكن اظهار ان النهاية في (18)موجودة لاي مصفوفة A مربعة ابعادها$n \times n$.المصفوفة الاسية e^A تعرف (بالمعادلة (17)) لاي مصفوفة مربعة A .

- **مثال (2):**

اعتبر المصفوفة القطرية التي ابعادها 2×2

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix}$$

فان من الواضح ان $A^n = \begin{bmatrix} a^n & 0 \\ 0 & b^n \end{bmatrix}$

لاي عدد صحيح n>1 لذلك فان يتبع ذلك

$$e^A = I + A + \frac{A^2}{2!} + \cdots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} a^2/2! & 0 \\ 0 & b^2/2! \end{bmatrix} + \cdots$$

$$= \begin{bmatrix} 1 + a + \frac{a^2}{2!} + \cdots & 0 \\ 0 & 1 + b + \frac{b^2}{2!} + \cdots \end{bmatrix}$$

وبالتالي $e^A = \begin{bmatrix} e^a & 0 \\ 0 & e^b \end{bmatrix}$

لذلك القطر للمصفوفة الاسية $A_{n\times n}$ يتم الحصول علية ببساطة عن طريق الاسي لاي عنصر في القطر للمصفوفة A .

ال $n \times n$ تماثل نتيجة 2×2 في المثال (2) وتكون بنفس طريقة الاسي للمصفوفة القطرية $n \times n$

$$D = \begin{bmatrix} a_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_n \end{bmatrix} \qquad (19-4)$$

هي المصفوفة ذات البعد $n \times n$

$$e^D = \begin{bmatrix} e^{a_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{a_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & e^{a_n} \end{bmatrix} \qquad (20-4)$$

يتم الحصول عليها بالتاثير بالاس e لاي عنصر في القطر الرئيسي في المصوفة D .

المصفوفة الاسية e^A تحقق معظم العلاقات الاسية المألوفة في حالة الاس القياسي . علي سبيل المثال . اذا كان 0 هي مصفوفة صفرية بعدها $n \times n$.فان المعادلة (17) تعطي المصفوفة المحايدة

$$e^0 = I \qquad (21-4)$$

في المثال (31) سألنا عن اظهار فوائد قانون الاس للمصفوفات ذات البعد $n \times n$ والتي تحقق شروط الابدال

$$e^{A+B} = e^A e^B \text{ فان } AB = BA \text{ اذا كان} \qquad (22-4)$$

في المسألة (32) سألنا عن استنتاج خاصة

$$(e^A)^{-1} = e^{-A} \qquad (23-4)$$

المصفوفة e^A غير الشاذة لاي مصفوفة A ابعادها $n \times n$ (تذكر حقيقة ان $e^z \neq 0$ لاي z) يظهر من اساسيات الجبر الخطي ان متجهات عمود ل e^A دائما مستقلة خطيا .

اذا كان t هو متغير قياسي فاننا نعوض At بدل A في المعادلة (17) تعطي

$$e^{At} = I + At + A^2\frac{t^2}{2!} + \cdots + A^n\frac{t^n}{n!} + \cdots \qquad (24-4)$$

(بالطبع At يتم الحصول عليها ببساطة عن طريق ضرب أي عنصر في A في المتغير t).

مثال (3) :

اذا كان

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$ فان

$$A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad و \quad A^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

فان $A^n = 0$ لاي $n \geq 0$. فانه ينتج من المعادلة (24) ان

$$e^{At} = I + At + \frac{1}{2}A^2t^2$$

$$= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} t + \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 18 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} t^2,$$

ومنه

$$e^{At} = \begin{bmatrix} 1 & 3t & 4t + 9t^2 \\ 0 & 1 & 6t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ملاحظة : اذا كان $A^n = 0$ لبعض الاعداد الصحيحة الموجبة n فان المتسلسلة الاسية في (24) تنتهي بعد عدد صحيح من الشروط اذن المصفوفة الاسية (e^A) (أو e^{At}) تحسب بسهولة كما ف المثال (3) . مثل هذه المصفوفة – التي يختص الاس فيها – يمكن ان تسمي غير فعالة .

مثال (4) :

اذا كان
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

A

بحيث $D = 2I$ هي مصفوفة قطرية وB هي مصفوفة غير فعالة للمثال (3) لذلك (20) و(22) تعطي

$$e^{At} = e^{(D+B)t} = e^{Dt}e^{Dt} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2t} & 0 \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3t & 4t+9t^2 \\ 0 & 1 & 6t \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

ومنه
$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 3te^{2t} & (4t+9t^2)e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & 6te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

(4-4) حلول المصفوفة الاسية :

يحدث ذلك المدة بواسطة تفاضل السلسلة في (24) هي صحيحة . مع النتيجة

$$\frac{d}{dt}(e^{At}) = A + A^2 t + A^3 \frac{t^2}{2!} + \cdots$$

$$A\left(I + At + A^2 \frac{t^2}{2!} + \cdots\right)$$

ومنه
$$\frac{d}{dt}(e^{At}) = Ae^{At} \qquad (25-4)$$

تشبيها له بالصيغة $D_t(e^{kt}) = ke^{kt}$ من مبادئ الحسبان .وبالتالي قيمة مصفوفة الدالة

$$X(t) = e^{At}$$

تحقق المعادلة التفاضلية $X' = AX$

لان المصفوفة e^{At} ليست شاذة . ويتبع ذلك المصفوفة الاسية e^{At} هي المصفوفة الاساسية للنظام الخطي $x' = Ax$ علي وجه الخصوص هي المصفوفة الاساسية x(t) عندما x(0)=1 ومن ثم النظرية (1) تؤدي الي النتائج التالية .

- **نظرية (2): حلول المصفوفة الاسية**

اذا كانت A هي المصفوفة التي ابعادها $n \times n$ اذا الحل لمسألة القيمة الابتدائية

$$x' = Ax \quad , \quad x(0) = x_0 \qquad (26-4)$$

$$x(t) = e^{At}x_0 \quad \text{تعطي ب} \qquad (27-4)$$

وهذا الحل وحيد .

وبالتالي الحل للانظمة الخطية المتجانسة يقلل من علامة حساب المصفوفات الاسية .

علي العكس اذا كنا نعرف مسبقا المصفوفة الاساسية $\phi(t)$ علي النظام الخطي $x' = Ax$ ، اذا الحقيقة ان $e^{At} = \phi(t)C$ (بواسطة المعادلة $(4')$) و $e^{A.0} = e^0 = I$ (المصفوفة المحايدة) تحقق

$$e^{At} = \phi(t)\phi(t)^{-1} \qquad (28-4)$$

لذا يمكننا ايجاد المصفوفة الاسية e^{At} عن طريق حل النظام الخطي $x' = Ax$.

- **مثال (5):**

في المثال (1) اوجدنا النظام $x' = Ax$ مع

$$A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

لديه المصفوفة الاساسية

$$\phi(t) = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{bmatrix} \quad \text{مع} \quad \phi(t)^{-1} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

حيث ان المعادلة (28) تعطي

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{-2t} & 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} & e^{5t} \end{bmatrix} \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$= \frac{1}{7}\begin{bmatrix} e^{-2t} + 6e^{5t} & -2e^{-2} + 2e^{5t} \\ -3e^{-2t} + 3e^{5t} & 6e^{-2t} + e^{5t} \end{bmatrix}$$

- **مثال (6):**

استخدم المصفوفة الاسية لحل مسألة القيمة الابتدائية

$$x' = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} x \quad , \quad x(0) = \begin{bmatrix} 19 \\ 29 \\ 39 \end{bmatrix} \qquad (29-4)$$

الحل

مصفوفة المعاملات A في (29) من الواضح ان لديها المعادلة المميزة $= (2-\lambda)^3$ 0 لديها القيم الذاتية $\lambda = 2$ مكررة ثلاثة مرات . من السهل رؤية ان معادلة المتجة الذاتي

$$(A-2I)v = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

لديها حل وحيد $v = [1 \quad 0 \quad 0]^T$. وبالتالي لدينا متجة ذاتي وحيد مرتبط مع القيمة الذاتية $\lambda = 2$ وكذلك ليس لدينا بعد الحلول الخطية المستقلة التي تحتاجها المصفوفة الاساسية ولكن نلاحظ ان A هي نفس المصفوفة الاسية

$$e^{At} = \begin{bmatrix} e^{2t} & 3te^{2t} & (4t+9t^2)e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & 6te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix}$$

التي حسبت في المثال (4). وبالتالي نستخدم النظرية (2) الحل لمسألة القيم الابتدائية في (29) تعطي ب

$$x(t) = e^{At}x(0) = \begin{bmatrix} e^{2t} & 3te^{2t} & (4t+9t^2)e^{2t} \\ 0 & e^{2t} & 6te^{2t} \\ 0 & 0 & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 \\ 29 \\ 39 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (19+243t+351t^2)e^{2t} \\ (29+234t)e^{2t} \\ 39e^{2t} \end{bmatrix}$$

ملاحظة: نفس الحل الخاص x(t) كما في المثال (6) يمكن ايجاده باستخدام نظرية المتجه الذاتي العامة . بمجرد البدء من خلال ايجاد السلسلة في المتجه الذاتي العام

$$v_1 = \begin{bmatrix} 18 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix} 4 \\ 6 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

المرتبطة بالقيمة الذاتية $\lambda = 2$ المكررة ثلاثة مرات للمصفوفة A. وبالتالي باستخدام المعادلة (27) التي تجمع الحلول الخطية المستقلة

$$x_1(t) = v_1(t)\,, x_2(t) = (v_1 t + v_2)e^{2t}\,,$$

$$x_3(t) = (\frac{1}{2}v_1 t^2 + v_2 t + v_3)e^{2t}$$

للمعادلات التفاضلية $x' = Ax$ في (29) .الخطوة الاخيرة نوجد قيم المعاملات $c_1, c_2, \dots, c_n$ وبالتالي الحل الخاص $x(t) = c_1x_1(t) + c_2x_2 + c_3x_3(t)$ يحقق الشروط الابتدائية في (29) . ف هذه النقطة يجب توضيح ان – خاصة اذا كانت المصفوفة الاسية $e^{\mathrm{A}t}$ بسيطة المتغيرات (علي سبيل المثال، من نظام الجبر المحوسب) – النظرية توضح في المثال (6) اكثر "من حاسبة روتينية "من نظرية المتجه الذات العامة .

- **نظرية المتجه الذاتي العامة :**

حساب النسبي البسيط لل e^{At} حزفت من المثال (4) (واستخدمت في المثال (6)) مع ملاحظه انه اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

فان $A - 2I$ هي غير فعالة

$$(A - 2I)^3 = \begin{bmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = 0 \qquad (30-4)$$

نفس النتيجة المتحققة لاي مصفوفة A ابعادها 3×3 لديها قيمه ذاتية r مكررة ثلاث مرات ، المعادلة المميزة تختزل الي $(\lambda - r)^3 = 0$. يوجد بعض المصفوفات الواضح حسابيا التي تشابه المعادلة (30) وسوف نري ذلك

$$(A - rI)^3 = 0 \qquad (31-4)$$

(وهذه النتيجة الخاصة عبارة عن حالة خاصة لنظرية (كالي-هاميلتونcayley-hamilton) للمتغيرات الخطية بالنسبة لاي مصفوفة تحقق المعادلة المميزة لها) وبالتالي المصفوفة $A + rI$ هي غير فعالة، وتبعا لذلك

$$e^{At} = e^{(rI + A - rI)} = e^{rIt}.e^{(A-r)t}$$

$$= e^{rt}I.\left[I + (A - rI)t + \frac{1}{2}(A - rI)^2 t^2\right] \qquad (32-4)$$

المتسلسلة الاسية هنا تنتهي بسبب المعادلة (31) . بهذه الطريقة يمكن حساب المصفوفة الاسية e^{At} بسهولة لاي مصفوفة مربعة لها متجة ذاتي وحيد .

للحساب في المعادلة(32) بمساعدة النظرية لحساب e^{At} لاي مصفوفة A ابعادها $n \times n$ ، المصفوفة A لديها n متجه ذاتي خطي مستقل عام $u_1, u_2, \dots, u_n$.

لاي متجه ذاتي مستقل u مرتبط مع قيمة ذاتية λ للA uوتكون الرتبة $r \geq 1$ بحيث ان

$$(A - \lambda I)^r u = 0 \quad but\ (A - \lambda I)^{r-1} u \neq 0 \qquad (33-4)$$

(اذا كان r=1 فان u متجه ذاتي عادي حيث $Au = \lambda u$)

حتي وان كنا لا نعرف e^{At} خاصا ، سوف نعتبر ان الدالة $x(t) = e^{At}u$ ، التي تكون مجموعة متجهات الاعمدة الخطية ل e^{At} ومن ثم تكون حل النظام الخطي $x' = Ax$ مع $x(0) = u$. في الواقع يمكننا حساب x صراحة بالنسبة ل $A, u, \lambda\ and\ r$

$$x(t) = e^{At}u = e^{(\lambda I + A - \lambda I)t}u = e^{\lambda I t}e^{(A - \lambda I)t}u$$

$$= e^{\lambda t}I\left[I + (A - \lambda I)t + \cdots + (A - \lambda I)^{r-1}\frac{t^{r-1}}{(r-1)!} + \cdots\right]u$$

ومنه

$$x(t) = e^{\lambda t}\left[u + (A - \lambda I)ut + (A - \lambda I)^2 u\frac{t^2}{2!} \dots \right.$$
$$\left. + (A - \lambda I)^{r-1} u\frac{t^{r-1}}{(r-1)!}\right] \qquad (34-4)$$

وباستخدام (33) وحقيقة ان $e^{\lambda I t} = e^{\lambda t}I$.

اذا كانت الحلول الخطية المستقلة $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ ل $x' = Ax$ حسبت باستخدام (34) مع المتجهات الخطية المستقلة العامة $u_1, u_2, \dots, u_n$. فان المصفوفة التي ابعادها $n \times n$

$$\boldsymbol{\phi}(t) = [x_1(t) \quad x_2(t) \quad \dots \quad x_n(t)] \qquad (35-4)$$

هي المصفوفة الاساسية للنظام $x' = Ax$. اخير المصفوفة الاساسية المحددة $X(t) = \boldsymbol{\phi}(t)\boldsymbol{\phi}(t)^{-1}$ تحقق الشروط الابتدائية $X(0) = I$، وبالتالي فهي المصفوفة الاسية e^t المطلوبة . ومن ثم لدينا في الكتب البرهان للنظرية التالية.

- **نظرية (3): حساب e^{At}**

افرض ان $u_1, u_2, \dots, u_n$ هي n متجه ذاتي مستقل عام للمصفوفة A التي ابعادها $n \times n$ لاي $1 \le i \le n$ ، افرض ان $x_i(t)$ هي الحل ل $x' = Ax$ معطي بواسطة (34) ، بتعويض $u = u_i$ والقيمة الذاتية المرتبطة λ والرتبة r للمتجه الذاتي العام u_i . اذا كانت المصفوفة الاساسية $\boldsymbol{\phi}(t)$ تعرف بواسطة (35) فان

$$e^{At} = \boldsymbol{\phi}(t)\boldsymbol{\phi}(t)^{-1} \qquad (36-4)$$

- **مثال (7):**

اوجد e^{At} اذا كانت

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad (37-4)$$

النظرية (3) يمكن ان تطبق حتي وان لم تكن المصفوفة A مثلثيه علوية ولكن لان A مثلثيه علوية هذه الحقيقية تمكننا من ان نري بسرعة ان المعادلة المميزة هي $(5-\lambda)(3-\lambda)^2 = 0$.

وهكذا A لها القيمة الذاتية المختلفة $\lambda_1 = 5$ والقيمة الذاتية المتكررة $\lambda_2 = 3$.

- **الحالة الاولي : $\boldsymbol{\lambda_1 = 5}$**

معادلة المتجه الذاتي $(A - \lambda I)u = 0$ ل $u = [a \;\; b \;\; c]^T$ هي

$$(A - 5I)u = \begin{bmatrix} -2 & 4 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

اخر معادلتين قياسيتين $4c = 0 \, , -2c = 0$ تعطي $c = 0$.

وعليــه المعادلــة الاولــي $-2a+4b=1$ محققــه عنــد $a=2\,,b=1$ وهكــذا القيمـة الذاتيـة $\lambda_1=5$ لهـا متجـه عمـود (عـادي) $u_1=[2\quad 1\quad 0]^T$ الحل المقابل للنظام $x'=Ax$ هو

$$x_1(t)=e^{5t}u_1=e^{5t}[2\quad 1\quad 0]^T \qquad (38-4)$$

- **الحالة الثانية : $\lambda_2=3$**

معادلة المتجه الذاتي $(A-\lambda I)u=0$ ل $u=[a\ \ b\ \ c]^T$ هي

$$(A-3I)u=\begin{bmatrix}0&4&5\\0&2&4\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

اول معــادلتين $2b+4c=0\ ,4b+5c=0$ تقتضــي ان $b=c=0$ ، ولكــن تتـرك اختياريـا . هكـذا القيمـة المميـزة $\lambda_2=3$ لـديها متجـه عمـود (عـادي) وحيـد $u_2=[1\quad 0\quad 0]^T$. الحل المقابل للنظام $x'=Ax$ هو

$$x_2(t)=e^{3t}u_2=e^{3t}[1\quad 0\quad 0]^T \qquad (39-4)$$

للنظر للمتجه الذاتي العام الذي رتبته $r=2$ في المعادلة (33) ، نعتبر المعادلة

$$(A-3I)^2u=\begin{bmatrix}0&8&16\\0&4&8\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a\\b\\c\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$$

اول معــادلتين $4b+8c=0\ ,8b+16c=0$ تتحقق عنـد $b=2\,,c=1$ ، ولكـن تترك اختياريا . عند $a=0$ نحصل علي المتجه الذاتي العام $u_3=[0\quad 2\quad -1]^T$ الذي رتبتـه $r=2$ المرتبط مع القيمـة الذاتيـة $\lambda=3$. لان $(A-3I)^2u=0$ المعادلـة (34) تحقق الحل الثالث

$$x_3(t)=e^{3t}[u_3(A-3I)u_3t]$$

$$=e^{3t}\left(\begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix}+\begin{bmatrix}0&4&5\\0&2&4\\0&0&0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\2\\-1\end{bmatrix}t\right)=e^{3t}\begin{bmatrix}3t\\2\\-1\end{bmatrix} \qquad (40-4)$$

بالحلول المذكورة في المعادلة (39) و (40) ، المصفوفة الاساسية

$$\boldsymbol{\phi}(t)=[x_1(t)\quad x_2(t)\quad x_3(t)]$$

تعرف بواسطة المعادلة (35) بانها

$$\boldsymbol{\phi}(t)=\begin{bmatrix}2e^{5t} & e^{3t} & 3te^{3t}\\ e^{5t} & 0 & 2e^{3t}\\ 0 & 0 & -e^{3t}\end{bmatrix},with\ \boldsymbol{\phi}(t)^{-1}=\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & -2 & -4\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

وبالتالي النظرية (3) اخيرا تحقق

$$e^{At}=\boldsymbol{\phi}(t)\boldsymbol{\phi}(t)^{-1}$$

$$=\begin{bmatrix}2e^{5t} & e^{3t} & 3te^{3t}\\ e^{5t} & 0 & 2e^{3t}\\ 0 & 0 & -e^{3t}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1 & 2\\ 1 & -2 & -4\\ 0 & 0 & -1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}e^{3t} & 2e^{5t}-2e^{3t} & 4e^{5t}-(4+3t)e^{3t}\\ 0 & e^{5t} & 2e^{5t}-2e^{3t}\\ 0 & 0 & e^{3t}\end{bmatrix}$$

- **ملاحظة :** كما في المثال (7) ، النظرية (3) تكفي لعملية الحساب ل e^{At} تبرهن لايجاد الاساس للمتجة الذاتي العام ل A يمكن ايجاده .

المراجع :

- [1] R.HABERMAN,ELEMENTARY APPLIED PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS , 1987 , USA.
- [2] C.Edwards , D.Penny , ELEMENTARY DIFFERENTIAL EQUATIONS , 2008, USA.
- [3] George F.Simmons , Differential Equation with Applications and Historical Notes .
- [4] Nakhle H.Asmar , Partial Differential Equations with fourier series and Boundary value Problem .
- [5] د.خليل اسماعيل طه ، المعادلات التفاضلية والاعتيادية ونظرية الاستقراء .