الفصل الثاني

نماذج الانحدار الذاتي المشروط بعدم تجانس التباين

Autoregressive Conditional Heteroscedastic Model

0-2 تمهيد :

يشتمل هذا الفصل على الاطار النظري العام لنماذج الانحدار الذاتي المشروط بعدم تجانس التباين ARCH (p) والنموذج المعمم GARCH (P_1, P_2)، فضلا عن التطرق الى مراحل بناء النموذجين المتمثلة بالتشخيص والتقدير ومدى ملائمتها ، ومن ثم مرحلة التنبؤ المستقبلي للتقلبات التي تطرأ على سلوك السلاسل الزمنية وبالاخص المالية منها .

1-2 وصف نماذج GARCH / ARCH

ان نماذج الاقتصاد القياسي التقليدية تفترض ثبات التباين ، غير ان هذه الفرضية تعد غير واقعية خاصة عندما يتعلق الامر بالسلاسل الزمنية ذات العلاقة بالمتغيرات المالية ، حيث ان معظم المتغيرات المالية بما فيها اسعار البترول تتميز بديناميكية وعدم ثبات التباين عبر الزمن وبظاهرة عدم التناظر (Asymetrie) ، والمقصود بعدم ثبات التباين (Volatility) هو التغير في تباين السلسلة الزمنية عبر الزمن ، وان هذا التغير يطلق عليه ما يسمى بعدم التجانس (Heteroscedastic) ، وغالبا ما يحصل ذلك في السلاسل الزمنية ذات المشاهدات الكبيرة .

تتميز هذه النماذج بأن لها متوسط يساوي صفر غير مرتبطة وتبايناتها غير ثابتة ومشروطة بالماضي . وان أول من قدم هذه الفكرة الباحث (Engle) في بحثه حول تقدير تباين التضخم في بريطانيا والمنشور في عام 1982 الذي شهد ميلاد نماذج ARCH .

وقد تم تعميم هذا الانموذج من قبل الباحث (Bollerslev) الذي اقترح ما يسمى بأنموذج (ARCH) العام او (Generalized ARCH) واختصارا (GARCH) ، وقد ادى هذا النوع من النمذجة الى تحول كبير في الاقتصاد القياسي التطبيقي . لذا يعد هذا النموذج وتطويراته المختلفة احدى الوسائل المهمة لتوصيف التغير عبر الزمن الذي يتميز بعدم اليقين في اسواق المال والمقاس بالتباين المشترك وبالتالي يعتبر وسيلة مناسبة لدراسة تذبذب عوائد الاصول المالية . (Engle, R.F. 2001 ; Engle, R.F. 1982) :

1-1-2 نموذج الانحدار الذاتي المشروط بعدم تجانس التباين(ARCH (p

لقد اقترح الباحث (Engle.1982) نموذج ARCH من دراسته لتغيرات التضخم في بريطانيا وذلك لمعالجة مشكلة التقلب (Volatility) في السلاسل الزمنية المالية . ووفقا لهذا النموذج يكون تباين السلسلة الزمنية غير ثابت اي يرتبط بمجموع المعلومات المتوفرة وبالاخص الزمن ، لذلك فان التباين المشروط قد يكون متأثرا من قيم مربعات سلسلة البواقي للفترات السابقة ε_{t-1}^2،$\varepsilon_{t-2}^2, \dots, \varepsilon_{t-p}^2$. فعلى فرض ان السلسلة الزمنية $\{Z_t\}$ تخضع لنموذج ARCH (p) فأن الصيغة الرياضية تكون على النحو الآتي :

$$Z_t = \mu + \varepsilon_t \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (1.2)$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t a_t \quad ; \quad a_t \sim iid \ N(0,1) \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \quad (2.2)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_p \varepsilon_{t-p}^2 \quad \dots\dots\dots. \quad (3.2)$$

اذ أن :

Z_t : تمثل سلسلة العودة (Return Series) .

μ : تمثل متوسط سلسلة العودة .

ε_t : تمثل سلسلة مستقلة ومتماثلة التوزيع (Independent Distribution Identically)

وتتبع التوزيع الطبيعي القياسي بمتوسط صفر وتباين واحد .

σ_t^2 : تمثل دالة خطية موجبة لمربعات المشاهدات الماضية (ε_{t-1}^2،$\varepsilon_{t-2}^2, \dots, \varepsilon_{t-p}^2$) .

ويمكن اعادة صياغة المعادلة (3.2) التي تسمى بصيغة عدم الثبات (Volatility Equation) على النحو الآتي :

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (4.2)$$

أذ أن : $\alpha_0 > 0$ ، ، $\alpha_i > 0$ لكل قيم i > 0 وهي تمثل معلمات النموذج .

أما الشروط الكافية التي تجعل النماذج ARCH (P) تامة الاستقرارية هي :

1 − $E\varepsilon_t^2 < \infty$ أذا كان $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i < 1$. وعندما تكون $\alpha_0 = 0$ فأن $\varepsilon_t = 0$ لكل قيم t.

2 − $E\varepsilon_t^4 < \infty$ أذا كان $\sum_{i=1}^{p} \alpha_i < 1 \quad Max\left[1, (E\mathrm{a}_t^4 < \infty)^{1/2}\right]$

وفي حالة تحقق الشرط الاول فقط وعدم تحقق الشرط الثاني عندها تكون السلسلة ضعيفة الاستقرارية (Weakly Stationary) . و بتحقق الشرطين تكون السلسلة تامة الاستقرارية (Strictly Stationary) .

2-1-2 نموذج الانحدار الذاتي المشروط بعدم تجانس التباين ذو الرتبة ARCH (1) :

عندما تكون رتبة الانموذج (p=1) يطلق علية بأنموذج الانحدار الذاتي المشروط بعدم تجانس التباين ذو الرتبة (p=1) والذي يرمز له اختصارا ARCH (1) وصيغته :

$$Z_t = \mu + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t \mathrm{a}_t \qquad ; \quad \mathrm{a}_t \sim \text{iid } N(0,1)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.2)$$

وطبقا للصيغة (5.2) فان (ε_t) يمتلك تباين شرطي يتغير مع الزمن وارتبلط ذاتي صفري .
وينبغي التاكد من ان (ε_t) تحقق شرطي التباين المتجانس والمتوسط الصفري قيل الحصول على النتائج ، اي انها تحقق الشروط اذا كان :

$$var(\varepsilon_t) = \sigma_a^2 \quad , \ \forall\, t$$

$$E(\varepsilon_t / \varepsilon_{t-1}) = 0$$

خواص النموذج ARCH (1) :

1- ان (ε_t) لها متوسط صفري وتباين ثابت ، اي ان :

$$var(\varepsilon_t) = \frac{\alpha_0}{(1-\alpha_1)} \quad , \ \forall\, t$$

$$E(\varepsilon_t / \varepsilon_{t-1}) = 0$$

بشرط ان يكون $0 \le \alpha_1 < 1$. حيث ان هذه الخاصية تعني ان التباين غير الشرطي لنموذج ARCH (1) يكون متجانس .

2- ان التباين الشرطي لـ (ε_t) لنموذج ARCH (1) يكون غير ثابت مع الزمن وفق الصيغة الاتية :

$$var(\varepsilon_t/\varepsilon_{t-1}) = \alpha_0 \left[\frac{1-\alpha_1^h}{1-\alpha_1}\right] + \alpha_1^h \varepsilon_{t-h}^2 \qquad , \ \forall t$$

3- ان التباينات المشتركة الذاتية الشرطية لـ (ε_t) لنموذج ARCH (1) تكون صفرية :

$$cov(\varepsilon_t\, \varepsilon_{t+k}/\varepsilon_{t-h}) = 0 \qquad \forall h \ge 1 \quad , \qquad \forall k \ge 1$$

4 - ان العزم الشرطي الرابع لـ (ε_t) يكون :

$$m_4 = E(\varepsilon_t^4/\varepsilon_{t-h}) = 3(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2)^2$$

$$= 3\left[\alpha_0^2 + \frac{2\alpha_1\alpha_0^2}{1-\alpha_1} + \alpha_1^2 E(\varepsilon_{t-1}^4)\right]$$

وعلى فرض ان $3\alpha_1^2$ فان العزم الشرطي الرابع لـ (ε_t) يكون :

$$m_4 = \frac{3\alpha_0^2(1+\alpha_1)}{(1-3\alpha_1^2)(1-\alpha_1)}$$

بحيث ان $0 \le \alpha_1^2 < \frac{1}{3}$.

وبذلك فان معامل التفلطح لنموذج ARCH (1) يكون طبقا للصيغة الاتية :

$$Kur. = \frac{m_4}{\sigma_a^2} = \frac{E(\varepsilon_t^4)}{E(\varepsilon_t^2)}$$

$$= \frac{3\alpha_0^2(1+\alpha_1)}{(1-3\alpha_1^2)(1-\alpha_1)} \cdot \frac{(1-\alpha_1)^2}{\alpha_0^2}$$

$$= \frac{3(1-\alpha_1^2)}{(1-3\alpha_1^2)} \quad > 3$$

ونظرا لكون معامل التفلطح ($Kur. > 3$) فان التوزيع الاحتمالي سيكون اثقل من التوزيع الطبيعي ، ولكون التباين الشرطي مرتبطا مع الزمن فان النموذج ARCH يكون ملائما لتمثيل بواقي النماذج الخطية في السلاسل الزمنية .

2-2 نموذج الانحدار الذاتي المشروط بعدم تجانس التباين المعمم $\mathbf{GARCH(P_1, P_2)}$

لقد قام الباحث (Bollerslev,1986) بتعميم نموذج (Engle ,1982) والحصول على نموذج (Generalized ARCH) واختصارا (GARCH) الذي يكون فيه التباين الشرطي للخطأ العشوائي دالة خطية لمربع القيم الماضية للخطأ العشوائي وللتباين نفسه ليأخذ النموذج الصيغة الآتية :

$$Z_t = \mu + \varepsilon_t$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t a_t \qquad ; \quad a_t \sim iid\, N(0,1)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \alpha_2 \varepsilon_{t-2}^2 + \cdots + \alpha_{p_1} \varepsilon_{t-p_1}^2 + B_1 \sigma_{t-1}^2 + \cdots + B_{p_2} \sigma_{t-p_2}^2 \quad \cdots\cdots\cdots (6.2)$$

ويمكن اعادة صياغة المعادلة (2. 6) كما يأتي :

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p_1} \alpha_i\, \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{p_2} B_j\, \sigma_{t-j}^2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \quad (7.2)$$

أذ أن : $\alpha_0 > 0$ ، $j > 0$ ، $i > 0$ ، $B_j \geq 0$ ، $\alpha_i \geq 0$ وهي تمثل معلمات النموذج وان الشروط الكافية للأستقرارية التامة لنموذج GARCH (P_1, P_2) تكون كما يأتي :

1 - $E\varepsilon_t^2 < \infty$ اذا كان $\sum_{i=1}^{P_1} \alpha_i + \sum_{j=1}^{P_2} B_J < 1$

وعندما تكون $\alpha_0 = 0$ فأن $\varepsilon_t = 0$ لكل قيم t

2 - $\mathrm{E}\varepsilon_t^4 < \infty$ اذا كان $Max\left(1, (E a_t^4 < \infty)^{1/2}\right) \dfrac{\sum_i^{P_1} \alpha_i}{1 - \sum_j^{P_2} B_j} < 1$

وفي حالة تحقق الشرط الاول فقط عندها سوف تكون السلسلة الزمنية ضعيفة الاستقرارية (Weakly Stationary). وعندما يتحقق الشرطان تكون السلسلة الزمنية تامة الاستقرارية (Strictly Stationary) . وعندها تكون نماذج GARCH تامة الاستقرارية وبالتالي ستكون قابلة للانعكاس (Invertable) .

1-2-2 خصائص النموذج GARCH (P_1, P_2)

على فرض أن :

$$\lambda_t = \varepsilon_t^2 - \sigma_t^2$$

فأن :

$$E(\lambda_t \backslash F_{t-1}) = 0$$

$$E\left(\lambda_t \lambda_{t-j}\right) = 0$$

وان λ_t عملية غير مرتبطة (مستقلة ومتماثلة التوزيع) ، وان خصائص النموذج تكون كما يأتي :

1- ان ε_t^2 يمكن تحويلها الى نموذج ARMA(s,n) وفق الصيغة الاتية :

$$\varepsilon_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{s} (\alpha_i + B_i)\ \varepsilon_{t-1}^2 + \lambda_t - \sum_{j=1}^{n} B_j \lambda_{t-j}^2 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (8.2)$$

حيث تكون قيم المعاملات α_i و B_j اصفاراً للفرق (p-q) .

2- ان σ_t^2 يمكن تمثيلها بالنموذج AR(s) بمعاملات عشوائية :

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{s} (\alpha_i \varepsilon_{t-1}^2 + B_i)\ \sigma_{t-i}^2 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (9.2)$$

3- ان التباين غير المشروط لسلسلة البواقي $\{\varepsilon_t\}$ يكون على النحو الاتي :

$$var(\varepsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^{s} (\alpha_i + B_i)} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (10.2)$$

4 - ان التوزيع غير الشرطي للسلسلة $\{\varepsilon_t\}$ يكون مدبب وذو قمة عالية (Leptokurtic) .

: (Engle, R.F. 2001 ; Bollerslev, T. 1986)

2.2.2 العزوم ومعاملات الالتواء والتفرطح

تعد العزوم من الثوابت الوصفية التي لها دور فاعل في تحديد نوع الاستقرارية في السلاسل الزمنية ، خاصة اذا كانت قيم (ε_t) لا تتبع التوزيع الطبيعي القياسي N(0,1) او تخضع لتوزيعات اخرى غير التوزيع الطبيعي .

من الصيغة (6.2) التي تمثل النموذج GARCH (P_1, P_2) يكون :

$$E(\varepsilon_t) = 0$$

$$E(\varepsilon_t^2) = \frac{\alpha_0 E(a_t^2)}{1 - \sum_{i=1}^{p_1} \alpha_i E(a_t^2) + \sum_{j=1}^{p_2} B_j}$$

$$E(\varepsilon_t^3) = 0$$

اما العزم الرابع لنموذج فان صيغته العامة تكون :

$$E(\varepsilon_t^2) = \frac{\alpha_0^2 \left[1 + \sum_{i=1}^{p_1} \alpha_i E(a_t^2) + \sum_{j=1}^{p_2} B_j\right] E(a_t^4)}{\left[1 - \sum_{i=1}^{p_1} \alpha_i E(a_t^2) + \sum_{j=1}^{p_2} B_j\right] - \delta_1}$$

حيث ان :

$$\delta_1 = \left[1 - \sum_{i=1}^{p_1} \alpha_i^2 E(a_t^4) + \sum_{j=1}^{p_2} B_j^2 - 2\gamma_1 - 2\gamma_2 - 2\sum_{i=1}^{p_1}\sum_{j=1}^{p_2} \alpha_i \beta_j\right]$$

$$\gamma_1 = \sum_{j=1}^{p_1-1} \alpha_j \alpha_{j+1} + \sum_{j=1}^{p_1-2} \alpha_j \alpha_{j+2} + \cdots + \sum_{j=1}^{p_1-k} \alpha_j \alpha_{j+m}$$

$$\gamma_1 = \sum_{j=1}^{p_2-1} B_j\, B_{j+1} + \sum_{j=1}^{p_2-2} B_j\, B_{j+2} + \cdots + \sum_{j=1}^{p_2-m} B_j\, B_{j+m}$$

وان $m = p_2 - 1$, $k = p_1 - 1$ وان $p_1 > 1$ ، $p_2 > 1$

$Skeweness = 0$

فعلى سبيل المثال لإيجاد صيغة هذه المعاملات لنموذج GARCH (1,1) لابد من حساب العزوم الاتية وكما يأتي :

$E(\varepsilon_t) = 0$

$$E(\varepsilon_t^2) = \frac{\alpha_0}{1-(\alpha_1+B_1)} \quad , \; 0 \leq \alpha_1, B_1 < 1 \quad , \; (\alpha_1 + B_1) < 1$$

$E(\varepsilon_t^3) = 0$

$$E(\varepsilon_t^4) = \frac{3\alpha_0^2(1+\alpha_1+B_1)}{(1-(\alpha_1+B_1))(1-3\alpha_1^2-B_1^2-2\alpha_1 B_1)}$$

وبذلك فان معاملي الالتواء والتفرطح على التوالي :

$Skeweness = 0$

$$Kur. = \frac{m_4}{\sigma_a^2} = \frac{E(\varepsilon_t^4)}{E(\varepsilon_t^2)}$$

$$= \frac{3\alpha_0^2(1 + \alpha_1 + B_1)}{(1 - (\alpha_1 + B_1))(1 - 3\alpha_1^2 - B_1^2 - 2\alpha_1 B_1)} \cdot \frac{(1 - (\alpha_1 + B_1)^2}{\alpha_0^2}$$

$$= \frac{3(1 - (\alpha_1 + B_1)^2)}{(1 - (\alpha_1 + B_1)^2 - 2\alpha_1^2)} > 3$$

: (Feng, L. & Shi , Y. 2017 ; Engle, R.F. 2001 ; Bollerslev, T. 1986) .

3-2 مراحل هيكلة نموذج GARCH , ARCH

بات بديهيا لدى الإحصائيين والمتخصصين في مجال تحليل السلاسل الزمنية الحديثة ان عملية هيكلة اي نموذج تتضمن عدة مراحل متسلسلة تبدأ بمرحلة التشخيص وتليها مرحلة التقدير ومن ثم مرحلة فحص مدى ملائمة النموذج وتأتي المرحلة الأخيرة وهي مرحلة التكهن أو التنبؤ بالقيم المستقبلية . (Feng, L. & Shi , Y. 2017 ; Engle, R.F. 2001) . :

(Lamaa , A. , Jhab , G.K. , Paula , R.K. & Gurung , B. 2015) . :

1-3-2 مرحلة التشخيص Identification

تعد مرحلة التشخيص من المراحل ذات الاهمية الحيوية لهيكلة النموذج ، اذ يتم فيها تشخيص النموذج استنادا الى البيانات المتاحة ، وهذا يعتمد على فهم الخصائص الاساسية للسلسلة قيد الدراسة وعلى وجه الخصوص دالة الارتباط الذاتي ACF . وبعد التأكد من استقرارية السلسلة الزمنية محل الدراسة وذلك من خلال المخطط البياني لها الذي يعد من الخطوات الاساسية لتحديد الاستقرارية او عدم الاستقرارية في تحليل السلاسل الزمنية ، وبالخصوص عدم الاستقرارية في المتوسط التي تمتاز بها اغلب السلاسل الزمنية بالإضافة الى خاصية التقلب (Volatility) .ان مرحلة تشخيص النموذج يمكن تفسيرها على انها حالة اتزان بين فروض النظرية ومخرجات العمل التطبيقي لمرحلة تقدير معالم الاساسية المطلوبة لبناء النموذج .

1-1-3-2 مميزات سلسلة العودة (Return Series)

تتصف سلسلة العودة المالية بتقلبات متذبذبة عنقودية الشكل ، وهذه التغيرات تتمثل بالارتفاع في الاسعار تتبعها تغيرات بالارتفاع وتغيرات بالانخفاض تتبعها تغيرات بالانخفاض. وان نماذج ARCH تتيح او تسمح بإظهار هذه الظاهرة اضافة الى ان نلاحظ ان هناك اتفاق يشير الى ان التوزيع غير المشروط للاسعار او للعائد تتميز بأطراف سميكة مقارنة بالتوزيع الطبيعي . وللتأكد من هذا يتم حساب معامل التفلطح (Kurtosis) الذي يمكن كتابة الصيغة الرياضية له وكما يأتي :

$$K = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{Z_i - \bar{Z}}{\bar{\sigma}}\right)^4 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \; (11.2)$$

وفي حالة التوزيع الطبيعي تكون قيمة معامل التفلطح تساوي (3) وعندما يكون اكبر من هذه القيمة كما هو في حالة العوائد المالية ، فان ذلك يشير الى ان هذا التوزيع يتميز بقمة أعلى من قمة التوزيع الطبيعي (Leptokurtic) . اضافة الى ذلك فانه غالبا ما يختلف معامل الالتواء (Skewness) للسلسلة المالية عن معامل الالتواء للتوزيع الطبيعي المساوي للصفر .

ويمكن ايجاد صيغة معامل الالتواء على النحو الاتي :

$$S = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\frac{Z_i - \bar{Z}}{\hat{\sigma}}\right)^3 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (12.2)$$

وفي حال ان قيمة معامل الالتواء تساوي صفر يقال ان التوزيع متناظر. اما في حال اذا كانت قيمة معامل الالتواء سالبة هذا يعني ان للتوزيع ذيلا طويلا من جهة اليسار، و اذا كانت قيمة المعامل موجبة هذا يعني ان للتوزيع ذيلا طويلا من جهة اليمين . ويمكن استخدام هذين الاختبارين في نفس الوقت لاختبار خضوع المشاهدات للتوزيع طبيعي من خلال تطبيق اختبار (Jarqur-Bera test) .وان هذا الاختبار يعتمد على ايجاد الفرق بين معاملي الالتواء والتفلطح للسلسة المدروسة مع معاملي الالتواء والتفلطح للتوزيع الطبيعي .

ويمكن حساب هذه العلاقة الاحصائية كما يأتي :

$$JB = \frac{N-L}{N}\left(S^2 + \frac{1}{4}(K-3)^2\right) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (13.2)$$

اذ ان :

S : تمثل معامل الالتواء (التناظر)

K : تمثل معامل التفلطح

L: تمثل عدد المعلمات المقدرة المستعملة في السلسلة .

وتتبع الاحصاءة توزيع مربع كاي بدرجة حرية [2] اي ان : $JB \sim \mathcal{X}_2^2$.

2-1-3-2 الاختبارات المستخدمة في نماذج ARCH ,GARCH

1- اختبار جونغ بوكس Ljung – Box Test

في عام 1978 قام كل من الباحثين (Ljung & Box) بوضع احصاءة للكشف عن عشوائية الاخطاء للسلسلة الزمنية ، وذلك من خلال ايجاد معاملات الارتباط الذاتي للبواقي لمجموعة من الإزاحات طبقا للفرضيتين الاتيتين :

$$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_k \cdots = \rho_m = 0 \qquad k = 1,2,\cdots\cdots,m$$

$$H_1 : \rho_k \neq 0 \qquad for\ \ some\ values\ of\ \ k$$

اما إحصاءة الاختبار يمكن كتابتها بالصيغة الاتية :

$$Q_{(m)} = n(n+2)\sum_{k=1}^{m}\frac{\hat{\rho}_k^2}{n-k} \sim \mathcal{X}_{m-p}^2 \qquad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (14.2)$$

إذ أن :

n : تمثل حجم العينة (عدد مشاهدات السلاسل الزمنية) .

m : تمثل عدد ازاحات دالة الارتباط الذاتي .

p : عدد المعلمات المقدرة في النموذج .

$\hat{\rho}_k^2$: تمثل مقدر مربعات معاملات الارتباط الذاتي لسلسلة بواقي النموذج $r_t = Z_t - \mu$

وتقارن احصاءة الاختبار $Q_{(m)}$ مع القيمة الجدولية لاختبار مربع كأي بدرجة حرية (m-p) اي $\mathcal{X}_{(m-p)}^2$ وعند مستوى معنوية (α) . فاذا كان $Q_m < \mathcal{X}_\alpha^2\ (m-p)$ يعني ذلك عدم رفض فرضية العدم H_0 ، اي ان البواقي (r_t) عشوائية ولا يوجد تأثير لـ ARCH . اما اذا كان $\mathcal{X}_\alpha^2\ (m-p) < Q_m$ هذا يعني رفض فرضية العدم H_0 وقبول فرضية البديل H_1 اي ان البواقي غير عشوائية ويوجد تأثير لـ ARCH .

: (Ljung & Box ,1978) .

2- اختبار ARCH

يستخدم هذا الاختيار لاختبار عشوائية اخطاء السلسلة الزمنية ، وقد وضع من قبل الباحث (Engle,1982) لاختبار ان الاخطاء تتبع التوزيع الطبيعي المتماثل المستقل من خلال تمثيل (T) من قيم مربعات الاخطاء العشوائية لنموذج GARCH في نموذج انحدار بحد ثابت ، ومن اختبار وجود تأثير للارتباط الذاتي . ويمكن كتابة فرضية الاختبار بالصيغة الاتية :

$$H_0 : \alpha_i = 0 \quad for \ (i = 1,2, \ldots \ldots P)$$

$$H_1 : \alpha_i \neq 0$$

اما إحصاءة الاختبار يمكن كتابتها بالصيغة الاتية :

$$arch\ test = T * \hat{R}^2 \sim \mathcal{X}^2_{(P)} \qquad \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots \cdots (15.2)$$

$$\hat{R}^2 = \frac{SSR}{SST} \qquad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ (16.2)$$

اذ أن :

T : تمثل عدد المشاهدات قيد الدراسة .

SSR : يمثل مجموع مربعات الانحدار .

SST : يمثل مجموع مربعات الكلي .

ومن ثم تقارن احصاءة الاختبار مع القيم الجدولية لاختبار مربع كاي بدرجة حرية (P) اي $\mathcal{X}^2_{(P)}$ وعند مستوى معنوية α . فاذا كانت القيمة المحسوبة اقل من الجدولية يتم قبول فرضية العدم H_0 اي لا يوجد تأثير لـ ARCH ، اما اذا كانت القيمة المحسوبة اكبر من الجدولية فهذا يعني قبول فرضية البديل H_1 اي يوجد تأثير لـ ARCH .

2-3-2 معايير اختيار رتبة النموذج Model Order Selection Criteria

تعد مرحلة التشخيص اهم واصعب مرحلة في تحليل (Box & Jenkins) وان اختيار رتبة النموذج الافضل ليست بالمهمة السهلة ، ولذلك يتم اللجوء احيانا الى اقتراح نماذج مختلفة ومطابقتها مع بيانات السلسلة الزمنية ومن ثم استخدام معاييرالمفاضلة من اجل تحديد النموذج الاكثر ملائمة مع مراعاة توفر الخصائص الاحصائية لمقدرات النموذج الامثل . اذ ان اختيار

رتبة اصغر من الرتبة الفعلية يؤدي الى فقدان خاصية الاتساق لمعلمات النموذج ، في حين اختيار رتبة اكبر من الرتبة الفعلية فان ذلك يؤدي الى زيادة تباين النموذج ، ومن ثم الحصول على نتائج مضللة بسبب الزيادة في عدد معلمات النموذج الذي تم اختيارها . وسوف يتم عرض هذه المعايير الخاصة باختبار رتبة النموذج GARCH (P_1, P_2) وهي التي لا تختلف كثيرا عن اختيار الرتبة لنموذج ARMA (p,q) .

: (Rastogi , S. Don , J.,& Nithya , V. 2018 ; Engle, R.F. (2001) .

: (Rastogi , S. Don , J.,& Nithya , V. 2018).

3-3-2 التقدير Estimation

عند تقدير معلمات النموذج المدروس يتم استخدام طريقة الامكان الاعظم المشروطة (Conditional maximum likelihood estimation). وتتلخص هذه الطريقة كما يأتي :

على فرض ان (ε_t) تتبع التوزيع الطبيعي المشروط بالمعلومات الماضية فان دالة الكثافة الاحتمالية المشروطة تكون :

$$f(\varepsilon_t \backslash F_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_t^2}}\, exp\left(-\frac{\varepsilon_t^2}{2\sigma_t^2}\right) \;,\quad -\infty < \varepsilon_t < \infty \;\; \ldots\ldots (17.2)$$

وان دالة اللوغاريتم لمتجه المعلمات $\underline{\theta} = \left(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{p1}, \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{p2}\right)$ يمكن كتابتها على النحو الاتي :

$$L(\,\underline{\theta}) = \sum_{t=1}^{n} I_t(\,\underline{\theta}) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (18.2)$$

حيث ان لوغاريتم الامكان المشروط لمتجه المعلمات يكون :

$$I_t(\,\underline{\theta}) = \ln\; f(\varepsilon_t \backslash F_{t-1})$$

$$= -\frac{\ln(2\pi)}{2} - \frac{\ln(\sigma_t^2)}{2} - \frac{\varepsilon_t^2}{2\sigma_t^2}$$

وان المشتقة الجزئية الى (L) تكون :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \sum_t \frac{1}{2\sigma_t^2}\,\frac{\partial \sigma_t^2}{\partial \theta}\left(\frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} - 1\right) = \sum_t \frac{1}{2\sigma_t^2}\; W_t\left(\frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} - 1\right) \qquad \ldots\ldots (19.2)$$

$$\frac{\partial^2 I_t}{\partial\theta\partial\,\theta'} = \frac{1}{2\sigma_t^2}\left(\frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} - 1\right)\frac{\partial^2\,\sigma_t^2}{\partial\theta\partial\,\theta'} + \frac{1}{\sigma_t^4}\left(\frac{1}{2} - \frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2}\right)\frac{\partial^2\,\sigma_t^2}{\partial\theta}\frac{\partial^2\,\sigma_t^2}{\partial\,\theta'} \quad \dots\dots (20.2)$$

حيث ان :

$$W_t{}' = \frac{\partial\sigma_t^2}{\partial\theta}(\,1, \varepsilon_{t-1}^2, \dots\, \varepsilon_{t-p1}^2, \sigma_{t-1}^2, \dots\, \sigma_{t-p2}^2)$$

وعلى فرض ان التوزيع هو المحاذي للتوزيع الطبيعي فأن :

$$\sqrt{n}\,(\hat{\theta} - \theta) \sim N(0\,,\, l_{\theta\theta}{}^{-1})$$

$$I_{\theta\theta} = -E\left[\frac{\partial^2 I_t}{\partial\theta\partial\,\theta'}\right]$$

اذ ان $l_{\theta\theta}$ تمثل مضفوفة معلومات فيشر(Fisher Information Matrix) التي تمثل سالب لتوقع مصفوفة (Hessian) ولجميع المشاهدات (n) :

$$I_{\theta\theta} = -\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n} E\left[\frac{\partial^2\, l_t}{\partial\theta\partial\,\theta'}\right]$$

$$I_{\theta\theta} = -\frac{1}{2n}\sum_{t=1}^{n}\left(\frac{1}{\sigma_t^4} W_t\, W_t{}'\right)$$

ومن ثم يتم ايجاد مقدرات الامكان الاعظم باستخدام الطرائق العددية ، اذ يتم التقدير بالطريقة التكرارية التي وضعت من قبل الباحثين (Berndt,Hall, Hall and Hausman,1974) والمعروفة بطريقة (BHHH) التكرارية . حيث يتم ايجاد المعلمة θ_j عند التكرار (j) وكذلك تحسب المقدرات عند (j+1) وفق الصيغة الاتية :

$$\theta_{j+1} = \theta_j + l_{\theta\theta}{}^{-1}\left(\frac{\partial L}{\partial\theta}\right)(\theta_j) \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (21.2)$$

وعندما $(P_1 = 1)$ و $(P_2 = 1)$ اي لنموذج GARCH(1,1) حيث ان $\underline{\theta} = (\alpha_0, \alpha_1\beta_1)$ وان :

$$f(\varepsilon_t) = \prod_{t=1}^{n} f(\,\varepsilon_t / F_{t-1})$$

وان دالة اللوغاريتم الطبيعي تكون على النحو الاتي :

$$L(\,\alpha_0, \alpha_1, \beta_1\,) = \sum_{t=1}^{n} I_t$$

وان دالة اللوغاريتم الطبيعي المشروط تكون :

$$I_t = -\frac{1}{2} Log(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + B_1 \sigma_{t-1}^2) - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon_t^2}{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + B_1 \sigma_{t-1}^2}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_0} = \frac{1}{2(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + B_1 \sigma_{t-1}^2)} (\frac{\varepsilon_t^2}{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + B_1 \sigma_{t-1}^2} - 1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha_1} = \frac{1}{2(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + B_1 \sigma_{t-1}^2)} \varepsilon_{t-1}^2 (\frac{\varepsilon_t^2}{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + B_1 \sigma_{t-1}^2} - 1)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \beta_1} = \frac{1}{2(\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + B_1 \sigma_{t-1}^2)} \sigma_{t-1}^2 (\frac{\varepsilon_t^2}{\alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + B_1 \sigma_{t-1}^2} - 1)$$

ومن ثم :

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \sum_t \frac{1}{2\sigma_t^2} \;\; W_t \left(\frac{\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} - 1 \right)$$

حيث ان :

$$I_{\theta\theta} = -E\left[\frac{\partial^2 I_t}{\partial\theta \partial\, \theta'}\right] = \begin{bmatrix} I_{\alpha_0\alpha_0} & I_{\alpha_0\alpha_1} & I_{\alpha_0\beta_1} \\ I_{\alpha_1\alpha_0} & I_{\alpha_1\alpha_1} & I_{\alpha_1\beta_1} \\ I_{\beta_1\alpha_0} & I_{\beta_1\alpha_1} & I_{\beta_1\beta_1} \end{bmatrix}$$

وبذلك فان مصفوفة (Hessian) تكون على النحو الاتي :

$$\frac{\partial^2 I_t}{\partial \alpha_0^2} = -\frac{1}{2\sigma_t^4} (\frac{2\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} - 1)$$

$$\frac{\partial^2 I_t}{\partial \alpha_1^2} = -\frac{1}{2\sigma_t^4}\varepsilon_{t-1}^4\left(\frac{2\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} - 1\right)$$

$$\frac{\partial^2 I_t}{\partial \beta_1^2} = -\frac{1}{2\sigma_t^4}\sigma_{t-1}^4\left(\frac{2\varepsilon_t^2}{\sigma_t^2} - 1\right)$$

اما مصفوفة المعلومات فيمكن ايجاد عناصرها كما يأتي :

$$I_{\alpha_0\alpha_0} = \frac{1}{2n}\sum_t \frac{1}{\sigma_t^4}$$

$$I_{\alpha_0\alpha_1} = \frac{1}{2n}\sum_t \frac{\varepsilon_{t-1}^2}{\sigma_t^4}$$

$$I_{\alpha_0\beta_1} = \frac{1}{2n}\sum_t \frac{\sigma_{t-1}^2}{\sigma_t^4}$$

$$I_{\alpha_1\alpha_1} = \frac{1}{2n}\sum_t \frac{\varepsilon_{t-1}^4}{\sigma_t^4}$$

$$I_{\alpha_1\beta_1} = \frac{1}{2n}\sum_t \frac{\varepsilon_{t-1}^2\sigma_{t-1}^2}{\sigma_t^4}$$

$$I_{\beta_1\beta_1} = \frac{1}{2n}\sum_t \frac{\sigma_{t-1}^4}{\sigma_t^4}$$

ومن ثم يتم التعويض بالصيغة (21.2) لايجاد المقدرات لنموذج GARCH (P_1, P_2).

: (Engle, R.F. 2001 ; Rastogi , S. Don , J.,& Nithya , V. 2018) .

: (Lamaa , A. , Jhab , G.K. , Paula , R.K. & Gurung , B. 2015) .

4-3-2 اختبار ملائمة النموذج Model Diagnostic Checking

بعد الانتهاء من مرحلة تقدير معلمات النموذج (ARCH/GARCH) تأتي مرحلة فحص ملائمة النموذج ، وذلك للتأكد من مدى صلاحية النموذج وكفاءتة لتمثيل مشاهدات السلسلة الزمنية قيد الدراسة . ويتم فحص النموذج من خلال اختبار معنوية معلمات معادلة التباين اي اختبار الارتباط الذاتي لسلسلة البواقي القياسية والتي تكون بالصيغة الرياضية الاتية :

$$\tilde{r}_t = \frac{\hat{r}_t}{\hat{\sigma}_t} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots.. \quad (22.2)$$

اذ أن $\tilde{r}_t$ تمثل سلسلة البواقي القياسية و $\hat{r}_t$ تمثل سلسلة البواقي و $\hat{\sigma}_t$ تمثل الانحراف المعياري المشروط ، اذ يتم ايجاد سلسلة البواقي من الصيغة $\hat{r}_t = Z_t - \hat{\mu}$. اما سلسلة الانحراف المعياري المشروط فيتم ايجادها من الجذر التربيعي لمعادلة التباين للنماذج المدروسة بعد تقدير معلمات معادلة التباين . وهنا يجب الإشارة الى انه لا ينبغي ان نكتفي باختبار سلسلة البواقي فقط بل نلجأ الى اختبار مربعات سلسلة البواقي ، وتعود هذه الفكرة الى الباحثان (Granger & Anderson,1978) ، حيث لاحظ الباحثان ان السلاسل الزمنية التي يتم نمذجتها في الاسلوب الذي وضع من قبل كل من (Box & Jenkins,1994) لم تبدو فيها الأخطاء مرتبطة ذاتيا عبر الزمن بينما مربعاتها كانت مرتبطة ذاتيا . ويوجد اسلوبان لاختبار دقة النموذج ، الاسلوب الاول من خلال المخطط البياني لمعاملات دالة الارتباط الذاتي لسلسلة البواقي القياسية ، وكذلك المخطط البياني لمعاملات دالة الارتباط الذاتي لسلسلة البواقي القياسية المربعة التي تكون صيغتها الرياضية كما يأتي :

$$\tilde{r}_t^2 = \left(\frac{\hat{r}_t}{\hat{\sigma}_t}\right)^2 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (23.2)$$

اما الاسلوب الثاني فهو استخدام احصاءة (Box-Pierce ,1970) وكذلك استخدام احصاءة (Box-Ljung ,1978) . حيث ان احصاءة (Box-Ljung) تم استخدمها سابقا في مرحلة التشخيص ولكن في هذه المرحلة يتم التعامل مع سلسلة البواقي القياسية $\tilde{r}_t$ وذلك لبيان الملائمة بالنسبة لمعددلة المتوسط (Mean Equation) وكذلك مع سلسلة البواقي القياسية المربعة $\tilde{r}_t^2$ لبيان مدى الملائمة بالنسبة لمعادلة التقلب (Volatility Equation) .

: (Engle, R.F. 2001 ; Rastogi , S. Don , J.,& Nithya , V. 2018) .

1-4-3-2 اختبار احصاءة بوكس- بيرس المعدل : Modified Box- Pierce (Ljung- Box)

يعد اختبار احصاءة (Box-Pierce) من الاختبارات الاكثر استخداما لفحص ملائمة النموذج والذي يستخدم لاختبار المعنوية الاحصائية للارتباطات الذاتية للبواقي ،حيث يتم فحص فئه معينة على شكل مجموعة من معاملات الارتباط الذاتي للبواقي $\hat{\varepsilon}_t$ بدلا من فحص كل معامل ارتباط ذاتي $\hat{\rho}_{\hat{\varepsilon}_t}(k)$ على حده . فعلى فرض ان (j) من معاملات الارتباطات الذاتية للبواقي ورمزها $\hat{\rho}_{\hat{\varepsilon}_t}(1), \hat{\rho}_{\hat{\varepsilon}_t}(2), \dots, \hat{\rho}_{\hat{\varepsilon}_t}(j)$ الناتجة من مطابقة النموذج ARMA (p,q) لبيانات السلسلة Z_t فأن الاحصاءة (Q) تحسب وفق الصيغة الاتية :

$$Q = n \sum_{k}^{j} \hat{\rho}^2_{\hat{\varepsilon}_t}(k) \quad \dots\dots\dots \quad (24.2)$$

حيث تتبع الاحصاءة (Q) توزيع $\mathcal{X}^2$ بدرجة حرية (j- p- q) ، فاذا كانت قيمة الاحصاءة (Q) المحسوبة اصغر من القيمة الجدولية $\mathcal{X}^2$ تقبل فرضية العدم H_0 . ويستنتج ان الارتباط الذاتية تكون غير معنوية و ان البواقي تكون عشوائية وتتوزع بشكل مستقل وهذا يؤكد كفاءة وملائمة النموذج .

كما تم تعديل وتحديث لهذه الاحصاءة (Q) من قبل الباحثين (Ljung & Box,1978) ومن ثم اختبار الفرضيتين الاتيتين:

$$H_0:\ \rho_1 = \rho_2 = \cdots = \rho_k = 0 \qquad \forall k = 1,2, \dots\dots m$$

$$H_1: \rho_k \neq 0 \qquad \text{for some values of k}$$

وان إحصاءة الاختبار تكون وفق الصيغة الاتية :

$$Q_{(m)} = n\,(n+2) \sum_{k=1}^{m} \frac{\hat{\rho}^2_k}{n-k} \sim \mathcal{X}^2_{(m-p)} \quad \dots\dots\dots \quad (25.2)$$

أذ أن :

n : يمثل حجم العينة (عدد مشاهدات السلاسل الزمنية) .

m : يمثل أكبر ازاحة مأخوذة .

p : عدد معلمات المقدرة في النموذج .

$\hat{\rho}_k$: يمثل مقدر معاملات دالة الارتباط الذاتي لسلسلة البواقي .

وعند اجراء الاختبارتتم مقارنة الاحصاءة $Q_{(m)}$ مع القيمة الجدولية $\mathcal{X}^2_{(m-p)}$ ، فإذا كانت قيمة الاحصاءة $Q_{(m)}$ اصغر من القيمة الجدولية $\mathcal{X}^2_{(m-p)}$ يتم قبول فرضية العدم H_0 بمعنى ان سلسلة البواقي تكون مستقلة وتتوزع بشكل متماثل ، اضافة الى عدم وجود تأثيرلـ (Heteroscedasticity) . وعند التمثيل البياني لمعاملات الارتباط الذاتي لسلسلة البواقي فان جميع قيم المعاملات تكون عند الحدود الصفرية . وعند استخدام احصاءة الاختبار لسلسلة مربعات البواقي فيتم رفض فرضية العدم H_0 وقبول فرضية البديل H_1 التي تشير الى وجود تأثير لـ (Heteroscedasticity) . وعند التمثيل البياني لمعاملات الارتباط الذاتي لسلسلة مربعات البواقي فان اغلب قيم المعاملات تكون خارج الحدود الصفرية .

5-3-2 التنبؤ Forecasting

بعد الانتهاء من مرحلة فحص مدى ملائمة النموذج ، تأتي مرحلة التنبؤ بالقيم المستقبلية للسلسلة ومعرفة النمط والسلوك المستقبلي للسلسلة قيد الدراسة ، وهي المرحلة الاخيرة من مراحل تحليل السلاسل الزمنية .

فعلى سبيل المثال ، ان اجراء عملية التنبؤ لنموذج ARCH (p) عندما P=1 يكون وفق الخطوات الاتية :

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots (26.2)$$

فان خطوة التنبؤ الاولى (The 1- step forecast) لـ (σ_t^2) عندما h=t-1 تكون كما يأتي :

$$\sigma_{h+1}^2 = \sigma_h^2(1) = \alpha_0 + \alpha_1 r_h^2$$

وان خطوة التنبؤ الثانية (The 2- step forecast) :

$$\sigma_h^2(2) = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_h^2(1)$$

وان خطوة التنبؤ ℓ (The ℓ - step forecast) :

$$\sigma_h^2(\ell) = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma_h^2(\ell - 1)$$

وعند تعميم الخطوات المذكورة الى الرتبة (p) يتم الحصول على التنبؤ لنموذج ARCH(P) :

$$\sigma_h^2(\ell) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{P} \alpha_i \sigma_h^2(\ell - i) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (27.2)$$

اما بالنسبة لنموذج GARCH(1,1) فان :

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \alpha_1 r_{t-1}^2 + B_t \sigma_t^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28.2)$$

فان خطوة التنبؤ الاولى (The 1- step forecast) لـ (σ_t^2) عندما h=t-1 تكون كما يأتي :

$$\sigma_{h+1}^2 = \sigma_h^2(1) = \alpha_0 + \alpha_1 r_h^2 + B_1 \sigma_h^2$$

ويمكن استخدام الصيغة $r_t^2 = \sigma_t^2 \varepsilon_t^2$ والتعويض عنها في الصيغة اعلاه والخاص بأنموذج GARCH(1,1) وكما في الصيغة الآتي :

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + B_1)\sigma_t^2 + \alpha_1 \sigma_t^2(\varepsilon_t^2 - 1)$$

وبما ان t = h+1 يمكن التعويض عنها في الصيغة اعلاه فتكون كما يلي :

$$\sigma_{h+2}^2 = \alpha_0 + (\alpha_1 + B_1)\ \sigma_{h+1}^2 + \alpha_1 \sigma_{h+1}^2(\varepsilon_{h+1}^2 - 1)$$

وان خطوة التنبؤ الثانية (The 2- step forecast) :

$$\sigma_h^2(2) = \alpha_0 + (\alpha_1 + B_1)\ \sigma_h^2(1)$$

وان خطوة التنبؤ ℓ (The ℓ - step forecast) :

$$\sigma_h^2(\ell) = \alpha_0 + (\alpha_1 + B_1)\ \sigma_h^2(\ell - 1) \qquad\qquad \ell > 1$$

اما في حالة النموذج GARCH (P_1, P_2) تكون الصيغة اعلاه كالآتي :

$$\sigma_h^2(\ell) = \alpha_0 + \sum_{i}^{P_1} \alpha_i\ \sigma_h^2(\ell - i) + \sum_{j}^{P_2} B_j\ \sigma_h^2(\ell - j) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (29.3)$$

وباستخدام اسلوب التنبؤ في العينة (In-Sample Forecasting) تتم عملية التنبؤ لنماذج التقلبات ARCH / GARCH. يستخدم في هذا الاسلوب مجموعة البيانات الكاملة للسلسلة العودة لتقدير معلمات النماذج والمفاضلة بين نماذج التنبؤ المختلفة ، فبعد اختيار عدد من المشاهدات لنماذج التقلبات تتم عملية التنبؤ بالتقلبات ، والتي تتألف من $(n\ X\ 0.25)$ مشاهدة يتم استخدامها لفحص القدرة التنبؤية لنماذج التقلبات . ويوجد عدد من المقاييس لتقييم الدقة التنبؤية لنماذج الانحدار المشروط بعدم تجانس التباين لنماذج ARCH في العينة . ومن تلك المقاييس مقياس الجذر التربيعي لمتوسط مربع الخطأ (RMSE) ، الذي يمكن توصيفه على انه الجذر التربيعي لمعدل الفرق التربيعي بين التباين الفعلي وتقلبات التنبؤ σ_t^2 . ونظرا لعدم وجود التباين الحقيقي يتم استخدام مشاهدات السلاسل الزمنية التربيعية r_t^2 .

والصيغة الرياضية لمقياس الجذر التربيعي لمتوسط الخطأ وعلى النحو الآتي :

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(r_t^2 - \hat{\sigma}_t^2)^2} \qquad t = 1,2,\ldots,T \quad \ldots\ldots\ldots\ldots..(30.2)$$

أذ أن $\hat{\sigma}_t^2$ تمثل التباين المشروط المقدر . الا أن جذر متوسط مربع الخطأ (RMSE) في هذا المسار يكون منتقد بالرغم من أن r_t^2 مقدر متسق لـ $\hat{\sigma}_t^2$ ، فانه مع ذلك يكون غير مستقر .وهناك مقاييس بديلة منها مقياس متوسط الخطأ المطلق (MAE) الذي يعرف بالصيغة الاتية :

$$MAE = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}|r_t^2 - \sigma_t^2| \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(31.2)$$

ومتوسط الخطأ المطلق المئوي (MAPE) ويعرف بالصيغة الآتية :

$$MAPE = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}\frac{|r_t^2 - \hat{\sigma}_t^2|}{r_t} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(32.2)$$

وهناك معايير أخرى يمكن استخدامها في اختبار دقة التنبؤات المستقبلية (Forecasting) التي تحظى باهمية كبيرة ، منها اختبار **U** الذي يعرف بالصيغة الاتية :

$$U = \left(\frac{\sum_{t=1}^{T}(FPE_{t+1} - APE_{t+1})^2}{\sum_{t=1}^{T}(APE_{t+1})^2}\right)^{1/2} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..(33.2)$$

أذ أن (FPE_{t+1}) هو متنبأ التغير النسبي وتكون صيغته على النحو الآتي .

$$FPE_{t+1} = \frac{(\hat{Z}_{t+1} - Z_t)}{Z_t} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..\ldots\ldots(34.2)$$

وكذلك (APE_{t+1}) هو التغير النسبي الفعلي وتكون صيغته على النحو الآتي .

$$APE_{t+1} = \left(\frac{Z_{t+1} - Z_t}{Z_t}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\ldots\ldots.(35.3)$$

وعندما تكون التنبؤات المستقبلية جيدة عندئذ تكون قيمة الاختبار (U) قريبة من الصفر. أما إذا كانت قيمة (U) احصائيا تساوي واحد صحيح هذا يدل على أن النموذج قيد الدراسة والنموذج القياسي يتساويان في الدقة ، وعندما تكون قيمة U<1 يدل على أن النموذج أفضل من النموذج القياسي . وأما إذا تكون قيمة 1< U هذا يدل على ان النموذج القياسي أفضل من النموذج قيد الدراسة .

: (Sribua-Iam , N. , Pongchavalit , c. & Pongpullponsak , A. 2016) .

: (Engle, R.F. 2001 ; Shamiri , A. & Isa , Z. 2009) .