جامعة السودان للعلوم و التكنولوجيا

كلية العلوم

قسم الرياضيات

بحث تكميلي لنيل درجة البكالريوس

بعنوان

معادلة الحرارة

إعداد الطالبات :

نسيبة اسماعيل المكي محمد

رغدة اسماعيل محمد اسماعيل

صفية محمد الشيخ العوض

إشراف :

د/ محمد حسن محمد خبير

بسم الله الرحمن الرحيم

إستهلال

قال تعالي " و قال الملك أئتوني به أستخلصه لنفسي فلما كلمه قال إنك اليوم لدينا مكين أمين (54) قال أجعلني علي خزائن الأرض إني حفيظ عليم (55) "

سورة يوسف

الإهداء

إلي من جرع الكأس فارغا ليسقينا قطرة حب

إلي من كلّت أنامله ليقدم لنا لحظة سعادة

إلي من حصد الأشواك من دربنا ليمهد لنا طريق العلم

إلي القلب الكبير والدنا العزيز.

إلي من ارضعتنا الحب و الحنان

إلي رمز الحب و بلسم الشفاء

إلي القلب الناصع بالبياض والدتنا الحبيبة .

إلي القلوب الطاهرة الرقيقة و النفوس البريئة

إلي رياحين حياتنا أخوتنا الاعزاء

إلي الارواح التي سكنت تحت تراب الوطن الشهداء العظام .

الأن تفتح الأشرعة و ترفع المرساه لتنطلق السفينة في عرض بحر واسع مظلم هو بحر الحياة و في هذه الظلمة لا يضئ إلا قنديل الذكريات

إلي الذين احببتهم و احبوني أصدقائي .

إلي الذين بذلو حمل جهد و عطاء لكي نصل الي هذه اللحظة أساتذتنا الكرام و لا سيما الدكتور الفاضل: محمد حسن محمد خبير .

الشكر و العرفان

الحمد لله الذي خلق السماوات و الارض و جعل الظلمات و النور و الحمد لله الذي فضل العلم علي الجهل فقال " هل يستوي الذين يعلمون و الذين لا يعلمون " و نصلي و نسلم علي الحبيب المصطفي صلي الله عليه و سلم و علي آله و صحبه الطاهرين .

و نحمدك علي تمام صحتنا و توفيقك لنا في إتمام هذا البحث و نتقدم بوافر الشكر و التقدير و العرفان لادارة جامعة السودان الذين كانو لنا خير معين و جميع العاملين بالجامعة الذين هيئوا لنا البيئة الدراسية كما نخص شكرنا و تقديرنا للدكتور: محمد حسن محمد خبير تكرمت بالاشراف علي هذا البحث في جميع مراحله و كان لتوجيهه وارشاده اكبر الأثر في تذليل الصعاب و إجتياز الكثير من العقبات نسأل الله أن يجزله عنا خير الجزاء .

الله الموفق

ملخص البحث

في هذا البحث تناولنا معادلة الحرارة من ناحية التكوين الفيزيائي من خلال صياغة معادلات تدفق الحرارة و نقل الحرارة ومن خلال التوصيل و الحمل الحراري و اشتقاق التوصيل الحراري كمثال في قضيب احادي الابعاد ايضا تناولنا وصف درجة الحرارة المستقرة و توضيح الشروط الابتدائية و الحدية في حالاتها المختلفة .

تناولنا في الباب الثاني اشتقاق مسائل التدفق الحراري في بعدين و ثلاثة ابعاد مكانية و تطبيق نظرية التباعد في التدفق الحراري .

في الباب الثالث وجدنا حل معادلة الحرارة باستخدام طريقة فصل المتغيرات و ناقشنا مسائل القيمة الحدية و المعادلات التي تعتمد علي الزمن بتعيين القيم الذاتية و الدوال الذاتية و وجدنا الحلول لبعض الامثلة و المسائل .

بسم الله الرحمن الرحيم

معادلة الحرارة

(1-1) مقدمة :-

نود ان نناقش حل المسائل الابتدائية التي تحتوي المعادلات التفاضلية الجزئية ، و انواع من المسائل التي تنشا في مختلف مجالات العلوم و الهندسة . المعادلة التفاضلية الجزئية هي المعادلة الرياضية التي تحتوي علي مشتقات جزئية مثلا ،

$$\frac{\partial u}{\partial t} + 3\frac{\partial u}{\partial x} = 0 \qquad (1\text{-}1)$$

يمكننا ان نبدأ دراستنا عن طريق تحديد ما هي الدالة $u(x,t)$ ، و لكن نحن نفضل ان نبدا من خلال التحقيق في مشكلة فيزيائية نفعل ذلك لسببين ، الاول ، تقنيات رياضية ، لدينا علي الارجح سيكون من اكبر فائدة عندما يصبح من الواضح ان هذه الاساليب هي تحليل المسائل الفيزيائية . الثاني ، و سوف نجد في الواقع ان الاعتبارات الفيزيائية تحفز العديد من التطورات الرياضية .

العديد من المجالات المتنوعة في مجال الهندسة و العلوم الفيزيائية تعتمد علي دراسة المعادلات التفاضلية الجزئية . لا توجد قائمة يمكن ان تكون شاملة لكن الامثلة التالية تعطينا شعورا لنوع من المجالات التي تعتمد بشكل كبير علي دراسة المعادلات التفاضلية الجزئية : الصوتيات ، الديناميكا الحرارية ، المرونة ، الديناميكا الكهربائية ، ديناميكا السوائل ، الجيوفيزياء (الموجات المتداخلة) ، نقل الحرارة ، الارصاد الجوي ، علم المحيطات ، البصريات ، هندسة البترول ، فيزياء السوائل (السوائل و الغازات المتاينة) ، ميكانيكا الكم .

و سوف نتابع فلسفه معينة من الرياضيات التطبيقية التي تحل مشكلة لها ثلاثة مراحل :

1) صيغة
2) حل
3) توصيف

نبدا من خلال صياغة معادلات تدفق الحرارة واصفا نقل الطاقة الحرارية ، و تتسبب الطاقة الحرارية من تفاعلات المادة الجزئية ، اثنين من العمليات الاساسية تجري من اجل الطاقة الحرارية للتحرك : التوصيل والحمل الحراري . نتائج التوصيل من اصطدام الجزيئات المجاورة التي يتم نقل الطاقة الحركية للاهتزاز من جزئ واحد الي اقرب جاراتها ، و هكذا انتشرت الطاقة الحرارية عن طريق التوصيل حتي لو كانت الجزيئات نفسها لا تتحرك من موقعها بشكل ملحوظ ، بالاضافة اذا تحرك جزئ مهتز من منطقة الي اخري فانه ياخذ الطاقة الحرارية معه و يسمي هذا النوع من الطاقة الحرارية الحمل الحراري . من اجل البدء في دراستنا مع مسائل بسيطة نسبيا ، سندرس تدفق الحرارة فقط في الحالات التي يكون فيها التوصيل من الطاقة الحرارية هي اكثر اهمية بكثير من الحمل الحراري . و سوف نقوم بذلك في تدفق الحرارة في المقام الاول في حالة المواد الصلبة علي الرغم من نقل الحرارة في السوائل (السوائل و الغازات) و هو ايضا عن طريق التوصيل في المقام الاول . اذا كانت سرعة السائل صغيرة بما فيه الكفاية .

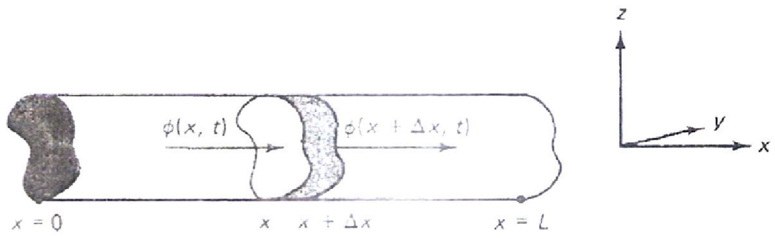
(1-2) اشتقاق التوصيل الحراري في قضيب احادي الابعاد :-

كثافة الطاقة الحرارية : نبدا من خلال النظر للقضيب من منطقة مستعرضة ثابتة موجهه في اتجاه x (من $x = o$ الي $x = L$) في الشكل (1-2-1) و نحن نقدم مؤقتا كمية الطاقة الحرارية لكل وحدة حجم كمتغير غير معروف و الذي يطلق عليه كثافة الطاقة الحرارية :

$$\boxed{\text{كثافة الطاقة الحرارية} \equiv e(x,t)}$$

و نحن نفترض ان جميع الكميات الحرارية ثابتة ، قضيب هو ذات بعد واحد . ابسط طريقة للبداية هي عزل مساحة السطح الجانبي للقضيب و لذلك طاقة حرارية يمكن ان تمر من

خلال السطح الجانبي ، الاعتماد علي t و x يتوافق مع الحالة التي يكون فيها القضيب ليس ساخنا بانتظام ، و كثافة الطاقة الحرارية تختلف من مقطع عرضي واحد الي اخر.



الشكل (1-2-1): قضيب احادي الابعاد مع الطاقة الحرارية التي تتدفق داخل و خارج شريحة رقيقة .

<u>الطاقة الحرارية</u> : نعتبر شريحة رقيقة من القضيب الوارد بين x و $x + \Delta x$ كما هو موضح في الشكل (1-2-1) ، اذا كانت كثافة الطاقة الحرارية هي ثابتة في جميع انحاء الحجم ، ثم مجموع الطاقة في الشريحة هو ناتج من كثافة الطاقة الحرارية و الحجم . و بشكل عام كثافة الطاقة ليست ثابتة ومع ذلك اذا كانت x صغيرة جدا فان $e(x,t)$ قد تقترب باعتبارها ثابتة خلال الحجم بحيث

$$\boxed{\text{الطاقة الحرارية} = e(x,t)A\,\Delta x}$$

حيث ان $A\,\Delta x$ هو حجم الشريحة .

<u>الحفاظ علي الطاقة الحرارية</u> : الطاقة الحرارية بين x و $x + \Delta x$ تتغير مع الزمن لسبب ان الطاقة الحرارية تتدفق عبر حواف (x و $x + \Delta x$) و الطاقة الحرارية المتولدة في الداخل (بسبب مصادر ايجابية او سلبية من الطاقة الحرارية) و من المقرر ان لا تتدفق الطاقة الحرارية عبر السطح الجانبي لاننا نفترض ان السطح الجانبي معزول ، المعادلة التي توصف تدفق الحرارة الاساسية هي

معدل التغير في الطاقة الحرارية بالنسبة للزمن	= الطاقة الحرارية المتدفقة عبر الحدود في وحدة الزمن	+ الطاقة الحرارية المتولدة داخل وحدة الزمن

و هذا ما يسمي الحفاظ علي الطاقة الحرارية لشريحة صغيرة ، و معدل التغير في الطاقة الحرارية هو

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}\ [e(x,t)\ A\ \Delta x]$$

حيث المشتقة الجزئية $\frac{\partial}{\partial \mathrm{t}}$ تستخدم لان x يعتبر مثبتا .

<u>تدفق الحرارة</u> : تدفقات الطاقة الحرارية الي اليمين او اليسار في قضيب احادي البعد . نقدم التدفق الحراري

التدفق الحراري (كمية الطاقة الحرارية في وحدة الزمن التي تتدفق علي اليمين في مساحة الوحدة) = $\Phi(\mathrm{x},\mathrm{t})$

اذا كان $\emptyset(x,t) < 0$ فهذا يعني ان الطاقة الحرارية تتدفق الي اليسار . الطاقة الحرارية المتدفقة في وحدة الزمن عبر الحدود في شريحة هي

$$\emptyset(x,t)\ A - \emptyset(x+\Delta x,t)$$

حيث التدفق الحراري هو تدفق في وحدة المساحة و يجب ان يكون مضروبا في مساحة السطح اذا $\emptyset(x,t) > 0$ ، $\emptyset(x+\Delta x\ ,t) > 0$ كما هو موضح في الشكل (1-2-1) و الطاقة الحرارية المتدفقة في وحدة الزمن في x تساهم في زيادة الطاقة الحرارية في الشريحة في حين تدفق الحرارة في $x+\Delta x$ يقلل من الطاقة الحرارية .

(1-3) **مصادر الحرارة :-**

نسمح ايضا للمصادر الداخلية للطاقة الحرارية :

الطاقة الحرارية لكل وحدة حجم متولدة في وحدة الزمن = $Q(x,t)$

ربما بسبب التفاعلات الكيميائية او التدفئ الكهربائي ، $Q(x,t)$ هو ثابتا تقريبا في الفضاء لشريحة رقيقة ، و بالتالي فان مجموع الطاقة الحرارية المتولدة في وحدة الزمن في شريحة رقيقة تقريبا هي $Q(x,t)\ A\ \Delta x$.

التحفظ علي الطاقة الحرارية (شريحة رقيقة) : معدل التغير في الطاقة الحرارية هو بسبب الطاقة الحرارية التي تتدفق عبر الحدود و مصادر داخلية .

$$\frac{\partial}{\partial t}\ [\ e(x,t)A\ \Delta x\ ] \approx \emptyset(x,t)A - \emptyset(x+\Delta x,t)A + Q(x,t)A\ \Delta x \qquad (1\text{-}2)$$

المعادلة (1-2) ليست دقيقة لان كميات مختلفة تم افتراضها ان تكون ثابتة تقريبا لشريحة مستعرضة صغيرة . ندعي ان (1-2) يصبح دقيقا عندما $\Delta x \to 0$. قبل اعطاء اشتقاق حذرا (و صرامة رياضيا) ، سنحاول فقط لشرح الافكار الاساسية عندما $\Delta x \to 0$. في الحد

$x \to 0$ كما في (1-2) لا يعطي معلومات مثيرة للاهتمام اي $0 = 0$. لكن اذا قسمنا اول مرة من قبل Δx و من ثم اتخاذ الحد $\Delta x \to 0$ ، نحصل علي

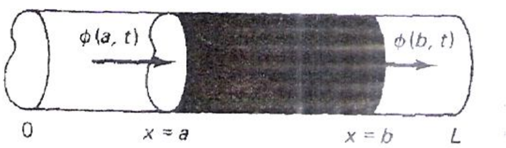
$$\frac{\partial e}{\partial t} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\emptyset(x\ ,t) - \emptyset(x+\Delta x\ ,t)}{\Delta x} + Q(x,t) \qquad (1\text{-}3)$$

حيث تم الغاء منطقة مستعرضة ثابتة . ندعي ان هذه النتيجة هي مضبوطة (مع عدم وجود اخطاء صغيرة) ، و بالتالي نستبدل ≈ في (1-2) ب = في (1-3) . في هذه العملية الحد $\Delta x \to 0\ , t$ يكون ثابت . بناء علي ذلك من تعريف الاشتقاق الجزئي ، نجد :

$$\boxed{\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial \emptyset}{\partial x} + Q} \qquad (1\text{-}4)$$

<u>الحفاظ علي الطاقة الحرارية (الدقيق)</u> : الاشتقاق بديل للحفاظ علي الطاقة الحرارية لديه ميزة لدينا لا تقتصر علي شرائح صغيرة . الحساب التقريبي الناتج من عملية الحد $(\Delta x \to 0)$ يتم تجنبه . نعتبر اي جزء محدود (من $x = a$ الي $x = b$) من قضيب احادي البعد (انظر الشكل 2-2-1) سوف نقوم بالتحقيق في الحفاظ علي الطاقة الحرارية في هذا الجزء . مجموع الطاقة الحرارية هو $\int_a^b e(x,t)\,dx$ مجموع المساهمات من الشرائح الغير منتهية . مره اخري فانها تتغير فقط بسبب الطاقة الحرارية التي تتدفق من خلال الحواف الجانبية ($x = a$ و $x = b$) و الطاقة الحرارية المتولدة داخل المنطقة و بالتالي (بعد الغاء الثابت A) ينتج :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\int_a^b e\,dx = \emptyset(a,t) - \emptyset(b,t) + \int_a^b Q\,dx} \qquad (1\text{-}5)$$



الشكل (2-2-1) : الطاقة الحرارية التي تتدفق داخل و خارج شريحة محدودة من قضيب .

من الناحية الفنية ، و هي مشتقة عادية $\frac{d}{dt}$ يظهر في (1-5) بما ان $\int_a^b e\,dx$ يعتمد فقط علي t ، لا علي x لذلك :

$$\frac{d}{dt}\int_a^b e\,dx = \int_a^b \frac{\partial e}{\partial t}\,dx$$

اذا كانت a و b هي ثوابت (و اذا كانت e مستمرة) . هذا يتحقق حيث المشتقة العادية داخل التكامل مع حفظ x ثابت ، و بالتالي يجب ان تحل محلها مشتقة جزئية . اي حد في (1-5) هو الان تكامل عادي اذا لاحظنا ان :

$$\emptyset(a\,,t) - \emptyset(b\,,t) = -\int_a^b \frac{\partial \emptyset}{\partial x}\,dx$$

(و هذا يكون صحيحا اذا كانت $\emptyset$ مستمرة) . بناء علي ذلك

$$\int_a^b \left(\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial \emptyset}{\partial x} - Q\right) = 0$$

يجب ان يكون هذا التكامل صفرا لاي a وb اختيارية ، يجب ان يكون المنطقة تحت المنحني صفرا لاي حدود اختيارية . هذا ممكن فقط اذا كانت الكمية المتكاملة في حد ذاتها تساوي الصفر . و بالتالي يصبح (1-2-3) كما يلي

$$\boxed{\frac{\partial e}{\partial t} = -\frac{\partial \emptyset}{\partial x} + Q} \qquad (1\text{-}6)$$

المعادلة (1-5) ، قانون الحفظ للتكامل هو اكثر جوهرية من الشكل التفاضلي (1-6) . المعادلة (1-6) صالحة في الحالة المعتادة التي فيها المتغيرات الفيزيائية مستمرة . شرح مزيد من الطرح السابق $\frac{\partial \emptyset}{\partial x}$ في النظام مثلا ، اذا كان $\frac{\partial \emptyset}{\partial x} > 0$ في الفترة $a \le x \le b$ فان التدفق الحراري $\emptyset$ دالة متزايدة في x . الحرارة تتدفق الي اليمين اكثر عند $x = b$ مما في $x = a$ (علي افتراض ان $b > a$) و بالتالي (اهمال اي اثار للمصدر Q) الطاقة الحرارية يجب ان تتناقص بين $x = a$ و $x = b$ ، لوجود علامة السالب في (1-6) .

<u>درجة الحرارة و الحرارة النوعية</u> : عادة ما توصف المواد بدرجة حرارتها

$$\boxed{\text{درجة الحرارة} = u(x,t)}$$

لا بكثافتها الحرارية .

في منتصف عام 1700 وجود تجارب دقيقة ، جعل الفيزيائيون يدركون ان اختلاف المواد يؤدي الي الاختلاف في نقل درجة الحرارة . و هذا يتطلب ادخال الحرارة النوعية (او السعة الحرارية) :

الحرارة النوعية (الطاقة الحرارية التي يجب ان تزود بها كتلة وحدة من مادة لرفع درجة الحرارة في وحدة واحدة) $= c$

بشكل عام من التجارب و من تعريف الحرارة النوعية c لاي مادة تعتمد علي درجة الحرارة u ، علي سبيل المثال ، الطاقة الحرارية اللازمة لرفع كتلة في درجة حرارة 0 مئوية الي درجة مئوية واحدة ، قد تختلف عن الطاقة الحرارية اللازمة لرفع كتلة 85 مئوية الي 86 مئوية لنفس المادة .

<u>الطاقة الحرارية</u> : الطاقة الحرارية في شريحة رقيقة هي $e(x,t)\ A\ \Delta x$ ، و مع ذلك فانه يعرف ايضا باسم الطاقة اللازمة لرفع درجة حرارة من درجة الحرارة المرجعية 0 مئوية الي درجة الحرارة الفعلية $u(x,t)$. الحرارة النوعية هي مستقلة عن درجة الحرارة ، و الطاقة الحرارية لكل وحده كتلة هو مجرد $c(x)\ u(x,t)$. و نحن بالتالي بحاجة الي ادخال كثافة الكتلة $\rho(x)$ ،

كثافة الكتلة (الكتلة لكل وحدة حجم) $= \rho(x)$

و السماح لها ان تختلف مع x ، بتاويل قضيب يتالف من مواد غير منتظمة . مجموع الشريحة رقيقة $\rho\ A\ \Delta x$. مجموع الطاقة الحرارية في اي شريحة رقيقة $c(x)\ u(x,t)\ \rho\ A\ \Delta x$ ، و هكذا تصبح المعادلة

$$e(x,t)\ A\ \Delta x\ =\ c(x)\ u(x,t)\ \rho\ A\ \Delta x$$

بهذه الطريقة نكون قد وضحنا العلاقة بين الطاقة الحرارية و درجة الحرارة

$$\boxed{e(x,t) = e(x)\ \rho(x)\ u(x,t)} \qquad (1\text{-}7)$$

هذا و يذكر ان الطاقة الحرارية لكل وحدة حجم تساوي الطاقة الحرارية لكل وحدة كتلة في اوقات درجة الحرارة وحدة الاوقات كثافة الكتلة . (الكتلة لكل وحدة حجم) عندما يتم حذف كثافة الطاقة الحرارية باستخدام المعادلة (1-7) ، الحفاظ علي الطاقة الحرارية (1-4) او (1-2-5) يصبح في الصورة :

$$\boxed{c(x)\,\rho(x)\,\frac{\partial u}{\partial t} = -\,\frac{\partial \emptyset}{\partial x} + Q} \qquad (1\text{-}8)$$

قانون فوريير : عادة (8-1) تعتبر معادلة واحدة في اثنين من المجاهيل . درجة الحرارة $u(x,t)$ و التدفق الحراري (تدفق في وحدة المساحة في وحدة الزمن) $\emptyset(x,t)$. كيف و لماذا تتدفق الطاقة الحرارية ؟ و بعبارة اخري ، نحن بحاجة الي تعبير عن علاقة تدفق الطاقة الحرارية مع درجات الحرارة . اولا نلخص خصائص معينة عن تدفق الحرارة التي نعرفها جميعا :

1) اذا كانت درجة الحرارة ثابتة في منطقة ، لا يوجد تدفق للطاقة الحرارية .
2) اذا كانت هنالك اختلافات في درجة الحرارة ، تتدفق الطاقة الحرارية من المنطقة الساخنة الي المنطقة الباردة .
3) كلما زادت الاختلافات في درجة الحرارة (لنفس المواد) زادت تدفق الطاقة الحرارية .
4) تدفق الطاقة الحرارية يختلف لمواد مختلفة ، حتي مع نفس الاختلافات في درجة الحرارة .

فوريير (1830- 1768) عرف الخصائص من 1 - 4 و لخصهم (فضلا عن العديد من التجارب) بواسطة الصيغة :

$$\boxed{\emptyset = -k_0\,\frac{\partial u}{\partial x}} \qquad (1\text{-}9)$$

المعروف باسم قانون فوريير للتوصيل الحراري . الان $\frac{\partial u}{\partial x}$ هو مشتقة درجة الحرارة ، و هو ميل درجة الحرارة (بوصفه دالة في x لثابت t) ، انها تمثل الاختلافات في درجة الحرارة (لكل وحدة طول) . المعادلة (9-1) توضح ان تدفق الحرارة يتناسب مع الفرق في درجة الحرارة (لكل وحدة طول) . اذا كانت درجة الحرارة u تزداد كلما ازدادت x (بمعني درجة الحرارة اكثر سخونة الي اليمين $\frac{\partial u}{\partial x} > 0$) فاننا نعلم (خاصية 2) ان تدفقات الطاقة الحرارية تكون الي اليسار و هذا ما يفسر الاشارة السالبة في (9-1) . معامل التناسب k_0 ، يقيس قدرة المواد في التوصيل الحراري و يسمي الموصلية الحرارية . التجارب تشير الي ان المواد المختلفة توصل الحرارة بشكل مختلف ، k_0 يعتمد علي المادة

المعينة . كلما كان k_0 اكبر كلما كان تدفق الطاقة الحرارية كبيرا ، مع نفس الاختلافات في درجة الحرارة . المادة ذات القيمة المنخفضة ل k_0 سيكون توصيلها ضعيفا للطاقة الحرارية . (و هي مناسبة و مثالية لتوصيلات المنازل) . لقضيب يتالف من مواد مختلفة ، k_0 تكون دالة في x . بالاضافة الي ذلك ، التجربة تبين ان التوصيل الحراري لمعظم المواد يختلف عند درجات حرارة مختلفة

$k_0\ (x, u)$. لكن فقط كما هو الحال مع الحرارة النوعية c ، الاعتماد علي درجة الحرارة غالبا ما تكون غير مهمة في المسائل التطبيقية ، و بالتالي ، فاننا نفترض ان الموصلية الحرارية k_0 تعتمد فقط علي x ، $k_0\ x$. عادة سوف نناقش قضيب منتظم حيث k_0 ثابت .

<u>معادلة الحرارة</u> : اذا قانون فوريير (1-9) يتم استبداله في الحفاظ علي معادلة الطاقة الحرارية (1-8) ، النتائج للمعادلة التفاضلية الجزئية :

$$\boxed{c\,\rho\,\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_0\,\frac{\partial u}{\partial x}\right) + Q} \qquad (1\text{-}10)$$

نحن عادة نعتقد من مصادر الطاقة الحرارية Q كما يعطي وجود ، و المجهول الوحيد هو درجة الحرارة $u(x, t)$. المعاملات الحرارية k_0 ، ρ ، c كلها تعتمد علي المادة و بالتالي قد يكون من الدوال x . في مسالة خاصة من قضيب موحد ، التي k_0 ، ρ ، c كلها ثوابت ، المعادلة التفاضلية الجزئية (1-10) تصبح

$$c\,\rho\,\frac{\partial u}{\partial t} = k_0\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + Q$$

اذا بالاضافة ، لا توجد مصادر $Q = 0$ ، ثم بعد قسمة الثابت $c\,\rho$ ، المعادلة التفاضلية الجزئية تصبح

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}} \qquad (1\text{-}11)$$

حيث الثابت k ،

$$k = \frac{k_0}{c\,\rho}$$

يسمي الانتشارية الحرارية ، الموصلية الحرارية مقسوما علي ناتج الحرارة النوعية و كثافة الكتلة . المعادلة (1-11) هي غالبا ما تسمي معادلة الحرارة ، انه لا يتوافق مع مصادر و خصائص حرارية ثابتة . اذا الطاقة الحرارية تتركز في البداية في مكان واحد ، (1-11) سوف تصف كيف تنتشر الطاقة الحرارية بها ، عملية فيزيائية تعرف باسم الانتشار . الكميات الفيزيائية الاخري الي جانب درجة الحرارة تحقق نفس المعادلة التفاضلية الجزئية (1-11). لهذا السبب (1-11) يعرف ايضا باسم معادلة الانتشار . مثال ذلك ، الكثافة $u(x,t)$ للمواد الكيميائية (مثل العطور و الملوثات) نجد ان معادلة الانتشار (1-9) في بعض الحالات ذات بعد واحد .

<u>الشروط الابتدائية</u> : المعادلات التفاضلية الجزئية التي تصف تدفق الطاقة الحرارية (1-10) او (1-11) ، تحتوي علي المشتقة الاولي في الزمن . و عند المعادلة التفاضلية العادية التي لها مشتقة واحدة ، فان مسالة القيمة الابتدائية تتالف من حل المعادلة التفاضلية مع شرط ابتدائي واحد . قانون نيوتن للحركة لموضع x من الجسيمات يعطي معادلة تفاضلية عادية ، القوة = $m\frac{d^2x}{dt^2}$. انها تحتوي علي المشتقات الثانية . تتكون مسالة القيمة الابتدائية من حل المعادلة التفاضلية مع اثنين من الشروط الابتدائية ، الموضع الابتدائي x و السرعة الابتدائية $\frac{dx}{dt}$. من هذه النماذج من المعلومات (بما في ذلك معرفة القوة) ، من خلال حل المعادلة التفاضلية مع الشروط الابتدائية ، في وسعنا التنبؤ بحركة الجسيمات في اتجاه x . نود ان نفعل نفس العملية لدينا المعادلة التفاضلية الجزئية ، و هذا هو ، التنبؤ بدرجة الحرارة المستقبلية . بما ان معادلة الحرارة تشمل علي مشتقة واحدة في الزمن ، نحن يجب ان نعطي الشرط الاولي ذات (عادة في $t = 0$) درجة الحرارة الاولية . فمن الممكن ان درجة الحرارة الاولية ليست ثابتة ، و لكن يعتمد علي x . و بالتالي نحن يجب ان نعطي درجة الحرارة اولوية التوزيع ،

$$u(x,0) = f(x)$$

هل هذا يكفي لمعرفة التنبؤ بدرجة الحرارة في المستقبل ؟ و نحن نعلم توزيع درجة الحرارة الاولية و ان التغيرات في درجات الحرارة وفقا للمعادلة التفاضلية الجزئية (1-10) او (1-11) . لكن نحن بحاجة الي معرفة ما يحدث في الحدود الاثنين $x = 0$ و $x = L$.

بدون معرفة هذه المعلومات لا يمكننا التنبؤ بالمستقبل . و هناك حاجة الي الشرطين لتطابق المشتقات المكانية الموجودة في (1-10) او (1-11) ، عادة شرط واحد في كل نهاية . سوف نناقش هذه الشروط الحدية في القسم التالي :

شروط الحدودية : في حل معادلة حرارة اما (1-10) او (1-11) هناك حاجة الي شرط الحدود واحدة في نهاية كل قضيب . الشرط المناسب يعتمد علي الية الفيزيائية سارية المفعول في كل نهاية في كثير من الاحيان حالة علي الحدود يعتمد علي كل المواد داخل و خارج القضيب لتجنب مشكلة رياضية اكثر صعوبة فاننا نفترض ان البيئة الخارجية هي معروفة ، لم تتغير بشكل كبير من قبل قضيب .

درجة الحرارة المستقرة : في بعض الحالات درجة الحرارة في نهاية قضيب علي سبيل المثال $x = 0$ قد يتم تقريبها من خلال درجة الحرارة المقررة التالية :

$$u(0,t) = u_B(t) \qquad (1\text{-}12)$$

حيث $u_B(t)$ هي درجة حرارة حمام السائل (الخزان) التي علي اتصال بالقضيب .

الحدود المعزولة : في حالات اخري فمن الممكن ان يصف تدفق الحرارة بدلا من درجة الحرارة

$$-k_0(0)\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \emptyset(t) \qquad (1\text{-}13)$$

حيث يتم اعطاء $\emptyset(t)$ فهذا يعادل اعطاء شرط واحد للمشتقة الاولي $\frac{\partial u}{\partial x}$ عند $x = 0$. الميل معطي عند $x = 0$. المعادلة (1-13) لا يمكن ان تكون متكاملة في x لان الميل هو معروف فقط في قيمة واحدة من x ابسط مثال علي الشرط الحدي تدفق الحرارة هو عندما يتم العزل للحد تماما في هذه الحالة ليس هناك تدفق للحرارة علي الحدود . اذا كان $x = 0$ معزول فان :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 \qquad (1\text{-}14)$$

قانون نيوتن للتبريد : اذا كان لدينا قضيب احادي البعد علي اتصال علي الحدود مع سائل متحرك (مثل الهواء) فان لا درجة الحرارة و لا تدفق الحرارة المقررة قد يكون مناسبا علي الحدود . علي سبيل المثال ، دعونا ان نتخيل قضيب حار جدا علي اتصال مع برودة الهواء ، فانه سوف تنتقل الحرارة من القضيب من ثم الهواء يحمل الحرارة بعيدا . و هذا ما يسمي

بعملية نقل الحرارة الحمل الحراري ، فان درجة حرارة الهواء تختلف في الواقع ، علي مسافة من القضيب تبين التجارب انه تدفق الحرارة و من القضيب يتناسب مع الفرق في درجة الحرارة بين وصفه بارد و درجة الحرارة الخارجية . و يسمي هذا الشرط الحدود قانون نيوتن للتبريد اذا كان صحيحا عند $x = 0$ فان :

$$- k_0\ (0)\ \frac{\partial u}{\partial x}\ (0, t) = -H\ [\ u(0, t) - \ u_B(t)\ ] \qquad (1\text{-}15)$$

حيث يسمي ثابت التناسب H معامل انتقال الحرارة (او معامل الحمل الحراري) . هذه الحدود دالة تحوي علي تركيب خطي U و $\frac{\partial u}{\partial x}$ ، يجب علينا ان نكون حذرين مع علامة التناسب . اذا كان قضيب هو اكثر سخونة من الحمام $[\ u(0, t) > \ u_B(t)\ ]$ ، فان تدفق الحرارة من القضيب عند $x = 0$. و بالتالي ، الحرارة تتدفق الي اليسار ، في هذه الحالة تدفق الحرارة يكون سالبا . هذا هو السبب لوجود علامة السالب في (1-15) (مع $H > 0$) . قد تم التوصل الي الاستنتاج نفسه ، قد افترضنا ان $u(0, t) < \ u_B(t)$. بالمثل لفهم الاشارات في (1-15) هو ان نفترض مرة اخري ان $u(0, t) > \ u_B(t)$. كانت درجة الحرارة اكثر سخونة لليمين في $x = 0$ و ينبغي لنا ان نتوقع درجة الحرارة الي المواصلة في الزيادة الي

اليمين ، و بالتالي ، $\frac{\partial u}{\partial x}$ ينبغي ان تكون موجبة في $x = 0$. المعادلة (1-15) تتفق مع هذا الرائ . و بنفس الطريقة ، ان المعادلة لقانون نيوتن للتبريد عند نقطة نهاية لليمين $x = L$ هو

$$- k_0\ (l)\ \frac{\partial u}{\partial x}\ (l, t) = H\ [\ u(l, t) - \ u_B(t)\ ] \qquad (1\text{-}16)$$

حيث $u_B(t)$ هي درجة الحرارة الخارجية في $x = L$ نلاحظ علي الفور الفرق في الاشارات ذات دلالة احصائية بين الحدود اليسري في (1-15) و الحدود اليمني في (1-16) يتم تحديد معامل H تجريبيا في قانون نيوتن للتبريد . ذلك يعتمد علي خصائص قضيب مثل كما في خصائص السوائل (بما في ذلك سرعة السائل) . اذا كان معامله صغير

جدا ، ثم تدفق الطاقة الحرارية قليلا جدا عبر الحدود كما في الحد $H \to 0$ ، يمكن ان تفكر في قانون نيوتن للتبريد ل $H \neq 0$ كما يمثل الحدود معزولة بشكل غير تام . اذا كان $H \to \infty$ يقترب من الحدود حالة واحدة لدرجة حرارة محدودة $u(0,t) = u_B(t)$ من خلال تقسيم (1-15) علي سبيل المثال من خلال H :

$$\frac{-k_0(0)}{H}\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = -[\,u(0,t) - u_B(t)\,]$$

و بالتالي $H \to \infty$ لا يتوافق مع الحل علي الاطلاق .

ملخص : وصفنا ثلاثة انواع مختلفة من الشروط الحدية . علي سبيل المثال في $x = 0$:

درجة الحرارة المقررة $\qquad u(0,t) = u_B(t)$

التدفق الحراري $\qquad -k_0(0)\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = \emptyset(t)$

قانون نيوتن للتبريد $\qquad -k_0(0)\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = -H\,[\,u(0,t) - u_B(t)\,]$

هذه الشروط يمكن ان تطبق عند $x = L$ ، مشيرا الي ان تغير علامة (H – تصبح H) ضروري لقانون نيوتن للتبريد . تحدث حالة واحدة في كل الحدود ، فانه ليس من الضروري ان كلا من الحدود اعطاء نفس النوع من شرط الحدود . علي سبيل المثال فمن الممكن ل $x = 0$ ان يكون لها درجة حرارة مقررة متارجحة

$$u(0,t) = 100 - 25\,\cos t$$

و علي الطرف الايمن ، $x = L$ لتكون معزولة تماما :

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = 0$$

(1-4) التوزيع المتوازن لدرجة الحرارة :-

درجة الحرارة المقررة : دعونا الان نصيغ مسالة بسيطة ، و لكن نموذجية ، من تدفق الحرارة . اذا كانت معاملات الحرارة ثابتة و ليس هناك اي مصادر للطاقة الحرارية ، ثم درجة الحرارة $u(x,t)$ في قضيب احادي البعد $0 \le x \le l$. يعطي

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1\text{-}17)$$

حل هذه المعادلة التفاضلية الجزئية يجب تحقيق الشرط الابتدائي

$$u(x,0) = f(x) \qquad (1\text{-}18)$$

و احد شرط الحدود في كل نهاية ، مثلا :

$$u(0,t) = T_1(t) \qquad (1\text{-}19)$$

$$u(l,t) = T_2(t)$$

توزيع درجات حرارة التوازن : قبل ان نبدا المسالة للقيمة الاولية و الحدود للمعادلات التفاضلية الجزئية ، نناقش مسالة ذات صلة فيزيائية للمعادلات التفاضلية العادية . لنفترض ان شروط الحدود في $x = 0$ و $x = L$ كانت ثابتة (اي مستقلة من الزمن) ،

$$u(0,t) = T_1 \qquad و \qquad u(l,t) = T_2$$

حيث T_1 و T_2 تعطي الثوابت . توزيع درجات الحرارة التي لا تعتمد علي الزمن ، و هذا هو $u(x,t) = u(x)$. بما ان $\frac{\partial}{\partial t} u(x) = 0$ يصبح المعادلة التفاضلية الجزئية $k \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) = 0$. و لكن المشتقات الجزئية ليست ضرورية ، و بالتالي

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0} \qquad (1\text{-}20)$$

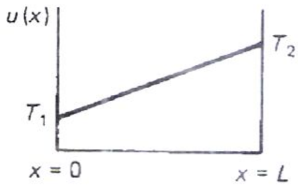
شروط الحدود هي

$$\boxed{\begin{array}{c} u(0) = T_1 \\ u(l) = T_2 \end{array}} \qquad \begin{array}{c} (1\text{-}21a) \\ (1\text{-}21b) \end{array}$$

في اجراء الحسابات في الحالة المستقرة ، عادة ما يتم تجاهل الظروف الاولية . المعادلة (1-20) هي من الدرجة الثانية المعادلة التفاضلية العادية تافهة الي حد ما . و يمكن الحصول علي الحل العام من خلال التكامل مرتين . تكامل (1-20) نحصل $\frac{\partial u}{\partial x} = c_1$ ، و تكامل للمرة الثانية يدل علي ان

$$u(x) = c_1 x + c_2 \qquad (1\text{-}22)$$

نحن ندرك (1-22) كما في المعادلة العامة للخط المستقيم . و بالتالي من شروط الحدود (1-21) توزيع درجة حرارة التوازن هو الخط المستقيم الذي يساوي T_1 في $x = 0$ و T_2 في $x = L$ ، كما رسمت في الشكل(1-4-1) . هندسيا هناك حل التوازن الفريد لهذه المسالة جبريا في وسعنا



الشكل (1-4-1) توزيع درجات حرارة التوازن .

تحديد اثنين من الثوابت الاختيارية c_1 و c_2 ، من خلال تطبيق شروط الحدود ، $u(0) = T_1$ و $u(l) = T_2$:

$$u(0) = T_1 \quad \text{يعني} \quad T_1 = c_2 \qquad (1\text{-}23)$$

$$u(l) = T_2 \quad \text{يعني} \quad T_2 = c_1 L + c_2$$

فمن السهل ان حل (1-23) عن الثوابت $c_2 = T_1$ و $c_1 = \frac{(T_2 - T_1)}{l}$. و بالتالي فان الحل المتزن الوحيد لمعادلة حرارة ثابتة للحالة المستقرة مع شروط الحدود الثابتة هذه

$$\boxed{u(x) = T_1 + \frac{(T_2 - T_1)}{l}\, x} \qquad (1\text{-}24)$$

الاقتراب الي التوازن : هذه المسالة تعتمد علي الزمن ، (1-17) و (1-18) ، مع شروط الحدود ثابتة (1-21) فاننا نتوقع ان توزيع درجات الحرارة $u(x,t)$ لتتغير في الزمن المناسب و انها لن تبقي متساوية للتوزيع الاولي $f(x)$. اذا كنا ننتظر وقتا طويلا جدا ، فاننا نتصور ان تاثير طرفي ينبغي ان يهيمن . و عادة ما يتم تجاهل الظروف الاولية . في نهاية المطاف ، و من المتوقع فيزيائيا درجة الحرارة الي الاقتراب من توزيع درجات حرارة التوازن ، لان شروط الحدود مستقلة من الزمن

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = u(x) = T_1 + \frac{(T_2 - T_1)}{l}\, x \qquad (1\text{-}25)$$

من ثانية (2-7) سوف نحل هذه المسالة تعتمد علي الزمن و تبين ان (1-25) هي صفة ، و مع ذلك ، اذا اقتربت من الحالة المستقرة ، حصلت علي حل مسالة التوازن مباشرة بسهولة اكثر .

حدود معزولة : كمثال ثاني من عملية حسابية ثابتة للحالة المستقرة ، و نحن نعتبر قضيب احادي الابعاد مرة اخري مع عدم وجود مصادر و مع الخواص الحرارية ثابتة ، لكن هذه المرة مع الحدود المعزولة في $x = 0$ و $x = L$. صياغة المسالة التي تعتمد علي الزمن

المعادلة التفاضلية الجزئية : $$\frac{\partial u}{\partial t} = k\, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (1\text{-}26a)$$

الشرط الاولي : $$u(x,0) = f(x) \qquad (1\text{-}26b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0,t) = 0 \qquad (1\text{-}26c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L,t) = 0 \quad \text{: شرط الحدود} \qquad (1\text{-}26d)$$

مشتق المسالة عن طريق وضع التوازن $\frac{\partial}{\partial t} = 0$. ليعطي توزيع درجة حرارة التوازن .

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\, x^2} = 0 \quad \text{: المعادلة التفاضلية} \qquad (1\text{-}27a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(0) = 0 \quad \text{: شرط الحدود} \qquad (1\text{-}27b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(L) = 0 \qquad (1\text{-}27c)$$

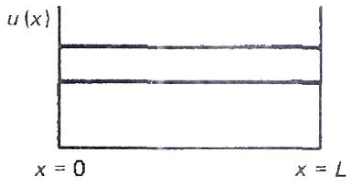
حيث اهمل الشرط الاولي (في الوقت الحالي) الحل العام ل $\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}\, \mathrm{x}^0} = 0$ هو مرة اخري علي خط مستقيم اختياري

$$u = c_1 x + c_2 \qquad (1\text{-}28)$$

شروط الحدود تقتضي ان الميل يجب ان يكون صفرا عند كلا الطرفين . هندسيا اي خط مستقيم مسطح (صفر الميل) تلبيه ل (1-26) كما هو موضح في الشكل (1-4-2) و الحل هو اي درجة حرارة ثابتة جبريا من (1-28) $\frac{\partial u}{\partial x} = c_1$ و كلا الشرطين في الحدود يعني ان $c_1 = 0$ و بالتالي

$$u(x) = c_2 \qquad (1\text{-}29)$$

لاي c_2 ثابت ، علي عكس المثال الاول (مع درجات حرارة ثابتة عند كلا الطرفين) هنا ليس هناك درجة حرارة توازن وحيدة من نوعها اي درجة حرارة ثابتة هي توزيع درجة حرارة التوازن لشروط الحدود المعزولة .



الشكل (1-4-2) : مختلف توزيعات درجة حرارة التوازن ثابت(مع نهايات معزولة) .

هكذا للمرة تعتمد مسالة القيمة الاولية علي :

$$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = c_2 \;;$$

اذا انتظرنا لفترة كافية قضيب مع نهايات معزولة ينبغي الاقتراب في درجة حرارة ثابتة و هذا يبدو طبيعيا معقول جدا . و مع ذلك فانه لا معني ان الحل يجب ان يقترب الي ثابت اختياري يجب علينا ان نعرف قيمة الثابت . بشكل عام فان الحل المتزن لا يحقق الشرط الابتدائي . و مع ذلك يتم تحديد الحل الثابت المتوازن من خلال النظر في الشرط الاولي من المسالة (1-26) . بما ان الطرفين منعزلين فان الطاقة الحرارية الكلية ثابتة . هذا يتبع من قانون الحفظ للطاقة الحرارية للقضيب باكمله { انظر (1-2-4) } :

$$\frac{d}{dt}\int_0^L c\rho u \; dx \; = \; -k_0 \; \frac{\partial u}{\partial x} \; (0,t) + \; k_0 \; \frac{\partial u}{\partial x} \; (l,t) \qquad (1\text{-}30)$$

حيث ان الطرفين منعزلين ،

$$\int_0^L c\rho u \; dx \; = \text{ثابت} \qquad (1\text{-}31)$$

من (1-31) نجد ان الطاقة الحرارية الاولية يجب ان تساوي النهاية للطاقة الحرارية . الطاقة الحرارية الاولية هي $c\rho \int_0^L f(x) \; dx$ اذا $u(x,0) = f(x)$ ، حيث ان الطاقة الحرارية المتزنة هي $c\rho \int_0^L c_2 \; dx = c\rho c_2 \, l$ و بما ان توزيع درجة حرارة المتزنة هو ثابت لذلك $u(x,t) = c_2$. يتم تحديد c_2 المستمر بمساواة هذين التعبيرين للطاقة الحرارية الكلية الثابتة ، $c\rho \int_0^L f(x) \; dx = c\rho c_2 \, l$. الحل لايجاد c_2 يدل علي ان الحل الوحيد المطلوب يجب ان يكون

$$\boxed{u(x) = c_2 = \frac{1}{L}\int_0^L f(x)\ dx\ ,} \qquad (1\text{-}32)$$

و هو متوسط توزيع درجة الحرارة الاولية . لاحقا سوف نجد الحل $u(x,t)$ حل يحقق (1-26) و سوف نبين ان $\lim_{n\to\infty} u(x,t)$ يعطي بالمعادلة (1-32) .

اشتقاق معادلة الحرارة في بعدين او ثلاثة أبعاد

(2-1) مقدمة :-

في الفصل (1-1) اظهرنا ان لتوصيل الحرارة في قضيب احادي البعد ان درجة الحرارة $u(x,t)$ تحقق

$$c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(k_0 \frac{\partial u}{\partial x}\right) + Q$$

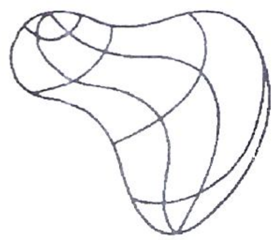
في الحالات التي لا توجد فيها مصادر $(Q = 0)$ و الخواص الحرارية ثابتة ، تصبح المعادلة التفاضلية الجزئية في الصوره

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

حيث $k = {}^{K_0}\!/_{c\rho}$. قبل ان نبدا بحل هذه المسالة سوف نصيغ المعادلات التفاضلية الجزئية المقابلة لمسائل التدفق الحراري في بعدين او ثلاثة ابعاد مكانية . سنجد ان الاشتقاق يكون مشابها لتلك المستخدمة في المسائل ذات البعد الواحد ، علي الرغم من الاختلافات المهمة التي سوف تظهر . نقترح لاشتقاق معادلات جديدة و اكثر تعقيدا (قبل حل الابسط منها) بحيث ، عندما نبدا مناقشة تقنيات لحلول هذه المعادلات التفاضلية الجزئية ، سيكون لدينا اكثر من مثال للتوضيح .

الطاقة الحرارية : نبدا الاشتقاق باعتبار ان R منطقة اختيارية كما هو موضح في الشكل (1-5-1) . كما في الحالة ذات البعد الواحد . و نلخص الحفاظ علي الطاقة الحرارية عن طريق معادلة الكلمة التالية :

معدل التغير في الطاقة الحرارية	=	الطاقة الحرارية التي تتدفق عبر الحدود في وحدة الزمن	+	الطاقة الحرارية المتولدة في الداخل في وحدة الزمن



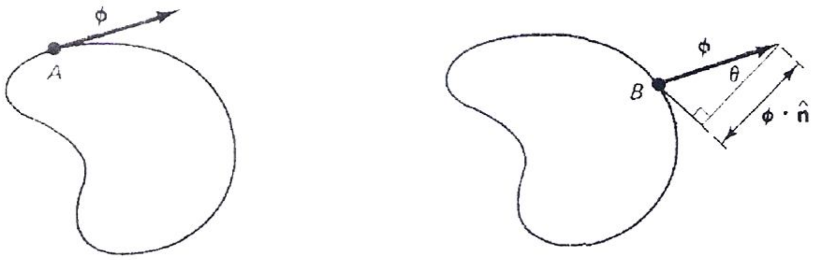
شكل (1-5-1) : ثلاثي الابعاد دون المنطقة الفرعية R .

الاختيارية هو Rحيث الطاقة الحرارية داخل المنطقة الفرعية

$$\text{الطاقة الحرارية} = \iiint_R c\rho u \; dV$$

بدلا من التكامل ذو البعد الواحد الذي استخدم في الفصل (2-1) .

<u>متجه تدفق الحرارة و المتجهات المتعامدة</u> : نحن بحاجة الي تعبير عن تدفق الطاقة الحرارية . في مسالة ذات البعد الواحد يتم تعريف تدفق الحرارة $\emptyset$ الي اليمين ($\emptyset < 0$ يعني التتدفق الي اليسار) . في مسالة ثلاثية الابعاد تدفقات الحرارة في بعض الاتجاه و بالتالي التدفق الحراري هو المتجه $\emptyset$. سعة $\emptyset$ هو كمية الطاقة الحرارية التي تتدفق في وحدة الزمن في وحدة المساحة . و مع ذلك ، عند اعتبار الحفاظ علي الطاقة الحرارية انها ليست سوي تتدفق الحرارة عبر الحدود في وحدة الزمن و هذا هو المهم . اذا ، كما في النقطة A في الشكل (2-5-1) ، التدفق الحراري يوازي الحدود ، لذلك لا توجد اي طاقة حرارية تعبر الحدود عند تلك النقطة . في الواقع ، المكونات العمودية للتدفق الحراري هي فقط التي تساهم (كما يتضح من النقطة B في الشكل (2-5-1) . في اي لحظة زمنية ، هناك نوعان من المتجهات المتعامدة . المتجه الي الداخل و المتجه n العمودي الي الخارج . متجه الوحدة العمودي الي الخارج $\hat{n}$. (حيث الرمز ^ يعني متجه وحدة) .



الشكل (2-5-1) : المكونات العمودية الخارجية للتدفق الحراري المتجه .

<u>الحفاظ علي الطاقة الحرارية</u> : عند كل نقطة ، كمية الطاقة الحرارية المتدفقة خارج المنطقة R لكل وحدة زمنية في وحدة المساحة هي المكونات العمودية الي الخارج لمتجه تدفق الحرارة من الشكل (2-5-1) عند النقطة B لمتجه التدفق المتجه العمودي الي الخارج ، الحراري هو $|\emptyset|\ \cos\theta = \emptyset \cdot n/|n| = \emptyset \cdot \hat{n}$.

اذا كان متجه تدفق الحرارة $\emptyset$ هو متوجه الي الداخل ، اذا $\emptyset \cdot \hat{n} < 0$ و التدفق نحو الخارج للطاقة الحرارية يكون سالب . لحساب الطاقة الحرارية الكلية المتدفقة من R في وحدة الزمن ، يجب علينا ضرب $\emptyset \cdot \hat{n}$ في مساحة السطح التفاضلي dS و تكامل علي السطح الذي يحتوي المنطقة R . و هذا ما يتبين من تكامل السطح المغلق $\oiint \emptyset \cdot \hat{n}\ dS$. هذا يمثل كمية الطاقة الحرارية (بواسطة وحدة الزمن) التي تترك المنطقة R (اذا كانت موجبة) و نتيجة لذلك يحصل نقصان في الطاقة الحرارية الكلية داخل المنطقة R . اذا كانت $\emptyset$ هي معدل الطاقة

الحرارية المولدة في وحدة الحجم ، فان الطاقة الحرارية الكلية المولدة في وحدة الزمن هي $\iiint_R Q\ dV$ و عليه من بقاء الطاقة الحرارية لاي منطقة ثلاثية الابعاد R تصير كالاتي :

$$\boxed{\frac{d}{dt}\iiint_R c\rho u\ dV = -\oiint \emptyset \cdot \hat{n}\ dS + \iiint_R Q\ dV} \qquad (2\text{-}1)$$

(2-2) نظرية التباعد :-

في بعد واحد ، الطريقة التي اشتققنا بها المعادلة التفاضلية الجزئية من قانون حفظ او بقاء التكامل لنلاحظ (انه عن طريق النظريات الاساسية في الحسبان) انه

$$\emptyset(a) - \emptyset(b) = -\int_a^b \frac{\partial \emptyset}{\partial x}\, dx$$

لذلك التدفق من خلال الحدود نستطيع ان نعبر عنه بتكامل علي كل المنطقة للمسائل ذات البعد الواحد . و نحن نلمس ان نظرية التباعد تمثل اجراء للدوال في ثلاثة متغيرات . مقدار التباعد لمتجه A (لمركباته A_x , A_y و A_z ; بمعني: $A = A_x\hat{\imath} + A_y\hat{\jmath} + A_z\hat{k}$) و التباعد يعرف كالاتي

$$\nabla \cdot A \equiv \frac{\partial}{\partial x} A_x + \frac{\partial}{\partial y} A_y + \frac{\partial}{\partial z} A_z \qquad (2\text{-}2)$$

نلاحظ ان التباعد للمتجه هو كمية قياسية . نظرية التباعد تنص علي ان التكامل الحجمي لاي متجه A قابل للتفاضل باستمرار هو التكامل السطحي المغلق . للمركبات العمودية الي الخارج للمتجه A :

$$\boxed{\iiint_R \nabla \cdot A \; dV = \oiint A \cdot \hat{n}\, ds} \qquad (2\text{-}3)$$

و تعرف ايضا بنظرية جاوس . يمكن استخدامها لربط بعض التكاملات السطحية مع التكاملات الحجمية . و العكس بالعكس ، هذا مهم و مفيد جدا (ايضا في الحال او فيما بعد) .

تطبيقات نظرية التباعد في التدفق الحراري : علي وجه الخصوص تكامل السطح المغلق الذي نشا من حفظ الطاقة الحرارية (2-1) يتطابق مع تدفق الطاقة الحرارية عبر الحدود و وحدة الزمن ، يمكن كتابته لتكامل حجمي بناءا علي نظرية التباعد (2-3) ، و هكذا (2-1) تكون كالاتي

$$\frac{d}{dt}\iiint_R c\rho u\ dV = -\iiint_R \nabla\cdot\emptyset\ dV + \iiint_R Q\ dV \qquad (2\text{-}4)$$

نعلم ان التفاضل بالنسبة للزمن في (2-4) نستطيع ان نضعه بداخل التكامل (حيث R مثبت في الفراغ) اذا تغيرت المشتقة بالنسبة للزمن لتفاضل جزئي فان كل التعابير في (2-4) هي تكامل حجمي داخل نفس الحجم و يمكن جمعها في تكامل واحد :

$$\iiint_R \left[c\rho\ \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla\cdot\emptyset - Q\right] dV = 0 \qquad (2\text{-}5)$$

بما ان هذا التكامل هو صفر لكل المناطق R ، فان (كما هو لتكامل احادي البعد) الكمية المتكاملة بنفسها يجب ان تكون صفر

$$c\rho\ \frac{\partial u}{\partial t} + \nabla\cdot\emptyset - Q = 0$$

هذا يكافئ

$$c\rho\ \frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla\cdot\emptyset + Q \qquad (2\text{-}6)$$

المعادلة (2-6) حولت الي (1-4) في حالة البعد الواحد .

(2-3) <u>قانون فوريير للتوصيل الحراري</u> :-

في مسائل البعد الواحد بموجب التجارب لقانون فوريير، ان التدفق الحراري $\emptyset$ يتناسب مع تفاضل درجة الحرارة ، $\emptyset = -k_0\frac{\partial u}{\partial x}$ علامة السالب اختصت في الحقيقة بتدفق الطاقة الحرارية من الساخن الي البارد . $\frac{\partial u}{\partial x}$ هي التغير في درجة الحرارة في وحدة الطول . هذه الافكار نفسها صحيحة في ثلاثة ابعاد . زيادة علي ذلك ان تدفق الحرارة للمتجه $\emptyset$ يتناسب مع الانحدار في درجة الحرارة

$$(\nabla u \equiv \frac{\partial u}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial u}{\partial z}\hat{k}):$$

$$\boxed{\emptyset = -k_0 \nabla u} \qquad (2\text{-}7)$$

يعرف بقانون فوريير لتوصيل الحرارة ، مرة اخري k_0 يسمي الباعث الحراري . و لكذا في ثلاثة ابعاد الانحدار ∇u استبدل ب $\frac{\partial u}{\partial x}$.

(2-4) معادلة الحرارة :-

عند تعويض متجه التدفق الحراري (2-7) في قانون الحفظ لمعادلة الطاقة الحرارية (2-6) ، تنتج في معادلة تفاضلية جزئية لدرجة الحرارة :

$$\boxed{c\rho \frac{\partial u}{\partial t} = \nabla \cdot (k_0 \nabla u) + Q} \qquad (2\text{-}8)$$

في الحالة التي لا يوجد فيها مصدر للطاقة الحرارية $(Q = 0)$ و المعاملات الحرارية ثابتة ، (2-8) تكون

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \nabla \cdot (\nabla u) \qquad (2\text{-}9)$$

حيث $k = {}^{k_0}/_{c\rho}$ ايضا يسمي معامل الانتشار الحراري . و من التعريف نحسب التباعد لانحدار u :

$$\nabla \cdot (\nabla u) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right) \qquad (2\text{-}10)$$

$$= \boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \equiv \nabla^2 u}$$

التعبير $\nabla^2 u$ يعرف ب لابلاس ل u و لذلك في هذه الحالة

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial t} = k\,\nabla^2 u} \qquad (2\text{-}11)$$

المعادلة اعلاه تعرف بمعادلة الحرارة او معادلة الانتشار في ثلاثة ابعاد مكانية . الترميز $\nabla^2 u$ يستخدم لتوضيح دور المؤثر ∇ :

$$\nabla \equiv \frac{\partial}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{k}$$

نلاحظ ان ∇u هو ∇ مؤثر علي u لكن $\nabla \cdot A$ الضرب النقطي المؤثر ∇ مع A . $\nabla^2 u$ هي الضرب النقطي لمؤثر مع نفسه

$$\nabla \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial z}\right)$$

يؤثر علي u حيث انها تكون مربعه ∇^2 .

<u>مسالة القيمة الابتدائية الحدية</u> : بالاضافة الي (2-8) او (2-11) درجة الحرارة تحقق التوزيع الابتدائي المعطي

$$u(x, y, z, 0) = f(x, y, z)$$

درجة الحرارة تحقق ايضا الشروط الحدية لاي نقطة علي السطح داخل المنطقة قيد الدراسة . الشروط الحدية يمكن ان تكون مختلفة الانواع (مثل مسائل البعد الواحد) درجة الحرارة توصف كما يلي

$$u(x, y, z, t) = T(x, y, z, t)$$

في كل مكان علي الحدود ، حيث T هو عبارة عن دالة معادلة في t لاي نقطة علي الحدود . ايضا من الممكن وصف التدفق الذي يعبر الحدود . ايضا يمكننا ان نعزل الحدود (او جزء منها) مع العلم ان متجه التدفق هو $-k_0\nabla u$ التدفق الخارجي للحرارة ربما هي وحدة المتجه العمودية للخارج لمتجه التدفق الحراري $-k_0\nabla u \cdot \hat{n}$ ، حيث $\hat{n}$ وحدة عمودية متجه لخارج السطح الحدي و هكذا للسطح المعزول

$$\nabla u \cdot \hat{n} = 0$$

$\nabla u \cdot \hat{n}$ تسمي المشتقة الاتجاهية لـu في الاتجاه العمودي الخارجي و ايضا يسمي بالمشتقة العمودية .

طالما كان قانون نيوتن للتبريد اكثر ملائمة للشروط الحدية . ينص علي ان التدفق الحراري الي الخارج في وحدة الزمن في وحدة مساحة السطح يتناسب مع الاختلاف بين درجة الحرارة u لسطح و درجة الحرارة u_b الخارج السطح و هكذا اذا كان قانون نيوتن للتبريد صحيح اذا علي الحدود تكون

$$-k_0 \nabla u \cdot \hat{n} = H(\mathrm{u} - u_b) \qquad (2\text{-}12)$$

اعلم انه احيانا ثابت التناسب $H > 0$ ، مع العلم انه اذا كانت $\mathrm{u} > u_b$ اذن نحن نتوقع ان الطاقة الحرارية ستدفق خارجا و ان $-k_0 \nabla u \cdot \hat{n}$ سوف تكون اكبر من الصفر . المعادلة (2-12) تؤكد الصيغتين لقانون نيوتن للتبريد لمسائل البعد الواحد خاصة عند $x = 0$، $\hat{n} = -\hat{\imath}$ في الجانب الايسر للمعادلة (2-12) يكون $k_0 \frac{\partial u}{\partial x}$ { انظر الي (1-15) و (1-16) } . و عندما $\hat{n} = \hat{\imath}$ و $x = L$ الجانب الايسر للمعادلة (2-12) يصبح $-k_0 \frac{\partial u}{\partial x}$.

<u>الحالة المستقرة</u> : اذا كانت الشروط الحدية و اي مصدر للطاقة الحرارية لا يعتمد علي الزمن، من الممكن ان يوجد حالة مستقرة للحل لمعادلة الحرارة يحقق الشرط الحدي :

$$0 = \nabla \cdot (k_0 \nabla u) + Q$$

اعلم ان التوزيع المتوازن لدرجة الحرارة $u(x, y, z,)$ يحقق معادلة تفاضلية جزئية و في اكثر من بعد واحد مكاني . في هذه الحالة مع ثبوت الخواص الحرارية . التوزيع المتوازن لدرجة الحرارة يحقق

$$\nabla^2 u = -\frac{Q}{k_0} \qquad (2\text{-}13)$$

و هي تعرف بمعادلة بويسون .

بالاضافة الي ذلك اذا كان لا يوجد اي مصدر $(Q = 0)$ اذن

$$\boxed{\nabla^2 u = 0} \qquad (2\text{-}14)$$

لابلاس لتوزيع درجة الحرارة يساوي الصفر . المعادلة (2-14) تسمي معادلة لابلاس . و ايضا تسمي بمعادلة الجهد مع العلم ان القدرة علي الجاذبية و الاستقرار الكهربائي يحقق (2-14) اذا كان لا يوجد مصدر . نحن نود ان نحل عدد من المسائل المتضمنة معادلة لابلاس لاحقا في هذا الجزء .

مسائل في بعدين : كل الملاحظات السابقة عن مسائل الثلاثة ابعاد تكون صحيحة اذا كانت هندسيا درجة الحرارة تعتمد علي x و y ، و t . كمثال لذلك معادلة لابلاس في بعدين $y = x$. تطابق التدفق الحراري المتوازن حيث لا يوجد مصدر (و مع ثبوت الخواص الحرارية) . تعطي بالمعادلة

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

مع العلم ان $\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = 0$. النتائج في بعدين يمكن ان تشتق مباشرة (بدون اخذ النهاية في ثلاثة ابعاد) ، باستخدام الاساسيات في بعدين . نحن لا نريد اعادة الاشتقاق . كيفما كان نستطيع بسهولة تلخيص النتائج . في اي وقت يظهر التكامل $(\iint_R \ldots . dV)$. يجب ان نستبدل بتكامل السطح الكامل في بعدين للمنطقة $(\iint_R \ldots . ds)$ و بالمثل تاثير الحدود للمسائل في ثلاثة ابعاد ، هي تبديل اي تكامل لسطح مغلق $(\oiint \ldots . ds)$ بتكامل خطي مغلق $\int \ldots . dt$، و التكامل علي الحدود في سطح ذو بعدين ، هذه النتائج ليست صعبة الاشتقاق حيث ان نظرية التباعد في ثلاثة ابعاد ،

$$\iiint_R \nabla \cdot A \, dV = \oiint A \cdot \hat{n} \, ds \qquad (2\text{-}15)$$

صحيحة في بعدين و تاخذ الصيغة التالية :

$$\oiint_R \nabla \cdot A \, ds = \oint A \cdot \hat{n} \, dt \qquad (2\text{-}16)$$

في بعض الاحيان المعادلة اعلاه تسمي نظرية قرين لكن نحن نفضل ان نشير الي ذلك بنظرية التباعد في بعدين في هذه الطريقة هنالك معادلة واحدة فقط تحتاج اليه و هي مالوفة للقارئ .

<u>الاحداثيات القطبية و الاسطوانية</u> : معادلة لابلاس

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad (2\text{-}17)$$

و هي مهمة مع الحالات المستقرة اكثر من الحالات العلمية الهندسية الاخري . المعادلة اعلاه (في احداثيات كارتيزية) تكون ذات اهمية اكثر عندما تكون المساحة الهندسية مستطيلة الشكل، او مربعة في حالة التطبيقات العملية تكون معادلات لابلاس في النظام الاحداثي مهمة للتعبير عن ذلك ، في حالة المستويات الدورانية (الفراغية) بنصف قطر (r) من المستوي (z-axis) و بزاوية (θ) فان

$$\boxed{\begin{aligned} x &= r\ \cos\theta \\ y &= r\ \sin\theta \\ z &= z \end{aligned}} \qquad (2\text{-}18)$$

يمكن تمثيل المعادلات بتحويل لابلاس كما يلي :

$$\nabla^2 u = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \qquad (2\text{-}19)$$

تتمثل سهولة المعادلة اعلاه في ملاحظة ان كل حد من حدودها يمثل بعدا في (u) كما يجب الاخذ في الاعتبار ان (θ) تقاس بوحدة الراديان و التي لا تعتمد علي الاتجاه . في الاحداثيات الدورانية (الاسطوانية) فان معادلات لابلاس لا تختلف عن المعادلة السابقة و في حالة عدم الوضع في الاعتبار البعد (z) فان المعادلة السابقة يمكن تفاضلها باستخدام التفاضل الجزئي المتسلسل . في بعض الحالات اللافيزيائية نجد ان درجة الحرارة لا تعتمد علي زاوية الدوران (θ) حيث تصبح متماثلة محوريا لتاخذ شكل المعادلة التالية :

$$\nabla^2 = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\,\frac{\partial u}{\partial r}\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad . \qquad (2\text{-}20)$$

(2-5) استنتاج معادلة فورير للتوصيل الحراري باستخدام التفاصيل :-

في حالة الانظمة المغلقة فان سريان الحرارة من المنطقة الحارة الي الباردة في اتجاه واحد و في حالة وجود فرق كبير بينهما في درجة الحرارة نجد ان السريان يتناسب طرديا مع معدل التغير في درجات الحرارة في ذلك الاتجاه . التغير في درجات الحرارة ∇U يعطي بالعلاقة :

$$\nabla u = u(x+\Delta x\,,t) - u(x,t) \;\approx\; \frac{\partial u}{\partial x}\,\Delta x + \frac{\partial u}{\partial y}\,\Delta y + \frac{\partial u}{\partial z}\Delta z\,.$$

في الاتجاه $\Delta x = \Delta s\;\hat{\alpha}$ ، $\hat{\alpha} = \alpha_1\hat{\imath} + \alpha_2\hat{\jmath} + \alpha_3\hat{k}$ عندما ΔS هي المسافة بين x و $\Delta\, x$ هذا يعني ان المعدل في التغير في درجة الحرارة في الاتجاه $\hat{\alpha}$ يعطي بالتفاضل المتجهي

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta s} = \alpha_1\,\frac{\partial u}{\partial x} + \alpha_2\frac{\partial u}{\partial y} + \alpha_3\frac{\partial u}{\partial z} = \hat{\alpha}\cdot\nabla u\,.$$

و يمكن ايجاد المتجه بالمعادلة التالية :

$$\boxed{\nabla u \;\equiv\; \frac{\partial u}{\partial x}\hat{\imath} + \frac{\partial u}{\partial y}\hat{\jmath} + \frac{\partial u}{\partial z}\hat{k}\quad,} \qquad (2\text{-}21\text{-}A1)$$

يسمي انحدار درجة الحرارة . و من خصائص الضرب القياسي (النقطي) و بفرض ان θ تمثل الزاوية بين $\hat{\alpha}$ و ΔU فان التفاضل المتجهي يمثل $|\nabla u|\ \cos\theta$ حيث $|\hat{\alpha}| = 1$ اكبر معدل لتغير u هو $|\nabla u| > 0$ ويحدث عند القيمة $\theta = 0$.

عندما يكون هذا التفاضل موجبا فان الزيادة في درجة الحرارة تاخذ اقصي قيمة في ذلك الاتجاه للانحدار اذا كان السريان في اتجاه درجات الحرارة المنخفضة فان قيمة الفيض الحراري تكون في اتجاه معاكس لاتجاه انحدار الحرارة وفقا للمعادلة :

$$\boxed{\emptyset = -k_0\,\nabla \mathrm{u}\,,} \qquad (2\text{-}21\text{-}A2)$$

حيث $|\nabla u|$ تمثل قيمة معدل التغير في U و هي ما تعرف بقانون فورير للتوصيل الحراري و في حالة الابعاد الثلاثية فان الانحدار ∇u يستبدل بالعلاقة $\frac{\partial u}{\partial x}$.

و من الخصائص الاساسية لانحدار الحرارة انه يكون متعامد مع المستوي السطحي (بعدين فقط) و من السهل توضيح ذلك في حالة بعدين فقط حيث تكون درجة الحرارة ثابتة علي طول المنحني الحراري .

طريقة فصل المتغيرات

(3-1) مقدمة :-

نحن وضعنا في الفصل الاول من المبادئ الفيزيائية تفهماً لمعادلة الحرارة وشروطها الأولية والحدية . نحن على استعداد لايجاد حل بعض المسائل النموذجية التي تشمل المعادلات التفاضلية الجزئية الرياضية . وسوف نستخدم تقنية تسمى طريقة فصل المتغيرات . و سوف نناقش بعض الامثلة .
مسالة بسيطة نسبيا ، ولكنها نموذج ، لمعادلة للتوصيل الحراري لقضيب أحادي البعد ($0 \leq x \leq l$)عندما تكون جميع المعاملات الحرارية ثابتة . ثم المعادلة التفاضلية الجزئية

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{Q(x,t)}{c\rho}\ , \quad t > 0 \qquad (3.1)$$
$$0 < x < l$$

يجب أن تحل تحت الشرط الابتدائي ،

$$u(x,0) = f(x)\,, \qquad 0 < x < l \qquad (3.2)$$

والشرطين الحديين التاليين . على سبيل المثال ، إذا كان كلا طرفي القضيب له درجة الحرارة معلومة حيث

$$u(0,t) = T_1(t) \quad t > 0 \qquad (3.3)$$

$$u(l,t) = T_2\,(t)\,.$$

يتم استخدام طريقة فصل المتغيرات عندما تكون المعادلة و الشروط الحدية خطية ومتجانسة ، ونحن الآن نوضح معادلة تفاضلية جزئية وشروط الحدود .

(3.2) **الخطية** :-

كما هو الحال في دراسة المعادلات التفاضلية العادية ، مفهوم الخطي ستكون مهمة جداً بالنسبة لنا . يعطي بتعريفL بمؤثر خطي

$$\boxed{l(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1\, l(u_1) + c_2\, l(u_2)} \qquad (3.4)$$

لأي دالتين u_1 و u_2 ، حيث c_1 و c_2 ثوابت اختيارية . $\frac{\partial}{\partial t}$ و $\frac{\partial^2}{\partial x^2}$ أمثلة لمؤثرات خطية نظراً لأنها تعطي (3.4) :

$$\frac{\partial}{\partial t}\,(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1\frac{\partial u_1}{\partial t} + c_2\,\frac{\partial u_2}{\partial t}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\,(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1\frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + c_2\frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2}\,.$$

فإنه يمكن اثبات ان أي تركيبة خطية من مؤثرات خطية يكون خطي . وهكذا ، عامل الحرارة

$$\frac{\partial}{\partial t} - k\,\frac{\partial^2}{\partial x^2}$$

أيضا مؤثر خطي .

المعادلة الخطية في المتغير u تكون في الصورة

$$l(u) = f\,, \qquad (3.5)$$

حيث l مؤثر خطي و f دالة معلومة . أمثلة من المعادلات التفاضلية الجزئية الخطية

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \qquad (3.6a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha(x,t) + f(x,t) \qquad (3.6b)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad (3.6c)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + \alpha(x,t)u \qquad (3.6d)$$

أمثلة من المعادلات التفاضلية الجزئية غير الخطية

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \alpha(x,t)u^4 \qquad (3.6e)$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\,\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \qquad (3.6f)$$

ان u^4 و $u\ {\partial u}/{\partial x}$ حدود غير خطية ؛ أنها لا تستوفي (3.4) .

إذا كان $f = 0$ ، ثم (3.5) يصبح $l(u) = 0$ ، تسمى معادلة خطية متجانسة . وتشمل أمثلة لمعادلات تفاضلية جزئية خطية متجانسة معادلة الحرارة ،

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\,\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \qquad (3.7)$$

كذلك (3.6c) و (3.6d) . من (3.4) يترتب علي ذلك $l(u) = 0$ (يعطي $c_1 = c_2 = 0$) . ولذلك ، $u = 0$ دائماً حل معادلة خطية متجانسة . على سبيل المثال ، $u = 0$ يعطي بمعادلة الحرارة (3.7) . ونحن ندعو $u = 0$ الحل بديهي من معادلة خطية متجانسة . أبسط طريقة لاختبار ما إذا كانت معادلة متجانسة هو ان تكون الدالة u مساوية للصفر . إذا $u \equiv 0$ يعطي معادلة خطية ، ومن ثم يجب أن يكون أن $f = 0$ ومن ثم المعادلة الخطية متجانسة . خلاف ذلك ، هو أن المعادلة تكون غير متجانسة [مثلاً (3.6a) و (3.6b)] .
الخاصية الأساسية للمؤثرات الخطية (3.4) تسمح لحلول المعادلات الخطية إضافتها معا بالمعنى التالي :

مبدأ التراكب :-
إذا u_1 و u_2 تعطي معادلة خطية متجانسة ، فان التركيب الخطي الاختياري لها ، $c_1u_1 + c_2u_2$ ، أيضا يحقق نفس المعادلة الخطية المتجانسة .

الدليل على ذلك يعتمد على تعريف المؤثرات الخطية . لنفترض أن u_1 و u_2 حلين لمعادلة خطية متجانسة . وهذا يعني أن $l(u_1) = 0$ و $l(u_2) = 0$. فلحساب $l(c_1u_1 + c_2u_2)$. من تعريف المؤثر الخطي ،

$$l(c_1u_1 + c_2u_2) = c_1\, l(u_1) + c_2\, l(u_2)$$

حيث u_1 و u_2 حلول متجانسة ، ويترتب على ذلك $l(c_1u_1 + c_2u_2) = 0$. وهذا يعني ان $c_1u_1 + c_2u_2$ يعطي المعادلة الخطية متجانسة $l(u_2) = 0$ إذا u_1 و u_2 يحقق نفس المعادلة الخطية المتجانسة .

مفاهيم الخطية والتجانس تنطبق أيضا على الشروط الحدودية ، وفي هذه الحالة يتم تقييم المتغيرات في نقاط محددة . أمثلة على شروط الحدود الخطية هي الشروط التي ناقشناها :

$$u(0,t) = f(t) \qquad (3.8a)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = g(t) \qquad (3.8b)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,(0,t) = 0 \qquad (3.8c)$$

$$-k_0\, \frac{\partial u}{\partial x}(l,t) = h[u(l,t) - g(t)] \qquad (3.8d)$$

شرط الحدود غير الخطي ، على سبيل المثال ، سيكون

$$\frac{\partial u}{\partial x}\,(l,t) = u^2(l,t) \qquad (3.8e)$$

فقط (3.8c) هو يتحقق اذا $u \equiv 0$ (من الشروط الخطية) ومن ثم يكون متجانساً . ليس من الضروري أن يكون شرط الحدود $u\,(0,t) = 0$ لتكون $u \equiv 0$ متحققة بذلك .

(3.3) **معادلة الحرارة بدرجة الحرارة تساوي الصفر في نهايات الحدود** :-

المعادلة التفاضلية الجزئية في (3.1) هي خطية ، ولكن أنها متجانسة فقط إذا كان لا توجد مصادر، $Q\ (x,t) = 0$ بشروط الحدودية (3.3) أيضا خطية ، وهي أيضا تكون متجانسة إذا كان $T_1(t) = 0$ و $T_2(t) = 0$. وبالتالي نقترح أولاً دراسة

$(3.9)\quad l < x < 0$ $t > 0$	$\dfrac{\partial u}{\partial t} = k\ \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$	المعادلة التفاضلية الجزئية
$(3.10a)$ $(3.10b)$	$u(0,t) = 0$ $u(l,t) = 0$	الشروط الحدية
(3.11)	$u(x,0) = f(x)$	الشرط الابتدائي

المسالة تتكون من معادلة تفاضلية جزئية خطية متجانسة مع شروط حدية خطية متجانسة . هناك سببان للتحقيق في هذا النوع من المسالة ، $(3.11) - (3.9)$، إلى جانب حقيقة أن ندعي أنه يمكن حلها بطريقة فصل المتغيرات . أولاً ، هذه المسالة ذات صلة فيزيائية مقابلة لقضيب أحادي البعد $(l > x > 0)$ مع عدم وجود مصادر وكلا طرفي منغمسين في حمام درجة حرارة 0° . ونحن مهتمون للغاية في التنبؤ بكيفية ان الطاقة الحرارية الابتدائية (ممثلة بواسطة الشرط الابتدائي) تتغير في هذه الحالة الفيزيائية بسيطة نسبيا . وثانيا ، سوف تتحول إلى أنه بغية إيجاد حل لهذه المسالة غير متجانسة $(3.3) - (3.1)$ ، سوف نحتاج إلى معرفة كيفية حل المسالة المتجانسة ، $(3.11) - (3.9)$.

(3.4) **فصل المتغيرات :-**

في طريقة فصل المتغيرات ، نحاول تحديد الحلول في صيغة الضرب التالية :

$$\boxed{u(x,t) = \emptyset(x)\ G(t),} \qquad (3.12)$$

حيث $\emptyset(x)$ هو فقط الدالة في x و $G(t)$ فقط دالة في t . المعادلة (3.12) يجب ان تحقق المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية المتجانسة (3.9) والشروط الحدية (3.10), و لكن في الوقت الحاضر نضع جانبا (تتجاهل) الشرط الابتدائي . لان الحل ، (3.12), لا يحقق الشروط الابتدائية . في وقت لاحق سوف نشرح كيفية تحقق الشروط الأولية .

فلأن يكون واضحا من البداية-- لا نعطي أي أسباب لماذا نختار الشكل (3.12) . (دانييل برنولي اخترع هذه التقنية في القرن الثامن عشر . و أنها صحيحة ، كما سنرى .) علينا تعويض صيغة الضرب المفترضة ، (3.12)، في المعادلة التفاضلية الجزئية (3.9) :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \emptyset(x)\frac{dG}{dt}$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2\emptyset}{dx^2}\,G(t)\,,$$

ونتيجة لذلك معادلة الحرارة (9.3) يعني أن

$$\emptyset(x)\,\frac{dG}{dt} = k\,\frac{d^2\emptyset}{dx^2}\,G(t). \qquad (3.13)$$

أننا نلاحظ أن نحن يمكن "فصل المتغيرات" بقسمة كلا الجانبين (3.13) ب $\emptyset(x)G(t)$:

$$\frac{1}{G}\,\frac{dG}{dt} = k\frac{1}{\emptyset}\,\frac{d^2\emptyset}{dx^2}\,.$$

الآن المتغيرات تم فصلها بمعنى أن الجانب الأيسر هو فقط دالة في t وعلى الجانب الأيسر فقط دالة x . يمكن أن نستمر في هذا الطريق ، و من المناسب (ليس من الضروري) القسمة على الثابت k ، و لذلك

$$\underbrace{\frac{1}{kG}\,\frac{dG}{dt}}_{\text{دالة في } t \text{ فقط}} = \underbrace{\frac{1}{\emptyset}\,\frac{d^2\emptyset}{dx^2}}_{\text{دالة في } x \text{ فقط}} \qquad (3.14)$$

هذا و يمكن الحصول عليها مباشرة من (3.13) من خلال القسمة علي $k\,\emptyset(x)G(t)$. كيف يمكن لدالة من الزمن ان تساوي دالة في المكان ؟ اذا كانت x و t متغيرات مستقلة ، ثم x لا يمكن ان تكون دالة في t (او t دالة في x) كما يبدو في المعادلة (3.14) . الفكرة المهمة هو ان ندعي انه من الضروري ان كلا الجانبين من (3.14) يجب ان تساوي نفس الثابت :

$$\boxed{\frac{1}{kG}\,\frac{dG}{dt} = \frac{1}{\emptyset}\,\frac{d^2\emptyset}{dx^2} = -\lambda\,,} \qquad (3.15)$$

حيث λ هو ثابت اختياري المعروف باسم ثابت الانفصال . سوف نشرح علامة السالب الغامض ، الذي تم عرضه فقط للملائمة .
المعادلة (3.15) تنتج اثنين من المعادلات التفاضلية العادية ، فقط من اجل $G(t)$ و $\emptyset(\mathrm{x})$:

$$\boxed{\frac{d^2\emptyset}{dx^2} = -\lambda\, \emptyset} \qquad (3.16)$$

$$\boxed{\frac{dG}{dt} = -\lambda\, kG\,.} \qquad (3.17)$$

تكرار ان λ هو ثابت و انه هو نفسه يظهر في كل (3.16) و (3.17) . صيغة الضرب $u(x,t) = \emptyset(x)\, G(t)$ ، يجب ايضا يحقق الشرطين ذات الحدود المتجانسة .
مثلا ، $u(0,t) = 0$ يعني ان $\emptyset(0)G(t) = 0$. هنالك احتمالان . كل $G(t) \equiv 0$ (معني $\equiv$ هو مطابق الصفر ، لجميع t) او $\emptyset(0) = 0$. اذا $G(t) \equiv 0$ ، ثم من (3.12) ، صيغة

الضرب للحل تساوي الصفر ، $u(x,t) = 0$ هذه ليست مثيرة للاهتمام . $u(x,t) \equiv 0$] و يسمي الحل تافهة لان $u(x,t) \equiv 0$ تحقق تلقائيا اي معادلة تفاضلية جزئية متجانسة و اي شرط اولي متجانس .] بدلا منه ، نبحث عن حلول غير بديهيه . (حلول تطبيقية)، يجب ان يكون لدينا

$$\emptyset(0) = 0\,. \qquad (3.18)$$

من خلال تطبيق الشرط الحدي الاخر ، $u(L,t) = 0$ ، نحصل بطريقة مماثلة علي

$$\emptyset(L) = 0\,. \qquad (3.19)$$

حلول الضرب ، اضافة الي انها تحقق اثنين من المعادلات التفاضلية العادية ، (3.16) و (3.17) ، يجب انها ايضا تحقق الشروط الحدية (3.18) و (3.19) .

(3.5) المعادلة التي تعتمد علي الزمن :-

من محاسن طريقة الضرب هو انه يحول المعادلة التفاضلية الجزئية ، و التي لا نعرف كيفية حلها ، الي معادلتين من المعادلات التفاضلية العادية . الشروط الحدية فرض شرطين علي المعادلة التفاضلية العادية التي تعتمد علي x . المعادلة التي تعتمد علي الزمن لا يوجد لديها شروط اضافية ، فقط

$$\frac{dG}{dt} = -\lambda\, kG . \qquad (3.20)$$

دعونا نحل (3.20) اولا قبل ان نناقش حل المعادلة التفاضلية العادية التي تعتمد علي x علي اثنين من شروط الحدود متجانسة . المعادلة (3.20) هي معادلة تفاضلية خطية متجانسة من الرتبة الاولي ذات معاملات ثابتة . يمكننا الحصول علي الحل العام لها بسهولة تامة . تقريبا جميع المعادلات التفاضلية العادية ذات المعاملات الثابتة يمكن حلها عن طريق البحث عن حلول اسية ، $G = e^{rt}$ ، حيث في هذه الحالة بالتعويض لكثيرة الحدود المميزة هي $r = -\lambda k$. و بالتالي فان ، الحل العام الي (3.20) هو

$$G(t) = c\, e^{-\lambda kt}. \qquad (3.21)$$

تذكر ان للمعادلة الخطية المتجانسة ، اذا كان $e^{-\lambda kt}$ هي حل ، فان $c\, e^{-\lambda kt}$ هي حل (لاي ثابت اختياري c) . الحل الذي يعتمد علي الزمن هو الحل الاسي . بما ان λ هو ثابت الانفصال ، و الذي لهذه اللحظة هو اختياري . و مع ذلك ، في نهاية المطاف سوف نكتشف انه ليس هناك سوي قيم معينة من λ المسموح به . اذا $\lambda > 0$ ، الحل يضمحل بشكل كبير مع زيادة t (بما ان $k > 0$) . اذا $\lambda < 0$ ، الحل يزداد اضعافا مضاعفة ، و اذا $\lambda = 0$ ،

الحل يبقي ثابتا في الزمن . بما ان مسالة توصيل الحرارة و ان درجة الحرارة $u(x,t)$ تتناسب مع $G(t)$ ، نحن لا نتوقع الحل لينمو باضعاف مضاعفة في الزمن . و بالتالي ، فاننا نتوقع $\lambda \geq 0$ ، نحن لم نثبت هذا البيان ، و لكن سنفعل ذلك في وقت لاحق . عندما نري اي وسيط غالبا ما نفترض تلقائيا انه هو موجب ، علي الرغم علي اننا لا ينبغي ان نفرض ذلك . و ذلك ، انها مناسبة ان نتوقع $\lambda \geq 0$. في الواقع ، هذا هو السبب في التعبير $-\lambda$ عندما فصلنا المتغيرات [انظر (3.15)] . اذا ادخلنا μ (بدلا من $-\lambda$) ، فان حجبنا السابقة لاقترحت ان $\mu \leq 0$. باختصار ، عند فصل المتغيرات في (3.15) ، نحل

منطقيا المعادلة الزمنية التي تعتمد علي $G(t)$ التي لا تنمو باضعاف الا اذا كان ثابت الفصل ≥ 0 . نحن بذلك علينا ادخال $-\lambda$ للملائمة ، منذ كنا نتوقع $\lambda \geq 0$. نحن في الواقع نريد تحديد كل الثوابت المسموح بها . و الرياضيات سوف تحقق $\lambda \geq 0$ ، من الحجج الفيزيائية الواردة اعلاه .

(3.6) مسالة القيمة الحدية :-

الدالة التي تعتمد علي x في صيغة الضرب للحل ، $\emptyset(x)$ ، يعطي المعادلة التفاضلية العادية من الدرجة الثانية مع شروط الحدود المتجانسة :

$$\boxed{\begin{gathered} \frac{d^2\emptyset}{dx^2} = -\lambda\emptyset \\ \emptyset(0) = 0 \\ \emptyset(L) = 0 \end{gathered}} \qquad (3.22)$$

نسمي (3.22) مسالة القيمة الحدية للمعادلات التفاضلية العادية . في المقرارات الاولي المعتادة في المعادلة التفاضلية العادية ، يتم تحديد مسائل القيمة الاولية فقط . مثلا (التفكير في قانون نيوتن لحركة الجسيمات)، و نحن في حل المعادلات التفاضلية من الدرجة الثانية $(m\ d^2y/dt^2 = F)$ بشرطين ابتدائيين [يعطي $y(0)$ و $dy/dt(0)$] الاثنين في نفس الزمن . مسائل القيمة الاولية هي لطيفة جدا ، و عادة ما توجد حلول وحيدة لمسائل القيمة الاولية . و لكن ، (3.22) هي تختلف تماما . انها مسالة قيمة الحدود ، لا يتم اعطاء شرطين في نفس المكان (علي سبيل المثال $x = 0$) و لكن في مكانين مختلفين $x = 0$ و $x = L$. لا يوجد نظرية بسيطة تتضمن وجود الحل او انه وحيد في هذا النوع من المسائل . و بصورة خاصة ، يمكن ملاحظة ان $\emptyset(x) = 0$ تحقق المعادلة التفاضلية العادية و شرطي الحدود المتجانسة ، بقض النظر عن قيمة الثابت λ ، حتي اذا كان $\lambda < 0$; يشار اليها علي انها الحل التافه لمسالة القيمة الحدية . انه يتوافق مع $u(x,t) \equiv 0$ ، حيث $u(x,t) = \emptyset(x)G(t)$. اذا كانت الحلول للمعادلة (3.22) وحيدة ، فان $\emptyset(x) \equiv 0$

ستكون الحل الوحيد ; و نحن لن نكون قادرين علي الحصول علي حلول غير بديهية من المعادلة التفاضلية الجزئية و متجانسة خطية بطريقة الضرب (فصل المتغيرات) . لحسن الحظ ، هنالك حلول اخري من (3.22) . و مع ذلك ، هنالك عدم وجود حلول غير بديهية من (3.22) لجميع قيم λ . بدلا من ذلك ، سوف تظهر ان هناك قيم خاصة معينة ل λ ، تسمي القيم الذاتية لمسالة القيمة الحدية (3.22) ، التي ليست لها حلول بديهية ، $\emptyset(x)$. و بديهي $\emptyset(x)$ ، التي وجدت لقيم معينة في λ ، تسمي دالة ذاتية المقابلة للقيمة الذاتية λ .

دعونا نحاول تحديد القيم الذاتية ل λ . و بعبارة اخري ، لاي قيم ل λ هنالك حلول غير بديهية للمسالة (3.22) . تحل (3.22) مباشرة . معادلة الدرجة الثانية هي للمعادلة التفاضلية العادية خطية و متجانسة و ذات المعاملات الثابتة ; عادة ما يتم الحصول علي حلين مستقلين في شكل الاسي ، $\emptyset = e^{rx}$. و بتعويض هذه الاسية في المعادلة التفاضلية نحصل علي المعادلة المميزة $r^2 = -\lambda$. الحلول المقابلة لاثنين من الجذور لها خصائص تختلف اختلافا كبيرا تبعا لقيمة λ . و هناك اربع حالات :

1. $\lambda > 0$ ، التي جذورهما خيالية بحتة و هي جذور مركبة مترافقة ، $r = \pm i\sqrt{\lambda}$.
2. $\lambda = 0$ ، التي جذورها اثنين و متساويين ، 0 ، $r = 0$.
3. $\lambda < 0$ ، التي جذورهما الحقيقية مختلفة ، $r = \pm\sqrt{-\lambda}$ ، احداهما موجب و الاخر سالب . (لانه في هذه الحالة $-\lambda$ هو موجب ، بحيث يتم تعريف عملية الجذور التربيعية ايضا) .
4. λ نفسها عدد مركب .

سنقوم بتجاهل الحالة رقم 4 . الحل يعتمد علي الزمن ، باستخدام المنطق الفيزيائي ، نتوقع ان $\lambda \geq 0$; و ربما بعد ذلك سوف تكون غير ضرورية لتحليل الحالة 3 . و مع ذلك ، فاننا سوف نبرهن علي وجود سبب رياضي لاغفال هذه الحالة .

<u>القيم الذاتية و الدوال الذاتية ($\lambda > 0$) :</u> دعونا ننظر اولا في الحالة التي فيها $\lambda > 0$. مسالة القيمة الحدية هي

$$\frac{d^2\emptyset}{dx^2} = -\lambda\emptyset \qquad (3.23)$$

$$\emptyset(0) = 0 \qquad (3.24a)$$

$$\emptyset(L) = 0 . \qquad (3.24b)$$

اذا كان $\lambda > 0$ ، الحلول الاسية تكون في العادة تخيلية ، $e^{\pm\sqrt{\lambda}\,x}$. في هذه الحالة ، الحلول تتذبذب . اذا كنا نرغب حلول حقيقية مستقلة ، الخيارات $\sin\sqrt{\lambda}\,x$ و $\cos\sqrt{\lambda}\,x$ عادة ما تكون هي الخيار ($\sin\sqrt{\lambda}\,x$ و $\cos\sqrt{\lambda}\,x$ هي تركيبات خطية من $e^{\pm\sqrt{\lambda}\,x}$) . و بالتالي ، فان الحل العام في (3.23) هو

$$\emptyset = c_1 \cos\sqrt{\lambda}\,x + c_2 \sin\sqrt{\lambda}\,x , \qquad (3.25)$$

تركيبة خطية اختيارية من اثنين من الحلول المستقلة . (يمكن اختيار تركيبة خطية من اي حلين مستقلين .) $\sin\sqrt{\lambda}\,x$ و $\cos\sqrt{\lambda}\,x$ و عادة ما تكون الاكثر ملاءمة ، لكن $e^{i\sqrt{\lambda}\,x}$ و $e^{-i\sqrt{\lambda}\,x}$ يمكن استخدامها . في بعض الامثلة يمكن اختيار حلول اخري مستقلة . مثلا ، يمكن اختيار احيانا $\sin\sqrt{\lambda}\,(x-a)$ و $\cos\sqrt{\lambda}\,(x-a)$ حلول مستقلة .
الان نطبق شروط الحدود . $\emptyset(0) = 0$ يعني ان

$$0 = c_1 .$$

يتلاش حد جيب التمام ، حيث ان الحل يجب ان يكون صفر عند $x = 0$. لذلك $\emptyset(x) = c_2 \sin\sqrt{\lambda}\,x$. فقط شرط الحدود في $x = L$ لم يتحقق . $\emptyset(L) = 0$ يعني ان

$$0 = c_2 \sin\sqrt{\lambda}\,L .$$

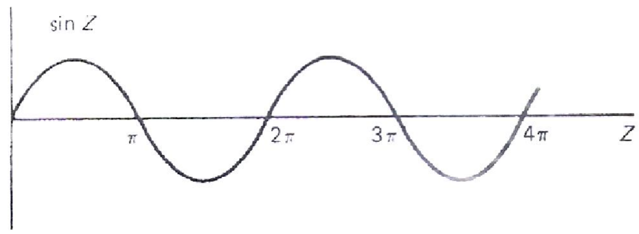
اما $c_2 = 0$ او $\sqrt{\lambda}\,L = 0$. اذا $c_2 = 0$ ، فان $\emptyset(x) \equiv 0$ و بما اننا فعلا حددنا $c_1 = 0$. و هذا هو الحل تافهة ، و نحن نبحث عن تلك القيم ل λ التي تحتوي علي حلول فعلية . القيمة الذاتية λ يجب ان تحقق

$$\sin\sqrt{\lambda}\,L = 0 . \qquad (3.26)$$

$\sqrt{\lambda}\,L$ يجب ان تكون صفرا لدالة الجيب . رسم تخطيطي $\sin z$ (انظر الشكل 2.3.1) او معرفتنا لدالة الجيب ، تبين ان $\sqrt{\lambda}\,L = \mathrm{n}\,\pi$. $\sqrt{\lambda}\,L$ يجب أن يساوي ثابتا مضروبا

في π ، حيث n عدد صحيح موجب ، حيث ان $\sqrt{\lambda} > 0$ ($n = 0$ ليس مناسبا نظراً لأننا يفترض أن $\lambda > 0$ في هذا الاثبات) . القيمة الذاتية λ هي

$$\lambda = \left(\frac{n\,\pi}{L}\right)^2 , \qquad n = 1,2,3,\cdots \qquad (3.27)$$



الشكل 2.3.1 اصفار من $\sin z$.

تكون الدوال الذاتية التي تناظر $(n\pi/L)^2$ $\lambda =$:

$$\emptyset(x) = c_1 \sin\sqrt{\lambda}\; x = c_2 \sin\frac{n\pi x}{L} , \qquad (3.28)$$

حيث ان c_2 هي ثابت اختياري . نحن غالبا نختار قيم ملائمة c_2 ، مثلا $c_2 = 1$. نحن نود ، ان تتذكر، ان اي دالة ذاتية يجب ان تكون مضروبة في ثابت اختياري ، حيث ان المعادلة التفاضلية الجزئية و شروط الحدود هي خطية و متجانسة .

القيمة الذاتية $(\lambda = 0)$: الان نحن نريد ان نحدد اذا كانت $\lambda = 0$ هي قيمة ذاتية من (3.23) تحت شروط الحدية (2.3.16) . $\lambda = 0$ حالة خاصة . اذا كانت $\lambda = 0$ ، (3.23) هذا يقتضي ان

$$\emptyset = c_1 + c_2\, x ,$$

يطابق ان هنالك جذرين صفريين 0 ، $r = 0$, للمعادلة المميزة . لتحديد ما اذا كان $\lambda = 0$ هو قيمة ذاتية ، يجب تطبيق شروط الحدود متجانسة . $\emptyset(0) = 0$ ويعني ذلك $0 = c_1$ ، لذلك $\emptyset = c_2\, x$. وبالإضافة إلى ذلك ، يعني $\emptyset(L) = 0$ أن $0 = c_2 L$. طول القضيب L موجب $(\neq 0)$ ، $c_2 = 0$ ، و لذلك $\emptyset(x) \equiv 0$. وهذا هو الحل تافهة ، و لذلك نقول أن $\lambda = 0$ ليست قيمة ذاتية ، لهذه المسالة [(3.23) و(3.24)] . يجب ان

نكون حذرين ، على الرغم ان $\lambda = 0$ هو قيمة ذاتية لمسائل أخرى ، وينبغي أن ينظر في شكل فردي لأي مسالة جديدة قد تصادف .

القيم الذاتية $(\lambda < 0)$: هل هناك أي قيم ذاتية سالبة ؟ إذا كان $\lambda < 0$ ، الحل

$$\frac{d^2\emptyset}{dx^2} = -\lambda\emptyset \qquad (3.29)$$

ليس صعبا ، ولكن قد تضطر إلى توخي الحذر . جذور المعادلة المميزة هي $r = \pm\sqrt{-\lambda}$ ، و لذلك الحلول هي $e^{\sqrt{-\lambda}\,x}$ و $e^{-\sqrt{\lambda}\,x}$. إذا كنت لا تحب الترميز $-\sqrt{\lambda}$ ، فقد تفضل ما

يكافئ (إذا $\lambda < 0$) ، إلا وهي $\sqrt{|\lambda|}$. ومع ذلك ، $\sqrt{\lambda} \neq \sqrt{|\lambda|}$ ، حيث $\lambda < 0$. من المناسب كتابة

$$\lambda = -s ,$$

في الحالة التي فيها $\lambda < 0$. حيث $s > 0$ ، و المعادلة التفاضلية (3.29) تصير

$$\frac{d^2\emptyset}{dx^2} = s\emptyset . \qquad (3.30)$$

الحلين المستقلين هما $e^{+\sqrt{s}\,x}$ و $e^{-\sqrt{s}\,x}$ ، حيث $s > 0$. الحل العام هو

$$\emptyset = c_1\, e^{\sqrt{s}\,x} + c_2\, e^{-\sqrt{s}\,x} . \qquad (3.31)$$

وكثيراً ما نستخدم بدلاً من ذلك الدوال الزائدية . كاستعراض ، تعاريف الدوال الزائدية

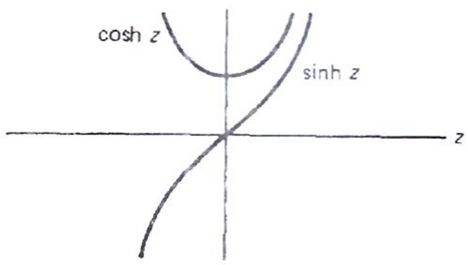
$$\cosh z \equiv \frac{e^z + e^{-z}}{2} \quad \text{و} \quad \sinh z \equiv \frac{e^z + e^{-z}}{2},$$

و هي تركيبات خطية بسيطة من الدوال الأسية . هذه هي رسمت في الشكل 2.3.2. ملاحظة أن $\cosh 0 = 1$ و $\sinh 0 = 0$ (نتائج مماثلة لتلك التي للدوال المثلثية) . أيضا ملاحظة أن $d/dz\ \sinh z = \cosh z$ و $d/\mathrm{dz}\ \cosh \mathrm{z} = \sinh \mathrm{z}$ ، مماثلة

تماما للدوال المثلثية ولكن أسهل تذكرها بسبب عدم ظهور اشارات السالب في صيغ التفاضل . إذا تم استخدام الدوال الزائدية بدلاً عن الدوال الأسية ، الحل العام (3.30) يمكن كتابته في الصورة :

$$\emptyset = c_3 \cosh\sqrt{s}\ x + c_4 \sinh\sqrt{s}\ x\,, \qquad (3.32)$$

نموذج يكافئ (3.31) . لتحديد ما إذا كان هناك أي قيم ذاتية سالبة ($\lambda < 0$ ، لكن $s > 0$ حيث $\lambda = -s$) ، مرة أخرى نطبق الشروط الحدية . أما النموذج (3.31) أو (3.32) يمكن استخدامها ؛ يتم الحصول على الجواب نفسه في كلتا الحالتين . من (3.32) ، $\emptyset(0) = 0$ ويعني ذلك $c_3 = 0$ ، ومن ثم $\emptyset = c_4 \sinh\sqrt{s}\ x$. ويعني شرط الحدود الأخره ، $\emptyset(L) = 0$ ، أن $c_4 \sinh\sqrt{s}\ L = 0$ بما ان $\sqrt{s}\ L > 0$ حيث ان sinh لا يساوي الصفر ابدا لاي سعة موجبة (انظر الشكل 2.3.2) ، ويترتب على ذلك $c_4 = 0$. و لذلك $\emptyset(x) \equiv 0$. والحل الوحيد ل (3.30) ل $\lambda < 0$ الذي يحل شروط الحدود المتجانسة هو الحل التافه . و لذلك لا توجد ، هناك أية قيم ذاتية سالبة . في هذا المثال ، قد تتفق مع وجود قيم ذاتية سالبة إلى النمو الاسي في الزمن . أننا لم نتوقع مثل هذه الحلول على أسس مادية ، وهنا تحققنا رياضيا بطريقة واضحة لا يمكن أن يكون هناك أي قيم ذاتية سالبة لهذه المسالة . في بعض المسائل الأخرى يمكن أن تكون هناك قيم ذاتية سالبة .



الشكل 2.3.2وظائف القطعي .

ملخص الدوال الذاتية : يمكننا تلخيص نتائج جهودنا لمشكلة الحدود القيمة الناتجة عن الفصل بين المتغيرات

$$\boxed{\begin{array}{c} \dfrac{d^2\emptyset}{dx^2} + \lambda\emptyset = 0 \\ \emptyset(x) = 0 \\ \emptyset(L) = 0\,. \end{array}}$$

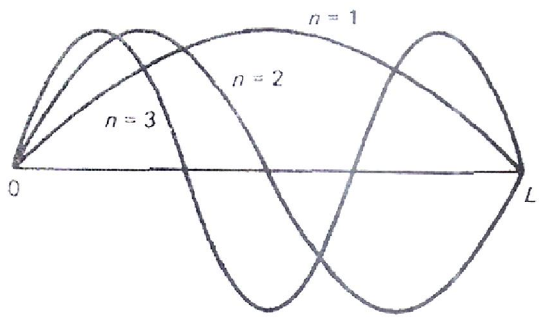
مسائل القيم الحدية تنشا في كثير من المسائيل . هذه مفيدة لتجعلك قريب من حفظ النتائج للقيمة الذاتية λ و التي كلها موجبة (و لا تساوي صفرا او سالبة) ،

$$\boxed{\lambda = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 ,}$$

حيث ان n اي عدد صحيح موجب ، $n = 1,2,3,\cdots$ ، و هي تتطابق الدالة الخاصة في

$$\boxed{\emptyset(x) = \sin\frac{n\pi x}{L}.}$$

اذا اتخدمنا الترميز λ_1 للقيمة الذاتية الاولي ، λ_2 للقيمة الذاتية اللاحقة ، نكتب $\lambda_n = (n\pi/L)^2$ ، $n = 1,2,\cdots$ تطابق دوال ذاتية في بعض الاحيان تعرف $\emptyset_n\ (x)$ ، اولا القليل منها رسم في الشكل 2.3.3 . كل الدوال الذاتية (طبعا) تساوي صفر عند $x = 0$ و $x = L$. نلاحظ ان $\emptyset_1 = \sin \pi x/L$ ليس له جذر في الفترة $0 < x < l$ ، و $\emptyset_2\ (x) = \sin 2\pi x/L$ له جذر واحد في الفترة $0 < x < L$. في الحقيقة ، $\emptyset_n\ (x) = \sin n\pi x/L$ تمتلك $n - 1$ من الجذور في الفترة $0 < x < L$. سوف نعلن لاحقاً (انظر ثانية 5.3) ، بشكل ملحوظ ، هذا خاصية عامة للدوال الذاتية .



الشكل 2.3.3 دوال خاصة $\sin n\pi x/L$ و الأصفار .

<u>حركة الزنبرك التوافقية :</u> قد تحصلنا علي الحلول المعادلة $d^2\emptyset/dx^2 = -\lambda\emptyset$. هنا نقدم تدافق من هذا إلى نظام حركة الزنبرك ، فيه البعض منكم قد تجد من المفيد . نظام حركة الزنبرك تخضع لقانون هوك ليرضي $m\ d^2y/dr^2 = -ky$ ، حيث $k > 0$ هو ثابت الزنبرك . وهكذا ، إذا كان $\lambda > 0$ ، المعادلة التفاضلية العادية (3.23) قد تكون الفكرة كحركة الزنبرك التوافقية . وهكذا ، إذا كان $\lambda > 0$ ، ينبغي للحل أن يتذبذب . لن يكون من المستغرب أن تتحقق الشروط الحدودية (3.24) عندما $\lambda > 0$ ؛ و الحل المعادلة التفاضلية العادية ، الذي هو صفر في $x = 0$ ، له فرصة ان يكون صفرا مرة أخرى في $x = L$ حيث أن هناك قوة لاستعادة وتذبذب الحل للمعادلة التفاضلية العادية . وقد أظهرنا أن هذا يمكن أن يحدث لقيم معينة $\lambda > 0$. ومع ذلك ، إذا كان $\lambda < 0$ ، لا يمكن استعادة . ويبدو أقل احتمالاً أن الحل الفعلي و هو صفر في $x = 0$ يمكن ان يكون صفر مرة أخرى في $x = L$. يجب أن لا نثق بحدسنا تماما ، حتى يمكننا التحقق من هذه الحقائق رياضيا .

(3.7) <u>طريقة الضرب ومبدأ التراكيب للحلول :-</u>

باختصار، حصلنا على الحلول لمعادلة الحرارة ، $\partial u/\partial t = k\ \partial^2 u/\partial x^2$ ، التي تحقق شروط الحدود المتجانسة $u(0,t) = 0$ و $u(L,t) = 0$ المقابل ل $\lambda > 0$ فقط . أن هذه الحلول ، $u(x,t) = \emptyset(x)G(t)$ ، لها $G(t) = ce^{-\lambda kt}$ و $\emptyset(x) = c_2\ \sin\sqrt{\lambda}\, x$ حيث حددنا من [$\emptyset(0) = 0$ و $\emptyset(L) = 0$] شروط الحدود القيم المسموح بها لثابت الفصل λ ، $\lambda = (n\pi/L)^2$. هنا n عدد صحيح موجب . وهكذا ، الحلول لمعادلة الحرارة

$$\boxed{u(x,t) = B\ \sin\frac{n\pi x}{L}\ e^{-k(n\pi/L)^2 t},} \qquad n=1,2,\ldots \qquad (3.33)$$

حيث B ثابت اختياري $(B = cc_2)$. وهذا حل مختلف لكل n . ملاحظة أنه كلما زاد t ، فان هذه الحلول الخاصة تضمحل اسيا . على وجه الخصوص ، لهذه الحلول ،

$\lim_{t\to\infty} u(x,t) = 0$ وبالإضافة إلى ذلك ، $u(x,t)$ تحقق شروط أولية خاصة ، $u(x,0) = B \sin n\pi x/l$.

مسائل القيمة الابتدائية : يمكننا استخدام طريقة الضرب حلول بسيطة ، (3.33) ، لتحقق مسالة القيمة الابتدائية إذا حدث الشرط الأولى ليكون صحيح . على سبيل المثال ، لنفترض أننا نرغب في حل مسالة القيمة الأولية التالية :

المعادلة التفاضلية الجزئية : $$\frac{\partial u}{\partial t} = k \; \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

شرط الحدود : $$u(0,t) = 0$$

$$u(L,t) = 0$$

الشرط الاول : $$u(x,0) = 4 \; \sin \frac{3\pi x}{L}$$

لدينا $u(x,t) = B \; \sin n\pi x/L \; e^{-k\,(n\pi/L)^2\, t}$ الحل الضرب يحقق الشرط الابتدائي $u(x,0) = B \; \sin n\pi x/L$. وهكذا ، بانتقاء $n = 3$ و $B = 4$ ، سوف تكون محققة .

مسائل :-

1) حدد معادلة التوزيع المتوازن لقضيب واحد مع ثبوت الخواص الحرارية للمصادر و الشروط الحدية الأتية :

a) $u(0) = T_1$ ، $u(L) = T_2$ ، $Q = 0$

الحل:-

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0 \quad \rightarrow (1)$$

نكامل المعادلة

$$\frac{dT}{dx} = c_1$$

نكامل للمرة الثانية

$T(x) = c_1 x + c_2$

$u(0) = T_1$ يعني $T_1 = c_2$

$u(L) = T_2$ يعني $T_2 = c_1 L + c_2$

$c_1 = \frac{(T_2 - T_1)}{L}$ ، $c_2 = T_1$

$$u(x) = T_1 + \frac{(T_2 - T_1)}{L} x$$

b) $u(0) = T$ ، $u(L) = 0$ ، $Q = 0$

الحل:-

$$\frac{d^2T}{dx^2} = 0$$

نكامل مرتين نحصل علي

$$T(x) = c_1 x + c_2$$

$$u(0) = T \quad \rightarrow \quad T = c_2$$

$$u(L) = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = c_1 L + c_2$$

$$c_2 = T \quad , \quad c_1 = \frac{T}{L}$$

$$T(x) = -\frac{T}{L} + T$$

c) $u(0) = 0 \quad , \quad u(L) = T \quad , \quad Q = 0$

الحل:-

نكامل مرتين نحصل علي

$$u(0) = 0 \quad \rightarrow \quad 0 = c_1$$

$$u(L) = T \quad \rightarrow \quad T = c_1 L + c_2 \quad \rightarrow \quad c_2 = 0$$

$$c_1 = \frac{T}{L}$$

$$T(x) = \frac{T}{L} x$$

d) $Q = 0 \quad , \quad u(0) = T \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \alpha$

الحل:-

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0$$

نكامل

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha$$

نكامل مرة اخري

$$u(x) = \alpha x + c_1$$

$$u(0) = T \quad \rightarrow \quad c_1 = T$$

$$u(x) = \alpha x + T$$

2) ليكن لدينا الاحداثيات القطبية $x = r\cos\theta \ , \ y = r\sin\theta$ مع العلم ان $r^2 = x^2 + y^2$ اثبت ان

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \sin\theta \quad , \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \cos\theta$$

الحل:-

$$2r\frac{\partial y}{\partial x} = 2x \quad \rightarrow \quad \frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{r} = \frac{r\cos\theta}{r} = \cos\theta$$

$$2r\frac{\partial r}{\partial y} = 2y = \frac{\partial r}{\partial y} = \frac{y}{r} = \sin\theta$$

3) افرض ان درجة حرارة اسطوانة متماثلة $u = u_c r(T)$ حيث ان $r^2 = x^2 + y^2$ نستطيع ان نشتق درجة الحرارة لهذه المسالة اعتبر اي حلقة دائرية $a \le r \le b$ اثبت ان مجموع الطاقة الحرارية يساوي $2\pi\int_a^b c\rho u r\, dr$.

الحل:-

من حجم الاسطوانة

$$u = \pi r^2 h \quad \rightarrow \quad dV = 2\pi r h\, dr$$

$$a \le r \le b$$

لكن الشرط نحن ننظر في الحلقة الدائرية اي دائرة

$$\rightarrow dV = 2\pi r\, dr$$

$$\rightarrow heat\ enregy = \int_{a}^{b} c\rho u\, dV$$

$$= \int_{a}^{b} c\rho u * 2\pi r\, dr$$

$$= 2\pi \int_{a}^{b} c\rho u r\, dr$$

4) اذا كانت معادلة لابلاس متكافئة في ثلاثة ابعاد اثبت $\oiint \Delta u * n\, ds = 0$ لاي سطح مغلق (استخدم نظرية التباعد)

الحل:-

لنفرض ان لدينا مكعب (ثلاثي الابعاد) حيث ان الكتلة الداخلية $\rho(v_1)\Delta y\Delta z$ و الكتلة الخارجية $\rho(v_1 + \Delta v_1)\Delta y\Delta z$ الفرق في الكتلة الخارجة x

$$= \rho\Delta v_1\Delta y\Delta z$$

الفرق في الكتلة الخارجة y

$$= \rho\Delta v_2\Delta x\Delta z$$

الفرق في الكتلة الخارجة z

$$= \rho\Delta v_3\Delta x\Delta y$$

الفرق الكلي

$$\rho\left(\frac{\Delta v_1}{\Delta x} + \frac{\Delta v_2}{\Delta y} + \frac{\Delta v_3}{\Delta z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z$$

لكن الفرق في الكتلة = صفر (من قانون بقاء الطاقة)

$$\rightarrow \left(\frac{\Delta v_1}{\Delta x} + \frac{\Delta v_2}{\Delta y} + \frac{\Delta v_3}{\Delta z}\right) = 0$$

$div\ v = 0$ اذا كتبنا $u = grad\ v$

$\rightarrow div\ (grad\ v) = \Delta^2 \mathrm{u} = 0$

و لدينا

$$\oiint \Delta u * n\, ds = \iint \Delta^2 u\, dv$$

بتعويض قيمة $\Delta^2 u \leftarrow$

$$\oiint \Delta u * n\, ds$$

المراجع:

1. C. Edwards, D. Penny, Elementary
    a. Differential Equations,2008.
2. R. HABERMAN, Elementary Applied Partial
Differential Equations,1987 USA .

3 - الديناميكا الحرارية

د. محسن سالم رضوان

الخاتمة:

الحمد لله الذي بنعمته تتم الصالحات و الشكر له سبحانه على توفيقه بان يسر لنا هذا الموضوع الذي كنا نتمنى دائما ان نقدم و لو شيئا يسيرا فله المنه و الفضل سبحانه ان يسر لنا هذا حتي تم بحمد الله ((ربي أوزعني أن أشكر نعمتك التي أنعمت علي و علي والدي و أن أعمل صالحا ترضاه و أدخلني برحمتك في عبادك الصالحين)) .