المقارنة بين عمليتي بواسون غير المتجانسة وجاما التصادفية لدراسة التغيرات في سوق الخرطوم للأوراق المالية

1. خالد رحمة الله خضر قناوى(*)–أستاذ مشارك –جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا–كلية العلوم 0912140803–genawi@gmail.com

2. نجلاء الزين أبوكساوي–باحثة –جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا–كلية العلوم

المستخلص

تم في هذه الدراسة مقارنة عملية بواسون غير المتجانسة مع عملية جاما التصادفية للوصول إلى أفضل عملية تُستخدم للتقدير ؛ وتستخدم طريقة الإمكان الأعظم لتقدير معلمات كل من عملية بواسون غير المتجانسة وعملية جاما، كما تجرى المقارنة بين هاتين العمليتين بالاعتماد على معايير المقارنة المقترحة في الدراسة؛ كذلك تُدرس عدد الأسهم المتداول بين فترات التداول لسوق الخرطوم للأوراق المالية، واختبار فيما إذا كانت البيانات تتبع العمليتين أم لا، فضلاً عن تقدير معلمات العمليتين التصادفية والمقارنة فيما بينهما.

الكلمات المفتاحية: عملية بواسون غير المتجانسة، دالة القوة، الإمكان الأعظم،عملية جاما، سوق الخرطوم للأوراق المالية.

Abstract

In this study, the homogenous Poisson process was compared with the gamma-trapping process of the assets to the best process used for estimation. The greatest possible method is used to estimate the parameters of both the heterogeneous Poisson process and the gamma process. The comparison between these two processes is based on the comparison criteria proposed in the study. It also examines the number of shares traded between the trading periods of the Khartoum Stock Exchange and a test whether the data follow the two processes or not, as well as the estimation of the parameters of the two comparison processes.

Keywords: Non Homogeneous Poisson Processes, Power Function, Maximum Likelihood, Gamma Process, Khartoum Stock Exchange.

المقدمة:

تُعد دراسة العمليات التصادفية (Stochastic Processes) من المواضيع البالغة الأهمية وخاصة في العديد من المجالات الحيوية والتي توسعت وتشعبت تطبيقاتها في شتى المجالات الطبية والحياتية والفيزيائية والتقنية والاقتصادية حتى أصبحت من أكثر النظريات استخداماً في مجالات الحياة المختلفة. (محمود، 2012)، ولقد عُمم مفهوم العمليات التصادفية لكي يشمل آية ظاهرة يتغير حدوثها بتغير الزمن (سواء أكان حتميا أو احتمالياً) والقابل للتحليل من الناحية الاحتمالية . وفي الرياضيات خصوصاً في نظرية الاحتمال (Probability Theory)، والعمليات التصادفية تعد من المجالات الواسعة التي شهدت ومازالت تشهد إقبالاً متزايدا كونها تمثل الجانب الحركي من نظرية الاحتمالات.(ذنون،2011)، وأن دراسة الظواهر الواقعية والتي يكون فيها المعدل الزمني لحدوث الحوادث يتغير بتغير الزمن (دالة في الزمن t) من الأمور المهمة جداً، وتعتبر دراسة سوق الأوراق المالية من تلك الظواهر التي تشكل أهمية بالغة في الاقتصاد الذي يعتبر العمود الفقري للدولة، وتهدف الدراسة إلى تقدير معلمات عمليتان من العمليات الصادفية وهما عملية بواسون غير المتجانسة وعملية جاما بغرض الوصول إلى أفضل نموذج يمثل البيانات، وتم استخدام المنهج

التحليلي والاستنتاجي والذي تمثل في دراسة العمليات التصادفية واستخدامها في معرفة اتجاه حركة تداول الأسهم في سوق الخرطوم للأوراق المالية.

الجانب النظري:

العملية البواسونية غير المتجانسة: Non Homogeneous Poisson Processes

العمليات البواسونية غير المتجانسة هي عملية عامة لعملية بواسون الاعتيادية ، إذ أن الحوادث تحدث عشوائيا بالزمن t بمعدل λ من الحوادث لكل وحدة من وحدات الزمن t . إذ أنها تكون مناسبة كنموذج لسلسلة من الحوادث التي تحدث عشوائيا على طول فترة زمنية متغيرة.(الطائي ، لازم ، 2007)

تعريف:

عمليات العد $\{N(t), t \geq 0\}$ يقال لها بأنها عمليات بواسون غير المتجانسة (NHPP) بدالة شدة (Intensity Function $\lambda(t)$, $t \geq 0$ إذا توافرت الشروط الآتية :-

(i) N (0) =0 عدد الحوادث بالزمن صفر يساوي صفر $(t = 0)$.

(ii) عملية العد $\{N(t), t \geq 0\}$ أي عدد الحوادث بالزمن t لها زيادات مستقلة ولكنها غير مستقرة.

(iii) احتمال حدوث أكثر من حادثة في المدة الزمنية h يقترب من الصفر

$$p\{N(t+h) - N(t) \geq 2\} = O(h)$$

(iv) احتمال حدوث حادثة واحدة خلال الزمن (w)

$$P\{N(t+w) - N(t) = 1\} = \lambda(t)w + U(w)$$

حيث إن الحد U(w) يرمز لأي كمية تؤدي إلي الصفر عندما w تقترب من الصفر. [الطائي والحسيني، 1990] و [Rigdon, S.E. and Basu, A.P.2007]

وبذلك تكون العملية البواسونية $\{N(t), t \geq 0\}$ تتبع توزيع بواسون بدالة كتلة احتمالية :

$$P\{N(t-s) - N(t) = n\} = \frac{[\lambda(t)^n e^{-\lambda(t)}}{n!} \quad , \quad n = 0,1,2,\ldots \quad \ldots(1)$$

حيث إن λ(t) تمثل معلمة العملية , وهي نسبة تراكم الحدوث للمعدل الزمني Cumulaive Rala Occurrence وتعرف بالمعادلة :

$$M(t) = \int_0^t \lambda(t)du \qquad ; \quad t > 0$$

فإذا كانت λ(t) كمية ثابتة لكل قيم (t) أي إن λ(t) خطية في (t) فإن العملية $\{N(t), t \geq 0\}$ عملية بواسونية متجانسة (Homogeneous Poisson Process) بنسبة حدوث λ(t) , أما إذا كانت λ(t) متغيرة أي أنها تتغير بتغير الزمن فأن العملية $\{N(t), t \geq 0\}$ عملية بواسونية غير متجانسة (Homogeneous Non– Poisson Process) . والعالم [Feller] هو أول عالم أعطى تعريفا دقيقا للعملية البواسونية ووضح أهم خصائصها [الطائي ونعيمة، 2010].

خصائص عملية بواسون غير المتجانسة:

Properties Non Homogeneous Poisson Process

(أ) استقلالية العد : Independent Of The Number

إذا كان لدينا عملية بواسون غير متجانسة ضمن الفترة (0,t) وكان عدد الحوادث خلال الفترة نفسها هو N(t) = n , لذا فإن لحظة حصولنا على n من الحوادث تكون ذات توزيع مستقل ضمن الفترة (0,t) وبدالة شدة λ(t) ∕ ʌ(t).

(ب) المركبة Superposition

مركبة لاثنين أو أكثر من عملية بواسون غير المتجانسة بدوال شدة(t), λ_1 (t), λ_2........

هي أيضا عملية بواسونية غير متجانسة وهذا يعني:

$$\lambda(t) = \lambda_1(t) + \lambda_2(t) + \ldots\ldots\ldots$$

(ج) الاختيار العشوائي Random Selection

إذا كان لدينا عملية غير متجانسة بدالة شدة $\lambda(t)$ لذا فإن اختيارنا لأي حدث يكون اختيار عشوائي وبصورة مستقلة عن بقية الحوادث وباحتمال p(t) والذي يعتمد على الزمن ولذلك يكون ذات دالة شدة $p(t)= \lambda(t)$.

(د) الانقسام العشوائي random Split

إذا كانت عملية بواسون غير المتجانسة بدالة شدة $\lambda(t)$ هي منقسمة عشوائيا لعمليتين جزئيتين باحتمالات p1(t),p2(t) إذاً $p1(t)+p2(t)=1$

لذا فان نتائج العمليات الجزئية هي عمليات بواسون غير متجانسة مستقلة وبدوال شدة $\lambda(t)$ p1(t), $\lambda(t)$ p2(t). (الطائي, لازم، 2007)

التوزيع الاحتمالي للفترات بين حادثة الحوادث في العملية البواسونية غير المتجانسة يتبع التوزيع ألأسي (Exponential Distribution) بدالة كثافة احتمالية :

$$f(t) = \lambda(t)e^{-\int_0^t \lambda(u)du} \qquad , t > 0 \ldots (2)$$

تقدير المعدل الزمني للحدوث في العملية البواسونية غير المتجانسة:

تقدير المعدل الزمني يكون بمثابة تقدير المعلمات الموجودة في نموذج الدالة التي تم اختيارها لتمثيل دالة المعدل الزمني لحدوث الحوادث في العملية البواسونية غير المتجانسة ، ومن أكثر الطرق استخداماً هي طريقة الإمكان الأعظم (Maximum Likelihood Method).

نموذج قانون القوة : Power Law Model

في عام 1964 اقترح الباحث (Duane) نموذجا يسمى قانون القوة كدالة للمعدل الزمني للحدث بمعلمتين α وβ :(لازم ، 2014)

$$\lambda(t) = \alpha\, \beta\, t^{\beta-1} \qquad \ldots..(3)$$

وأن دالة الشدة التراكمية لقانون القوة هي:

$$\varphi(t)=\alpha\, t^{\beta} \qquad \ldots..(4)$$

حيث إنّ:

$\beta, \alpha > 0$

$t \geq 0$

α : تمثل معلمة القياس (Scale Parameter)

β : تمثل معلمة الشكل (Shape Parameter)

إذ إنّ α, β معلمتا المعدل الزمني للحدوث للعملية البواسونية غير المتجانسة .

فإذا كانت معلمة الشكلβ في دالة قانون القوة للمعدل الزمني للحدوث في الصيغة (3) $(\beta > 1)$ هناك تزايداً في المعدل الزمني للحدوث للعملية البواسونية غير المتجانسة مع الزمن ، أما إذا كانت $(\beta < 1)$ هناك تناقصاً في المعدل الزمني للحدوث للعملية البواسونية غير المتجانسة مع الزمن ، وفي حالة $(\beta = 1)$ فإن ذلك يعطي مؤشراً إلى أن المعدل الزمني

للحدوث في العملية قيد الدراسة هو كمية ثابتة مع الزمن ، وعليه فإن دالة قانون القوة تتحول إلى دالة التوزيع الأُسي . [Erkanli et al.,2002]

طريقة تقدير الإمكان الأعظم [Method of Maximum likelihood Estimation]

تتميز هذه الطريقة بخصائص جيدة منها خاصية الثبات ويمكن تعريف التقدير بهذه الطريقة على انه قيم المعلمات التي تجعل دالة الإمكان الأعظم للمشاهدات في نهايتها العظمى.

و لتكن $(x_1, x_2, \dots\dots, x_n)$ عينة عشوائية بحجم n مسحوبة من مجتمع تتوزع مفرداته بحسب دالة الشدة الاحتمالية لعمليات بواسون غير المتجانسة بدالة توزيع بمعلمتين (α, β) فأن دالة الشدة المشتركة لأوقات الحدث, $(t_1, t_2, \dots t_n)$ [الازم، 2014] هي:

$$f_n(t_1, t_2, \dots\dots, t_n) = \prod_{i=1}^{n} \lambda(t_i) \exp[-\int_0^t \lambda(u)du] \quad \dots\dots(5)$$

وعند التعويض المعادلتين(3) و(4) ينتج:

$$f_n(t_1, t_2, \dots\dots, t_n) = \prod_{i=1}^{n} \alpha\beta t_i^{\beta-1} \exp[-\alpha(t_n)^{\beta}]$$

$$L = \alpha^n \beta^n \prod_{i=1}^{n} t_i^{\beta-1} exp[-\alpha(t_i)^{\beta}] \quad \dots\dots (6)$$

وبأخذ اللوغرثيم للطرفين في المعادلة أعلاه نحصل علي

$$\ln L = n\ln\alpha + n\ln\beta + (\beta-1)\sum_{i=1}^{n} lnt_i - \alpha t_n^{\beta}$$

$$\frac{\partial lnL}{\partial\alpha} = \frac{n}{\alpha} - t_n^{\beta} = \frac{n-\alpha t_n^{\beta}}{\alpha} = 0 \quad \dots\dots (7)$$

$$\hat{\alpha} = \frac{n}{t_n^{\beta}} \quad \dots\dots (8)$$

$$\frac{\partial ln}{\partial\beta} = \frac{n}{\beta} + \sum_{i=1}^{n} \ln t_i - \alpha t_n^{\beta} lnt_n = \frac{n+\beta\sum_{i=1}^{n}\ln t_i - \alpha\beta t_n^{\beta} lnt_n}{\beta} \quad \dots\dots(9)$$

وبمساواة المعادلة بالصفر :

$$\frac{\partial\ln}{\partial\beta} = \frac{n+\beta\sum_{i=1}^{n}\ln t_i - \alpha\beta t_n^{\beta} lnt_n}{\beta} = 0$$

$$\hat{\beta} = \frac{n}{\alpha t_n^{\beta}\ln t_n - \sum_{i=1}^{n}\ln t_i}$$

$$\hat{\beta} = \frac{n}{n\ln t_n - \sum_{i=1}^{n}\ln t_i} \quad \dots\dots(10)$$

بذلك يكون نموذج دالة قانون القوى التقديري هو :

$$\hat{\lambda}(t) = \hat{\alpha}_{ml}\hat{\beta}_{ml} t^{\beta_{ml}-1} \dots\dots\dots\dots(11)$$

عملية جاما:

تُعد من العمليات التصادفية المهمة التي تقع ضمن حقل الموثوقية (Reliability)، ويعتبر الباحث (Abdel – Hameed, 1975) أول من درس عملية جاما التصادفية بالتفصيل وعرّفها بأنها عملية تصادفية تكون فيها الزيادات عبارة عن متغيرات عشوائية مستقلة وغير سالبة ، وفي الوقت الحاضر تزايد استخدام عملية جاما في نماذج التدهور التصادفي لتحسين الصيانة وذلك لأنها مناسبة لنمذجة التباين الزماني للتدهور، وقد أثبتت أهميتها في تحديد وقت الفحص الأمثل وقرارات الصيانة ، كما أنها مناسبة في نماذج التدهور الرتيب الذي يحصل مع مرور الزمن بواسطة سلسلة من الزيادات الصغيرة K [Van Noortwijk , 2009].

فإذا كانت العملية التصادفية $\{X(t), t \geq 0\}$ تمثل عملية جاما فإن التوزيع الاحتمالي لعدد الحوادث التي تحدث في الفترة الزمنية t يتبع توزيع بواسون بالمعلمة λ.

وتُعتبر دراسة الفترات البينية بين حدوث الحوادث في أي عملية تصادفية يمثل الجزء الحيوي للعملية. وإذا فرضنا أن العملية التصادفية $\{X(t), t \geq 0\}$ تمثل الفترات البينية بين حدوث الحوادث في عملية جاما التصادفية ، أي أن المتغير $\mathrm{x(n)}$ يمثل الفترة الزمنية من حدوث الحادثة $(\mathrm{n}-1)$ حتى حدوث الحادثة (n) وهذا يشير إلى أن الحوادث تحدث في الأوقات الآتية :

$$X_1 , X_1 + X_2 , X_1 + X_2 + X_3 , \ldots$$

أي أنّ تراكم الفترات الزمنية يمثل أوقات الحدوث للحوادث . وعليه فإن التوزيع الاحتمالي للفترات البينية بين حدوث الحوادث $\mathrm{X(t)}$ في عملية جاما يتبع توزيع جاما (Gamma Distribuion) بالمعلمتين (φ , a) فتصبح صيغة توزيع جاما التصادفية بالشكل التالي :

$$f_{x(t)}(x) = \frac{\alpha^{\varphi}}{\Gamma\varphi} x^{\varphi-1} e^{-\alpha x}$$

حيث أنّ :

α : تمثل معلمة الشكل (Shape Parameter) التي تعتمد على الزمن t .

φ : تمثل معلمة القياس (Scale Parameter)

وتُعتبر عملية جاما غير المتجانسة تعميم لعملية جاما المتجانسة ، إذ أن معلمة الشكل في عملية جاما غير المتجانسة تكون دالة بدلالة الزمن t ، وتأخذ الشكل $\varphi(\mathrm{t})$ ،وعلية فان الصيغة العامة لتوزيع جاما في حالة العملية غير المتجانسة بمعلمة قياس a تكون بالشكل الآتي:

[Nicolai et al., 2007],[Bakker and Van Noortwijk,2004]

$$f_{x(t)} = \frac{a^{\varphi(t)}}{\Gamma\varphi(t)} x^{\varphi(t)-1} e^{-ax} \quad \sim Ga(x \backslash \varphi(t), a) \qquad \ldots .. (12)$$

اختبار فيما إذا كانت البيانات تتبع توزيع جاما ، فإننا نحتاج إلى صياغة الفرضية التالية:

H_0 : البيانات تتبع توزيع جاما

H_1 : البيانات لا تتبع توزيع جاما

وعليه فإن المُختبر الإحصائي (مربع كاي) لاختبار الفرضية أعلاه يكون على النحو التالي :

$$\chi^2 = \sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{k}} \frac{(\mathrm{W_i} - \mathrm{M_I})^2}{\mathrm{M_i}}$$

إذ أن :

$\mathrm{W_i}$: التكرارات , K : عدد المجموعات (الفئات)

$$\sum_{i=1}^{k} W_i = n$$

وإذ كانت القيمة الحرجة C من جداول مربع كاي عند مستوى معنوية معين ، وعند درجة حرية $d.f =$ $(k-q-1)$ ، وكانت $\chi^2 \leq \mathrm{C}$ يتم قبول فرضية العدم H_0 ورفض الفرضية البديلة H_1 وغير ذلك ترفض H_0 وتقبل H_1 .

أنواع عملية جاما التصادفية : Types of Gamma Stochastic Process

يمكن تقسيم عملية جاما التصادفية إلى نوعين رئيسيين ، هما عملية جاما المتجانسة (Homogeneous Gamma Process) ، وعملية جاما غير المتجانسة (Non–Homogeneous Gamma Process) ، ولكل عملية خصائصها

ومعلماتها تختلف عن الأخرى ، والاختلاف بين العمليتين يعتمد على معلمة الشكل ، فإذا كانت معلمة الشكل تمثل دالة بدلالة الزمن t أي $\varphi(t)$ فإن العملية تكون غير متجانسة .

خصائص عملية جاما غير المتجانسة: [صالح ومثنى ,2017]

1. $X(0) = 0$ أي لا يوجد أي حالة حدوث في الزمن صفر.
2. العملية $\{X(t), t \geq 0\}$ هي عملية تصادفية ذات زيادات مستقلة غير مستقرة.
3. إذا كانت $0 \leq s < t$ فإن التوزيع الاحتمالي للفترة بين حدوث الحادثتين X_t و X_s أي $X_t - X_s$ هو توزيع جاما بالعملية $\Gamma(\varphi(t) - \varphi(s), a)$ ، إذ أن $\varphi(t) - \varphi(s)$ تمثل معلمة الشكل وa تمثل معلمة القياس . [Lawless and Crowder,2004]
4. العملية $\{X(t), t \geq 0\}$ عملية غير متناقصة.
5. لكل $t \geq 0$ فإن التوقع والتباين لعملية جاما غير المتجانسة هما :[Van Noortwijk,2009]

$$E[X(t)] = \frac{\varphi(t)}{a} \qquad , \qquad var[X(t)] = \frac{\varphi(t)}{a^2} \quad ,$$

6. إذا كانت العملية $\{X(t), t \geq 0\}$ تمثل عملية جاما غير المتجانسة بمعلمة الشكل φ ومعلمة القياس a , فإن العملية $\{ax_t, t \geq 0\}$ تعد أيضاً عملية جاما بنفس معلمة الشكل ولكن بمعلمة القياس تساوي واحد.
7. الدالة التراكمية لغاية القيمة K لعملية جاما غير المتجانسة يمكن إيجادها بالصيغة الآتية:

$$p(T > t) = p(X(t) < K) = \int_o^K \frac{a^{\varphi(t)}}{\Gamma\varphi(t)} x^{\varphi(t)-1} e^{-ax} dx \quad .....(13)$$

تقدير معلمات عملية جاما: Parameters Estimation Of Gamma Process

أن استخدام طريقة الإمكان الأعظم (Maximum Likelihood Method) في تقدير معلمات عملية جاما غير المتجانسة ، يعد من الطرائق المعلمية المهمة في التقدير لما تتميز به من خصائص وصفات كثيرة منها الثبات والاتساق غالباً، وهي من طرق التقدير الشائعة في تقدير معلمات عملية جاما .

طريقة الإمكان الأعظم لتقدير معلمتي عملية جاما المتجانسة:

$$T_i = t_i - t_{i-1}$$

على فرض γ_i تمثل عدد الحوادث التي تحدث في الفترة الزمنية T_i أي أن :

$$\gamma_i = \omega_i - \omega_{i-1} \qquad , \quad 1 \leq i \leq n$$

إذ أن ω_i: تمثل عدد الحوادث التي تحدث إلى الزمن t_i . [صالح ومثنى ,2017]

وعلية فإن γ_i تتوزع توزيع جاما بالمعلمتين :

$$\gamma_i \sim \Gamma\left(\varphi({t^k}_i - t_{i-1}^k, a\right)$$

ويمكن اختيار أي دالة لمعلمة الشكل $\varphi(t_i)$ بشرط أن تكون ملائمة لتوزيعات الحياة أو تكون من التوزيعات الاحتمالية الشائعة مثل الدالة الاسية أو دالة وايبل أو دالة كوكس . ومن الدوال الشائعة لمعلمة الشكل لعملية جاما هي دالة قانون القوة (Power Low Function) والتي استخدمت من قبل العديد من الباحثين كونها ملائمة لعمليات التدهور وسهلة في تقدير المعلمات وكما في الصيغة الآتية: [صالح ومثنى,2017]

$$\varphi(t) = \varphi t^k \qquad ..... (14)$$

ويلاحظ أنه عندما تكون k في دالة قانون القوة مساوية إلى الواحد $(k = 1)$ ، فإن عملية جاما غير المتجانسة تتحول إلى عملية جاما المتجانسة وذلك لأنها مشابهة لمعلمة الشكل للعملية المتجانسة. [صالح ومثني , 2017]

وباستخدام دالة قانون القوة، فإن معلمة الشكل تأخذ الصيغة :

$$\varphi(t_i) = \varphi\left(t_i^k - t_{i-1}^k\right) \qquad \ldots\ldots (15)$$

وعليه يمكن كتابة دالة عملية جاما غير المتجانسة باستخدام دالة قانون القوة بالصيغة الآتية:

$$f\left(\varphi\left(t_i^k - t_{i-1}^k\right), a\right) = \frac{a^{\varphi\left(t_i^k - t_{i-1}^k\right)}}{\Gamma\varphi\left(t_i^k - t_{i-1}^k\right)} \gamma_i^{\varphi\left(t_i^k - t_{i-1}^k\right)-1} e^{-a\gamma_i} \qquad \ldots\ldots(16)$$

دالة الإمكان لعملية جاما غير المتجانسة فتكون بالشكل الآتي:

$$l(\varphi, a) = \prod_{i=1}^{n} f\left(\varphi\left(t_i^k - t_{i-1}^k\right)\right)(\gamma_i) \prod_{i=1}^{n} \frac{a^{\varphi\left(t_i^k - t_{i-1}^k\right)}}{\Gamma\varphi\left(t_i^k - t_{i-1}^k\right)} \gamma_i^{\varphi\left(t_i^k - t_{i-1}^k\right)-1} e^{-a\gamma_i} \qquad ..(17)$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي لطرفي المعادلة يتم الحصول على:

$$\ln l(\varphi, a) = \sum_{i=1}^{n} \varphi\left(t_i^k - t_{i-1}^k\right) \ln a - \sum_{i=1}^{n} \ln \Gamma\varphi\left(t_i^k - t_{i-1}^k\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(\varphi\left(t_i^k - t_{i-1}^k\right) - 1\right)\ln(\gamma_i) + a\sum_{i=1}^{n}\gamma_i \quad ..(18)$$

ولتعظيم دالة الإمكان الأعظم يتم أخذ المشتقة الأولى بالنسبة لكل من φ, a ليتم الحصول على الصيغة الآتية:

$$\frac{\partial \ln l\left(\varphi\left(t_i^k - t_{i-1}^k\right), a\right)}{\partial \varphi} = \sum_{i=1}^{n}\left[\left(t_i^k - t_{i-1}^k\right)\ln a - \frac{\Gamma\varphi\left(t_i^{k/} - t_{i-1}^k\right)}{\Gamma\varphi\left(t_i^k - t_{i-1}^k\right)}\left(\left(t_i^k - t_{i-1}^k\right)\right) + \left(t_i^k - t_{i-1}^k\right)\ln(\gamma_i)\right]$$

$$= \sum_{i=1}^{n}\left(t_i^k - t_{i-1}^k\right)\ln(a) - \sum_{i=1}^{n}\left(t_i^k - t_{i-1}^k\right)\vartheta\left(\varphi\left(t_i^k - t_{i-1}^k\right)\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(t_i^k - t_{i-1}^k\right)\ln(\gamma_i)$$

$$= t_n^k \ln(a) - \sum_{i=1}^{n}\left(t_i^k - t_{i-1}^k\right)\vartheta\left(\varphi\left(t_i^k - t_{i-1}^k\right)\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(t_i^k - t_{i-1}^k\right)\ln(\gamma_i) \qquad \ldots\ldots(19)$$

إذ أن:

$$\vartheta\left(\varphi\left(t_i^k - t_{i-1}^k\right)\right) = \frac{\Gamma\varphi\left(t_i^{k/} - t_{i-1}^k\right)}{\Gamma\varphi\left(t_i^k - t_{i-1}^k\right)}, \qquad \gamma_n = \sum_{i=1}^{n}\gamma_i, \qquad t_n^k = \sum_{i=1}^{n}\left(t_i^k - t_{i-1}^k\right)$$

وبأخذ المشتقة الأولى لدالة الإمكان بالنسبة للمعلمة a يتم الحصول على :

$$\frac{\partial \ln l\left(\varphi\left(t_i^k - t_{i-1}^k\right), a\right)}{\partial a} = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\varphi\left(t_i^k - t_{i-1}^k\right)}{a} - \gamma_i\right] = \frac{\varphi}{a} t_n^k - \gamma_n \qquad \ldots\ldots (20)$$

وبمساواة المعادلة (20) بالصفر يتم الحصول على $\hat{a}$ التي تمثل مقدر الإمكان الأعظم لمعلمة القياس a :

$$\hat{a} = \hat{\varphi}\frac{\sum_{i=1}^{n}\left(t_i^k - t_{i-1}^k\right)}{\sum_{i=1}^{n}\gamma_i} \qquad \ldots\ldots (21)$$

وبالتعويض عن قيمة $\hat{a}$ في المعادلة (19) ومساواتها الصفر يتم الحصول على:

$$t_n^k \ln\left(\hat{\varphi}\frac{t_n^k}{\gamma_n}\right) - \sum_{i=1}^{n}\left(t_i^k - t_{i-1}^k\right)\vartheta\left(\varphi\left(t_i^k - t_{i-1}^k\right)\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(t_i^k - t_{i-1}^k\right)\ln(\gamma_i) = 0 \quad \ldots\ldots(22)$$

وبما أن :

$$\vartheta\left(\varphi\left(t_i^k - t_{i-1}^k\right)\right) + \sum_{i=1}^{n}\left(t_i^k - t_{i-1}^k\right)\ln(\gamma_i) = 0$$

هي المشتقة الأولى لدالة جاما بالنسبة للمعلمة φ ولا يمكن إيجادها ، لذا سيتم اللجوء إلى الحل العددي لإيجاد مقّدر الإمكان الأعظم للمعلمة φ .

الطريقة التكرارية لحل مسألة التقدير لعملية جاما:

كما نعلم أنه عندما نستخدم طريقة الإمكان الأعظم لا يمكن إيجاد مقدّرات المعلمة φ لعملية جاما غير المتجانسة تحليلياً، وذلك لوجود الدالة الثنائية (دالة باي) وهي المشتقة الأولى لدالة جاما بالنسبة للمعلمة φ. ولذلك سيتم الاستعانة بالطرائق العددية (Numerical Methods) لإيجاد مقدر الإمكان الأعظم للمعلمة φ . ونجد أن طريقة نيوتن (Newton's Method) هي إحدى الطرق المستخدمة لحل معادلات الإمكان الأعظم [صالح وسليمان 2017]

باستخدام مبرهنة تايلور (Taylor's Theorem) حول نقطة a نجد أن:

$$0 = B_{\varphi} l(\hat{\varphi}, \hat{a}) \cong B_{\varphi} l(\varphi, a) + (\hat{\varphi} - \varphi) B_{\varphi}^{2} l(\varphi, a) \quad ..... (23)$$

ونفرض أن:

$$B_{\varphi} l(a) = \frac{\partial l(\varphi, a)}{\partial \varphi} \quad , \quad B_{\varphi}^{2} l(\varphi, a) = \frac{\partial^{2} l(\varphi, a)}{\partial \varphi_{i} \cdot \partial \varphi_{j}} \quad ; \quad i \neq j\,, i, j = 1,2, \dots ..$$

وعليه :

$$(\hat{\varphi} - \varphi) B_{\varphi}^{2} l(\varphi, a) = -B_{\varphi} l(\varphi, a) \quad ..... (24)$$

فمقدّر الإمكان الأعظم للمعلمة φ هو :

$$\hat{\varphi} = \varphi - \frac{B_{\varphi} l(\varphi, a)}{B_{\varphi}^{2} l(\varphi, a)} \quad ..... (25)$$

لإيجاد هذا المقدّر نحتاج لإيجاد المقدّر الآتي:

$$B_{\varphi}^{2} l(\varphi, a) = -\left[\sum_{i=1}^{n} \vartheta\left(1, t_{i}^{k} - t_{i-1}^{k}\right)\left(t_{i}^{k} - t_{i-1}^{k}\right)^{2}\right] \quad ...... (26)$$

وبالتعويض في المعادلة (22) بما يقابلها يتم الحصول على مقدّر الإمكان الأعظم للمعلمة φ كما يلي:

$$\hat{\varphi} = \varphi - \frac{\sum_{i=1}^{n}(t_{i}^{k} - t_{i-1}^{k}) \ln\left[\varphi \frac{\sum_{i=1}^{n}(t_{i}^{k} - t_{i-1}^{k})}{\sum_{i=1}^{n} \gamma_{i}}\right] - \sum_{i=1}^{n}(t_{i}^{k} - t_{i-1}^{k}) \vartheta\left(\varphi\left(t_{i}^{k} - t_{i-1}^{k}\right)\right) + \sum_{i=1}^{n}(t_{i}^{k} - t_{i-1}^{k}) \ln(\gamma_{i})}{-\left[\sum_{i=1}^{n} \vartheta\left(1, t_{i}^{k} - t_{i-1}^{k}\right)\left(t_{i}^{k} - t_{i-1}^{k}\right)^{2}\right]} \quad .....(27)$$

وبتحويل المعادلة (24) إلى صيغة متعاقبة نحصل على المقدّر التعاقبي الآتي:

$$\hat{\varphi}_{i} = \varphi_{i-1} - \left[\sum_{i=1}^{n}(t_{i}^{k} - t_{i-1}^{k}) \ln\left[\varphi \frac{\sum_{i=1}^{n}(t_{i}^{k} - t_{i-1}^{k})}{\sum_{i=1}^{n} \gamma_{i}}\right] - \sum_{i=1}^{n}(t_{i}^{k} - t_{i-1}^{k}) \vartheta\left(\varphi\left(t_{i}^{k} - t_{i-1}^{k}\right)\right) + \sum_{i=1}^{n}(t_{i}^{k} - t_{i-1}^{k}) \ln(\gamma_{i})\right] - \left[\left[\sum_{i=1}^{n} \vartheta\left(1, t_{i}^{k} - t_{i-1}^{k}\right)\left(t_{i}^{k} - t_{i-1}^{k}\right)^{2}\right]\right]^{-1} ...(28)$$

الجانب التطبيقي:

تقدير عملية بواسون الغير متجانسة:

يتم تقدير النموذج باستخدام برمجية **STATGRAPHIC** كما يلي

نموذج عملية بواسون غير المتجانسة بطرية الإمكان الأعظم:

Rate model: $2356.0345839 * t\ e^{-0.693971}$

اختبار توفيق النموذج لعملية بواسون الغير متجانسة:

لغرض اختبار مدى مطابقة بيانات حركة أسهم سوق الخرطوم للأوراق المالية لعملية بواسون غير المتجانسة تم صياغة الفرضية التالية:

H_o : بيانات تتبع توزيع الأُسّي

H_1 : البيانات لا تتبع توزيع الأُسّي

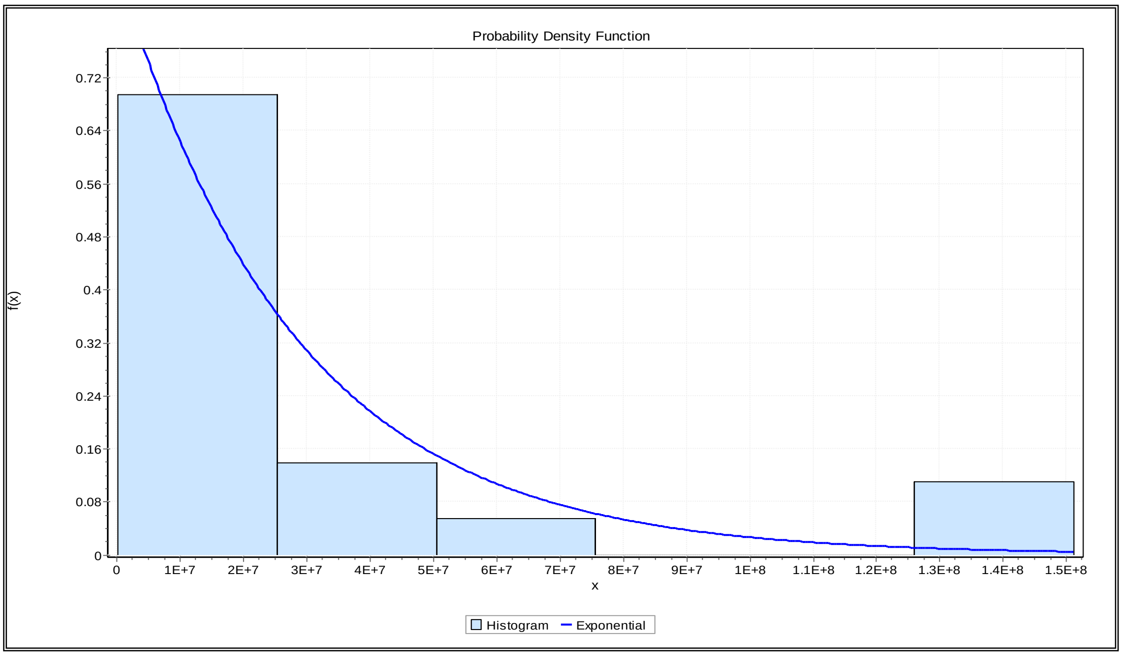
الجدول (1): اختبار جودة متطابقة البيانات لعملية بواسون غير المتجانسة

الاختبار	قيمة المختبر	القيمة الاحتمالية
مربع كاي	6.372	0.1102

المصدر: من إعداد الباحث اعتماداً على نتائج البرنامج Easyfit

يتضح من الجدول (1)، أن القيمة الاحتمالية لاختبار مربع كاي (جودة التوفيق) (0.1102) وهي أكبر من مستوى المعنوية (0.05). وهذا يعني عدد الأسهم المتداولة تتوزع أسيا.

الشكل (1): يوضح جودة متطابقة البيانات لعملية بواسون غير المتجانسة



المصدر: إعداد الباحث اعتماداً على نتائج البرنامج Easyfit

الشكل يوضح حركة الأسهم المتداولة في سوق الخرطوم للأوراق المالية بطريقة بطرية الإمكان الأعظم.

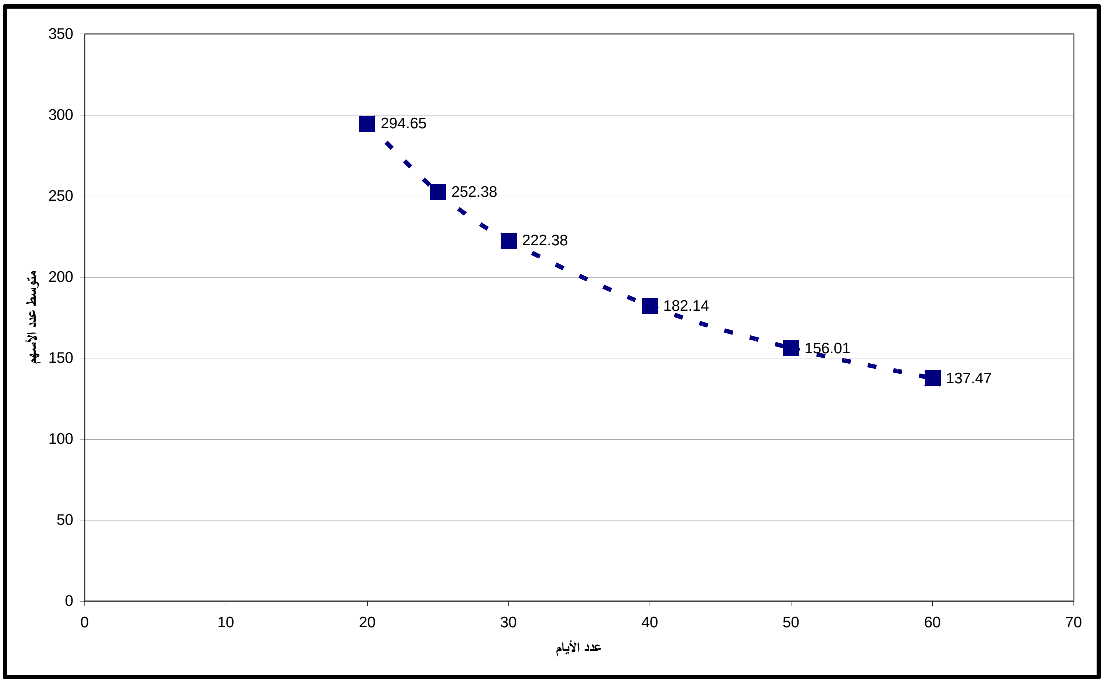
الجدول (2): التنبؤ بعدد الأسهم بواسطة نموذج عملية بواسون غير المتجانسة

عدد الأيام	المتوسط
20	294.65
25	252.38
30	222.38
40	182.14
50	156.01
60	137.47

المصدر: من إعداد الباحث اعتماداً على نتائج البرنامج *STATGRAPHIC*

نلاحظ من الجدول (2) أن التنبؤ بمتوسط عدد أيام التداول يتناسب عكسياً مع متوسط عدد الأسهم المتداولة؛ أي كلما نشط السوق أرتفع عدد الأسهم المتداولة في فترة زمنية أقل. إذاً لابد من حث الشركات والمؤسسات على أهمية نشاط السوق.

الشكل (2): يوضح التنبؤ حسب عملية بواسون غير المتجانسة



المصدر: إعداد الباحث باستخدام البرنامج Excel

يتضح من الشكل (2) أنه كلما أرتفع عدد الأسهم المتداولة قلت عدد أيام التداول، بناءٍ على البيانات المأخوذة من موقع سوق الخرطوم للأوراق المالية.

اختبار توزيع البيانات لعملية كاما التصادفية:

لغرض اختبار مدى مطابقة بيانات عدد الأسهم لعملية جاما التصادفية ويتم اختبار الفرضية الآتية:

بيانات حركة أسهم سوق الخرطوم للأوراق المالية تتفق مع عملية جاما التصادفية : H_0

بيانات حركة أسهم سوق الخرطوم للأوراق المالية لا تتفق مع عملية جاما التصادفية : H_1

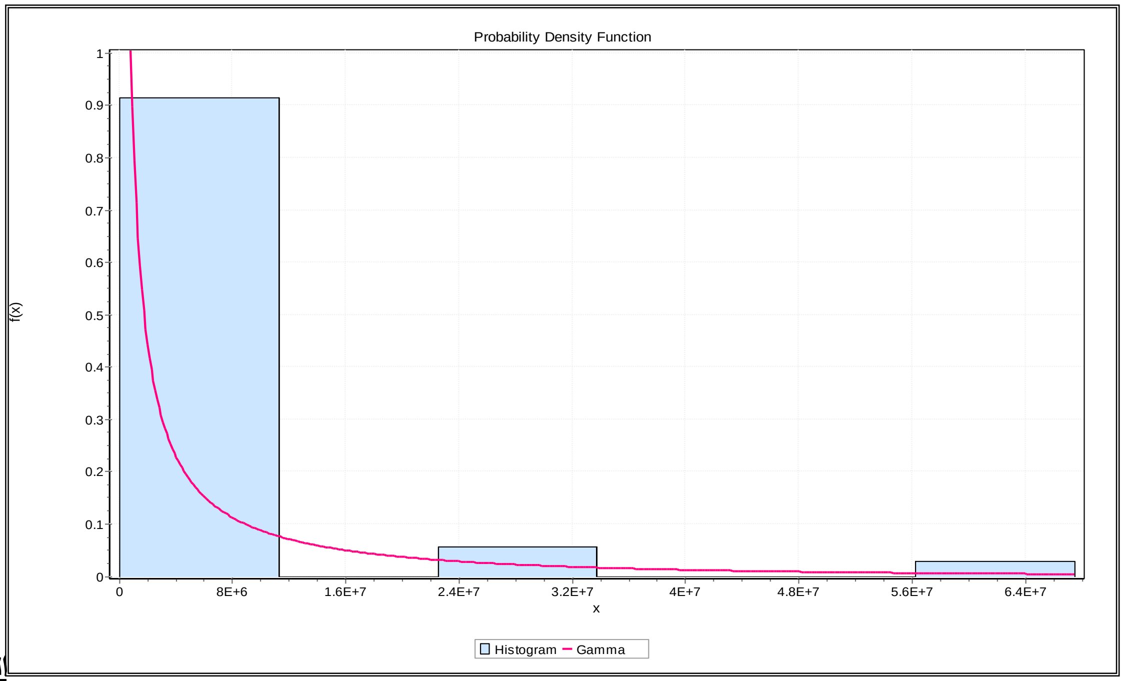
الجدول (3): يوضح اختبار كولموغروف- سميرنوف لتوزيع البيانات

الاختبار	قيمة المختبر	القيمة الاحتمالية
كولموغروف – سميرنوف	0.42515	0.95201

المصدر: من إعداد الباحث اعتماداً على نتائج البرنامج Easyfit

يتضح من الجدول (3)، أن القيمة الاحتمالية لاختبار **كولموغروف – سميرنوف** (0.95201) وهي أكبر من مستوى المعنوية (0.05). وهذا يعني أنّ عدد الأسهم المتداولة يتبع توزيع جاما.

الشكل (3): يوضح توزيع البيانات



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج **Easyfit**

يوضح الشكل (3) أن توزيع بيانات عدد الأسهم على أيام التداول تتبع توزيع جاما التصادفية

اختبار اتجاه عملية جاما :

سيتم اختبار عملية جاما من حيث أنها تمثل عملية متجانسة أم غير متجانسة، ولاختبار الفرضية سيتم استخدام برمجية Statgraphic كما يلي:

H_0 : إن العملية هي عملية بواسونية متجانسة

H_1 : إن العملية هي عملية بواسونية غير متجانسة

الجدول (4): اختبار لابلاس لاختيار اتجاه عملية جاما من حيث التجانس

الاختبار	قيمة المختبر	القيمة الاحتمالية
لابلاس	10.5336	0.000

المصدر: إعداد الباحث اعتماداً على نتائج البرنامج *STATGRAPHIC*

يتضح من الجدول (4)، أن القيمة الاحتمالية لاختبار لابلاس (0.000) وهي أقل من مستوى المعنوية (0.01).ويعني ذلك إنّ عملية جاما غير متجانسة (عدد الأسهم تتغير بمعدل غير ثابت).

تقدير عملية جاما الغير متجانسة:

يتم تقدير النموذج باستخدام برمجية ***STATGRAPHIC*** كما يلي:

Rate model= 132.500473*t

الجدول (5): يوضح تقديرات معلمات عملية جاما لبيانات سوق الخرطوم للأوراق المالية

المعلمة	القيمة المقدرة
$\hat{\alpha}$	0.11038

$\hat{\beta}$	3.9141

المصدر: من إعداد الباحث اعتماداً على نتائج البرنامج *STATGRAPHIC*

يوضح الجدول (5)، تقديرات معلمات عملية جاما لبيانات سوق الخرطوم للأوراق المالية

اختبار مطابقة البيانات لعملية جاما غير متجانسة:

لغرض اختبار مدى مطابقة بيانات عدد الأسهم لعملية جاما التصادفية ويتم اختبار الفرضية الآتية:

بيانات حركة أسهم سوق الخرطوم للأوراق المالية تتفق مع عملية جاما التصادفية : H_0

بيانات حركة أسهم سوق الخرطوم للأوراق المالية لا تتفق مع عملية جاما التصادفية : H_1

الجدول (6): اختبار كولموغروف – سميرنوف لجودة متطابقة البيانات لعملية جاما غير المتجانسة

الاختبار	قيمة المختبر	القيمة الاحتمالية
كولموغروف – سميرنوف	0.0863241	0.095847

المصدر: من إعداد الباحث اعتماداً على نتائج البرنامج *STATGRAPHIC*

يتضح من الجدول (6)، أن القيمة الاحتمالية لاختبار **كولموغروف– سميرنوف** (0.095847) وهي أكبر من مستوى المعنوية (0.05). يعني ذلك أن عملية جاما مطابقة للبيانات. وعليه يكون معدل عملية جاما غير المتجانسة كما يلي ويمكن عمل التنبؤات من خلاله

Rate model= 132.500473*t

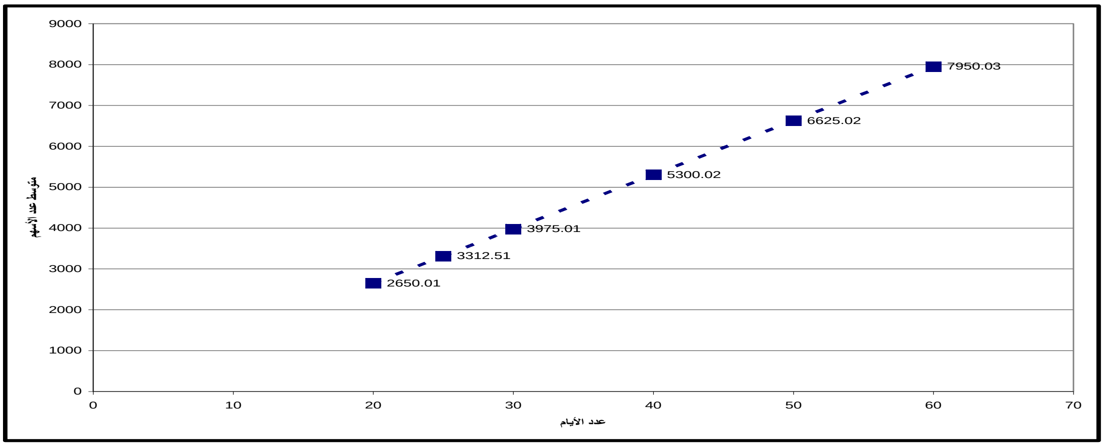
الجدول (7): يوضح التنبؤ حسب عملية جاما غير المتجانسة

عدد الأيام	المتوسط
20	2650.01
25	3312.51
30	3975.01
40	5300.02
50	6625.02
60	7950.03

المصدر: من إعداد الباحث اعتماداً على نتائج البرنامج *STATGRAPHIC*

يوضح الجدول (7) أن التنبؤ بمتوسط عدد أيام التداول يتناسب طردياً مع متوسط عدد الأسهم المتداولة، بمعني كلما زاد عدد الايام يزيد متوسط الإسهم

الشكل (4): يوضح التنبؤ حسب عملية جاما غير المتجانسة



المصدر: من إعداد الباحث باستخدام البرنامج Excel

يتضح من الشكل (4) أنه كلما ازداد عدد الأسهم المتداولة بالمقابل زاد عدد أيام التداول، بناءٍ على البيانات المأخوذة من موقع سوق الخرطوم للأوراق المالية.

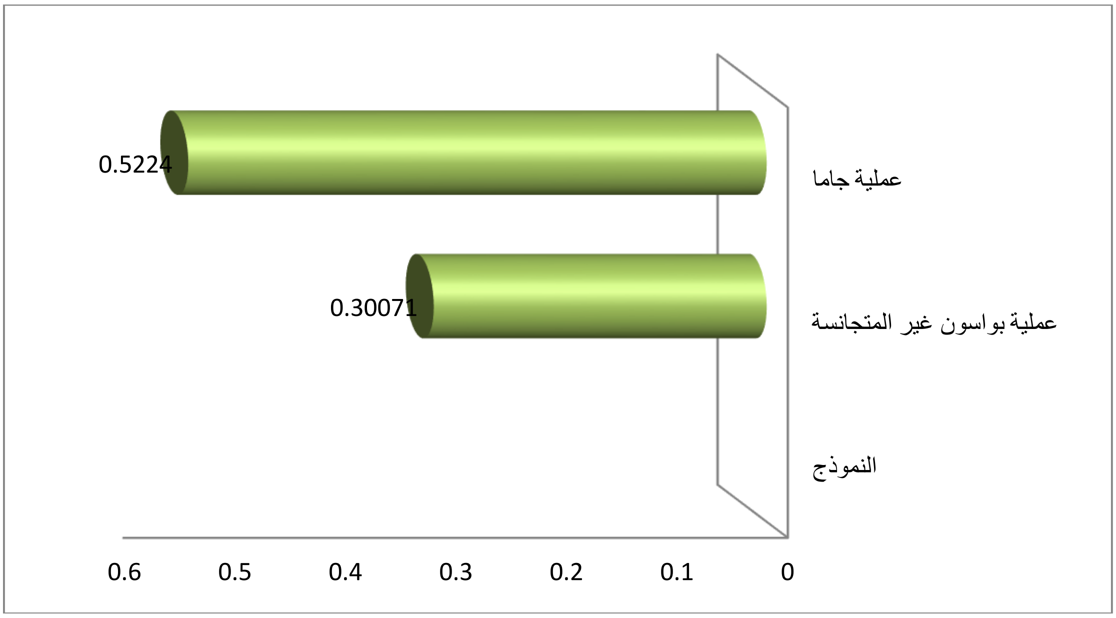
الجدول (8): قيم معامل الاختلاف لنموذج عملية بواسون غير المتجانسة وعملية جاما

النموذج	الانحراف المعياري	المتوسط	معامل الاختلاف
عملية بواسون غير المتجانسة	0.71592	2.38075	0.30071
عملية جاما	1.4142	2.7071	0.52240

المصدر: إعداد الباحث اعتماداً على نتائج البرنامج *STATGRAPHIC*

يتضح من الجدول (8) أنّ معامل الإختلاف لعملية البواسونية غير المتجانسة (0.30071) أقل قيمة (0.52240) لعملية جاما، مما يعني أن عملية بواسون غير المتجانسة أكثر تجانساً من عملية جاما.

الشكل (5) يوضح قيم معامل الاختلاف لنموذج عملية بواسون غير المتجانسة وعملية جاما



المصدر: إعداد الباحث باستخدام البرنامج Excel

يوضح الشكل (5) التباين بين العمليتين في تقدير المعدل الزمني لتداول الأسهم في سوق الخرطوم للأوراق المالية.

مناقشة النتائج:

1. إنّ اختيار الدالة اللاخطية (أسية) كمعدل زمني للحدوث للعملية البواسنونية غير المتجانسة يتم بناءٍ على ملائمتها لبيانات قيد الدراسة.
2. من مقارنة معايير المقارنة لطرق التقدير، تم ملاحظة أنّ نموذج عملية بواسون غير المتجانسة أفضل وأكثر ملاءمة في تمثيل البيانات قيد الدراسة من عملية متسلسلة ألفا وعملية جاما.
3. أن بيانات تداول الأسهم عبارة عن عملية تصادفية متزايدة، سواء كان النموذج المستخدم نموذج العملية البواسونية غير المتجانسة أو عملية جاما, مما يدل على إتباع إدارة السوق مراقبة ومعالجة للمشكلات قبل حدوثها.
4. اختيار نموذج قانون القوة كمعدل زمني لحدوث الحوادث في عملية بواسون غير المتجانسة يتم بناءً على مدى ملاءمته للبيانات قيد الدراسة ، ومن تقدير دالة المعدل الزمني لعدد الأسهم المتداولة في سوق الخرطوم للأوراق المالية ظهر بأنه يتناقص مع مرور الزمن.

التوصيات:

1. لبيان أهمية العملية البواسونية غير المتجانسة فضلاً عن عملية متسلسلة α التصادفية ، نوصى بإجراء مقارنة مع نماذج تصادفية أخرى.
2. نوصى باعتماد نتائج الدراسة في سوق الخرطوم للأوراق المالية لتلافي أي مشكلات قد تؤدي إلى خسائر وذلك بمراقبة ومتابعة السوق.

المراجع

1. الطائي، خالد ضاري والحسيني، عبد الرحمن،(1990) ،" الحاسبة الالكترونية والبرمجة بلغة بيسك"، مطبعة الديواني، بغداد
2. الطائي، خالد ضاري ولازم، جاسم حسن (2007)،"مقارنة طرائق تقدير معلمات دالة الشدة لعمليات بواسون غير المتجانسة". مجلة العلوم الإحصائية.المجلد 16، العدد 58 ص15.
3. الطائي، خالد ضاري ونعيمة، علي بندر(2010) ،"مقارنة طريقتي الإمكان الأعظم وطريقة أوزان المربعات الموزونة لبعض نماذج عمليات بواسون الغير مُتجانسة"،
4. ذنون، باسل يونس ، (2011)، "النمذجة المكاروفية مع تطبيقات عملية" دار ابن الأثير للطباعة والنشر ، جامعة الموصل ، العراق.
5. سليمان، مثنى صبحي و صالح ، إستبرق موفق ، (2016)، " عملية كاما وتطبيقاتها على الصيانة" كلية الحاسبات والرياضيات جامعة الموصل.
6. صالح، أستبرق موفق و سليمان، مثنى صبحي، (2017) ،"عملية جاما التصافية وتطبيقاتها على الصيانة" رسالة ماجستير غير منشورة ، كلية الحاسبات والرياضيات جامعة الموصل.
7. محمود ، شيماء وليد ، (2012)، "العملية التصادفية الهندسية وتطبيقاتها في وباء التهاب الكبد الفيروسي" رسالة ماجستير غير منشورة ، كلية علوم الحاسوب والرياضيات، جامعة الموصل.
8. Abdel-Hameed, M.A. (1975),"gamma wear process". IE.EE Trans Reliab, 24(2) ,152-3.
9. Bakker, J.D., and van Noortwijk, J.M.(2004),"" Inspection validation model for life cycle analysis". In: Watanabe, E., Frangopol, D.M., and Utsonomiya, T.(eds), "Bridge maintenance, safety, management and cost, proceedings of the second international conference (IABMAS),Kyoto, Japan.
10. Erkanli , A., Merrick, J. R. and Soyer, R. (2002) "Parametric and semi-parametric Bayesian model for accelerated life tests ".
11. Lawess,J., and Crowder, M.(2004),"Covariates and random effects in a gamma process model with application to degradation and failure". Lifetime Data Anal, 10(3), 213-27.
12. Nicolai, R.P., Dekker, R., and van Noortwijk, J.M.(2007),"comparison of models for measurable deterioration: An application to coatings on steel structures". Reliab Eng Syst Safety,92,1635-1650.