الفصل الثالث

نماذج الانحدار الذاتي – المتوسط المتحرك المتكامل الكسري ARFIMA(p,d,q)

0-3 تمهيد :

في هذا الفصل تم تسليط الضوء على الجانب النظري لمفهوم الذاكرة الطويلة في السلاسل الزمنية ، وعرض طرائق الكشف عن وجود الذاكرة الطويلة بالتمثيل البياني والتطبيق العملي لنموذج ARFIMA(p,d,q) ، من خلال تعريفه وطرائق تقدير معلمة الفروق الكسرية (d) ، ومن ثم عرض مراحل بناء النموذج .

1-3 تحليل السلاسل الزمنية Time Series analyses

يعد اسلوب تحليل السلاسل الزمنية من الاساليب الاحصائية ذات الاهمية التطبيقية والحيوية بالتحليل الاحصائي ، ويمكن تعريف السلسلة الزمنية على انها مجموعة من المشاهدات آخذت على فترات زمنية نتيجة لتعقب هذه الظاهرة لفترة زمنية طويلة نسبياً وفي أغلب الأحيان تكون هذه الفترة الزمنية منتظمة، وتكون السلسلة الزمنية $\{Z_t\}$ على نوعين متصلة (Continuous) اومنفصلة (Discrete) وذلك بحسب ما تأخذه قيم t الممثلة الزمن . وتكون السلسلة مستقرة (Stationary) اذا كانت الخصائص الاحتمالية لا تتأثر بالزمن ، وتكون السلسلة غير مستقرة (Non Stationary) اذا كانت الخصائص الاحتمالية تتأثر بالزمن. ويتكون تحليل السلاسل الزمنية من اربعة مراحل متتابعة تبدأ بمرحلة التشخيص (Identification) لنموذج والتي تعد المرحلة الاهم وتليها مرحلة التقدير(Estimation) ، ومن ثم مرحلة فحص مدى ملائمة النموذج وتأتي المرحلة الأخيرة وهي مرحلة التكهن أو التنبؤ. كما ان هناك اتجاهين لتحليل السلاسل الزمنية الأول هو اتجاه الزمن (Time Domain) والذي يعتمد على دوال الارتباط الذاتي ودوال الارتباط الذاتي الجزئي والثاني هو اتجاه التكرار (Frequency Domain) والذي يعتمد على التحليل الطيفي (Spectrum Analysis) .

(Wei, W. W. S.2006; Box, G. E. P., Jenkins,G. M., & Reinsel,G. C.1994)

2-3 نماذج ARIMA , ARMA

لقد وضع كل من (Box - Jenkins , 1970) هذه النماذج كمقترح لما تتمتع به من سلاسة وبساطة لذا اصبحت شائعة الاستخدام بتطبيقات السلاسل الزمنية .

لأي دالة تباين مشترك ذاتي يكون :

$$\lim_{w\to\infty} \gamma(k) = 0$$

وبدالة التباين المشترك الذاتي $\gamma(k)$ يمكن ايجاد عملية (ARMA) حيث ان (k) تمثل اكبر ازاحة ممكنة ، وعند وجود عدد كبير من المعلمات في هذه العملية فان $K \to \infty$. ومن خصائص النموذج ARMA إن متوسط السلسلة $\mu = E(Z_t) = 0$ او ويرمز الى عامل الفروق للأعداد الصحيحة بالرمز (d) و(B) يمثل عامل الارتداد الخلفي ، حيث ان :

$$B^d\, Z_t = \, Z_{t-d}$$

وان (p,q) هي قيم صحيحة وتعرف بشكل متعددات الحدود (polynomials) وبالصيغة الآتية

$$\emptyset(\mathrm{B}) = 1 - \emptyset_1\mathrm{B} - \emptyset_2\mathrm{B}^2 - \cdots - \emptyset_\mathrm{P}\mathrm{B}^\mathrm{P}$$
$$\theta(\mathrm{B}) = 1 - \theta_1\mathrm{B} - \theta_2\mathrm{B}^2 - \cdots - \theta_\mathrm{q}\mathrm{B}^\mathrm{q} \;\dots\dots\dots\dots.. \;(1.3)$$

وتسمى العملية $\{Z_t, t = 1,2,..\}$ هي عملية ARMA (p ,q) وتأخذ الصيغة الاتية :

$$\emptyset(B)Z_t = \theta(B)\varepsilon_t \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \;(2.3)$$

حيث ان $\varepsilon_t \sim \mathrm{WN}\,(0\,,\sigma_\epsilon^2)$, وان $\emptyset(\mathrm{B})$ و $\theta\,(\mathrm{B})$ ترمز الى متعددات الحدود للانحدار الذاتي والمتوسط المتحرك للعملية ARMA(p , q) . ويمتلك النموذج خاصية الاستقرارية عندما تكون جذور المعادلة $\emptyset(\mathrm{B}) = 0$ تقع خارج دائرة الوحدة وينطبق التحليل نفسه على خاصية الانعكاس حيث جذور المعادلة $\theta(B) = 0$ تقع خارج دائرة الواحدة . كما ان (d) تمثل عدد صحيح غير سالب ويمثل الفروق للسلسلة الزمنية (Z_t) . عندئذ تكـون السلسـلة الزمنية $(1 - B)^d Z_t$ تتمثل بالنموذج ARMA (p , q) .

ان هذه العملية يرمز لها بالنموذج ARMA (p, q) المتكاملة او يقال عنها عملية ARIMA (p, d , q) وتحقق معادلة الفروق بالصيغة الاتية :

$$\emptyset(B)\;(1-\mathrm{B})^\mathrm{d} Z_t = \theta(B)\,\varepsilon_t \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (3-3)$$

والعملية Z_t التي تخضع لنموذج ARIMA (p , d , q) تكون مستقرة أذ وفقط اذا (d = 0) وبذلك سوف يختزل النموذج الى ARMA (p , q) . اما دالة كثافة الطيف لنموذج ARMA تكتب بالصيغة الآتية :

$$f_z(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi} \cdot \frac{|\theta(e^{-i\lambda})|^2}{|\emptyset(e^{-i\lambda})|^2} \qquad , -\pi < \lambda < \pi \qquad \dots\dots\dots \quad (4.3)$$

: (Box, G. E. P. & Jenkins, G. M. (1976).

3-3 مفهوم الذاكرة الطويلة : consept of long memory

ان مفهوم الذاكرة الطويلة أو الاعتمادية طويلة المدى (Long Range Dependence) في السلاسل الزمنية لفتت انتباه المجتمع العلمي ، وعند الامعان عن كثب في هذا الموضوع نلاحظ ومن خلال الدراسات وأدبيات السلاسل الزمنية وجود عدة تعريفات وثيقة الصلة لمفهوم الذاكرة الطويلة وليس من الضروري ان تكون متشابهة في المعنى (Guegan , 2005)، فهي توصف في حقل الزمن (Time Domain) ، وفي حقل التكرار(Frequency Domain) ، وأن أغلب التعاريف تركز على دالة التباين المشترك الذاتي ودالة كثافة الطيف .ولكي نعطي توصيف شامل لكل انواع الذاكرة فإنه يستحسن أن توصف السلسلة المستقرة بحدود دالة كثافة الطيف (Robinson , 2003) ، ويمكن تعزيز مفهوم الذاكرة الطويلة لسلاسل الزمنية كما يأتي :

لتكن Z_t عملية مستقرة في حقل التكرار بدالة الكثافة الطيفية $f_{(\lambda)}$ فأن ذاكرة طويلة (Long- Memory) أو اعتمادية المدى الطويل (Long Range Dependence) تظهر أذا كان $f(0) = \infty$.

لذا ان $f(\lambda)$ تكون لها نقطة ثابتة عندما يكون التكرار مساويا للصفر، وفي الحالة المعاكسة اذا كانت $\lambda=0$ فأن $f(0) = 0$ عندها يقال للعملية Z_t انها عملية ذات ذاكرة متوسطة او ذاكرة سالبة وتكون Z_t عملية ذاكرة قصيرة (Short-Memory) او عملية اعتماد المدى القصير .

: (Palma, W. 2007 ; Hosking, J. R. M., 1981)

عندما :

$$0 < f(0) < \infty$$

حيث ان :

$$f(0) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma(k) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (5.3)$$

وبهذا نرى ان ذاكرة السلاسل الزمنية تكون ذات اهمية لقياس الاعتماد بين كل المتغيرات في السلسلة آخذين باعتبار تأثير الارتباطات جمعها في آن واحد .

وقد عرف (Bearan , 1992a,1992b) ، في حقل التكرار ان العملية المستقرة , $\{Z_t \; t \geq 1\}$ تكون عملية ذاكرة طويلة بدالة كثافة الطيف والتي تكتب بالصيغة :

$$f(\lambda) \sim C_1 \; |\lambda|^{-\alpha} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \; (6.3)$$

حيث ان : $0 < \alpha < 1$ وان $C_1 > 0$ حينئذ تمتلك ذاكرة قصيرة اذا كان $(\alpha = 0)$ وذاكرة متوسطة اذا كان $(\alpha < 0)$

وقد عرف (Palma , 2007) في حقل الزمن ان العملية المستقرة تعتبر ذاكرة طويلة اذا كان :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\gamma(k)| = \infty \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \; (7.3)$$

اذ ان :

$\gamma(k) = E(Z_t , Z_{t+k})$ حيث تمثل التباين والتباين المشترك الذاتي للسلسلة اضافة الى ان التباينات المشترك الذاتي تتناقص بشكل بطئ جدا وتتبع القطع الزائد (Yong , 1974) وكما يأتي :

$$|\gamma(k)| \sim C_2 \; K^{\alpha-1} \qquad as \quad k \to \infty \quad \ldots\ldots\ldots.. (8.3)$$

اذ ان :

$$C_2 = 2C_1 \Gamma(1-\alpha) \sin\left(\frac{\alpha}{2}\,\pi\right)$$

وان C_1 كمية ثابتة و $\Gamma(.)$ تمثل دالة كاما (Gamma Function) .

اما التباينات المشتركة الذاتية فأنها تتضاءل بشكل هندسي أسي في العملية المستقرة للذاكرة القصيرة وكما في الصيغة :

$$|\gamma(k)| < \alpha \, b^k \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. (9.3)$$

حيث ان : $0 < \alpha < \infty$ و $0 < b < 1$

اما في عمليات الذاكرة الطويلة حيث ان قيمة المعلمة (d) الكسرية هي $\frac{\alpha}{2}$ او تساوي ($2d = \alpha$)

وعامل الفروق الكسري Fractional Difference Operator) معرف بمتسلسلة ثنائي الحد (Binomial Series) وكما يأتي :

$$\nabla^d = (1-B)^d = \sum_{j=0}^{\infty} \binom{d}{j} (-B)^j$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d!}{j!\,(d-j)!} (-B)^j$$

$$= 1 - dB + \frac{\mathrm{d}(\mathrm{d}-1)}{2!} B^2 - \frac{d(d-1)(d-2)}{3!} B^3 + \cdots \cdots \quad (10.3)$$

ونظرا لكون حساب الفروق الكسرية في الذاكرة الطويلة تتطلب ايجاد دالة كاما وعليه فقد اقترح كل من (Macarthy, Disario & Sarago , 2003) ،خوارزمية تكرارية لأيجاد سلسلة الفروق الكسرية تغني عن حساب دالة كاما . وتتلخص هذه الخوارزمية بعدة مراحل وعلى النحو الآتي :

1 - وضع $(1-B)^d$ في سلسلة تايلور وكما يلي :

$$(1-B)^d = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{d(d-1)(d-2)\cdots\cdots(d-(j-1))}{j!} \; (-1)^j \; B^j$$

2 - ضرب كل مقدار في البسط في (-1)

$$(1-B)^d = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{-d(1-d)(2-d)\cdots\cdots((j-1)-d)}{j!} \; B^j$$

3– ضرب الصيغة في المرحلة الثانية في المقدار $1 = \frac{\Gamma(j-j-d)}{\Gamma(-d)}$ بحيث ان $d \neq 0$ ونعيد صياغة المقادير من اليمن الى اليسار .

$$(1-B)^d = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(j-1-d)(j-2-d)\cdots(j-j-d)\Gamma(j-j-d)}{j!\,\Gamma(-d)} \; B^j$$

واستخدام خاصية دالة كاما بالتكرار

$$\Gamma(x) = (x-1)\,\Gamma(x-1)$$

$$= (x-1)!$$

كما يمكن صياغة البسط للدالة $\Gamma(j - d)$ بإعادة كتابتها وبأشكل التالي :

$$(1-B)^d = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(j+1)\Gamma(-d)} \; B^j \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots. \quad (11.3)$$

4– على فرض ان :

$$C_j = \frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(j+1)\Gamma(-d)} \qquad\qquad j = 0\,,1\,,2\,,\cdots\cdots$$

وعلية فأن صياغة خاصية التكرار إلى C_j على النحو الآتي :

$$C_0 = \frac{\Gamma(0-d)}{\Gamma(0+1)\Gamma(-d)} = 1$$

$$C_j = \frac{(j-d-1)\Gamma(j-d-1)}{j\Gamma(j)\Gamma(-d)}$$

$$= \left(\frac{j-d-1}{j}\right)\frac{\Gamma(j-d-1)}{\Gamma(j)\Gamma(-d)}$$

$$= \left(\frac{j-d-1}{j}\right) C_{j-1}$$

$$\therefore\; C_1 = \left(\frac{1-d-1}{1}\right) \; C_{1-1} = -d\, C_0 = -d$$

$$C_2 = \left(\frac{2-d-1}{2}\right) C_{2-1} = \frac{(1-d)}{2} \; C_1 \; = \frac{d(1-d)}{2}$$

4-3 النموذج المختلط المتكامل الكسري (ARFIMA)

Autoregressive Fractionally Integrated Moving Average Model

يعد نموذج (ARFIMA) هو امتداد لنموذج ARIMA الذي وضع من قبل من (Box& Jenkins,1970) . كما تم تحديثه من قبل الباحثين (Granger & Joyenx ,1980) و(Hosking ,1981) ، وان عامل التكامل الكسري (d) يأخذ قيما حقيقية تنحصر بين (0.5 و -0.5) وتتصف بأهمية بانها تتيح بنمذجة سلوك السلاسل الزمنية قصيرة الاجل من خلال معلمات الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة وسلوك السلاسل الزمنية قصيرة الاجل من خلال معلمات التكامل الكسري ، لذا يعد النموذج (ARFIMA) من النماذج الأكثر شيوعا

واستخداما لعمليات الذاكرة الطويلة التي تتميز بالاستمرارية في المشاهدات . هناك العديد من الباحثين تطرقوا لهذا النموذج في حقل الزمن والتكرار وقدموا الكثير من الدراسات نذكر منهم .

: (Palma,2007) و(Bearn,1994) و (Sowell,1992).

:(Palma, W. 2007 ; Hosking, J. R, 1981; Granger, C.& Joyeux , R.1980).

لتكن $\{Z_t, t > 0\}$ عملية تتبع لنموذج ARFIMA (p, d , q) يمكن صياغته على النحو الآتي :

$$\emptyset_p(B)(1-B)^d Z_t = \theta_q(B)\varepsilon_t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (12.3)$$

حيث ان :

$\theta_q(B)$, $\emptyset_p(B)$ يمـثلان متعـددات الحـدود لمركبتـي الانحـدار الـذاتي مـن المرتبـة (p) والمتوسط المتحركة من المرتبة (q) على التوالي .

$(1-B)^d$ عامل الفروق الكسري (d) المعرف بالصيغة (11.2) .

$\{\varepsilon_t\}$ عملية التشويش الابيض (White Noise) بمتغيرات مستقلة متماثلة التوزيع اي ان :

$V(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$ و $E(\varepsilon_t) = 0$; $\varepsilon_t \sim i.i.d.(0, \sigma_t^2)$

وان جذور متعددات الحدود تكون :

$$\emptyset_p(B) = 1 - \emptyset_1 B - \emptyset_2 B^2 - \cdots - \emptyset_p B^p = 0$$

$$\theta_q(B) = 1 - \theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q = 0$$

وان هذه الجذور تقع خارج دائرة الوحدة . ويمكن كتابة الصيغة (12.2) على النحو الآتي :

$$\emptyset_p(B) Z_t = \theta_q(B)\,(1-B)^{-d}\varepsilon_t$$

وعلى فرض ان :

$$U_t = (1-B)^{-d}\ \varepsilon_t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (13.3)$$

فأنه يكون :

$$\emptyset_p(B)\ Z_t = \theta_q(B) U_t \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (14.3)$$

حيث ان U_t في الصيغة (3-13) تتبع االنموذج ARIMA (0,d,0) وان Z_t في الصيغة (14.3) تتبع لنموذج ARIMA (p,0,q) . ولكي نتطرق الى النموذج (ARFIMA) ينبغي اولا دراسة العملية ARIMA (0,d,0) عندما $-\frac{1}{2} \le d \le \frac{1}{2}$:

1-4-3 العملية ARFIMA (0,d,0) :

نظرية رقم (1)

على فرض ان $\{U_t\}$ هي عملية ARMA (0,d,0) او تسمى بعملية التشويش الابيض الكسري (FGN) (Fractional Gaussian Normal) فأن :

1- عندما تكون $d < \frac{1}{2}$ فعملية $\{\mathrm{U_t}\}$ تكون مستقرة وتحمل صيغة نماذج المتوسطات المتحركة حتى درجة ما لا نهاية وفقا لنظرية (Wald) .

$$\mathrm{U_t} = \psi(\mathrm{B})\varepsilon_\mathrm{t} = \varepsilon_\mathrm{t} + \psi_1\varepsilon_{t-1} + \psi_2\varepsilon_{\mathrm{t-2}} + \cdots\cdots\cdots$$

$$= \sum_{j=0}^{\infty} \psi_\mathrm{j}\varepsilon_{\mathrm{t-j}}$$

اذ ان :

$$\psi_\mathrm{j} = \frac{d(1+d)\cdots\cdots(j-1+d)}{j!} = \frac{(j+d-1)!}{j!\,(d-1)!}$$

$$\psi_\mathrm{j} = \prod_{t=1}^{j} \frac{t-1+d}{t} = \frac{\Gamma(j+d)}{\Gamma(d)\Gamma(j+1)} \qquad , \quad \mathrm{j} = 1,2,\cdots$$

$$\psi_\mathrm{j} \sim C_1 \frac{j^{d-1}}{\Gamma(d)} \quad \text{as} \quad \mathrm{j} \to \infty$$ عندما يكون C_1 ثابت موجب

2- عندما تكون $d > -\frac{1}{2}$ فعملية $\{\mathrm{U_t}\}$ تكون قابلة للانعكاس وتحمل صيغة نماذج الانحدار الذاتي حتى درجة ما لا نهاية كما في الصيغة الآتية :

$$\pi(B)\mathrm{U_t} = \sum_{j=o}^{\infty} \pi_j\, \mathrm{U_{t-j}} = \varepsilon_\mathrm{t}$$

$$\pi_j = \frac{-d(1-d)\cdots\cdots(j-1-d)}{j!} = \frac{(j-1-d)!}{j!\,(-d-1)!}$$

$$\pi_j = \prod_{t=1}^{j} \frac{t-1-d}{t} = \frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(-d)\Gamma(j+1)} \qquad ,j = 1,2,\cdots$$

$$\pi_j \sim C_2 \frac{j^{-d-1}}{\Gamma(d)} \qquad as \quad j \to \infty$$ عندما C_2 ثابت موجب فأن .

3- وعندما تكون $\frac{1}{2} \geq d \geq -\frac{1}{2}$ فعملية $\{U_t\}$ تكون مستقرة وقابلة للانعكاس .
: (Hosking, J. R. M., 1981) .

i- دالة كثافة الطيف :

$$f(\lambda) = \left[2\, Sin(\tfrac{\lambda}{2})\right]^{-2d} \quad , \qquad 0 < \lambda < \pi \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (15.3)$$

اذ ان :

$$f(\lambda) \sim \lambda^{-2d} \qquad as \quad \lambda \to 0$$

ii- دالة التباين المشترك قدمت من قبل الباحثان (Gradshteyn & Ryzhik , 1965)

$$\gamma_j = \mathrm{E}\,(U_j U_{t-j}) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{\infty} \psi_j \psi_i + |j|$$

$$= \sigma^2 \frac{(-1)^j (-2d)!}{(j-d)!\,(-j-d)!} = \sigma^2 \frac{(-1)^j \Gamma(1-2d)}{\Gamma(j-d+1)\Gamma(1-j-d)} \quad \ldots\ldots \quad (16.3)$$

iii- دالة الارتباط الذاتي :

$$\rho_j = \frac{\Gamma(1-d)\Gamma(j+d)}{\Gamma(d)\Gamma(j-d+1)} = \prod_{0<j\leq h} \frac{j-1+d}{j-d} \qquad , \qquad h = 1,2,\cdots$$

$$\gamma_0 = \sigma^2 \frac{\Gamma(1-2d)}{[\Gamma(1-d)]^2} \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (17.3)$$

$$\rho_j = C_3 \frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(d)} |j|^{(2d-1)} \;,\;\; \rho_1 = \frac{d}{1-d} \quad as \quad j \to \infty \quad \ldots\ldots \quad (18.3)$$

حيث ان C_3 ثابت .

iv- دالة الارتباط الذاتي الجزئي :

يمكن كتابة هذه الدالة بالصيغة :

$$\emptyset_{jj} = \frac{d}{j-d} \qquad , \quad j = 1,2,\cdots\cdots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (19.3)$$

عندما تكون $\left[-\frac{1}{2} \leq d \leq \frac{1}{2}\right]$ وكل من ψ_j و π_j تتناقص بهيئة القطع الزائد ولا تظهر خاصية التناقص الأسي للعملية ARIMA (p,0,q) .

اما بخصوص العملية $\{U_t\}$ يمكن تعريفها وبناءا على الارتباطات بمجموع محدود او غير محدود .

1- عندما تكون $\left[0 \le d \le \frac{1}{2}\right]$ فأن عملية ARIMA (0,d,0) مستقرة بذاكرة طويلة ومستمرة وتبدي اعتماد موجب قوي بين المشاهدات بعيدة الامد، ففي حقل الزمن تكون التباينات المشتركة موجبة ويكون تناقصها بشكل بطئ . اما في حالة حقل التكرار فأن دالة الطيف تتلاشى الى قيمة لانهائية عندما $\lambda \to 0$.

2- عندما تكون $\left[-\frac{1}{2} \le d \le 0\right]$ فأن عملية ARIMA (0,d,0) قابلة للانعكاس بذاكرة قصيرة وغير مستمرة وتبدي اعتماد سالب بين المشاهدات بعيدة الامد ، وفي حقل الزمن تكون التباينات المشتركة سالبة ويكون تناقصها بشكل بطئ . اما في حالة حقل التكرار فأن دالة الطيف تتلاشى الى قيمة لانهائية عندما $\lambda \to 0$.

3- عندما $\left[d = \frac{1}{2}\right]$ تكون العملية غير مستقرة ولكنها قابلة للانعكاس .

4- عندما $\left[d = -\frac{1}{2}\right]$ تكون العملية مستقرة ولكنها غير قابلة للانعكاس .

5- عندما $[d = 0]$ تكون العملية متمثلة بالتشويش الابيض (white noise) بارتباط ذاتي يساوي صفر.

نظرية رقم (2) :

بافتراض $\{Z_t\}$ تمثل عملية ARFIMA (p, d, q) حيث ان :

(I) عندما تكون $\left[d < \frac{1}{2}\right]$ فأن $\{Z_t\}$ مستقرة وكل جذور المعادلة $\emptyset(B) = 0$ تقع خارج دائرة الوحدة .

(II) عندما تكون $\left[d > -\frac{1}{2}\right]$ فأن $\{Z_t\}$ قابلة للانعكاس وكل جذور المعادلة $\theta(B) = 0$ تقع خارج دائرة الوحدة .

واذا كانت $\{Z_t\}$ مستقرة وقابلة للانعكاس بدالة كثافة الطيف $f(\lambda)$ ودالة الارتباط الذاتي ρ_j حيث ان :

(III) $\lim_{\lambda \to 0} \lambda^{2d} f(\lambda)$ يكون موجود ومشخص .

(IV) $\lim_{j \to \infty} j^{1-2d} \rho_j$ يكون موجود ومشخص .

ان عمليات ARFIMA (p ,d, q) غالبا ما تؤخذ الرتب الدنيا من (p , q) في التطبيق وسوف نتطرق الى احدى هذه العمليات لاحقا .

3 -4 -2 العملية ARFIMA (p ,d, q) :

لتكن $\{Z_t\}$ عملية ARFIMA (p, d, q) مستقرة وقابلة للانعكاس وتعرف بالصيغة التالية .

$$Z_t = (1-B)^{-d}[\emptyset(B)]^{-1}\,\theta(\mathrm{B})\varepsilon_t \;= \psi(B)\,\varepsilon_t$$

وايضا

$$\emptyset(B)(1-B)^d\,[\theta(B)]^{-1}\,Z_t = \,\pi(B)Z_t$$

: (Hosking, J. R. M., 1981; Granger, C.W.J. & Anderson A. 1978).

حيث ان معاملات هذه الصيغ ψ_j , π_j , γ_j تكون اكثر تعقيدا (Sowell , 1992) وان صفات هذه العملية تم توضيح سماتها من قبل الباحثين . (Brockwell & Daivs , 1991) و (Bearan , 1995) .

وبالصيغتين الآتيتين :

$$|\psi_j| \sim c_1\, j^{d-1} \quad as\; j \to \infty \;, c_1 > 0$$

$$|\pi_j| \sim c_2\, j^{-d-1} \quad as\; j \to \infty \;, c_2 \;> 0$$

(i) دالة كثافة الطيف :

عندما $\left[d < \frac{1}{2}\right]$ للعملية المستقرة تكون دالة كثافة الطيف هي :

$$\mathfrak{f}_{ARFIMA}(\lambda) = \mathfrak{f}_{ARFIMA}(\lambda)\;|1-e^{-i\lambda}|^{-2d}$$

$$= \frac{\sigma^2}{2\pi}\;\frac{|\theta(e^{-i\lambda})|^2}{|\emptyset(e^{-i\lambda})|^2}\;|1-e^{-i\lambda}|^{-2d}\;,\quad \lambda \in \pi$$

وبما ان $e^{-i\lambda} \sim (1-\lambda)$ عندما $\lambda \to 0$ ينبغي ان يكون :

$$\mathfrak{f}_{ARFIMA}(\lambda) \sim \frac{\sigma^2}{2\pi}\;\frac{|\theta(1)|^2}{|\theta(1)|^2}\;|\lambda|^{-2d} \quad as\;\; |\lambda| \to 0$$

$$= \mathfrak{f}_{ARFIMA}(0)\;\;|\lambda|^{-2d} \;\; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \qquad (20.3)$$

عندما $\left[0 < d < \frac{1}{2}\right]$ تكون كثافة الطيف لسلسلة ذات ذاكرة طويلة .

وعندما $\left[-\frac{1}{2} < d < 0\right]$ فأن $f(0) = 0$ والسلسلة تكون غير مستمرة .

(ii) دالة التباين والتباين المشترك :

يمكن صياغة متعدد الحدود Ø(B) للعملية ARFIMA (p ,d, q) كما يلي :

$$Ø(B) = \prod_{i=1}^{p} (1 - \rho_i)$$

وعلى فرض ان حاصل ضرب كل جذور Ø(B) يساوي (1) ويكون بشكل التالي :

$$\gamma(h) = \sigma^2 \sum_{i=-q}^{q} \sum_{j=1}^{p} \psi_i \, \delta_i \;\; c\big(d, p + i - h\rho_j\big) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21.3)$$

حيث ان :

$$\psi_i = \sum_{k=Max(0,i)}^{Mim(q,q+1)} \theta_k \, Ø_{k-1}$$

$$\delta_t = \left[\rho_j \prod_{i=1}^{p} (1 - \rho_i \rho_j) \quad \prod_{m \neq j}^{p} (\rho_j - \rho_m)\right]^{-1}$$

$$c(d, h, p) = \frac{\gamma_0(h)}{\sigma^2} \;\; [\rho^{2p} \, B(h) - B(-h) - 1]$$

$$B(h) = F(d + h, 1 - d + h, \rho)$$

$$\gamma(h) \sim C_\gamma \, |h|^{2d-1} \qquad as\ |h| \to \infty$$

$$C_\gamma = \frac{\sigma^2}{2\pi} \, \frac{|\theta(1)|^2}{|Ø(1)|^2} \;\; \Gamma(1 - 2d) \;\; Sin\,(\pi d)$$

فأن صيغة دالة التباين المشترك للعملية ARFIMA (1,d,1) تكون بشكل التالي :

$$\gamma(h) = \frac{\theta \; C(d, -h, -Ø) + (1 + \theta^2) C, (d, 1 - h, -Ø) \; \theta C(d, 2 - h, -Ø)}{Ø(Ø^2 - 1)}$$

(iii) دالة الارتباط الذاتي الجزئي :

يمكن استخدام معاملات افضل متنبأ خطي (Linear Predicator Best) لإيجاد دالة الارتباط الذاتي الجزئي .

$$\hat{Z}_{n+1} = \emptyset_{n1} Z_n + \cdots + \emptyset_{nn} Z_1 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (22.3)$$

وان دالة الارتباط الذاتي الجزئي لعملية التشويش الكسري (FDN) تكون بالصيغة :

$$\emptyset_{nj} = -C_j^n \frac{\Gamma(j-d)\Gamma(n-d-j+1)}{\Gamma(d)\Gamma(n-d+1)}$$

وبذلك فأن دالة الارتباط الذاتي الجزئي (PACF) .

$$\emptyset_{nn} = \frac{d}{n-d} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots. \quad (23.3)$$

$$|\emptyset_{nn}| \sim \frac{d}{n-d} \quad as\ n \to \infty\ and\ d \in \left[0, \frac{1}{2}\right]$$

3- 5 التحقق من خاصية الذاكرة الطويلة :

Verification 0f the Long Memory Property

هناك الكثير من الاشكال البيانية والعديد من الاختبارات الإحصائية يمكن من خلاها التحقق فيما لو كانت السلسلة الزمنية سلسلة ذات ذاكرة طويلة ام لا وسوف نتطرق الى هذه الاشكال وكما يأتي :

3-5 -1 اولاً: استخدام الاشكال البيانية للتحقق من خاصية الذاكرة الطويلة :

- **رسم دالة الارتباط الذاتي (ACF Plot)**

دالة الارتباط الذاتي (ACF) هي مقياس لدرجة الارتباط الخطي بين المتغيرات وهذه المتغيرات واقعة على نفس السلسلة من خلال ما يطلق علية معامل الارتباط الذاتي (ρ_K) ، وغالبا ما يستخدم رسم دالة ACF وسيله تشخيصية اولية في التطبيق العملي للكشف عن احتواء السلسلة الزمنية ذاكرة طويلة ولهذه الدالة عدة اشكال بيانية ، حيث ان دالة ACF تتناقص ببطء شديد نحو الصفر وهذا ما يعرف (Hyperbolically) . ولكي تصل الدالة الى الصفر فأنها تحتاج الى زمن طويل . وان ما يميز السلاسل الزمنية ذات الذاكرة الطويلة عن السلاسل الاخرى بان صيغة دالة ACF تكون كما يأتي :

$$\rho(K) = \frac{\Gamma(K+d)\Gamma(1-d)}{\Gamma(K-d+1)\Gamma(d)}$$

وبالصيغة التقاربية يمكن كتابتها وكما يلي

$$\rho(K) \sim \frac{\Gamma(1-d)}{\Gamma(d)} K^{2d-1} \qquad ; \ \frac{-1}{2} < d < \frac{1}{2} \ ; \ \ k - \infty$$

: (Lo , Andrews . W. 1991 ; Mandelbrot, B. B. 1975)

2-5-3 ثانيا :استخدام الاختبارات الاحصائية للتحقق من خاصية الذاكرة الطويلة :

يعد معامل هورست (Hurst exponent) ويرمز له اختصارا (H) نسبة للباحث (Hurst , 1951) من اهم واكثر الاختبارات الاحصائية استعمالا ومؤشرا لقياس السلاسل الزمنية ذات الذاكرة طويلة الأمد ، وذلك في ما يخص الارتباطات الذاتية في السلسلة الزمنية . وتوجد عدة مسميات لمعامل هورست ، اهمها ما يسمى بشدة الاعتمادية طويلة المدى (Long- Range Dependence) اومعلمة التشابه الذاتي (Self-Similarity) وهناك الكثير من الأبحاث تم فيها اقتراح العديد من المقدرات لمعامل هورست لتحليل (LRD) في السلاسل الزمنية . ومن خلال هذه الدراسات يمكن تقدير معامل هورست (H) وعن طريقه تحدد ظاهرة الذاكرة الطويلة لبيانات السلاسل الزمنية . ومن اهمها واكثرها استخداما لما قدمة الباحث (Hurst , 1951) باستخدام تحليل R/S ، وكذلك ما قدمة الباحث (Lo, Andrews ,1991) باستخدام احصائية Lo . : (Hurst, H.R. 1951).

1- استخدام إحصاءه تحليل R/S :

اقترحت هذه الطريقة لأول مرة من قبل الباحث (Hurst) عام (1951) . وهو اول من اكتشف خصائص الذاكرة الطويلة للسلاسل الزمنية اثناء عمله في ميدان الري من خلال دراسة حركة التدفقات المياه الحد الادنى والاعلى لسد اسوان الذي يزود طاقة خزين كافية للتحكم بتدفق نهر النيل . ووضع احصاءة لها القابلية على الكشف عن وجود ظاهرة الذاكرة الطويلة التي من خلالها يمكن احتساب معامل هورست . وقد سميت هذه الاحصاءة بتحليل R/S الذي يستخدم في تحليل عمليات المدى الطويل ، ولها القدرة على ترتيب السلاسل الزمنية بدلالة طبيعة ذاكرتها ويمكن ان تعرف الاحصاءة R/S او Q_n كما يلي :

$$Q_n = \frac{R_n}{S_n} = \frac{\max\limits_{1\le k\le T} \sum_{j=1}^{k}(y_j - \bar{y}_n) - \min\limits_{1\le k\le T} \sum_{j=1}^{k}(y_j - \bar{y}_n)}{\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(y_j - \bar{y}_n)\right]^{1/2}}$$

حيث ان :

(K) عدد المجاميع الجزئية بين المفردات السلسلة الزمنية عن متوسطها الحسابي .

(S_n) الانحراف المعياري .

ومن خلال الاحصاءة R/S يمكن ايجاد معامل هورست (H) الذي قيمته تكون محصورة بين 1> H < 0 ويمكن حسابه وكما يلي :

$$H \approx \frac{log.Q_n}{log.n}$$

اذ ان: $logQ_n$ يمثل لوغاريتم قيمة الاحصاءة R/S وان $logn$ يمثل لوغاريتم عدد المشاهدات.

كما اشار كل من الباحثين (Hosking , 1981) و (Lo, 1991) بوجود علاقة بين معامل هورست (H) ومعامل درجة التكامل الكسري (d) لنموذج ARFIMA وذلك من حيث $d = H - \frac{1}{2}$. ومن خلال هذه العلاقة يمكن ان تحدد قيمة معلمة التكامل الكسري (d) ومعرفة فيما اذا لو كانت السلسلة ذات ذاكرة طويلة ، مع الاخذ بنظر الاعتبار ان هذه الطريقة هي طريقة شبه معلميه التي تستخدم في تقدير معلمه التكامل الكسري (d) .

: (Lo , Andrews . W. 1991 ; Hurst, H.R. 1951).

2- استخدام إحصاءة LO :

لقد اثبت الباحث (Lo, Andrews ,1991) ان استخدام الاحصاءة R/S التقليدية تعطي نتائج مضلله ومتحيزة ولها ميول قوية للارتباطات الذاتية للسلاسل الزمنية ذات الاعتماد قصير الاجل ، فضلا عن ذلك ان هذه الاحصاءة لا تمثل الاختبار بالمعنى الحقيقي الصحيح ، فهي غير حساسة بطبيعة توزيع السلسلة الزمنية لان توزيعها الاحصائي غير معلوم فيما لو كانت تتبع التوزيع الطبيعي ام لا . الاً انها تتأثر بسلاسل اعتماد المدى القصير والسلاسل الزمنية غير مستقرة ، ولمعالجة النقص للإحصاءة R/S التقليدية فقد اقترح الباحث (Lo,1991) احصاءة R/S المعدلة والتي تتميز بحساسيتها للذاكرة الطويلة والحصول على نتائج دقيقة وغير متحيزة وعدم تأثرها بالسلاسل الزمنية غير المستقرة حيث ركز الباحث على استخدام طول السلسلة الزمنية بدلا من استخدام الانحراف المعياري للعينة . ويمكن كتابة الاحصاءة المعدلة على النحو الآتي :

$$Q_n^{\sim} = \frac{\max\limits_{1\le k\le n} \sum_{j=1}^{k}(y_j - \bar{y}_n) - \min\limits_{1\le k\le n} \sum_{j=1}^{k}(y_j - \bar{y}_n)}{\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}(y_j - \bar{y}_{n})^2 + \frac{2}{n}\sum_{j=1}^{q} w_j(q)\left(\sum_{i=j+1}^{n}(y_j - \bar{y}_n)(y_{i-j} - \bar{y}_n)\right)\right]^{1/2}}$$

حيث ان : $\bar{y}_n$ هو متوسط العينة للسلسلة الزمنية وكذلك ان الاوزان $w_j(q)$ معطاة كما يأتي :

$$w_j(q) = 1 - \frac{j}{q+1} \quad , \quad q < n$$

ان الاحصاءة المعدلة من قبل (Lo) سوف تكون غير حساسة الى الذاكرة الطويلة والحصول على نتائج متحيزة ، لذا نحتاج الى الدقة في اختيار القيمة المثلى الى (q) وكذلك الاحصاءة $Q_n^{\sim}$ التي تعبر عن تحليل R/S المعدلة تختلف عن الاحصاءة Q_n التي تعبر عن تحليل R/S لأنها لا تأخذ التباينات لقيم المفردات فقط وانما تأخذ التباينات المشتركة كدالة تابعة الى (q) ، ونتيجة لذلك فقد اقترح (Lo) صيغة جديدة لاختيار (q) المثلى وكما يأتي :

$$q = \left[\left(\frac{3n}{2}\right)^{1/3} \quad \left(\frac{2\hat{P}}{1-\hat{P}}\right)^{2/3} \right]$$

حيث ان :$\hat{P}$ هو معامل الارتباط الذاتي المقدر من الدرجة الاولى .

وتم تحديد فيما بعد الاحصاءة V_{cal} بموجب العلاقة التالية :

$$V_{cal} = \frac{Q_n^{\sim}}{\sqrt{n}}$$

حيث ان الاحصاءة V_{cal} لها توزيع وتتبع توزيع V وذات كثافة احتمالية وتكتب على النحو الآتي :

$$F_v(\mathrm{v}) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty}(1 - 4k^2\, V^2)\ .\ e^{-2(k.v)^2}$$

حيث اثبت الباحث (Lo, Andrews ,1991) ان حساب الاحصاءة V_{cal} بنفس العلاقة السابقة للإحصاءة (H) (تحليل $R\backslash S$) وكما يأتي :

$$V_{cal} = \frac{Q_n^{\sim}}{\sqrt{n}} \rightarrow \begin{cases} \infty \cdots pour\ H \in\ [0,5;1] \\ 0 \cdots pour\ H \in\ [0,5;1] \end{cases}$$

ولغرض التحقق عن الذاكرة الطويلة ، ينبغي اختبار الفرضيتين الآتيتين :

H_0 : يوجد ذاكرة قصيرة في السلسلة الزمنية اي ان H= O.5 يتم قبولها عند مستوى معنوية 5% اذا كانت $V \in [0.809\ ;\ 1.862]$.

H_1 : يوجد ذاكرة طويلة في السلسلة الزمنية اذا تم رفض الفرضية العدمية H_0 .

: (Lo , Andrews . W. 1991).

6-3 مفهوم الاستقرارية : Concept of Stability

تعد استقرارية احد الشروط الضرورية عند دراسة وبناء نماذج السلاسل الزمنية ، خاصة بعدما اثبتت عدة دراسات ان غياب الاستقرارية في السلاسل الزمنية قد تحدث ارباكا في النمذجة مما يؤثر سلبا على النتائج ، او بمعنى اخر قد تعطي نتائج مضلله . ومن اهم تلك الدراسات ما توصل اليه الباحثان (Granger- Newbold,1974) ، وبينا انه في ظل عدم الاستقرارية السلاسل الزمنية هي مشكلة الانحدار المضلل الذي يجعل معظم الاختبارات الاحصائية مضلله بالرغم من معنوية المعلمات الاحصائية (معامل التحديد والارتباط ، ومعلمات النموذج المقدر) التي تجعل النموذج مقبول احصائيا . ومن اجل تفادي ذلك اعادة الاستقرارية للسلاسل الزمنية غير المستقرة حتى تكون النتائج اقرب للواقع .

: (Granger, C.W. & P. Newbold, 1974).

ويمكن تعريف السلسلة الزمنية المستقرة كما يلي:

<u>تعريف (1)</u> : ان السلسلة الزمنية المستقرة تكون مشاهداتها لجميع الفترات الزمنية Z_t في حالة اتزان في المواصفات الاحصائية والخصائص الاحتمالية و لا تتأثر مع تغير الزمن . كما ان العلاقة بين المتغيرات غير المستقرة تؤدي الى نتائج مضللة واحتمالية وجود ما يطلق بالانحدار المضلل للمتغيرات الثابتة.

<u>تعريف (2)</u> : يقال للسلسلة الزمنية انها مستقرة إذا كانت التوزيعات الاحتمالية المشتركة للمتغيرات $[Z_t, Z_t, \dots . Z_{tk}]$ و $\left[Z_{t_{1+r}}, Z_{t_{2+r}}, \dots Z_{t_{tk+r}}\right]$ متماثلة لكل ثابت حقيقي (r) وثابت صحيح موجب (k) اي ان :

$$F_{y_1,y_2,\dots y_k}(Y_1, Y_2 \dots, Y_K) = F_{y_{1+r},y_{2+r}\dots,y_{k+r}}(Y_1, Y_2 \dots Y_k)$$

<u>التعريف (3)</u> : اما التعريف الاحصائي للسلسلة الزمنية المستقرة هي السلسلة التي يكون متوسطها الحسابي وتباينها والتباين المشترك ثوابت عبر الزمن بمعنى ان الخصائص الاحتمالية للسلسلة الزمنية لا تتأثر بالزمن وكما يأتي :

$$E[Z_t] = m \qquad \forall t \in T$$

$$V[Z_t] = \sigma^2 \qquad \forall t \in T$$

$$cov[Z_t, Z_{t+\theta}] = \gamma_z[\theta] \qquad \forall t \in T, \forall \theta \in T$$

7-3 اختبارات الاستقرارية : Stability tests

يعد اختبار جذر الوحدة من الاختبارات الشائعة للكشف عن استقرارية السلسلة الزمنية من عدمها . وهناك العديد من الاختبارات الاحصائية التي يمكن استخدامها لاختبار الاستقرارية ومن اهمها اختبار جذر الوحدة لديكي – فولر(Dickey & Fuller) (ADF) . وكان اختبار ديكي – فولر البسيط يقتصر على نموذج انحدار ذاتي من الدرجة الاولى فقط ،الأ ان الباحثان قاما بتوسيع الاختبار ليشمل نماذج الانحدار الذاتي كافه ، لذا اطلق علية اختبار ديكي – فولر الموسع الذي سوف يتم استخدمه في بحثنا لدراسة الاستقرارية .

1-7-3 اختبار ديكي – فولر الموسع (ADF) Augmented Dickey - Fulle Test

يعد اختبار ديكي – فولر الموسع (ADF) (Dickey & Fuller , 1981) لجذر الوحدة من الاختبارات الموثوقة والقوية واكثرها استخداما للتحقق من استقرارية السلسلة الزمنية .حيث ان اختبار ديكي – فولر الموسع يمتلك توزيع مبني على افتراض ان حد الخطأ العشوائي يكون مستقل احصائيا وان التباين يكون ثابت . لذا ينبغي التأكد من ان حد الخطأ العشوائي مستقل وغير مرتبط وله تباين ثابت . وان هذا الاختبار يتيح بأخذ الفروق من الدرجة (d) للسلسلة Z_t في حالة عدم استقراريتها عندئذ نقول عن السلسلة انها متكاملة (Integrated) من الدرجة d وفي حالة اخذ التكامل الكسري لها وكما الحال في نماذج ARFIMA . ويعتمد هذا الاختبار على ثلاث صيغ :هي النموذج المستخدم ، وحجم العينة ومستوى المعنوية ، ولحساب الاختبار (ADF) الموسع يتم تقدير بطريقة المربعات الصغرى للصيغ الثلاثة بأخذ كل متغير على حده وكما يأتي :

الصيغة الاولى : ان هذه الصيغة لا تحتوي على حد ثابت ولا اتجاه زمني.

$$\text{I)}\quad \Delta Z_t = \alpha_1 Z_{t-1} + \sum_{j=1}^{p} B_j \Delta Z_{t-j} + \varepsilon_t$$

الصيغة الثانية : تختلف هذه الصيغة عن الاولى في كونها تحتوي على حد ثابت .

$$\text{II)}\quad \Delta Z_t = \alpha_0 + \alpha_1 Z_t + \sum_{j=1}^{p} B_j \Delta Z_t + \varepsilon_t$$

الصيغة الثالثة : وتتضمن هذه الصيغة حد ثابتا واتجاها زمنيا

$$\text{III)} \quad \Delta Z_t = \alpha_0 + \alpha_1 Z_{t-1} + \sum_{j=1}^{p} B_j \Delta Z_{t-j} + \delta t + \varepsilon_t$$

لذا ان :

ε_t : عملية التشويش الابيض White Noise Process

ويعتمد اختبار ADF على الفرضتين التاليتين

(وجود جذر وحدة اي عدم استقرار) $H_0 : B - 1 = 0$

(عدم وجود جذر وحدة اي استقرار) $H_1 : B - 1 < 0$

وعندما يكون (B=1) فانه يتم قبول فرضية العدم H_0 ويدل ذلك على عدم الاستقرار وان البيانات تعاني من وجود جذور الوحدة لذلك فقد اعد كل من ديكي –وفولر جدول للقيم الحرجة $\hat{B_j} - 1$ لكي يتم مقارنة القيمة الجدولية T_{tab} مع القيمة المحسوبة T_{cal} لذا ان :

$$T_{cal} = \frac{\hat{B}_1 - 1}{\hat{\sigma}_{\hat{B}_1}}$$

وترفض فرضية العدم عندما تكون الاحصاءة المحسوبة اكبر من القيمة الجدولية حيث ان $T_{cal} \geq T_{tab}$ اي عدم قبول فرضية العدم وبالتالي قبول فرضية البديل وان هذا يدل على عدم وجود جذور وحدة والسلسلة الزمنية تكون مستقرة . اما اذا كانت $T_{cal} < T_{tab}$ يتم قبول فرضية العدم H_0 ورفض فرضية البديل H_1 وهذا يدل على وجود جذور وحدة والسلسلة الزمنية تكون غير مستقرة . (Dickey, D. and Fuller, W. 1981) :

8-3 مراحل بناء النموذج : ARFIMA (Model Building Steps)

عند بناء أي نموذج في السلاسل الزمنية لابد من المرور بمراحل عدة في المجال التطبيقي وعلى النحو الآتي :

1-8-3 مرحلة التشخيص : Diagnostic Checking

تعد هذه المرحلة من اهم مراحل بناء نماذج السلاسل الزمنية وهي الخطوة الاولى من خطوات الخوارزمية .التي وضع اساسها الباحثان (Box & Jenkins, 1976) ، اذ يتم في هذه المرحلة تشخيص النموذج ومعرفة نوعه وتحديد رتبته من خلال معايير تستخدم بين النماذج لتحديد النموذج الأفضل . أما النموذج الذي يتم اختياره للتنبؤ بالمشاهدات المستقبلية يعتمد على مجموعة من الفروض الاحصائية الخاصة بالعملية العشوائية، التي انشأت البيانات والشكل العام

للنموذج المختار والتغيرات العشوائية ،وفي حالة تخطي النموذج المختار لهذه الفروض او على الأرجح عدم رفض موائمتها للبيانات قيد الدراسة يمنح صورة واقعية لمقدرات المعالم وسماتها الاحصائية. وبالتالي الخروج بأفضل نموذج لبيانات الدراسة . كما ينبغي التأكد من موائمة هذه الفروض النظرية واعتبارها خطوة من خطوات التحليل الاحصائي الصحيح . وحسب الاعراف الإحصائية فأن مرحلة تشخيص النموذج بالإمكان تفسيره بأنه حالة اتزان بين فروض النظرية ومخرجات العمل التطبيقي لمرحلة تقدير المعلمات الاساسية المطلوبة لبناء النموذج ،حيث تعتبر هذه المرحلة ذو اهمية وتمنح اطمئنان حقيقي لمواءمة معلمات النموذج للفروض الاحصائية ، وبالتالي يمكن استخدامها في مرحلة التنبؤ.

: (Box, G. E. P. & Jenkins, G. M. 1976).

وهناك العديد من الاختبارات يمكن اجراؤها عند تشخيص النموذج واهمها :

1-1-8-3 تحليل السكون : (Stationarity Analysis)

تأتي اهمية السكون من أوليات التحليل الحديث للسلاسل الزمنية ، ذلك من خلال اعتماد النموذج المختار على فحص تقديرات معالم الانحدار الذاتي ولكي يتصف النموذج بخاصية السكون فأنه ينبغي ان تقع جذور المعادلة $Ø(B) =0$ خارج دائرة الوحدة unit circle التي نصف قطرها يساوي واحد. فاذا كانت القيمة المطلقة لكل جذر من هذه الجذور اكبر من الواحد الصحيح هذا يدل على سكون العملية العشوائية التي انشأت السلسلة المدروسة ، اما اذا كانت القيمة المطلقة لاحد الجذور قريبة من الواحد الصحيح هذا يدل على ضرورة اخذ فروق أخرى .

2-1-8-3 تحليل الانعكاس : Analysis of reflection

خاصية الانعكاس لا تقل اهميتها عن اهمية خاصية السكون لنماذج السلال الزمنية قيد الدراسة لذا ينبغي فحص تقديرات معالم المتوسطات المتحركة ، ولكي يتصف النموذج بخاصية الانعكاس فأنه ينبغي ان تقع جذور المعادلة $\theta(B) =0$. خارج دائرة الوحدة unit circle التي نصف قطرها يساوي واحد . فاذا كانت القيمة المطلقة لكل جذر من هذه الجذور اكبر من الواحد الصحيح هذا يدل على الانعكاس لنموذج الاصلي .

: (Granger, C.W.J. and Anderson A. (1978).

3-1-8-3 عملية تحديد النموذج The process of defining the model

بعد تحقيق الاستقرارية في السلسلة الزمنية تبدأ عملية تحديد النموذج الملائم لتمثيل السلسلة ودرجته ، من خلال استخدام دالتي الارتباط الذاتي (ACF) والارتباط الذاتي الجزئي (PACF) وتعتمد هذه الطريقة على دقة التمثيل البياني لـ (ACF) و (PACF) ، لذا يعد التمثيل البياني الخطوة الاولى في تحليل اي سلسلة زمنية ومن خلال رسم السلسلة الزمنية تتولد فكرة جيدة عن امتلاك السلسلة على اتجاه عام او بيانات شاذه او عدم الاستقرارية الذي يقود الى التحويلات الممكنة على البيانات ، كما يتم مطابقة معاملات الارتباط الذاتي والجزئي للسلسلة الزمنية الموسمية مع السلوك النظري لدالتي الارتباط الذاتي والارتباط الذاتي الجزئي ، فاذا لوحظ هناك اختلاف جوهري بينهما هذا يدل على فشل مرحلة التحديد ، اما اذا كان هناك تشابه فأن بالإمكان الانتقال الى مرحلة دراسية جديده .

: (Box, G. E. P., Jenkins, G. M., & Reinsel, G. C. 1994).

4-1-8-3 معايير التقييم (اختبار رتبة النموذج) : Evaluation Criteria

وضعت عدة معايير للمفاضلة بين النماذج واختبار رتبتها ،برغم من وجود نماذج مختلفة الدقة بالإمكان ان تنجح في اجتياز تحليل السلاسل الزمنية ، وان اختيار النموذج الافضل ليست بالمهمة السهلة . وتأتي اهمية اختبار رتبة النموذج في حالة اختيار رتبة ادنى من الرتبة الفعلية يؤدي الى عدم الاتساق معلمات النموذج ، اما في حالة اختيار رتبة أعلى من الرتبة الفعلية هذا يؤدي الى زيادة تباين النموذج ،مما سوف يؤدي الى نتائج غير موثوقة بسبب الزيادة في عدد معلمات النموذج الذي تم اختياره (Akiake , 1970) . وهناك معايير تستخدم للمفاضلة بين النماذج لتحديد رتبة النموذج ARFIMA (p ,d, q) ومن هذه المعاير وكما يأتي :

1- معيار معلومات اكيكي : Akaike Information Criterion (AIC)

قدم الباحث (Akaike ،1973) معيارا للمعلومات سمي بمعيار معلومة اكيكي **Akaike Information Criterion** ويرمز له باختصار بشكل التالي (AIC) ، ولتقيم مدى ملائمة تلك النماذج للبيانات بحسب معيار AIC لكل نموذج واختيار النموذج الذي يعطي اقل قيمة للمعيار . ويعرف بالصيغة الرياضية على النحو الاتي :

$$AIC(K) = -2(Conditional\ Maximum\ Likelihood) + 2K \quad \dots \ (24.3)$$

اذا كان النموذج بمعلمات K وفق البيانات ، تكون صيغة المعيار بدلالة مقدار تباين الخطأ .

وصيغة هذا المعيار هي :

$$AIC\ (K) = n\ Ln(\hat{\sigma}^2_{\varepsilon_t}) + 2K \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25.3)$$

إذ ان :

K : تمثل العدد الكلي لمعلمات النموذج . اي ان K=(p +d +q)

n : عدد المشاهدات .

$\hat{\sigma}^2_{\varepsilon_t}$: مقدر تباين الخطأ ، ويحسب كما يأتي :

$$\hat{\sigma}^2_{\varepsilon_t} = \sum_{t=1}^{n} (Z_t - \hat{Z}_t)^2 \Big/ (n-p) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26.3)$$

: (Akaike , H. (1973).

2- معيار معلومات بيز : Bayesian Information Criterion (BIC)

لتصحيح نزعة معيار AIC نحو التقدير المفرط فقد اقترح معيار معلومة بيز من قبل كل من (Schwarz,1978) و (Akaike ,1979) وقد قاما الباحثان بتطوير المعيار AIC الى معيار جديد وسمي بمعيار معلومة بيز (Bayesian Information Criterion) ويرمز له اختصارا (BIC) وصيغته كما يأتي :

$$BIC(K) = nLn\hat{\sigma}^2_{\alpha} - (n-k)\ Ln\left(1 - \frac{k}{n}\right) + k\ Ln(n) + kLn\left(\frac{\left(\frac{\hat{\sigma}^2_x}{\hat{\sigma}^2_\alpha} - 1\right)}{k}\right)$$

………………..(27.3)

وبعد اهمال بعض الحدود يمكن كتابته بالصيغة الآتية :

$$BIC(K) = n\ Ln(\hat{\sigma}^2_{\alpha}) + K\ Ln(n) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (28.3)$$

اذا ان :

n : عدد المشاهدات السلسلة .

K : العدد الكلي لمعلمات النموذج .

$\hat{\sigma}^2_{\alpha}$: مقدر تباين الخطأ . : (Akaike, H. 1979 ; Schwarz, Gideon E. 1978).

3- معيار المعلومات حنان – كوين (H-Q) Hannan Quinn Criterion

تم اقتراح هذا المعيار من قبل الباحثان (Hannan & Quinn ,1979) معيارا جديدا لتحديد رتبة النموذج قيد الدراسة ويرمز له اختصارا (H-Q) وصيغته الرياضية كما يأتي.

$$H-Q(K)=Ln\,\hat{\sigma}_{\alpha}^{2}+\frac{2}{n}\,KCLn\big(Ln(n)\big)\quad ,C>2\ \ldots\ldots\ldots\quad (29.3)$$

حيث تستخدم هذه المعاير للمفاضلة بين النماذج المقترحة ويتم اختيار النموذج الافضل ، فأنموذج الافضل هو الذي يحقق اقل قيمة من خلال كل معيار على حده .

:(Hannan, E. J., and B. G. Quinn (1979).

9-3 مرحلة التقدير : Estimation Stage

هناك طرائق وأساليب كثيرة لتقدير السلاسل الزمنية المتكاملة كسريا منها ما يخص الطرق المعلمية (Parametric) ، التي تطرقت لها دراسات عديدة يذكر منها (Hosking,1984) , (Brockwell & Davis ,1987) , (Sowell , 1992) , (Palma , 2007) وغيرهم . ومنها ما يخص التقديرات شبة المعلمية (Semi-Parametric Methods) التي تطرقت لها دراسات عديدة يذكر منها (Geweke & Porter – Hudak ,1983) ، (Hiquchi , 1988) , (Peng et al. ,1994) , (Hiquchi,1990) (Beran,1994,1995) , (Robinson,1995) وغيرهم .

وقد فسر كل من (Hosking,1984) , (Sowell,1992) ان الاسلوب المعلمي يمر بخطوات ذات مرحلتين يتم في المرحلة الاولى تقدير معلمة التكامل الكسري (d) ، وفي المرحلة الثانية يتم تقدير معلمات الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة ، اذ ان معلمة التكامل الكسري تستخدم لتحويل السلسلة المشاهدة الى سلسلة يفترض انها تتبع انموذج ARMA (p ,q). (Sowell,1992) . ولتشخيص وتقدير النموذج ARFIMA (p ,d, q) واستخدام تقنيات الانحدار توجد عدة خطوات ضرورية للحصول على نموذج ARFIMA لمجموعة من البيانات السلاسل الزمنية (Hosking,1984) , (Brockwell & Daivs,1991) .

فعلى فرض ان السلسلة الزمنية تمتثل لنموذج التالي :

$$\emptyset(B)\,\nabla^{d}\,Z_{t}=\ \theta(B)\varepsilon_{t}\qquad \ldots\ldots\ldots\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad (30.3)$$

اذ ان $U_t=\nabla^{d}\,Z_t$ ، بحيث تكون $\{U_t\}$ تعبر عن العملية ARIMA(p ,d, q) اضافة الى :

$x_t = \{\theta(B)\}^{-1}\emptyset(B)Z_t$

حيث ان $\{x_t\}$ تعبر عن العملية ARIMA(0,d,0) .

وكما جاء في العديد من الدراسات مثل (Reisen et al. ,2001) عن آلية مرحلة التشخيص والتقدير عن بناء نموذج ARFIMA كما يأتي :

1- تقدر (d) في النموذج ARIMA(0,d,0) $\nabla^d Z_t = \varepsilon_t$ ويرمز لهذا التقدير بالرمز $\hat{d}$

2- حساب $U_t = \nabla^d Z_t$

3- استخدام اسلوب نمذجة (Box-Jenkins) ، حيث يتم تقدير المعلمتين θ , Ø في النموذج ARIMA (p, q) فتكون : $\emptyset(B)U_t = \theta(B)\varepsilon_t$

4- تعرف $x_t = \{\theta(B)\}^{-1}\emptyset(B)\, Z_t$

5- تقدر (d) في النموذج ARFIMA(0,d,0) . $\nabla^d x_t = \varepsilon_t$

6- تكرار الخطوات من 2 حتى 5 لكي تتقارب تقديرات المعالم θ ,Ø, d .

1-9-3 الطرائق المعلمية : Parametric Methods

1-1-9-3 طريقة الامكان الاعظم : Maximum Likelihood Method

تعتبر طريقة الإمكان الاعظم من اكثر الطرق فعالية لتقدير معلمة الذاكرة الطويلة (d)،والتي يتم فيها تقدير معامل التكامل الكسري (d) بالموازاة مع معلمات ARMA للنماذج ARFIMA وهذه الطريقة اقترحت من قبل (Sowell,1992) ، التي بالإمكان استخدام كل المعلومات الطويلة الاجل والقصيرة الاجل المرتبطة بخصوصية السلسلة وفي هذه الطريقة يتم تقدير معلمات الانحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة ومعامل التكامل الكسري في الوقت نفسه .

وعلى فرض أن $\{Z_t\}$ عملية مستقرة تتبع لنموذج المختلط المتكامل كسريا ARFIMA(p,d,q) وكما بالصيغة $\emptyset(B)\nabla^d Z_t = \theta(B) \in_t$ حيث أن هذه العملية تتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط صفري وتباين Γ(θ) فأن لوغاريتم دالة المكان الاعظم للعملية $\{Z_t\}$ يكون على النحو الآتي :

$$L(\theta) = -\frac{1}{2}Log\ \det\Gamma(\theta) - \frac{1}{2}\ Z'\,\{\Gamma(\theta)\}^{-1}\ Z \quad \dots\dots\dots\dots\dots \quad (31.3)$$

حيث ان $Z = \{Z_1, Z_2, \cdots, Z_n\}'$, Γ(θ) = var – cov (Z) وان θ متجه المعلمات .

ويمكن الحصول على مقدر المكان الاعظم $\hat{\theta}$ وذلك من خلال تعظيم الدالة L(θ) . ومن متطلبات لوغاريتم دالة الامكان الاعظم ايجاد المحدد والمعكوس لمصفوفة التباين والتباين

المشترك $\Gamma(\theta)$.وأن كلاهما يتم باستخدام طريقة التجزئة لـ (Cholesky) وكذلك استخدام خوارزمية (Durbin – Levinson) .

:(Palma, W. 2007; Granger, C.W.J. and Anderson A. 1978).

أولا: طريقة التجزئة لـ (Cholesky)

$\Gamma(\theta)$ مصفوفة محدد ومتماثلة وموجبة (Definite Symmetric Positive Matrix) وبالإمكان صياغتها كما يأتي .

$$\Gamma(\theta) = U'U \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (32.3)$$

اذ أن [U] هي المصفوفة المثلثية العليا (Upper Triangular Matrix) وبموجب التجزئة (Cholesky) فأن محدد المصفوفة $\Gamma(\theta)$ مبين بالصيغة الآتية.

$$\det\Gamma(\theta) = (\det u)^2 = \prod_{j=1}^{n} U_{jj}^2 \quad \dots\dots\dots\dots \quad (33.3)$$

اذ أن U_{jj}^2 ترمز عنصر القطر (j) للمصفوفة [U] وكذلك أن معكوس $\Gamma(\theta)$ بالإمكان ايجاده بالطرق التقليدية وبالصيغة الاتية .

$$\Gamma(\theta)^{-1} = U^{-1}(U^{-1})' \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (34.3)$$

وتجدر الاشارة ان حساب العلمية لهذه الخوارزمية من رتبة $O(n^3)$.

:(Palma, W. 2007) .

ثانيا : خوارزمية Durbin - Levinson

أن استخدام طريقة (Cholesky) قد تكون غير جديرة في السلاسل الزمنية طويلة الأمد .وعلية فقد تم ايجاد طرائق أخرى اكثر كفاءة وسرعة لاستخدامها في ايجاد لوغاريتم دالة الامكان الاعظم ، واحدى هذه الطرق ومن الخوارزميات المصممة لاستخدام هيكلية (Toeplitz) لمصفوفة التباين والتباين المشترك هي خوارزمية (Durbin – Levinson) ويمكن توضيح وعرض الخوارزمية على النحو الآتي .

على افتراض $\hat{Z}_t = 0$ حيث :

$$\hat{Z}_{t+1} = \emptyset_{t1}Z_n + \cdots + \emptyset_{tt}Z_1 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (35.3)$$

عندما $t = 1,2, \ldots., n-1$ ترمز تنبؤات الخطوة الواحد للأمام (One – step a head) للعملية $\{Z_t\}$ المستندة على المشاهدات السابقة المحددة $(Z_1, Z_2, \ldots. Z_{n-1})$ ، لذا أن معاملات الانحدار $\emptyset_{tj}$ مبينة بالصيغ الآتية :

$$\emptyset_{tt} = [v_{t-1}]^{-1} \; [\gamma(t) - \sum_{i=1}^{t-1} \emptyset_{t-1,i} \quad \gamma(t-i)]$$

$$\emptyset_{tj} = \emptyset_{t-1.j} - \emptyset_{tt}\, \emptyset_{t-1,t-j} \quad , j = 1, \ldots., t-1$$

$$\emptyset_{tj} = \gamma(0)$$

$$v_t = v_{t-1}[1 - \emptyset_{tt}^2] \qquad , j = 1, \ldots \ldots, t-1$$

اضافة الى ، فاذا كان $e_i = Z_t - \hat{Z}_t$ هو خطأ التنبؤ وان $e = \{e_1, e_2, \ldots, e_n\}'$ اذ ان :

$$e = L\, Z \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (36.3)$$

حيث أن (L) هي المصفوفة المثلثية السفلى (Lower Triangular Matrix)

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ -\emptyset_{11} & 1 & & & & \\ -\emptyset_{22} & -\emptyset_{21} & 1 & & & \\ -\emptyset_{33} & -\emptyset_{32} & -\emptyset_{31} & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 1 & \\ -\emptyset_{n-1,n-1} & -\emptyset_{n-1,n-3} & -\emptyset_{n-1,n-3} & \ldots & -\emptyset_{n-1,1} & 1 \end{bmatrix} . (37.3)$$

ويمكن تجزئة $\Gamma(\emptyset)$ بالصيغة $\Gamma(\emptyset) = LDL'$ و $D = diag(v_0, \ldots, v_{n-1})$ وبذلك أن :

$$der\Gamma(\theta) = \prod_{j=1}^{n} v_{j-1}$$

$$Z' \{\Gamma(\theta)\}^{-1} Z = \; e' D^{-1}\, e$$

ونتيجة لذلك فأن لوغاريتم دالة الامكان والموضحة بالصيغة :

$$L(\theta) = -\frac{1}{2} Log \; \det \Gamma(\theta) - \frac{1}{2} \; Z' \{\Gamma(\theta)\}^{-1} \; Z$$

يمكن عرض صيغتها كما يأتي .

$$L(\theta) = -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n} Log\ v_{t-1} \ -\frac{1}{2}\sum_{t=1}^{n}\frac{e_t^2}{v_{t-1}} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (38.3)$$

وتجدر الاشارة ان حساب العلمية لهذه الخوارزمية من رتبة $O(n)$. (Palma, W. 2007):

2-1-9-3 الخصائص التقاربية لطريقة MLE :

وفيما يخص عمليات اعتماد المدى الطويل في العينات الكبيرة لنظريات التقارب تتلخص كما يأتي . على فرض ان θ_0 تمثل المعلمة الحقيقية لنموذج الذاكرة الطويلة ، وان $\hat{\theta}_o$ تمثل دالة الامكان الاعظم .

-1 $\hat{\theta}_n \xrightarrow{probability} \theta_0 \quad as \quad n \to \infty$ [خاصية الاتساق] .

-2 $\lim_{n\to\infty} In(\hat{\theta}_0) = \Gamma(\theta_0)$ [خاصية الكفاءة] .

-3 $\sqrt{n}\left(\hat{\theta}_n - \theta_0\right) \xrightarrow{distribution} N(0\,,\Gamma(\theta_0)^{-1})$ [نظرية الغاية المركزية] .

وبناءا على ما توصل اليه التقارب في النتائج الدراسات التطبيقية اصبح بالإمكان استخدام تطبيقاتها في حالة العينات الكبيرة لـ (MLE) فيما يتعلق بنماذج الذاكرة الطويلة .

أولا : عملية التشويش الكسري (Fractional Noise)

ان تقدير الامكان العظم بمعلمة الذاكرة الطويلة (d) اي FN(d) يحقق .

$$\sqrt{n}\left(\hat{d}_n - d\right) \xrightarrow{distribution} N\left(0, \frac{6}{\pi^2}\right) \qquad as\ n \to \infty$$

لذا نرى أن التباين التقاربي لهذا التقدير لا يعتمد على القيمة (d) . (Palma, W. 2007) :

ثانيا : النموذج ARFIMA (1,d,1) :

الصيغة لنموذج ARFIMA .

$$(1-\theta B)Z_t = (1-\theta B)\ (1-B)^{-d}\varepsilon_t \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (39.3)$$

حيث أن : $\{\varepsilon_t\}$ هي [i.i.d] وتتبع للتوزيع $N(0,\sigma^2)$ فأن بالإمكان حساب مصفوفة التباين والتباين المشترك للمعلمات المقدرة وبالصيغة الاتية .

اذ أن كثافة الطيف لهذه العملية .

$$f(\lambda) = \frac{\sigma^2}{2\pi}\ [2(1-cos\lambda)]^{-d}\ \frac{1+\theta^2+2\theta\cos(\lambda)}{1+\theta^2+2\cos(\lambda)}$$

$$Log\ f(\lambda) = Log\ \left(\frac{\sigma^2}{2\pi}\right) - d\ Log[2(1-cos\lambda)] + Log\ [1+\theta^2\cos(\lambda)]$$
$$-\ Log\ [1+\theta^2+2\theta\cos(\lambda)]$$

$$\therefore \nabla\ Log\ \ f(\lambda) = \begin{bmatrix} -Log\ [2(1-cos\lambda] \\ -\dfrac{2[\theta+cos\lambda]}{1+\theta^2+3\theta\cos(\lambda)} \\ -\dfrac{2[\theta+cos\lambda]}{1+\theta^2+\cos(\lambda)} \end{bmatrix}$$

واسقاط هذه المعلمات $d , \theta, \emptyset$ بالمصفوفة $\Gamma(d ,\theta , \emptyset)$ ذو المرتبة (3x3) . حيث أن :

$$\Gamma_{11} = \frac{1}{4\pi}\ \int_{-\pi}^{\pi}\{Log[2(1-\cos\lambda)]\}^2\ \ d\ \lambda\ = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\Gamma_{12} = \frac{1}{4\pi}\ \int_{-\pi}^{\pi}\{Log[2(1-cos\lambda)]\}\ \ \frac{2[\emptyset+cos\lambda]}{1+\emptyset^2+2\emptyset\cos(\lambda)}\ \ d\ \lambda$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left\{\frac{\theta^2}{\emptyset}\int_0^{\pi}\frac{Log[2(1-cos\lambda)]}{1+\emptyset^2+2\emptyset\cos(\lambda)}\ d\ \lambda + \frac{1}{\emptyset}\int_0^{\pi} Log[2(1-cos\lambda)]\ d\ \lambda\right\}$$

$$= -\frac{Log(1+\emptyset)}{\emptyset}$$

وبالأسلوب نفسه :

$$\Gamma_{13} = \frac{Log(1+\theta)}{\theta}$$

وعلاوة على ذلك فالعناصر المتبقية من المصفوفة تمثل معلمتي النموذج ARMA وكما يلي .

$$\Gamma_{22} = \frac{1}{1-\emptyset^2}$$

$$\Gamma_{23} = -\frac{1}{1-\theta\emptyset}$$

$$\Gamma_{33} = \frac{1}{1-\theta^2}$$

حيث ان التباين والتباين المشترك لمصفوفة المعلمات المقدرة تكون بالشكل التالي .

$$\Gamma\,(d,\emptyset\,,\theta)=\begin{bmatrix}\frac{\sigma^2}{6} & -\frac{Log(1+\emptyset)}{\emptyset} & \frac{Log(1+\theta)}{\theta}\\ -\frac{Log(1+\emptyset)}{\emptyset} & \frac{1}{1-\emptyset^2} & -\frac{1}{1-\theta\emptyset}\\ \frac{Log(1+\theta)}{\theta} & -\frac{1}{1-\theta\emptyset} & \frac{1}{1-\theta^2}\end{bmatrix}\ \dots(40.3)$$

حيث يلاحظ ان التباين التقاربي للمقدرات بطريقة (MLE) لنموذج ARFIMA (1,d,1) لا يعتمد على قيمة الذاكرة الطويلة (d) كما في حالة التشويش الكسري (FN) .

: (Palma, W. 2007).

2-9-3 الطرائق شبه المعلمية : Semi parametri Methods

1-2-9-3 طريقة انحدار لوغاريتم المخطط الدوري . Log -Periodogram Regression Method

تم اقتراح هذه الطريقة من قبل الباحثان (Geweke & Porter-Hudak,1983) وهي ذات صلة بالطريقة التكرارية التي تعتمد اساسا على انحدار الطيف المقترح من الباحثين (Porter-Hudak,1982) حيث اشارا فيها ان هذه الطريقة والتي سميت (GPH) بالإمكان استخدامها ايضا في حالة العينات الصغيرة . ولتبيان هذه الطريقة التي توصلا اليها . بافتراض ان العملية $\{Z_t\}$ تتبع للعملية ARIMA(p,d,q) وكما يأتي :

$$\emptyset(B)\,(1-B)^d\,Z_t=\theta(B)\,\varepsilon_t$$

$$(1-B)^d\,Z_t=\,U_t$$

$$\therefore\quad U_t=\emptyset^{-1}(B)\theta\,(B)\,\varepsilon_t$$

لذا أن $\{U_t\}$ تمثل عملية بمتوسط صفري وتباين σ_u^2 ، ولها كثافة طيف $f_u(\lambda)$ عندما $0<\lambda<\pi$ وبالتالي أن دالة كثافة الطيف للعملية $\{Z_t\}$ بالإمكان صياغتها وكما يأتي :

$$f_z(\lambda)=|1-e^{-i\lambda}|^{-2d}\ \ f_u(\lambda)$$

$$=\left|\frac{2ie^{-\frac{i\lambda}{2}}\left(e^{-\frac{i\lambda}{2}}-e^{-\frac{i\lambda}{2}}\right)}{2i}\right|^{-2d}\ f_u(\lambda)$$

$$=\left|2sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right|^{-2d}\ \ f_u(\lambda)\qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\ (41.3)$$

وبأخذ اللوغاريتم لطرفي الصيغة (41.3) واضافة وطرح الحد $Ln\, f_u(0)$ نحصل على .

$$Ln\, f_u(\lambda) = Ln\, f_u(0) - d\ Ln\ \left|2sin\left(\frac{\lambda}{2}\right)\right|^2 + Ln\left[\frac{f_u(\lambda)}{f_u(0)}\right] \ \ldots.. \quad (42.3)$$

وبتعويض التكرارات التوافقية لـ (Fourier) والتي تساوي $\lambda_j = \frac{2nj}{T}$ ، أذ أن (T) عدد المشاهدات وأن $j = 1,2,\ldots.,\left[\frac{T-1}{2}\right]$ واضافة لوغاريتم المخطط الدوري لـ $\{Z_t\}$ الى طرفي الصيغة (42.3) نحصل على .

$$Ln\ I(\lambda_j) = Lnf_u(0) - d\ Ln\left|2sin\left(\frac{\lambda j}{2}\right)\right|^2 + Ln\left[\frac{f_u(\lambda_j)}{f_u(0)}\right] + Ln\left[\frac{I(\lambda_j)}{f_z(\lambda_j)}\right]\ldots. \quad \ldots\ldots.(43.3)$$

وعندما $\lambda_j \to 0$ لكل قيم (j) فأن . $Ln\ \left[\frac{f_u(\lambda)}{f_u(0)}\right] \approx 0$

وبتعريف :

$$z = Ln\ I(\lambda_j)$$

$$\alpha = Ln\, f_u(0)$$

$$B = -d$$

$$x_j = Ln\ \left|2sin\left(\frac{\lambda_j}{2}\right)\right|^2$$

$$v_j = \mathrm{Ln}\ \left[\frac{I(\lambda_j)}{f_z(\lambda_j)}\right]$$

وبالإمكان استنتاج معادلة الانحدار على النحو الآتي :

$$m_j = \alpha + Bx_j + v_j \qquad , \qquad j = 1,2,\ldots \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (44.3)$$

وبذلك فأن مقدر المربعات الصغرى لمعلمة الذاكرة الطويلة (d) يكون بالصيغة الآتية :

$$\hat{d}_{GHP} = -\frac{\sum_{j=1}^{k}(x_j - \bar{x})\ (m_j - \overline{m})}{\sum_{j=1}^{k}(x_j - \bar{x})} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \ (45.3)$$

حيث أن :

$$\bar{m} = \sum_{j=1}^{k} \frac{m_j}{k} \quad , \quad \bar{x} = \sum_{j=1}^{k} \frac{x_j}{k}$$

فقد اوضح الباحث (Portor – Hudak, 1982) بأن التقدير بهذه الصيغة يكون معتمدا الدقة في انتقاء المناسب لقيمة (k) ، اذ أن $0 < k < g(T)$ ، وأن $g(T)$ ترمز دالة بمشاهدات العينة وتحقق الخاصيتين الآتيتين :

$$\lim_{T \to \infty} g(T) = \infty$$

$$\lim_{T \to \infty} \frac{g(T)}{T} = 0$$

وحينما يكون $k = g(T)$ فأن مقدر المربعات الصغرى $\hat{d}_k$ سوف يتبع تقاربيا التوزيع الطبيعي ، وقد توصل نفس الباحث على ان افضل قيمة لـ k في تجارب المحاكاة هي :

$k = g(T) = T^{\lambda}$ عندما $-0.5 < \lambda < 0.5$

: (Geweke, J., Porter-Hudak, S., 1983 ; Porter-Hudak, S. 1982)

: (Robinson, P. M. 2003 ; Robinson , P.M. 1995).

10-3 فحص واختبار دقة النموذج (فحص مدى الملائمة)

Model Diagnostics Checking

بعد مرحلة تقدير معلمات النموذج لابد من إختبار مدى صلاحية وملائمة النموذج وكفاءته لتمثيل بيانات السلسلة الزمنية التي هي قيد الدراسة وللوصول الى الهدف النهائي هي مرحلة التنبؤ. حيث يخضع النموذج الى بعض التشخيصات والفحوص الدقيقة على البواقي او اخطاء التطبيق لنرى مدى مطابقة للسلسلة المشاهدة وكما يلي .

: (Box, G. E. P., Jenkins, G. M., & Reinsel, G. C. 1994) .

: (Reisen , V. , Abraham , B. and Lopes , S. 2001) .

1-10-3 تحليل البواقي Residuals Analysis

من البديهي في ادبيات السلاسل الزمنية ان البواقي او الاخطاء المقدرة $\hat{\varepsilon}_t$ ،هي عبارة عن فرق بين القيم المشاهدة للسلسلة Z_t والقيم المقدرة لهذه المشاهدات $\hat{Z}_t$ ، في حال الأنموذج المختار لعملية التنبؤ يتصف بخصائص العملية العشوائية التي انشأت بيانات السلسلة الزمنية ، ينبغي على البواقي المستحصله من عملية التقدير ان تثبت الفروض الاحصائية الخاصة بالمتغيرات العشوائيةε_t ، او عدم وجود أي خلل على الاقل لهذه الفروض ، واهمها عدم وجود

ارتباط ذاتي بين الأخطاء الحقيقية ε_t . ويفترض ان البواقي هي مقدرات التشويش الابيض ويفترض انها موزعة طبيعيا بمتوسط صفر وتباين σ_ε^2 ، بافتراض ان $\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2, \dots, \hat{\varepsilon}_n$ تمثل البواقي في حال النموذج الذي تم اختياره كفوء فهذا يعني قد استطاع او تمكنه استيعاب كل الأنماط والتحركات المنتظمة في البيانات ، مخلفا بواقي خالية لمثل هذه الأنماط والتحركات . وكذلك يجب ان تكون عاكسة للخصائص الاساسية للمتغيرات العشوائية ε_t . وهي بمتوسط صفر والتباين ان يكون ثابت ، فضلاً عن عدم وجود ارتباط ذاتي بينها . وللتأكد من عدم وجود خرق في هذه الخصائص يتم ذلك من خلال العديد من الوسائل والفحوص الاختبارية والتي تنضوي تحت تحليل البواقي ، هناك اسلوبان لفحص مدى الملائمة الاول التمثيل البياني ، والثاني هو استخدام بعض الاختبارات .

1- رسم البواقي Residuals Plot

لا يقل رسم البواقي اهمية عن الاختبارات الاحصائية، اذ ان لهذه الرسوم اهمية قد تفوق بعض الاختبارات الاحصائية ، ومن خلال التمثيل البياني لهذه القيم كسلسلة زمنية تعتبر الخطوة الاولى ذات الاهمية في تحليل البواقي ، فأن رسم البواقي يكشف الملامح الاساسية للبواقي مثل الاتجاه العام والتشتت والقيم الشاذة قد لا يمكن للاختبارات الاحصائية كشفها، ومن خلال الرسم البياني تصبح البواقي متذبذبة بتشتت ثابت حول الصفر كخط وسط يوازي محور الوسط .
. (شعراوي ، سمير مصطفى ،2005)

2- فحص دالة الارتباط الذاتي للبواقي : (ACF of Residuals)

عند هيكلة واعداد النموذج الذي اعتمد علية لعملية التنبؤ وللتوصل الى الأخطاء الخاصة به تعبر عن متغيرات عشوائية ، ينبغي على البواقي ان تكون عاكسة لهذه الحقيقة وبعدها يجب على دالة الارتباط الذاتي ان تكون خالية نهائية من اي نتوءات ، بوجود هذه النتوءات في دالة الارتباط الذاتي للبواقي بالإمكان استخدامها في تعديل النموذج وتطويره ، وينبغي الملاحظة انه لا يمكن الاكتفاء باختبار كل معالم الارتباط الذاتي للبواقي على حده . على انه تعد سمه مناسبه وضرورية لدراسة ملائمة النموذج وفروضه واهمها عشوائية المتغيرات ε_t ، وذلك لسببين الاول عند الازاحات الزمنية الصغيرة توجد بعض العقبات التي قد تؤدي خطأ الى اعتبار معامل الارتباط الذاتي النظري عند ازاحة زمنية صغيرة لا يختلف معنويا عن الصفر وهو في حقيقة الامر يختلف معنويا عن الصفر اذا استخدم التباين الاصلي بدل من التباين التقريبي n^{-1} ، والثاني عند الازاحات الزمنية الكبيرة توجد بعض النتوءات ويبقى النموذج ملائما اذ أن عشوائية

المتغيرات تسمح بوجود بعض معاملات الارتباط الذاتي النظرية المناظرة عن الصفر. لذا من اللازم اختبار ملائمة النموذج بطريقة مختلفة من خلال اختبار (Ljung &Box) .

3- اختبار الارتباط الذاتي او استقلال البواقي :

يجب التأكد من ان بواقي النموذج غير مرتبطة وتباينها ثابت مع تغير الزمن. من خلال اختبار الارتباط الذاتي (Autocorrelation test) . ولغرض اجراء فحص واختبار البواقي فأنه يتم حساب ورسم المخطط البياني للارتباطات الذاتية لعينة البواقي (ACF) للبواقي ومفاضلتها مع دالة الارتباط الذاتي التشويش الابيض ، ويبنى ذلك على اختبار الفرضتين الآتيتين :

$$H_0: r_k = 0 \qquad , \quad k = 1,2, \dots .m$$

$$H_1: r_k \neq 0 \qquad , \quad k = 1,2, \dots .m$$

اذ ان m تمثل اكبر ازاحة ممكن اختيارها . كما ان احصاءة الاختبار هي :

$U = \frac{r_k}{se(r_k)}$ لها توزيع طبيعي قياسي عند مستوى معنوية $\alpha = 0.05$ اذ ان $r_k = \text{zero}$

اذا كانت $|U| < 1.96$ هذا يعني ان البواقي تتوزع عشوائيا وان النموذج كفوء وبالإمكان استخدامه في عملية التنبؤ وان الارتباطات الذاتية للبواقي تكون مستقلة وتتبع التوزيع الاتي:

$$r_k(L) \sim NID\left(0, \frac{1}{n}\right) \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (46.3)$$

ومن ثم يتم استخدام احصاءة (Box-Pierce) لاختبار المعنوية الاحصائية للارتباطات الذاتية للبواقي .

11-3 مرحلة التنبؤ : (Forecasting Stage)

يعد التنبؤ المرحلة الاخيرة من مراحل التحليل للسلاسل الزمنية ، بعد مرور النموذج بجملة من الإجراءات الاحصائية اللازمة بدا بمرحلة التشخيص النموذج وتقدير معلماته وفحصه وتدقيقه ليتم استخدامه في عملية التنبؤ بالقيم المستقبلية للسلسلة لمعرفة نمط وسلوك السلسلة قيد الدراسة ، ذلك عن طريق احلال القيم الحالية والماضية للمتغير التابع Z_t والبواقي او الاخطاء المقدرة $\hat{\varepsilon}_t$ كقيم تقديرية لحد الخطأ وذلك للحصول على القيمة المستقبلية الاولى Z_{t+1} في معادلة التنبؤ .على افتراض ان حد الخطأ خارج العينة يساوي صفر.

: (Geweke, J. Porter-Hudak, S.1983 ; Porter-Hudak, S.1982).

: (Palma,W. 2007).

1-11-3 التنبؤ باستخدام نماذج ARFIMA

بالإمكان استخدام نماذج ARFIMA في عملية التنبؤ بالظواهر الاقتصادية والتي تبين انها ذات ذاكرة طويلة والتي تأخذ الصيغة الرياضية في عملية التنبؤ .

ليكن النموذج ARFIMA (p,d,q) وفق الصيغة الاتية :

$$\emptyset(B)\ (1-\mathrm{B})^{\mathrm{d}} Z_t = \theta(B)\ \varepsilon_t \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad (47.3)$$

ويمكن كتابة الصيغة (47.3) كما يأتي :

$$\left(1-\emptyset_1 B-\emptyset_2 B^2-\cdots-\emptyset_p B^P\right)(1-B)^d Z_t=\left(1-\theta_1 B-\theta_2 B^2-\cdots \theta_q B^q\right)\varepsilon_t \quad \dots (48.3)$$

كما يمكن كتابة الصيغة (48.3) كما يأتي

$$Z_t=\emptyset_1 Z_{t-1}+\emptyset_2 Z_{t-2}+\emptyset_p Z_{t-p}+\frac{(1-\theta_1 B-\theta_2 B^2-\cdots \theta_q B^q)\varepsilon_t}{(1-B)^d} \quad \dots\dots (49.3)$$

وباستخدام النشر المحدود وتوزيع ثنائي الحدين نحصل على الصيغة الآتية :

$$(1-B)^d=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\tau(k-d)}{\tau(k+1)\tau(-d)}B^k=\left[\sum_{k=0}^{\infty}\mathrm{f}(k)\right]B^k \quad \dots\dots\dots\dots..(50.3)$$

حيث ان : $$(1-B)^d = f(k)$$

وبتعويض الصيغة (49.3) في الصيغة (50.3) نحصل على :

$$Z_t = \emptyset_1 Z_{t-1} + \emptyset_2 Z_{t-2} + .. + \emptyset_p Z_{t-p} + \frac{\left(1-\theta_1 B - \theta_2 B^2 - \cdots - \theta_q B^q\right)\varepsilon_t}{\left[\sum_{k=0}^{\infty} f(k)\right] B^k} \dots (51.3)$$

ويمكن كتابة الصيغة (51.3) لغرض التنبؤ بالأفق h تحصل على ما يأتي .

$$Z_{t+h} = \emptyset_1 Z_{t+h-1} + \cdots + \emptyset_p Z_{t+h-p} + \frac{\varepsilon_{t+h}}{fd(T+h-q)} - \cdots - \frac{\theta_q \varepsilon_{t+h-q}}{fd(T+h-q)} \dots \dots (52.3)$$

ومن خلال الصيغة (52.3) بالإمكان التنبؤ بمستويات الظاهرة الاقتصادية وان هذه التنبؤات تأخذ اثر الصدمات الاقتصادية التي يكون اثرها دائم وطويل الى جانب التغيرات العشوائية والتغيرات الموسمية والتغيرات الاتجاهية .وهناك بعض المقاييس لاختبار دقة التنبؤ ومنها :

1- متوسط القيم المطلقة للخطأ : Mean Absolute Error (MAE)

صيغته الرياضية كما يأتي :

$$MAE = \frac{\sum_{i=1}^{n} |\hat{a}_t|}{n} \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \quad (53.3)$$

2- متوسط القيم المطلقة النسبية للخطأ Mean Absolute Percentage Error (MAPE)

صيغته الرياضية كما يأتي :

$$MAPE = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\hat{a}_t}{Z_t}\right]}{n} * 100 \quad \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots .. \quad (54.3)$$

12-3 النموذج الهجين ARFIMA(p , d , q) – GARCH (P_1 , P_2)

كما هو المعروف أن نماذج الانحدار الذاتي المتكامل كسريا ARFIMA(p , d ,q) لها متوسط شرطي غير ثابت وتباين شرطي ثابت . أما نماذج GARCH (P_1 , P_2) لها متوسط شرطي ثابت وتباين شرطي غير ثابت ، أذا كان المتوسط والتباين يعتمدان على الماضي (غير ثابتين) فأنه يمكن دمج النموذجين معاً في نموذج واحد يعرف بالنموذج الهجين ARFIMA(p,d,q) – GARCH(P_1 , P_2) لكي يمثل ويطابق طبيعة بعض السلاسل الزمنية التي تتصف بالتقلبات عبر الزمن مثل السلاسل الزمنية المالية .

فعلى فرض أن العملية $\{Z_t\}$ تمثل مشاهدات سلسلة زمنية تخضع لنموذج الهجين $ARFIMA(p,d,q) - GARCH(P_1 , P_2)$ وفق الصيغة الآتية :

$$\emptyset(B)\,(1-B)^d(Z_t-\mu) = \theta(B)\varepsilon_t \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (55.3)$$

$$\varepsilon_t = \sigma_t a_t \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (56.3)$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{P_1} \alpha_i \varepsilon_{t-1}^2 + \sum_{j=1}^{P_2} B_j \sigma_{t-1}^2 \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (57.3)$$

أذ أن $\emptyset(B)$ و $\theta(B)$ تمثلان متعددات الحدود من الرتبة p و q على التوالي . وان الصيغة (57-3) تمثل انموذج ARFIMA (p,d,q) وان حد الخطأ (ε_t) ليس مستقلاً ومتماثل التوزيع ، وان $a_t \sim N(0,1)$ ، وكذلك $\alpha_0 > 0$ و $B_j \geq 0$ و $\alpha_i \geq 0$ *لكل* $(i=1,2,..., P_1)$ ، $(j=1,2,…, P_2)$ وان شرط الاستقرارية لنموذج GARCH موضح في الشرط الثاني لنموذج GARCH .

في المرحلة الاولى يتم تقدير معلمات النموذج ARFIMA (p,d,q) في الصيغة (57.3) بطريقة الامكان الاعظم او باستخدام الطريقة غير المعلمية وعلى فرض عدم وجود مشكلة عدم تجانس التباين المشروط (عدم وجود تأثير ARCH)، والحصول على البواقي (ε_t) . وفي المرحلة الثانية يتم تقدير معلمات النموذج $GARCH(P_1 , P_2)$ في الصيغة (57.3) بطريقة الامكان الاعظم .