

# **The approximation by Smooth functions and fixed point of semigroup with polyhedral norms on separable Banach spaces**

أحمد عبد اللطيف محمد يوسف  
أستاذ مساعد  
قسم الرياضيات  
كلية العلوم  
جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا

**By**  
**Ahmed Abdallatif Mohammed Yousif**

**A thesis submitted in Partial Fulfillment For The**  
**Degree of M.sc.In Mathematics**

**Sudan University of Science and Technology**  
**College of Science**

**August ( 2008 )**

**Dedication**

To my family and Colleagues

(i)

## **Acknowledgements**

First of all I would like to express my deep gratitude to my supervisor Dr. Shawgy Hussein Abdalla for many helpful suggestions .

Thanks to the particular efforts of my brothers Dr. Atuib Abdalltif Mohammed , and Yousif Abdalltif Mohammed .

My great thank to Zalingei University for this opportunity .

(ii)

## Abstract

We characterize the separable Banach spaces  $X$ . We also state sufficient conditions on a separable Banach space so that the function can be taken to be of class  $C^k$ . In particular we obtain the optimal order of smoothness of the approximation functions with no critical points on the classical spaces  $C^k$  and  $C^k(\mathbb{R}^n)$ .

We show that every sub space of James tree space with non separable dual contains an isomorph of James tree complemented in James tree space  $JT$ . Also we show that every sub space of James function space with non separable dual contains an isomorphism of a new tree –like space  $JT^*$ . The new space yields that every sub space of James function with non-separable dual contains isomorphs of  $JT^*$ .

We study fixed point properties of semigroups of non-expansive mappings on weakly compact convex sub sets of a Banach space  $X$ . We provide a characterization for the existence of a left invariant mean on the space of weakly almost periodic functions on separable semitopological semigroups in terms of fixed point property for non- expansive mappings  $T$ .

We present the existence of equivalent polyhedral norms on a number of classes of non-separable spaces  $X$ .

(iii)

□□□□□□

تم تشخيص فضاءات باناخ الفصوصية وايضاً تم تحديد شروط كافية على فضاء باناخ الفصوص ، وعليه الدالة يمكن ان تؤخذ ان تكون من عائلة  $L^p$  . بصفة خاصة تحصلنا على الرتبة الأمثل لملسان الدوال التقريبية مع عدم نقاط حرجة على الفضاءات التقليدية  $L^p$  .

تم توضيح ان اي فضاء جزئي من فضاء شجرة جيمس مع ثنائية غير فصوصية تحتوي ايزومورف من متمم شجرة جيمس في فضاء شجرة جيمس . وايضاً تم توضيح أن أي فضاء جزئي من فضاء دالة جيمس مع ثنائية غير فصوصية تحتوي ايزومورف من شجرة جديدة - فضاء مثلي . الفضاء الجديد ينتج أن أي فضاء جزئي من دالة جيمس مع ثنائية غير فصوصية تحتوي ايزومورفات من  $L^p$  . تم دراسة خصائص النقطة الثابتة من شبه الزمر من التطبيقات غير التوسعية على الفئات الجزئية المحدبة المترادة الضعيفة من فضاء باناخ . تم إعطاء تشخيص لأجل وجود متوسط لامتغير أيسر على فضاء من دوال دورية دائماً ضعيفة على شبه زمر شبه طوبولوجية فصوصية بدالات خاصة النقطة الثابتة لأجل التطبيقات غير التوسعية .

تم تقديم وجود نظائم متعددة السطوح متكافئة على عدد من عائلات الفضاءات غير الفصوصية .

(iv)  
**Contents**

<b>Subject</b>	<b>page</b>
Dedication	i
Acknowledgments	ii
Abstract	iii
(Abstract (Arabic	iv
The contents	v
<b>Chapter ( )</b> Approximation By Smooth Functins on separable Banach spaces	1
<b>Chapter ( )</b> Subspaces of JF and JT with non-separable dual	45
<b>Sec(2-1)</b> The Spaces of $V_2$ of TF with tree families	45
<b>Sec(2-2)</b> The embedding of TF in to subspaces of $\mathcal{J}$ and subspaces of JF .	82
<b>Chapter ( )</b> Fixed point and bicyclic semi groups with continuity actions .	117
<b>Sec(1-3)</b> Fixed point of semigroup of non expansive mappings	117
<b>Sec(2-3)</b> Amenability of bicyclic semigroups and Jointly continuous actions .	139
<b>Chapter ( )</b> Non-separable Banach spaces and polyhedral Norms .	160
<b>Sec(1-4)</b> Scattered compact spaces .	160
<b>Sec(2-4)</b> Non –separable spaces with unconditional basis	176
List of symbols	197
References	198

(v)  
**List of symbols**

<b>Symbols</b>		<b>Page</b>
	The lebesque Space	iii
<b>max</b>	Maximum	2
<b>inf</b>	infimum	7
	Norm	7
<b>WUR</b>	Weakly uniformly rotund	7
	Equivalent classes	23
<b>Sup</b>	Supremum	68
	Lebesque measure	68
	Hilbrt space	104
<b>(LUC(s</b>	) (Has alft invariont (non linear	122
<b>(AP(s</b>	The space of continuous almost periodic function on s	128
<b>LIM</b>	Left invariant men	131
<b>(WAP(s</b>	The space of continuous weakly almost periodic function ons	134
<b>Exp</b>	Exponential	163

## References

- D. Azagra , and M.Jimenez – Sevilla **[1]**  
 Approximation by smooth function with no critical  
 points on separable Banach space  
 Journal of functional analysis 242 (2007) 1-36
- D.Apatsidis , S.A.Argyros , V.Kanellopoulos on the **[2]**  
 . subspaces of JF and JT with non-separable dual  
 Journal of functional analysis 254 (2008) 632-674
- Anthony to –Minglau , Yong Zhang **[3]**  
 Fixed point properties of semi groups of non  
 expansive mappings  
 Journal of functional Analysis 254 (2008) 2534-  
 2554
- V.P.Fonf , A.J .Pallares , R.J. Smith , S.Troyanski **[4]**  
 Polyhedral norms on non-separable Banach spaces  
 Journal of functional Analysis 255 (2008) 449-470
- Andrzej Granas , James Dugundji : fixed point: **[5]**  
 (theory , Springer-Verlage New York Inc (2003
- Eruin Kreyszing : Introduction functional analysis **[6]**  
 with applications , John wiley and sons , New york ,  
 . ((1978
- [7]** :G.O.okkiolu:Aspects of the theory of bounded  
 integral operators on spaces , Academic press , (1971) .
- [8]** :J.R.Giles : Introduction to the Analysis of the  
 Normal linear spaces , Cambridge University press ,  
 Landon , (2000)
- [9]** :Nicholas Yoing : An introduction to Hilbert spaces ,  
 Cambridge University press , landon (1997) .



