# الباب الثاني

# النماذج الرياضية لتحديد الإرتفاعات

# Mathematical Models In Height Determination

## 1.2 مقدمة

تقليدياً يكون تحديد الإرتفاعات منفصلاً عن تحديد المواقع الأفقية في جل العمليات المساحية . أكثر من هذا يكون مستوي الإسناد المستخدم للإرتفاعات مختلفاً عن ذلك المستخدم لتحديد المواقع الأفقية أو المعلومات المرتبطة بتلك المواقع كالإتجاهات الأفقية مثلاً. الأجهزة التي تستخدم لإيجاد الإرتفاعات مصممةً خصيصاً للتحديد المباشر لفروقات الإرتفاعات وليس الإرتفاعات في حد ذاتها. تراكم فروقات الإرتفاعات بين نقطةٍ ذات إرتفاعٍ معلوم ونقطةٍ أخرى غير معلومة الإرتفاع هي التي تؤسس وتحدد إرتفاع الأخيرة وبالتالي يصبح النموذج الرياضي والعمليات الحسابية المستخدمة لإيجاد الإرتفاعات بسيطةً بدرجةٍ كبيرة .

فروقات الإرتفاعات في الأعمال المساحية التي لاتتطلب دقةً عالية يمكن تحديدها بطرق عديدة تعطي دقةً معقولة ومقبولة في غالبية الأعمال المساحية للأغراض المختلفة . من تلك الطرق وأشهرها في المساحة المستوية هي الميزانية العادية Ordinary Levelling ، الميزانية المثلثية Trigonometric Levelling ، الميزانية التاكيومترية Tacheometric Levelling ، الميزانية البارومترية Barometric Levelling .

في الميزانية العادية يتم تحديد فرق الإرتفاع بين أي نقطتين لإيجاد الفرق بين المسافتين الرأسيتين عند النقطتين . المسافة الرأسية عند نقطةٍ معينة هي المسافة بين النقطة وأي خط أفقي مقاسةً في إتجاة الجاذبية عند النقطة المعنية .

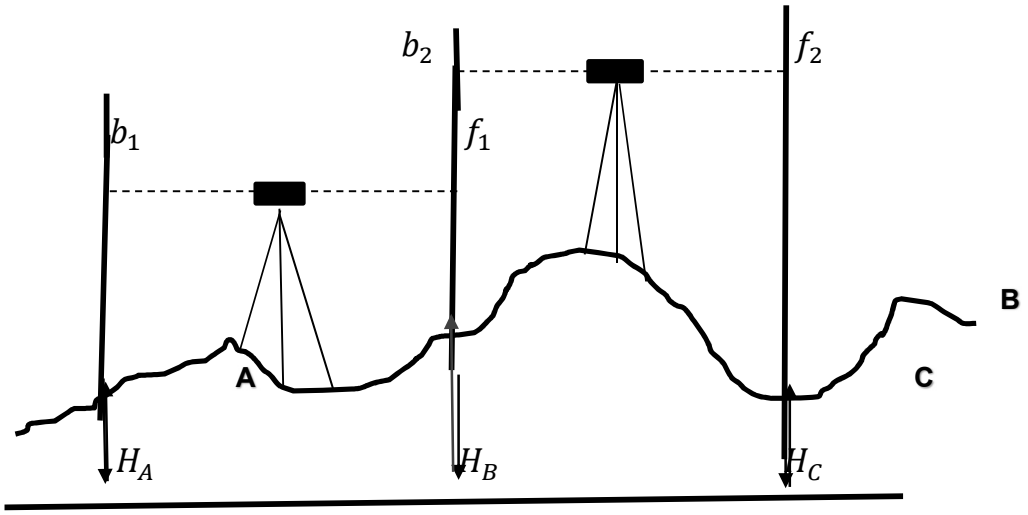
في الميزانية المثلثية والتاكيومترية يتم تحديد فرق الإرتفاع بقياس الزاوية الرأسية عند نهايتي الخط الممثل بالنقطتين المراد إيجاد فرق الإرتفاع بينهما . إقتران قيمة الزاوية الرأسية مع المسافة الأفقية أو المنحدرة يصبح وسيلة تمكننا من حساب فرق الإرتفاع . إذا تم تحديد المسافة بالطرق البصرية فإن الطريقة يشار إليها بالميزانية التاكيومترية . أما إذا قيست المسافة مباشرةً (بواسطة جهاز كهرومغنطيسي مثلاً) أو تم إشتقاقه من إحداثياتٍ معلومة أُشير إلى ذلك بالمزانية المثلثية .

أما الميزانية البارومترية فهي الطريقة التي يتم بها إيجاد فروقات الإرتفاع من العلاقة بين الضغط الجوي والإرتفاع .

أنواع الميزانية هذه سوف نتعرض لها بشئ من التفصيل في الأجزاء التالية مباشرة.

## 2.2 الميزانية العادية Ordinary Levelling

**في الشكل**(1,2) ادناه،النقطة Aعباره عن بنشمارك معلوم الإرتفاع $H_A$ فوق مستوى الإسناد ، وB هي النقطة التي يُراد إيجاد إرتفاعها فوق مستوي الإسناد . النقطة C آخر نقطةٍ تم رصد القراءة عليها معلومٌ إرتفاعها كذلك ، وخطأ القفل عندها هو الذي يؤشر إلى أي حدٍ يمكن الوثوق في المرصودات التي تم القيام بها .




**الشكل (1.2) الميزانية العادية**

دع القراءات التي تم رصدها (خلفيات و أماميات) عند المواقع المتتالية للقامة تُمثل بـ $b_1$ , $b_2$ و $f_1$ , $f_2$ . عملياً ولتفادي مشاكل كروية الأرض وإنكسار الضوء وعدم الضبط الدائم للجهاز المستخدم عادةً ماتؤخذ المسافة بين موقع الجهاز (الميزان) وموقع القامة عند القراءة الخلفية مساويةً للمسافة بين موقع الجهاز وموقع القامة عند القراءة الأمامية مساوية للمسافة بين موقع الجهاز وموقع القامة عند القراءةالخلفية

فرق الإرتفاع بين A و B معبرةً عنها كدالة في هذه القيم المرصودة هو

$$( dh_{AB} = (b_1 - f_1) \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.\dots \quad (2.1)$$

وإرتفاع النقطة B يمكن إيجاده من

$$H_B = H_A + dh_{AB} \quad \dots\dots\dots\dots\dots(2.2)$$

$$\Delta H_{BC}=(b_2-f_2) \dots\dots\dots\dots\dots(2.3)$$

$$H_C= H_B+\Delta h_{BC}=H_A+\Delta h_{AB} +\Delta h_{BC} \dots\dots\dots\dots(2.4)$$

إذا حدث عند إجراء الميزانية بين A و B أن أُخذت قراءات متوسطة فإن إرتفاعات تلك النقاط المتوسطة يمكن إيجادها من تراكم فروقات الإرتفاع حتى النقاط المعنية.

## 3.2 الميزانية التاكيومترية Tacheometric Levelling

كما ذكرنا سابقاً فإن الميزانية التاكيومترية تُستخدم الأجهزة البصرية لإيجاد فروقات الإرتفاعات بين النقاط المعنية . من ناحية المبدأ يتطلب القياس بالإجهزة البصرية إستخدام قاعدة ثابتة عند الهدف المنصوب على إحدى نهايتي الخط المراد قياسه أو زاويةٍ ثابتة عند نقطة الجهاز المنصوب على الطرف الآخر من الخط . القاعدة الثابتة يمكن أن تكون أي مسافة معلومة بدقةٍ عالية ، ولكن عادةً ماتكون القاعدة الثابتة قضيباً أفقياً مقابلاً Subtense-bar . لإيجاد المسافة الأفقية تُقاس الزاوية

الأفقية بين الأهداف في نهايتي القاعدة الثابتة . هذه الزاوية الأفقية مثلها والقاعدة الثابتة يجب أن تُقاس بدقةٍ عاليةٍ جداً لتاثيرها على المسافة الأفقية والتي بدورها تؤثر في فرق الإرتفاع المطلوب.

إذا كانت الزاوية الأفقية المقابلة للقضيب الأفقي تساوي $\boldsymbol{\theta}$ وأن المسافة الأفقية بين طرفي القضيب تساوي b فإن المسافة الأفقية D بين نقطة بالجهاز ونقطة القضيب يمكن إيجاد قيمتها من

$$D = \frac{b}{2}\cot\left(\frac{\boldsymbol{\theta}}{2}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2,5)$$

عندما تكون الزاوية $\boldsymbol{\theta}$ صغيرة جداً يمكننا كتابة المعادلة أعلاه في الصورة التالية

$$D \approx \frac{b}{2}\times\frac{206265}{\boldsymbol{\theta}^{"}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.6)$$

طول القضيب الأفقي عادةً يكون متران وللحفاظ على الدقة عند تحديد المسافة D يجب ألا تكون الزاوية $\boldsymbol{\theta}$ صغيرة في المقام الأول ، هذا بالإضافة إلى ماذكرناه سابقاً من أن قياس الزاوية $\boldsymbol{\theta}$ يجب أن يكون بدقةٍ متناهية . ولأن الزاوية $\boldsymbol{\theta}$ المقاسة هي زاوية أفقية فإن المعادلة (2.5) تعطي المسافة الأفقية مباشرة . أما فرق الإرتفاع بين نقطة الجهاز ونقطة القضيب يمكن إيجاده من المعادلة التالية

$$\Delta h = D\ tanv \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.7)$$

وبالتعويض عن $D$ من المعادلة (2.5) في المعادلة أعلاه نحصل على

$$\Delta h = \frac{b}{2}\cot\left(\frac{\boldsymbol{\theta}}{2}\right) tanv \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2.8)$$

حيث أن $v$ هي الزاوية الرأسية بين نقطة الجهاز ونقطة القضيب.

المبدأ البديل هو الذي يستخدم زاويةً ثابتة عند الجهاز المثبت على أحد طرفي الخط المراد إيجاد فرق الإرتفاع بين نهايتيه وقراءة القامة عند الطرف الآخر .

الطريقة الأكثر إستخداماً هي تلك التي تستخدم شعيرات الإستيديا . إذا كانت شعيرات الإستيديا الرأسية والأفقية موجودتان معاً في الجهاز فمن الممكن إستخدام القامة في وضع أفقي أو رأسي، والأخيرة تمثل الوضع المألوف في عمليات المساحة. يمكن إجراء الميزانية التاكيومتيرية بإستخدام قامة مثبتة رأسياً وفي هذه الحالة يمكن إيجاد المسافة الأفقية $D$ والمسافة الرأسية$h$ من

$$D = ks\,cos^2 v \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (2.9)$$

$$h = \frac{1}{2} ks\,sin2v \qquad \dots\dots\dots\dots\dots (2.10)$$

حيث أن $k$ هي ثابت الضرب و$s$ هي فاصل الإستيديا والتي تساوي الفرق بين قراءتي القامة عند الشعيرتين العليا والسفلى. كما يمكن أيضاً إجراء الميزانية التاكيومترية بإستخدام قامة مائلة عنوة لتكون عمودية على خط النظر وفي هذه الحالة يمكن إيجاد المسافة الأفقية $D$ والمسافة الرأسية $h$ من

$$D = ks\,cosv \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2.11)$$

$$h = ks\,sinv \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2.12)$$

تغيرٌ آخر من الممكن العمل به في بعض الأحوال، ويتمثل ذلك في قراءة زاويتين رأسيتين على علامتين في القامة المثبتة رأسياً بحيث تكون المسافة بين العلامتين معلومة مسبقاً. حيث تسمى هذه الطريقة بطريقة الظلال.

في هذه الحالة يمكن إيجاد المسافة الأفقية $D$ والمسافة الرأسية $h$ من الشكل ادناه :

$$h_1 = Dtan\boldsymbol{\theta} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2.13)$$

$$h_2 = Dtan\boldsymbol{\phi} \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2.14)$$

ومنها يمكن الحصول على

$$h_1 - h_2 = r_1 - r_2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.15)$$

$$\therefore D(tan\theta - tan\phi) = r_1 - r_2$$

$$D = \frac{r_1 - r_2}{tan\theta - tan\phi} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.16) \therefore$$

إذا كانت الزوايا زوايا إرتفاع . أما إذا كانت الزويا زوايا إنخفاض فتصبح المعادلة

$$D = \frac{r_1 - r_2}{tan\boldsymbol{\phi} - tan\theta} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.17)$$

ويمكن إيجاد المسافة الرأسية من المعادلتين (2.11) أو (2.12) .

حسنة الميزانية التاكيومترية مقارنةً بالميزانية العادية تكمن في السرعة التي يمكن أن تتم بها إجراء الميزانية التاكيومترية في المناطق الوعرة ذات الطبيعة الخشنة والإنحدارات الشديدة حيث يصعب القيام بإجراء الميزانية العادية. على أي حال يمكن الحصول على هذه الحسنة على حساب الدقة خاصةً عندما تكون الزاوية الرأسية والمسافة بين الجهاز والقامة كبيرة نسبياً. نتائج الميزانية التاكيومترية تعتبر ذات درجةٍ دنيا من العول أو الوثوقية، مما يؤدي منطقياً إلى عدم اعتبار الأخطاء الناتجة عن تقوس الأرض وانكسار الأشعة الضوئية.

## 4.2 الميزانية المثلثية Trigonometric Levelling

عادةً ما تجرى الميزانية المثلثية في المناطق الجبلية الوعرة وعندما تكون النقاط التي يُراد إيجاد فروقات الإرتفاع بينها متباعدة نسبياً . تعتبر الميزانية المثلثية أكثر دقةً من مثيلتها الميزانية التاكيومترية خاصةً عند إستخدام الأجهزة الكهرومغنطيسية لقياس المسافات. ونسبةً لكبر المسافات بين النقاط في الميزانية المثلثية يجب التعامل مع الأخطاء التي ستنتج عن تقوس الأرض و انكسار الأشعة الضوئية.

المعادلات الأساسية لتحديد فرق الإرتفاع بواسطة الميزانية المثلثية هي

$$\Delta h = S\ sin\boldsymbol{\theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2.18)$$

$$\Delta h = D\ cos\boldsymbol{\theta} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (2.19)$$

حيث $S$ هي المسافة المائلة و $D$ هي المسافة الأفقية بين النقطتين $\boldsymbol{\theta}$ هي الزاوية الرأسية. في مثل هذه الحالة كما ذكرنا من قبل يجب أخذ تقوس الأرض وانكسار الضوء في الإعتبار.

## 5.2 الميزانية الباروميترية Barometric Levelling

الميزانية الباروميترية أو الألتيمتري هي نوع من أنواع الميزانية التي تُعطي نتائج في فروقات الإرتفاع بدقةٍ متدنية وبالتالي لا تصلح كطريقةٍ لإيجاد فروقات الإرتفاع في حد ذاتها ولكن تستخدم نتائجها في الغالب الأعم مع مرصوداتٍ أخرى مثلاً لإختزال المسافات أو لإستخدامه في المساحة التصويرية لتوفير بياناتٍ عن إرتفاع النقاط .

الألتيميتر المساحي The surveying altimeter كان يُستخدم في الماضي للحصول على إرتفاعاتٍ حدود دقتها حوالي 1.5 متر لإستخدامها " كما ذكرنا سابقاً " في المساحة التصويرية لربط الصور الجوية ذات مقياس الرسم الصغير . حالياً ما تزال هنالك بعض الإستخدامات للألتيمير المساحي لتحديد فروقات الإرتفاع التي تستخدم لإختزال المسافات المقاسة بواسطة الأجهزة الكهرومغنطيسية . أما البارومترات التي تُعطي الضغط الجوي فما تزال مستعملةً بكثرة. ذلك لأن الضغط الجوي ما يزال مطلوباً لحساب دليل الإنكسار المرتبط بالموجات الكهرومغنطيسية عند انتقالها في الغلاف الجوي . الذي يجذب إلى استخدام الميزانية الباروميترية هو سهولتها والسرعة التي يمكن بها إيجاد الإرتفاعات لكن تلك السهولة والسرعة تكون في الغالب على حساب دقة النتائج .

التقنيات الحديثة مثل المنظومة العالمية لتحديد المواقع Global Positioning System (GPS) والمساحة التصويرية التحليلية وقياس الإرتفاعات بواسطة

الرادار Radar altimetry جعلت من الميزانية البارومیترية طريقةً غير ذي جدوى.

يجب الإشارة إلى أن ألتيميتراً واحداً لا فائدة من وراء إستخدامه في العمليات المساحية . على الأقل يجب إستخدام جهازين كحد أدنى أحدهما يبقى عند النقطة ذات الإرتفاع المعلوم و الآخر يتحرك بين النقاط التي يُراد إيجاد إرتفاعها. فروقات الإرتفاع المسجلة تسمح بتطبيق التصحيحات المرتبطة بدليل الإنكسار على الأجهزة المستخدمة. دليل الإنكسارهذا وكما هو معلوم يعتمد في الأساس على درجة حرارة الجو والرطوبة النسبية. عادةً ما يُحدد معامل التصحيح بطريقةٍ تجريبية بإستخدام جهازين موضوعين على نقطتينين معلومتي الإرتفاع وبالتالي يصبح الحد الأدنى المطلوب في العمليات المساحية ذات الأهمية هو ثلاث أجهزة . السبب الرئيس من وراء هذه التعقيدات هو الحاجة لمعرفة تغييرات الضغط الجوي التي ربما تصل إلى 100متر من الإرتفاع الظاهري في اليوم الواحد ، وبالتالي يكون الإهتمام بالزمن ضرورياً للغاية. حتى يتسنى مقارنة الإرتفاعات المحددة بواسطة أجهزة البارومیتر المختلفة يجب إختزال القراءات بنسبتها الى زمنٍ واحد و من هنا جاءت أهمية الزمن .

فرق الإرتفاع "الحقيقي" $\Delta H_t$ المرصود في لحظة زمنية t يمكن الحصول عليه من الإرتفاع الظاهري $\Delta h_t$ (الإرتفاع المحدد بواسطة الألتيميتر) بإستخدام الصيغة التالية

$$\Delta H_t = F_t \Delta h_t \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2.120)$$

المعامل $F_t$ يمكن إيجاده من القراءات الآنية Smiultaneous reading بين قاعدتين معلومتين (نقطتين معلومتي الإرتفاع) . إذا كان فرق الإرتفاع بين نقطتين يساوي $B_t$ وفرق الإرتفاع الظاهري يساوي $b_t$ يمكننا كتابة العلاقة التالية

$$F_t = \frac{B_t}{b_t} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (2.21)$$

وبتعويض المعادلة (2.19) في (2.18) نحصل على صيغةٍ يمكننا بواسطتها إيجاد فرق الإرتفاع "الحقيقي" من العلاقة التالية

$$\Delta H_t = \frac{B_t \, \Delta h_t}{b_t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2.22)$$

هناك طرقاً حقلية مختلفة تعمل على تقليل تأثير الحرارة والرطوبة للحصول على نتائج مقبولة .

## 6.2 الطرق البديلة لإيجاد فروقات الإرتفاع

من الطرق البديلة التي يمكن استخدامها لإيجاد فروقات الإرتفاع هي طريقة الميزانية الهايدروستاتيكية Hydrostatic Levelling . هذه الطريقة من طرق الميزانية تُعتبر من أقدم الطرق المستخدمة للحصول فروقات الإرتفاع. تتلخص الفكرة الأساسية في الميزانية الهايدروستاتيكية في توازن أي سائل عند وضعه في أنبوب. من المعلوم والمعروف فيزيائياً عند وضع سائل في داخل الأنبوب يكون السائل متوازناً تحت تأثير الجاذبية . أي فرق في التوازن يُؤشر إلى فرقٍ في الإرتفاع . الإرتفاعات المحددة بهذه الطريقة هي إرتفاعات ديناميكية Dynamic heights وليس إرتفاعات أورثوميترية orthometric heights .هذه الطريقة من طرق الميزانية تستخدم بصورةٍ منتظمة ومكثفة في هولندا حيث فروقات الإرتفاع صغيرة جداً وبالتالي تكون الدقة العالية ضرورية للغاية.

فروقات الإرتفاع يمكن إيجادها بطرقٍ أخرى غير تلك المذكورة في الأجزاء السابقة مثل قياس فروقات الإنفصام Parallax differences في المساحة التصويرية . في الزمن القريب ومع التقدم الملحوظ في صناعة الأجهزة إكتسبت فروقات الإرتفاع المحسوبة من قياس فروقات الجاذبية ومساحة القصور الذاتي Inertial surveyingأهمية كبيرة.