2−1 تمهيد:

يعتبر التنبؤ الدقيق من أهم المحاور التي إهتم بها الباحثون الإحصائيون و ذو العلاقة بالبحوث التنبؤية لذلك ينصح دائماً بالتنبؤ بالقيم المستقبلية القريبة وتحديثها بمجرد الحصول على أي مشاهدة جديدة، ويوجد العديد من نماذج السلاسل الزمنية التي تستخدم للتنبؤ بالقيم المستقبلية للظاهرة موضع الدراسة من أبرزها نماذج (Box & Jenkins) في إتجاه الزمن التي أثبتت كفأتها ودقتها في مجالات تطبيقها , ولذلك سنتناول نماذج السلاسل الزمنية ومراحل بنائها ومن ثم استخدامها في إتجاه التكرار عن طريق تحويل فورير .

2−2 المشكلة التي تواجه بيانات تحليل السلسلة الزمنية هي:

i. عدم الإستقرارية: (5)

من شروط تحليل السلسلة الزمنية أن تكون مستقرة في كل من المتوسط والتباين أي أن متوسطها ثابت و لا يختلف باختلاف الزمن, و تباينها ثابت و لا يختلف بإختلاف الزمن .

و عدم تحقق أي من الشرطين السابقين يؤدي إلى عدم إمكانية تحليل السلسلة الزمنية و لذلك يجب معالجته أولاً.

ii. معالجة عدم الإستقرار :

- **معالجة عدم الإستقرار في المتوسط (5) :**

تتم معالجة عدم الإستقرار في المتوسط بإيجاد تحويل مناسب للسلسلة غير المستقرة لتحويلها إلى سلسلة مستقرة فإذا كان لدينا النموذج الآتي:

$$z_t = a_0 + a_1 t + a_t \cdots \sim \mathrm{N}(0, \sigma^2) \cdots\cdots\cdots (1-2)$$

نجد إن المتوسط هو

$$\mathrm{E}(z_t) = \alpha_0 + \alpha_1 t$$

وهو غير ثابت بالنسبة للزمن، أي أن شرط الإستقرار الأول غير متحقق في هذه الحالة.

نوجد التحويل ∇z_t و كالتالي:

$$\nabla Z_t = z_t - z_{t-1} \cdots\cdots\cdots (2-2)$$

الآن نجد متوسط السلسلة الجديدة w_t

$$E(w_t) = \alpha_1 = constsnt \ldots \forall t$$

أي أن تطبيق التحويل $\nabla = (1-B)$ على السلسلة غير المستقرة (أي أخذ الفرق الأول للسلسلة) حولها إلى سلسلة مستقرة.

بشكل عام إذا كان النموذج غير المستقر على الشكل

$$z_t = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_t \sim \mathrm{N}(0,\sigma^2), a_0, a_1, a_2, \ldots, a_s \in (-\infty,\infty) \cdots\cdots\cdots\cdots.\cdots\cdots (3-2)$$

فإن التحويل $\nabla^d z_t$ يحوله إلى نموذج مستقر، أي أن $w_t = \nabla^d z_t$ هو نموذج مستقر

- **معالجة عدم الإستقرار في التباين :(5)**

تتم معالجة عدم الإستقرار في التباين بإيجاد تحويل مناسب للسلسلة غير المستقرة لتحويلها إلى سلسلة مستقرة فإذا كان لدينا النموذج الآتي:

$$z_t = z_{t-1} + a_t, \quad a_t \sim N(0,\sigma^2) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots..\ldots (4-2)$$

نجد من التعويض المتكرر

$$z_t = a_1 + a_2 + \cdots + a_t$$

وبأخذ التوقع والتباين

$$\mathrm{E}(z_t) = 0 = constsnt \qquad \forall t$$

$$v(z_t) = t\sigma^2$$

ونلاحظ إن التباين يعتمد على الزمن t .

بأخذ الفرق الأول

$$w_t = \nabla z_t = z_t - z_{t-1} = a_t \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (5-2)$$

وبأخذ التوقع والتباين

$$\mathrm{E}(w_t) = 0 = cons\tan t \qquad \forall t$$

$$v(w_t) = \sigma^2 = cons\tan t \qquad \forall t$$

إذن الفرق الأول حول السلسلة غير المستقرة في التباين إلى سلسلة مستقرة.

بشكل عام إذا كان التباين دالة في متوسط متغير على الشكل

$$V(z_t) = cf(\mu_t)$$

حيث $c > 0$ ثابت و $f(u_t)$ دالة معروفة تعطى قيمة غير سالبة و μ_t متوسط يتغير مع الزمن و بالتالية فإن التباين يعتمد على الزمن وهنا نحاول إيجاد تحويل $T(z_t)$ أي أيجاد دالة $T(u_t)$ لإستقرار التباين.

التحويل

$$y = T(z) = \frac{z_t^{\lambda} - 1}{\lambda} \quad \cdots\cdots (6-2)$$

يعطي سلسلة مستقرة في التباين حيث $\lambda \in (-\infty, \infty)$ هو معلمة التحويل.

الجدول التالية يعطي القيم الأكثر استخداما للمعلمة λ مع التحويلات المقابلة لها:

جدول $(2-1)$: القيم الأكثر استخداما للمعلم λ مع التحويلات المقابلة لها :

قيمة المعلمة λ	0.1	0.5	0.0	-0.5	-0.1
التحويل y_t	z_t	$\sqrt{z_t}$	$\ln z_t$	$\frac{1}{\sqrt{z_t}}$	$\frac{1}{z_t}$

المصدر : (5) .

2-3 طرق كشف إستقرار السلسلة :

يمكن كشف إستقرار السلسلة الزمنية عن طريق :

2-3-1 دالة الإرتباط الذاتي : (5)

إن دالة الإرتباط الذاتي توضح الإرتباطات الموجودة بين قيم المشاهدات لفترات مختلفة وتهتم بدراسة العلاقة الموجودة بين السلسلة لذاتها ونقصد هنا الإرتباطات الداخلية للسلسلة الزمنية .

وهي مقياس يقيس قوة الإرتباط بين مشاهدات المتغير نفسه عند فترة زمنية مختلفة أي الكشف عن الإرتباطات الداخلية للسلسلة الزمنية حيث يمكن تمييز السلاسل الزمنية الساكنة من غير الساكنة من خلال قيم معاملات الإرتباط الذاتي . تستخدم دالة الإرتباط الذاتي في تحليل السلاسل الزمنية لأنها تعطي معلومات عن سلوك الظاهرة وعن مكوناتها الأساسية .

يعرف معامل الإرتباط بأنه مقياس لدرجة العلاقة بين قيم المتغير نفسه , ويقدر حسب الصيغة التالية :

$$\mathrm{P}_k = \frac{E((z_t - u)(z_{t+k} - u))}{\sqrt{E\left[(z_t - u)^2 (z_{t+k} - u)^2\right]}} = \frac{\sum_{t=1}^{n-k} (Z_t - u)(z_{t+k} - u)}{\sum_{t=1}^{n} \left(z_t - \bar{z}\right)^2} \cdots\cdots\cdots (7-2)$$

2-3-2 دالة الإرتباط الذاتي الجزئي :(10)

تستخدم دالة الإرتباط الذاتي الجزئي PACF كأداة أساسية في تحليل نماذج بوكس جنكنز إلى جانب دالة الإرتباط الذاتي ACF ,حيث تستخدم هاتان الدالتان معا لتمييز نماذج ARIMA المختلفة .

ويعرف بأنه مقياس لقياس درجة العلاقة بين مشاهدتين Z_t و Z_{t+1} بثبات بقية المشاهدات الأخرى , دالة الإرتباط الذاتي الجزئي أداة مهمة في تحليل السلاسل الزمنية وتستخدم أيضا في تشخيص النموذج وتحديد درجته وفحص ملائمة النموذج من خلال إختبار عشوائية أخطاء التنبؤ .

4-2 قوة الطيف :

هي عبارة عن تحويل فورير لدالة التغاير المشترك الذاتي وهو أسلوب لتحويل أي دالة تكون بدلالة الزمن g(t) إلى دالة أخرى f(w) بدلالة التكرار ,حيث يعطي لقيم الدالة المحولة صفة الإستقلالية في قيمها .

قوة الطيف للسلسة الزمنية Z_t هي دالة p(w) المعرفة بالصيغة التالية :

$$p(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{-\infty}^{\infty} \Upsilon\kappa\, e^{-iwk} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (8-2)$$

حيث أن $w = 2\pi f$ تمثل عدد الزوايا النصف قطرية(Radians) في وحدة الزمن , وأما التكرار . f = k/n

2-5 دالة الكثافة الطيفية :

تعرف دالة الكثافة الطيفية بأنها مقياس لتوزيع القدرة كدالة التردد حيث أن التردد frequency يمثل عدد الدورات في الثانية .

ويتم الحصول على دالة الكثافة الطيفية Spectral Density function f(w) بالصيغة الرياضية التالية :

$$\mathrm{f(w)} = 1/2\pi\left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} cos(wk)\right) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(9-2)$$

2-6 نماذج تحليل السلاسل الزمنية بإتجاه الزمن:

2-6-1 نماذج الإنحدار الذاتي AR(p):(8)

يرمز لها بالرمز AR(p) حيث يشير الرمز p إلى رتبة نموذج الإنحدار الذاتي ويمكن التعبير عنه كما يلي:

$$Z_t = \theta_0 + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + \ldots\ldots + \phi_p Z_{t-p} + a_t \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(10-2)$$

حيث:

θ_0 ≡ متوسط البيانات.

$\phi_1, \phi_2, \ldots\ldots\ldots\phi_p$ ≡ معالم نموذج الإنحدار الذاتي.

$a_t \sim NID(0, \sigma_a^2)$ ≡ المتغير العشوائي.

2-6-2 نموذج الإنحدار الذاتي من الرتبة الأولى AR(1): (8)

يقال أن AR(1) نموذج انحدار ذاتي من الرتبة الأولى إذا أمكن التعبير عنه في الصورة التالية:

$$Z_t = \theta_0 + \phi_1 Z_{t-1} + a_t \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(11-2)$$

حيث:

θ_0 ≡ متوسط البيانات

ϕ_1 ≡ معلمة نموذج الإنحدار الذاتي.

$a_t \sim NID(0,\sigma_a^2)$ ≡ المتغير العشوائي.

خصائص النموذج:

الوسط:

$$E(Z_t) = \mu_t = \frac{\theta_0}{1-\phi_1} \cdots\cdots (12-2)$$

التباين:

$$Var(Z_t) = \gamma_0 = \frac{\sigma_a^2}{1-\phi_1^2} \cdots\cdots (13-2)$$

دالة التغاير الذاتي:

$$\gamma_k = \begin{cases} \gamma_0 & k=0 \\ \phi_1 \gamma_0 & k=1 \\ \phi_1^2 \gamma_0 & k=2 \\ \phi_1^j \gamma_0 & k=j \end{cases} \cdots\cdots (14-2)$$

دالة الإرتباط الذاتي:

$$\rho_k = \phi_1^k \qquad k \geq 0 \cdots\cdots (15-2)$$

معاملات دالة الذاكرة:

$$W_j = \phi_1^j \qquad j \geq 0 \cdots\cdots (16-2)$$

معاملات دالة المعكوس:

$$I_j = \begin{cases} \phi_1 & j=1 \\ 0 & j>1 \end{cases} \cdots\cdots (17-2)$$

2-6-3 نموذج الإنحدار الذاتي من الرتبة الثانية AR(2):(8)

يقال أن AR(2) نموذج انحدار ذاتي من الرتبة الثانية إذا أمكن التعبير عنه في الصورة التالية:

$$Z_t = \theta_0 + \phi_1 Z_{t-1} + \phi_2 Z_{t-2} + a_t \cdots\cdots (18-2)$$

خصائص النموذج:

الوسط:

$$E(Z_t) = \mu_t = \frac{\theta_0}{1-\phi_1-\phi_2} \cdots\cdots (19-2)$$

التباين:

$$Var(Z_t) = \phi_1\gamma_1 + \phi_2\gamma_2 + \sigma_a^2 \cdots\cdots (20-2)$$

دالة التغاير الذاتي:

$$\gamma_k = \phi_1\gamma_{k-1} + \phi_2\gamma_{k-2} \qquad k \geq 1 \cdots\cdots (21-2)$$

دالة الإرتباط الذاتي:

$$\rho_k = \phi_1\rho_{k-1} + \phi_2\rho_{k-2} \qquad k \geq 1 \cdots\cdots (22-2)$$

معاملات دالة الذاكرة:

$$W_j = \frac{1}{\lambda_1 - \lambda_2}(\lambda_1^{j+1} - \lambda_2^{j+1}) \qquad j \geq 0 \cdots\cdots (23-2)$$

حيث λ_1 ، λ_2 يمثلان جزور المعادلة التربيعية التالية:

$$\lambda^2 - \phi_1\lambda - \phi_2 = 0 \cdots\cdots (24-2)$$

ومن ثم نجد حل هذه المعادلة التربيعية هو:

$$\lambda_1, \lambda_2 = \tfrac{1}{2}(\phi_1 \pm \sum \phi_1^2 + 4\phi_2) \cdots\cdots (25-2)$$

2-7 نماذج المتوسطات المتحركة MA(p): (8)

يرمز لها بالرمز MA(q) حيث يشير الرمز q إلى رتبة نموذج المتوسطات المتحركة ويمكن التعبير عنه كما يلي:

$$Z_t = \theta_0 + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \ldots\ldots - \theta_q a_{t-q} \cdots\cdots (26-2)$$

حيث:

θ_0 ≡ متوسط البيانات.

θ_1 ≡ معلمة نموذج المتوسطات المتحركة.

2-7-1 نموذج المتوسطات المتحركة MA(1):(8)

يقال أن MA(1) نموذج متوسطات متحركة من الرتبة الأولى إذا أمكن التعبير عنه في الصورة التالية:

$$Z_t = \theta_0 + a_t - \theta_1 a_{t-1} \cdots\cdots (27-2)$$

حيث:

θ_0 ≡ متوسط البيانات.

θ_1 ≡ معلمة نموذج المتوسطات المتحركة.

Z_t ≡مشاهدات السلسلة الزمنية.

$a_t \sim NID(0, \sigma_a^2)$ ≡ المتغير العشوائي.

خصائص النموذج:

الوسط:

$$E(Z_t) = \mu_t = \theta_0 \cdots\cdots (28-2)$$

التباين:

$$Var(Z_t) = \gamma_0 = \sigma_a^2 (1 + \theta_1^2) \cdots\cdots (29-2)$$

دالة التغاير الذاتي:

$$\gamma_k = \begin{cases} \gamma_o & k = 0 \\ -\theta_1 \sigma_a^2 & k = 1 \\ 0 & k \geq 2 \end{cases} \cdots\cdots (30-2)$$

دالة الإرتباط الذاتي:

$$\rho_k = \begin{cases} 1 & k=0 \\ -\dfrac{\theta_1}{1+\theta_1^2} & k=1 \\ 0 & k\geq 2 \end{cases} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (31-2)$$

معاملات دالة الذاكرة:

$$W_0 = 1$$

$$W_1 = -\theta_1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (32-2)$$

$$W_j = 0 \qquad j \geq 1$$

معاملات دالة المعكوس:

$$\begin{aligned} I_0 &= 1 \\ I_1 &= -\theta_1 \\ I_2 &= -\theta_1^2 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (33-2) \\ I_j &= -\theta_1^j \end{aligned}$$

2-7-2 نموذج المتوسطات المتحركة من الرتبة الثانية (2)MA:(8)

يقال أن (2)MA نموذج متوسطات متحركة من الرتبة الثانية إذا أمكن التعبير عنه في الصورة التالية:

$$Z_t = \theta_0 + a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (34-2)$$

حيث:

θ_0 ≡ متوسط البيانات.

θ_1،θ_2 ≡ معالم نموذج المتوسطات المتحركة.

$Z_t \equiv$ مشاهدات السلسلة الزمنية.

$a_t \sim NID(0,\sigma_a^2) \equiv$ المتغير العشوائي.

خصائص النموذج:

الوسط:

$$E(Z_t)=\mu_t=\theta_0 \cdots\cdots\cdots (35-2)$$

التباين:

$$Var(Z_t)=\gamma_0=\sigma_a^2(1+\theta_1^2+\theta_2^2) \cdots\cdots\cdots (36-2)$$

دالة التغاير الذاتي:

$$\gamma_k=\begin{cases}\gamma_0 & k=0\\ \sigma_a^2(\theta_1\theta_2-\theta_1) & k=1\\ -\theta_2\sigma_a^2 & k=2\\ 0 & k>2\end{cases} \cdots\cdots\cdots (37-2)$$

دالة الإرتباط الذاتي:

$$\rho_k=\begin{cases}\gamma_0 & k=0\\ \dfrac{(\theta_1\theta_2-\theta_1)}{(1+\theta_1^2+\theta_2^2)} & k=1\\ \dfrac{-\theta_2}{(1+\theta_1^2+\theta_2^2)} & k=2\\ 0 & k>2\end{cases} \cdots\cdots\cdots (38-2)$$

معاملات دالة الذاكرة:

$$\begin{aligned}&W_0=1\\ &W_1=-\theta_1\\ &W_2=-\theta_2 \cdots\cdots\cdots (39-2)\\ &W_j=0 \quad j>2\end{aligned}$$

الشروط الضرورية للإنعكاس:

$$\theta_1+\theta_2<1$$
$$\theta_2-\theta_1<1 \cdots\cdots (40-2)$$
$$-1<\theta_2<1$$

2-7-3 نماذج الإنحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة:ARMA(p,q):(8)

ويرمز لها بالرمز ARMA(p,q) حيث تشير p إلى رتبة نموذج الإنحدار الذاتي و q إلى رتبة نموذج المتوسطات المتحركة، ويمكن التعبير عن نموذج ARMA(p,q) كما يلي:

$$Z_t-\phi_1 z_{t-1}-\phi_2 z_{t-2}-\cdots-\phi_p z_{t-p}=\delta+a_t-\theta_1 a_{t-1}-\theta_2 a_{t-2}-\cdots-\theta q a_{t-q} \cdots\cdots (41-2)$$
$$Z_t-\phi_1 Bz_t-\phi_2 B^2 z_t-\cdots-\phi_p B^p z_t=\delta+a_t-\theta_1 Ba_{tt}-\theta_2 B^2 a_t-\cdots-\theta q B^q a_t$$
$$(1-\phi_1 B-\phi_2 B^2-\cdots-\phi_p B^p)z_t=\delta+(1-\theta_1 B-\theta_2 B^2-\cdots-\theta q B^q)a_t$$

أو

$$\phi_p(B)\ z_t=\delta+\theta_q(B)\ a_t \cdots\cdots (42-2)$$

حيث $\phi_p B=1-\phi_1 B-\phi_2 B^2-\cdots-\phi_p B^p)z_t$ هو عامل الإنحدار الذاتي Autoregressive Operator و $\theta_q B=1-\theta_1 B-\theta_2 B^2-\cdots-\theta_q B^q)z_t$ هو عامل المتوسط المتحرك Moving Average Operator .

حيث :

δ ≡متوسط البيانات.

ϕ_p ≡ معلمة نموذج الإنحدار الذاتي .

θ_q ≡معلمة المتوسطات المتحركة.

Z_t ≡ مشاهدات السلسلة الزمنية.

B ≡ عامل الإزاحة إلى الخلف(Back Operator Shift).

2-7-4 نموذج ARMA(0,0): (5)

يسمي أحيانا بالنموذج الثابت ويحتوي على متوسط بيانات الظاهرة والمتغير العشوائي فقط ويكتب بالشكل التالي:

$$Z_t=\theta_0+a_t \cdots\cdots (43-2)$$

خصائص النموذج ARMA(0,0):

الوسط:

$$E(Z_t)=\mu_t=\theta_0 \cdots\cdots (44-2)$$

التباين:

$$Var(Z_t)=\gamma_0=\sigma_a^2 \cdots\cdots (45-2)$$

2-7-5 نموذج ARMA(1,1): (8)

يقال أن Z نموذج ARMA(1,1) إذا أمكن التعبير عنه في الصورة التالية:

$$Z_t=\theta_0+\phi_1 Z_{t-1}-\theta_1 a_{t-1}+a_t \cdots\cdots (46-2)$$

ويعتبر هذا النموذج من أهم النماذج المختلطة التي تستخدم في التطبيقات العملية التي تتوافر فيها الأسباب المؤدية إلى حدوث كل من النموذجين AR(1) و MA(1) معاً.

خصائص النموذج:

الوسط:

$$E(Z_t)=\mu_t=\frac{\theta_0}{1-\phi_1} \cdots\cdots (47-2)$$

التباين:

$$Var(Z_t)=\gamma_0=\frac{(1-2\theta_0\phi_1+\theta_1^2)\cdot\sigma_a^2}{1-\phi_1^2} \cdots\cdots (48-2)$$

دالة التغاير الذاتي:

$$\gamma_k=\begin{cases}\dfrac{[1-\phi_1\theta_1][\phi_1-\theta_1].\sigma_a^2}{1-\phi_1^2} & k=1 \\ \phi_1\gamma_{k-1} & k\geq 2\end{cases} \cdots\cdots (49-2)$$

دالة الإرتباط الذاتي:

$$\rho_k=\begin{cases}\dfrac{[1-\phi_1\theta_1][\phi_1-\theta_1]}{1+\theta_1^2-2\phi_1\theta_1} & k=1 \\ \phi_1\rho_{k-1} & k\geq 2\end{cases} \cdots\cdots (50-2)$$

معاملات دالة الذاكرة:

$$W_0 = 1$$
$$W_1 = (\phi_1 - \theta_1)$$
$$W_2 = (\phi_1 - \theta_1)\phi_1$$
$$W_3 = (\phi_1 - \theta_1)\phi_1^2$$
$$W_j = (\phi_1 - \theta_1)\phi_1^{j-1} \qquad j \geq 3 \cdots\cdots\cdots (51-2)$$

شرط السكون والإستقرار:

$$-1 < \phi_1 < 1$$

يقال أن نموذج $(1,1)$ARMA ساكن إذا كان:

$$|\phi_1| < 1$$

شرط الإنعكاس:

ويسمي أحيانا شرط الإنقلاب ويقال أن نموذج $(1,1)$ARMA قابل للإنعكاس إذا كان:

$$|\theta_1| < 1$$

شرط الإمتساخ:

إذا كان $\phi_1 \neq \theta_1$ هذا الشرط يضمن عدم إمتساخ النموذج إلى نموذج أقل درجة ، فإذا كان $\phi_1 = \theta_1$ فمن العلاقة $(1-\phi_1 B)Z_t = \theta_0 + (1-\theta_1 B)a_t$ وبالقسمة على $(1-\phi_1 B)$ سيصبح النموذج بالصورة التالية:

$$Z_t = \theta_0 + a_t$$

وهذا النموذج هو نموذج (0,0)ARMA الثابت.

2-7-6 نماذج الإنحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة التكاملية ARIMA(p,d,q):(9)

بما أن معظم السلاسل الزمنية الفعلية التي تنشأ في التطبيقات العملية غير ساكنة لذلك يجب أخذ فروق السلسلة المتتالية لتسكين السلاسل، وسنفترض أن d هو الحد الأدنى للفروق التي يجب أن تأخذ لتسكين السلسلة. ويطلق على النماذج التي تصف مثل هذه العمليات بنماذج ARIMA تمييزاً لها عن نماذج ARMA الساكنة.

لذلك يقال أن y_t نموذج إنحدار ذاتي ومتوسطات متحركة تكاملية، ويشار إليها بالرمز ARIMA(p,d,q) وتكتب في الصورة التالية:

$$\phi(B)\,\Delta^d\, y_t = \theta(B)\,\varepsilon_t \cdots\cdots (52-2)$$

حيث:

$$\phi(B) = (1-\phi_1 B - \phi_2 B^2 - .... - \phi_p B^p)$$
$$\theta(B) = (1-\theta_1 B - \theta_2 B^2 - .... - \theta_q B^q)$$

$$\Delta^d = (1-B)^d$$

وتكتب هذه العمليات إختصاراً كالتالي:

$$y_t \sim ARIMA(p,d,q)$$

وعادة يرمز للسلسلة المحولة $\Delta^d y_t$ بالرمز Z_t أي تكتب:

$$\phi(B)\,Z_t = \theta(B)\,\varepsilon_t$$

حيث:

$Z_t \sim ARMA(p,q)$ وهي عملية ARMA ساكنة.

8-2 نماذج تحليل السلاسل الزمنية بإتجاه التكرار: (11)

1-8-2 قوة الطيف لنموذج الإنحدار الذاتي من الدرجة الأولى AR(1) :

قوة الطيف لهذا النموذج هي:

$$p(w) = \frac{\sigma_a^2}{2\Pi\left(1-\phi_1 e^{iw}\right)\left(1-\phi\, e^{-iw}\right)}$$

$$p(w) = \frac{\sigma_a^2}{2\Pi\left(1+\hat{\phi}_1 - 2\hat{\phi}_1 \cos(w)\right)} \cdots\cdots (53-2)$$

نلاحظ ان قوة الطيف لهذا النموذج تعتمد على قيمة ϕ, فعندما تكون $\phi_s>0$ وكبيرة فان قيمة قوة الطيف تتركز على التكرارات المنخفضة (low frequencies) , إذا كانت $\phi_s \prec 0$ فان قوة الطيف تتركز على التكرارات العالية (High frequencies) .

أما دالة كثافة الطيف لهذا النموذج فتعطي بالصيغة الرياضية التالية :

$$f(w)=\frac{1-\phi_1^2}{2\Pi\left(1+\phi^2{}_1-2\phi_1\cos(w)\right)}\cdots\cdots(54-2)$$

2-8-2 قوة الطيف لنموذج الإنحدار الذاتي من الدرجة الثانية AR(2) :

قوة الطيف (Power Spectrum) لهذا النموذج هي :

$$p(w)=\frac{\sigma_a^2}{2\Pi\left|1-\phi_1 e^{-iw}-1-\phi_2 e^{-iw}\right|^2}$$

$$=\frac{\sigma_a^2}{2\Pi\left|1-\phi_2(\cos w-\sin wi)-\phi_2(\cos 2w-\sin 2wi)\right|^2}$$

$$=\frac{\sigma_a^2}{2\Pi\left|1-\phi_2\cos w-\phi_2\cos 2w+i(\phi_2\sin w+\phi_2\sin 2w)\right|^2}$$

$$=\frac{\sigma_a^2}{2\Pi\left(1+\phi_s^2\cos^2 w+\phi_2^2\cos^2 2w-2\phi_1\cos w-2\phi_2\cos 2w+2\phi_1\phi_2\cos w\cos 2w+\phi_1^2\sin^2 w+\phi_2^2\sin^2 2w+2\phi_1\phi_2\sin w\sin 2w\right)}$$

$$=\frac{\sigma_a^2}{2\Pi\left(1+\phi_1^2+\phi_2^2-2\phi_1\cos w-2\phi_2\cos 2w+2\phi\phi_2\cos w\cos 2w+\phi_1^2\sin^2 w+\phi_2^2\sin^2 2w+4\phi_2\phi_2\sin w\sin 2w\right)}$$

$$=\frac{\sigma_a^2}{2\Pi}\bullet\frac{1}{\left(1+\phi_1^2+\phi_2^2-2\phi_s\cos w-2\phi_2\cos 2w+2\phi_1\phi_2\cos w\cos 2w\right)}$$

$$=\frac{\sigma_a^2}{2\Pi}\bullet\frac{1}{(1+\hat{\phi}_1^2+\hat{\phi}_2^2-2\hat{\phi}_1\left(1-\hat{\phi}_2\right)\cos w-2\hat{\phi}_2^2\cos 2w)}\cdots\cdots(55-2)$$

وأن دالة الكثافة الطيفية لهذا النموذج هي :

$$f(w)=\frac{(1+\phi_2)\left((1-\phi_2)^2-\phi_1^2\right)}{2\Pi(1+\phi_2)(1+\phi_1^2+\Phi_2^2-2\phi_1(1-\phi_2)\cos(w)-2\phi_2^2\cos(2w))}\cdots\cdots(56-2)$$

وبصورة عامة فإن قوة الطيف لنموذج الإنحدار الذاتي من الدرجة AR(p) :

$$\frac{\sigma_a^2}{2\Pi\left|1-\phi_1 e^{-iw}-1-\phi_2 e^{-iw}\cdots-\phi_p e^{-ipw}\right|^2}\cdots\cdots(57-2)$$

2-8-3 قوة الطيف لنموذج المتوسطات المتحركة من الدرجة الأولى MA(1) :

قوة الطيف لهذا النموذج تعطي بالصيغة التالية :

$$p(w) = \frac{\sigma_a^2}{2\Pi\left(1+\theta_1^2 - 2\theta_1 \cos(w)\right)} \cdots\cdots (58-2)$$

وأن دالة الكثافة الطيفية لهذا النموذج هي :

$$f(w) = \frac{(1 = \theta_1^2 - 2\theta_1 \cos(w))}{2\Pi\left(1+\theta_1^2\right)} \cdots\cdots (59-2)$$

2-8-4 قوة الطيف لنموذج المتوسطات المتحركة من الدرجة الثانية MA(2) :

إن نموذج المتوسطات المتحركة من الدرجة الثانية يعطي بالصيغة التالية :

$$Z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}$$

قوة الطيف لهذا النموذج تعطي بالصيغة التالية :

$$\frac{\sigma_a^2}{2\Pi\left(1+\theta_1 e^{iw} + \theta_2 e^{2iw}\right)\left(1+\theta_1 e^{-iw} + \theta_2 e^{-2iw}\right)}$$

$$p(w) = \frac{\sigma_a^2}{2\Pi\left(1+\theta_1^2 + \theta_2^2 - 2\theta_1(1-\theta_2)\cos(w) - 2\theta_2 \cos(2w)\right)} \cdots\cdots (60-2)$$

وأن دالة الكثافة الطيفية لهذا النموذج هي :

$$f(w) = \frac{1+\theta_1^2+\theta_2^2}{2\Pi}\left[1+\theta_1^2 + \theta_2^2 - 2\theta_1(1-\theta_2)\cos(w) - 2\theta_2 \cos(2w)\right] \cdots\cdots (61-2)$$

وبصورة عامة فإن قوة الطيف لنموذج المتوسطات المتحركة من الدرجة MA(q) والذي صيغته الرياضية :

$$Z_t = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2} - \dots - \theta_q a_{t-q}$$

يمكن كتابتها بالصيغة الرياضية التالية :

$$p(w) = \frac{\sigma_a^2}{2\Pi}\left|\theta_q\left(e^{-iw}\right)\right|^2$$

$$\frac{\sigma_a^2}{2\Pi}\left|1-\theta_1 e^{-iw} - \theta_2 e^{-2iw} - \cdots \theta_q e^{-qiw}\right|^2 \cdots\cdots (62-2)$$

5-8-2 قوة الطيف لنموذج الإنحدار الذاتي والمتوسط المتحرك من الدرجة الأولى ARMA(1,1) :

نجد إن نموذج الإنحدار الذاتي والمتوسط المتحرك من الدرجة $(1,1)$ والذي يعرف بالصيغة الرياضية التالية :

$$\phi_1(B)Z_t = \theta_1(B)a_t$$

من المعادلة أعلاه نجد أن قوة الطيف (Power Spectrum) لهذا النموذج هي :

$$p(w) = \frac{\sigma_a^2\left(1+\theta_1^2 - 2\theta_1 \cos(w)\right)}{2\Pi\left(1+\phi_1^2 - 2\phi_1 \cos(w)\right)} \cdots\cdots (63-2)$$

وأن دالة الكثافة الطيفية لهذا النموذج هي :

$$f(w) = \frac{\left(1-\phi_1^2\right)\left(1+\theta_1^2 - 2\theta_1^2 \cos(w)\right)}{2\Pi\left(1+\theta_1^2 - 2\phi_s\theta_1\right)\left(1+\phi_1^2 - 2\phi_1 \cos(w)\right)} \cdots\cdots (64-2)$$

وبصورة عامة فان نموذج الإنحدار الذاتي والمتوسط المتحرك من الدرجة (p,q) والذي يعرف بالصيغة التالية :

$$\phi p(B)Z_t = \theta q(B)a_t$$

فان قوة الطيف للنموذج أعلاه هي :

$$P(w) = \frac{\sigma_a^2\left|\theta_q(e^{-iw})\right|^2}{2\Pi\left|\phi p(e^{-iw})\right|^2}$$

6-8-2 قوة الطيف لنموذج الخطأ العشوائي :

إذا كانت at سلسلة من المتغيرات العشوائية غير المرتبطة وأن دالة التغاير المشترك الذاتي كما هي :

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma_a^2 & k=0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

فان قوة الطيف لهذه السلسلة هي :

$$p(x) = \frac{\sigma_a^2}{2\Pi} \cdots\cdots (66-2)$$

وأن دالة الكثافة الطيفية لهذا النموذج هي :

$$f(x) = \frac{1}{2\Pi} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (67-2)$$

أي أن دالة الكثافة الطيفية كمية ثابتة ولجميع التكرارات .

2-9 مراحل تحليل السلاسل الزمنية : (1)

هنالك أربع مراحل يمر بها تحليل السلسلة الزمنية و هي التشخيص ثم التقدير ثم الفحص ثم التنبؤ , وسوف نتحدث عن كل مرحلة بالتفصيل

2-9-1 تشخيص النموذج Model Identification : (1)

تعد مرحلة التشخيص المرحلة الأولى لتحليل السلاسل الزمنية , وتشمل معرفة نوع النموذج وتحديد الرتبة للنموذج المحدد من خلال المعايير التي تستخدم للمقارنة بين النماذج لتحديد النموذج الأفضل.

مرحلة التشخيص تتضمن الخطوات الآتية:

1- نرسم بيانات السلسلة ويعد رسم البيانات الخطوة الأولى في تحليل أية سلسلة زمنية

من خلال الرسم تكون لدينا فكرة جيدة عن إحتواء السلسلة على موسمية أو إتجاه عام أو قيم شاذة أو عدم الإستقرارية الذي يقود إلى التحويلات الممكنة على البيانات، لذلك فإن رسم السلسلة يبين حاجتها إلى التحويل المناسب لتستقر في متوسطها أو تبايناتها إذا لم تكن مستقرة قبل أي تحليل.

2- نحسب ونفحص PACF,ACF للعينة المسحوبة من السلسلة الأصلية لتحديد درجة الفروق (في حالة عدم الإستقرارية)، فإذا كانت ACF للعينة تنحدر ببطء شديد ، PACF للعينة تقطع بعد الإزاحة الأولى (أو بالعكس) فإن هذا يستوجب أخذ الفرق الأول $(1-B)Z_t$. وللتخلص من عدم الإستقرارية نحتاج إلى أخذ أعلى رتبة من الفروق $(1-B)^d Z_t$ حيث $d>0$ (وغالباً ما تكون $d=0,1,2$). وإن النتائج المترتبة على استخدام الفروق غير الضروري تكون أقل خطورة من النتائج المترتبة على التقليل من أهمية الفروق. نحسب ونفحص PACF, ACF للعينة لتشخيص النموذج، وتوجد ثنائية ما بين نماذج ARMA(1,0) أو AR(1) ونماذج ARMA(0,1) أو MA(1) وفقاً للدالتين. وتزداد المشكلة تعقيداً في الاعتماد على ACF, PACF لتشخيص النموذج وتحديد رتبته لا يكون فعالاً ، كون الدوال أعلاه في هذه الحالة تسلك سلوكاً متشابهاً هو سلوك التناقص التدريجي.

جدول رقم(2-2) خواص النماذج حسب الإرتباط الذاتي و الإرتباط الذاتي الجزئي:

الرقم	النموذج	ACF	PACF
1	AR(p)	يقترب من الصفر تدريجياً	يساوي الصفر بعد الإزاحة p
2	MA(q)	يساوي الصفر بعد الإزاحة q	يقترب من الصفر تدريجياً
3	ARMA(p,q)	يقترب من الصفر تدريجياً	يقترب من الصفر تدريجياً
4	AR(1)	يقترب من الصفر تدريجياً	يساوي الصفر بعد الإزاحة 1
5	MA(1)	يساوي الصفر بعد الإزاحة 1	يقترب من الصفر تدريجياً
6	AR(2)	يقترب من الصفر تدريجياً	يساوي الصفر بعد الإزاحة 2
7	MA(2)	يساوي صفر بعد الإزاحة 2	يقترب من الصفر تدريجياً

المصدر: (1) .

2-9-2 تقدير النموذج (1):

بعد تحديد شكل النموذج لابد من تقدير معلمات النموذج δ و $\phi_1,\dots,\phi_p$ و $\theta_1,\dots,\theta_q$ و σ^2 و γ وذلك باستخدام البيانات التاريخية المتوفرة لدينا.

هناك عدة طرق للتقدير في اتجاهي الزمن والتكرار نذكر منها :

2-9-2-1 بعض طرق التقدير في إتجاه الزمن :

i. طريقة العزوم (the method of the moments) .

ii. طريقة الإمكان الأعظم المضبوطة (Exact maximum likelihood method) .

iii. طريقة المربعات الصغرى الشرطية (Conditional Least square method) .

و سوف نكتفي بالتحدث عن التقدير بطريقة العزوم فقط .

i. طريقة العزوم : (1)

تعتمد هذه الطريقة على مساواة عزوم العينة مثل متوسط العينة $\bar{z}$ والإرتباطات الذاتية للعينة r_k بالعزوم النظرية مثل المتوسط μ ودالة الإرتباط الذاتي ρ_k وحل المعادلات الناتجة بالنسبة للمعلمات المراد تقديرها.

سوف نستعرض الطريقة للنموذج AR(p) كالتالي:

1- يقدر المتوسط μ بالمقدر $\bar{z}$ أي $\hat{\mu} = \bar{z} = \sum_{i=1}^{n} z_i \big/ n$

2- لتقدير $\phi_1, \ldots, \phi_p$ نستخدم العلاقة:

$$\rho_k = \phi_1 \rho_{k-1} + \phi_2 \rho_{k-2} + \cdots + \phi_p \rho_{k-p},\ k > 1$$

والتي تنتج من ضرب المعادلة المعرفة لنموذج AR(p) بالحد $z_{t-k} - \mu$ وأخذ التوقع. في المعادلة السابقة بوضع $k = 1, 2, \ldots, p$ نحصل على نظام المعادلات المسمى معادلات يول و ووكر Yule–Walker التالية:

$$\rho_1 = \phi_1 + \phi_2 \rho_1 + \ldots\ldots\ldots\ldots + \phi_p \rho_{p-1}$$

و بالتعويض عن ρ_k بالمقدر r_k نحصل على مقدرات العزوم للمعلمات $\hat{\phi}_1, \ldots, \hat{\phi}_p$ كالتالي:

بوضع معادلات يول و ووكر على الشكل المصفوفي:

$$\begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r_1 & r_2 & \cdots & r_{p-2} & r_{p-1} \\ r_1 & 1 & r_1 & \cdots & r_{p-3} & r_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{p-1} & r_{p-2} & r_{p-3} & \cdots & r_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \vdots \\ \hat{\phi}_p \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots (68-2)$$

وبحل هذه المعادلة للمعلمات

$$\begin{pmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \\ \vdots \\ \hat{\phi}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & r_1 & r_2 & \cdots & r_{p-2} & r_{p-1} \\ r_1 & 1 & r_1 & \cdots & r_{p-3} & r_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ r_{p-1} & r_{p-2} & r_{p-3} & \cdots & r_1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} r_1 \\ r_2 \\ \vdots \\ r_p \end{pmatrix} \cdots\cdots\cdots\cdots (69-2)$$

تقدر σ^2 كالتالي

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\gamma}_0 \left(1 - \hat{\phi}_1 r_1 - \hat{\phi}_2 r_2 - \cdots \hat{\phi}_p r_p \right)$$

حيث:

$$\hat{\gamma}_0 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(z_t - \overline{z})^2$$

وهو تباين العينة.

تقدير العزوم لبعض النماذج:

a. تقدير العزوم لنموذج AR(1) : (1)

$$z_t - \mu = \phi_1(z_{t-1} - \mu) + a_t, a_t \sim N(0, \sigma^2)$$

مقدر العزوم للمعلمة ϕ_1 هو

$$\hat{\phi}_1 = r_1 \cdots\cdots (70-2)$$

مقدر العزوم للمعلمة μ هو

$$\hat{\mu} = \overline{Z} \cdots\cdots (71-2)$$

مقدر العزوم للمعلمة σ^2 هو

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{r}_0(1 = \hat{\phi}_1 r_1) \cdots\cdots (72-2)$$

حيث

$$\hat{\gamma}_0 = \frac{1}{n}\sum_{t=1}^{n}(z_t - \overline{z})^2$$

b. تقدير العزوم لنموذج MA(1) (1):

$$z_t - \mu = a_t - \theta_1 a_{t-1}, a_t \sim N(0, \sigma^2)$$

لإيجاد مقدر العزوم للمعلمة θ_1 نستخدم العلاقة

$$p_1 = \frac{-\theta_1}{1 + \theta_1^2} \cdots\cdots (73-2)$$

وبتعويض المعلمات بمقدراتها

$$r_1 = \frac{-\hat{\theta}_1}{1 + \hat{\theta}_1^2} \cdots\cdots (74-2)$$

وبحل المعادلة للمقدر $\hat{\theta}_1$ نجد

$$\hat{\theta}_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4r_1}}{2r_1} \cdots\cdots (75-2)$$

هذا الحل يعطي قيمتين للمقدر $\hat{\theta}_1$ نأخذ القيمة التي تحقق $|\hat{\theta}_1| < 1$. فمثلا إذا كانت $r_1 = -0.4$

فإن $(\hat{\theta}_1)_1 = -0.77$ و $(\hat{\theta}_1)_2 = 3.27$ وبالتالية يكون مقدر العزوم للمعلم θ_1 هو.

c. تقدير العزوم لنموذج $AR(2)$: (1)

$$z_t - \mu = \phi_1 (z_{t-1} - \mu) + \phi_2 (z_{t-2} - \mu) + a_t, a_t \sim N(0, \sigma^2)$$

بإستخدام معادلات يول ووكر مقدرات العزوم للمعلمات ϕ_1 و ϕ_2 هي

$$\begin{bmatrix} \hat{\phi}_1 \\ \hat{\phi}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & r_1 \\ r_1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \end{bmatrix}$$

ومنها نجد

$$\hat{\phi}_1 = \frac{r_1 - r_1 r_2}{1 - r_1^2} \cdots\cdots (76-2)$$

$$\hat{\phi}_2 = \frac{r_2 - r_1^2}{1 - r_1^2} \cdots\cdots (77-2)$$

مقدر العزوم للمعلمة μ هو

$$\hat{\mu} = \bar{z} \cdots\cdots (78-2)$$

مقدر العزوم للمعلمة σ^2 هو

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\gamma}_1 (1 - \hat{\phi}_1 r_1 - \hat{\phi}_2 r_2) \cdots\cdots (79-2)$$

d. تقدير العزوم لنموذج $MA(2)$: (1)

$$z_t - \mu = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}, a_t \sim N(0, \sigma^2)$$

لإيجاد مقدرات العزوم للمعلمات θ_1 و θ_2 نستخدم العلاقات

$$p_1 = \frac{-\theta_1 (1 - \theta_2)}{1 + \theta_1^2 + \theta_2^2} \cdots\cdots (80-2)$$

$$p_2 = \frac{-\theta_2}{1+\theta_1^2+\theta_2^2} \cdots\cdots (81-2)$$

وبتعويض المقدرات r_1 و r_2 نحصل على مقدرات العزوم للمعلمات θ_1 و θ_2

$$\hat{r}_1 = \frac{-\hat{\theta}_1(1-\hat{\theta}_2)}{1+\hat{\theta}_1^2+\hat{\theta}_2^2} \cdots\cdots (82-2)$$

$$r_2 = \frac{-\hat{\theta}_1}{1+\hat{\theta}_1^2+\hat{\theta}_2^2} \cdots\cdots (83-2)$$

ونحلل كل من $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\theta}_2$ ونأخذ الحلول التي تحقق

$$\cdot\ \theta_2-\theta_1<1, \quad \theta_2+\theta_1<1, \quad |\theta_2|<1$$

e. تقدير العزوم لنموذج $(1,1)$ARMA (1):

$$z_t-\mu=\phi_1(z_{t-1}-\mu)+a_t-\theta_1 a_{t-1},\ a_t \sim N(0,\sigma^2)$$

لإيجاد مقدرات العزوم للمعلمات θ_1 و ϕ_1 نستخدم العلاقات

$$p_1 = \frac{(1-\phi_1\theta_1)(\phi_1-\theta_1)}{1+\theta_1^2-2\phi_1\theta_1} \cdots\cdots (84-2)$$

$$p_2 = \frac{(1-\phi_1\theta_1)(\phi_1-\theta_1)}{1+\theta_1^2-2\phi_1\theta_1}\Phi_1 \cdots\cdots (85-2)$$

وبتعويض المقدرات r_1 و r_2 نحصل على مقدرات العزوم للمعلمات θ_1 و ϕ_1

$$r_1 = \frac{(1-\hat{\phi}_1\hat{\theta}_1)(\hat{\phi}_1-\hat{\theta}_1)}{1+\hat{\theta}_1^2-2\hat{\phi}_1\hat{\theta}_1} \cdots\cdots (86-2)$$

$$r_2 = \frac{(1-\hat{\phi}_1\hat{\theta}_1)(\hat{\phi}_1-\hat{\theta}_1)}{1+\hat{\theta}_1^2-2\hat{\phi}_1\hat{\theta}_1}\hat{\Phi}_1 \cdots\cdots (87-2)$$

وبقسمة المعادلة المعرفة للمقدر r_2 على المعادلة المعرفة للمقدر r_1 نجد

$$\hat{\Phi}_1 = \frac{r_2}{r_1} \cdots\cdots (88-2)$$

2-9-2-2 بعض طرق التقدير في إتجاه التكرار :

هناك عدة طرق لتقدير دالة كثافة الطيف نذكر منها :

أ- الطرق اللامعلمية :

وهي الطرائق التي يتم فيها تقدير دالة كثافة الطيف من المشاهدات مباشرة , ومن أشهر دوال الأوزان في هذا النوع من التقدير دالة وزن توكي هامنك Tukey Hamming ودالة وزن بارتلت Bartlett ودالة وزن بارزن Parzen .

i. دالة وزن توكي هامنك Tukey Hamming:

$$\lambda_k = \frac{1}{2}\left(1+\cos\left(\frac{\Pi k}{M}\right)\right) \quad k=0,1,\dots,M \qquad (89-2)$$

ودالة وزن بارتلت Bartlett:

$$\lambda_k = \begin{cases} 1-\dfrac{|\upsilon|}{M} & ,|\upsilon| \le M \\ 0 & ,Otherwise \end{cases} \qquad (90-2)$$

حيث

$$\upsilon = M(y-1)$$

ii. دالة وزن بارزن Parzen:

$$\begin{cases} 1-6\left(\dfrac{k}{M}\right)^2+6\left(\dfrac{k}{M}\right)^3 & 0 \le k \le \dfrac{M}{2} \\ 2\left(\dfrac{1-k}{M}\right)^3 & \dfrac{M}{2} \le k \le M \end{cases} \qquad (91-2)$$

حيث M تسمي بنقطة البتر Truncation point ويتم إختيارها بشكل مناسب بحيث أن لا تكون صغيرة وبالتالية فان الخصائص المهمة لــ f(w) يمكن أن تختفي ,ولا كبيرة جدا بحيث لا يصبح هناك داعي لاستخدام دالة كثافة الطيف , وقد اقترح الباحث c.chatfield , أن يتم إختيار نقطة البتر بحيث تكون $M = 2\sqrt{n}$

ب- الطرق المعلمية :

تعتبر من الطرائق المعاصرة في التقدير وهي تعتمد على منهجية معينة في التقدير اذ تعتمد على مخرجات نماذج السلاسل الزمنية (AR,MA,ARMA) التي لها قوة كثافة الطيف (PSD) Power Spectral Density التي عبارة عن دالة لمعالم النموذج لذا تسمي بالطرق المعلمية حيث يتم

إختيار نموذج السلسلة الزمنية الملائم لتمثيل البيانات ثم تقدير معالم النموذج الذي يتم اختياره ثم تعويض المعالم المقدرة في صيغة (PSD) الخاصة بالنموذج وسوف نستخدم هذه الطريقة في التطبيق .

2-9-3 مرحلة إختبار وفحص دقة النموذج :

2-9-3-1 مرحلة إختبار وفحص دقة النموذج بإتجاه الزمن :

بعد تقدير النموذج لابد من إختبار مدى ملائمة أو صلاحية النموذج لتمثيل بيانات السلسلة الزمنية وتوجد عدة طرق نذكر منها :

1- معاملات النموذج لابد أن تكون ذات معنوية إحصائية أي تختلف عن الصفر معنوياً , ويستخدم لذلك إختبار ستيودنت (t) فإذا كانت غير معنوية فلابد من استبعاد أحد AR أو MA .

2- تحليل البواقي (8):

بعد التعرف على نموذج مبدئي وتقدير معلمات هذا النموذج نجري بعض التشخيصات على البواقي أو الأخطاء المقدرة لنرى مدى مطابقة النموذج للسلسلة المشاهدة ، ويفترض أن البواقي هي مقدرات التشويش الأبيض a_t .

والتي نفترض إنها موزعة طبيعياً بمتوسط صفري وتباين σ^2 . البواقي تعطى بالعلاقة

$$e_t = z_t - \hat{z}_t = \hat{a}_t, \quad t = 1, 2, ..., n$$

يقوم الفحص والإختبار على فحص البواقي هل هي تشويش أبيض أم لا ، فإذا كانت تشويش أبيض نعتبر النموذج المطبق مقبولاً أما إذا لم تكن كذلك فيجب علينا إعادة النظر واقتراح نموذج آخر ويمكن استخدام الإحصاء الآتية لمعرفة ما إذا كان النموذج المقدر ملائم للبيانات أم لا .

و الإحصائية هي:

$$Q = \frac{(n-d)(n-d+2)\sum_{k=1}^{m} r^2(\hat{a}_t)}{n-d-k} \cdots\cdots (92-2)$$

وتسمى الإحصائية Q بإحصائية Ljung–box و هي تتوزع توزيع مربع كأي بدرجة حرية $(m-p-q)$

حيث:

$$m = \frac{n}{4}$$

فإذا كانت قيمة Q أقل من قيمة $\chi^2_{m,\alpha}$ حيث α هي مستوى المعنوية فإن هذا يعني كفاءة و ملاءمة النموذج المقدر للبيانات .

وفي حالة قبول عدة نماذج إحصائية لابد من إختيار النموذج الأفضل من بين هذه النماذج وفقاً لمعايير المفاضلة :

1- أن يكون تباين النموذج ذا قيمة ضعيفة .

2- أن يكون مجموع مربعات البواقي ضئيلاً .

3- أن يكون الفارق بين كثافة النموذج وبين الكثافة الحقيقية للمشاهدات ضئيلاً .

وهناك عدة معايير للمفاضلة أشهرها :

- **معيار أكايكي للمعلومات :(8)**

و يرمز له اختصاراً بـ AIC و يحسب من الصيغة الآتية :

$$AIC = n\ln SSR + 2K \cdots\cdots\cdots (93-2)$$

حيث:

SSR ≡ مجموع مربعات البواقي

n ≡ حجم العينة

$$k = p + d + q$$

و النموذج الأفضل بين النماذج المقارنة هو الذي له أقل قيمة لـ AIC .

- **معيار شوارتز :(8)**

و يرمز له إختصاراً بـ SBC و يحسب من الصيغة الآتية:

$$SBC = n\ln(SSR) + K\ln_{(n)} \cdots\cdots\cdots (94-2)$$

حيث:

SSR ≡ مجموع مربعات البواقي

n ≡ حجم العينة

$$k = p + d + q$$

و النموذج الأفضل بين النماذج المقارنة هو الذي له أقل قيمة لـ SBC.

2-9-3-2 مرحلة إختبار وفحص دقة النموذج بإتجاه التكرار:

إختبار مقدم MokkdemTest :

هو أسلوب جديد في عملية الإختبار يعتمد على الحقيقة الرياضية المبنية على أساس أن دالة كثافة الطيف لسلسة الأخطاء العشوائية المستقلة يكون لها الشكل التالية الذي يتصف بالثبات :

$$f(w) = \frac{1}{2\Pi}, -\Pi < w < \Pi$$

وأن إختبار مقدم MokkdemTest يعتمد على الفرضية التالية :

$$H_O = f(w) = cons\tan t$$
$$H_1 = f(w) \neq cons\tan t$$

وأن الصيغة الرياضية للإختبار كالأتي :

$$\hat{T}_{mok} = \frac{1}{\gamma_0^2} \sum_{k=1}^{m} \hat{\gamma}_k^2 \cdots\cdots (95-2)$$

حيث تستخرج قيمة T كما يلي :

$$T = \log\left|\frac{1}{2\Pi} \int_{-m}^{u} p(w) d(w)\right| - \frac{1}{2\Pi} \int_{-\Pi}^{\Pi} \log|p(w)| d(w)$$

وتقديرها كما في الصيغة التالية :

$$\hat{T} = \log\left|\frac{1}{2\Pi} \int_{-m}^{u} \hat{p}(w) d(w)\right| - \frac{1}{2\Pi} \int_{-\Pi}^{\Pi} \log|\hat{p}(w)| d(w)$$

حيث أن :

$$\hat{p}(w) = \frac{1}{2\Pi} \sum_{k=-n}^{n} \hat{\gamma}_k e^{-iwk}$$

وعليه فإن:

$$\hat{T} = \log\left(\frac{\hat{\gamma}_0}{2\Pi}\right) - \frac{1}{2\Pi} \int_{-\Pi}^{\Pi} \log|\hat{p}(w)| d(w)$$

وتكون الصيغة العملية للمعادلة أعلاه كالأتي :

$$\hat{T} = \frac{1}{\gamma_0^2}\sum_{k=1}^{m}\hat{\gamma}_k^2$$

وتقارن قيمة $\hat{T}_{mok}$ مع قيمة t_α الجدولية , حيث أن الصيغة الرياضية لها هي :

$$t_\alpha = \frac{\sqrt{2m(1-\alpha)}}{\phi_n} + \frac{n}{m} \cdots\cdots\cdots (96-2)$$

علما بان t_α تمثل مستوي الدلالة ,m تمثل اكبر تباطؤ ل n , k عدد المشاهدات , و ϕ_nتستخرج من جداول التوزيع الطبيعي المعياري .

وعند مقارنة القيمة المحسوبة بالجدولية نقبل فرض العدم ونرفض الفرض البديل إذا كانت قيمة $\hat{T}_{mok}$ اقل من t_α أي أن الأخطاء تتوزع عشوائيا وان دالة الكثافة الطيفية الخاصة بالبواقي ثابتة أي أن النموذج المشخص ملائم .

2-9- 4 مرحلة التنبؤ : (9)

تعتبر مرحلة التنبؤ من أهم مراحل تحليل نماذج السلاسل الزمنية ,حيث انه بعد تشخيص النموذج وتقدير معلماته وفحصه يتم استخدامه في التنبؤ بالقيم المستقبلية للسلسلة لمعرف سلوك الظاهرة المدروسة في المستقبل .

إذا أردنا الإستدلال الكامل للمتغير Z_{t+k} يستدعي هذا معرفة دالة كثافة الإحتمال الشرطي لهذا المتغير، أي دالة كثافته الإحتمالية بمعلومية تاريخ السلسلة حتي الزمن t ، أي بمعلومية $Z_1, Z_2, \ldots\ldots Z_t$ ويعرف هذا التوزيع في أدبيات السلاسل الزمنية بالتوزيع التنبؤي Predictive Distribuion .وقد يكون إختيار توقع هذا التوزيع، أي التوقع الشرطي للمتغير Z_{t+k} بمعلومية تاريخ السلسلة أفضل نقطة للتنبؤ بقيمة هذا المتغير في المستقبل وذلك لأنه يحقق الحد الأدني

لمتوسط مربعات الأخطاء (Mean Square Error (MSE بمعني أنه إذا كان النموذج صحيحا إنه لا يوجد تنبؤ آخر يعطي أخطاء متوسط مربعاتها أصغر.

فإذا كان F أي تنبؤ نقطة للمتغير Z_{t+k} عند نقطة أصل معينة t فإن توقع (متوسط) مربعات الأخطاء للتنبؤ F بمعلومية تاريخ السلسلة حتي نقطة الأصل t يعرف بأنه:

$$MSE(F)=E[(Z_{t+k}-F)^2/Z_1,Z_1,.....Z_t]\cdots\cdots(97-2)$$

$$Z_t(F)=E(Z_{t+k}/Z_t,Z_{t-1},...)\cdots\cdots(98-2)$$

فإننا سنرمز لتوقع Z_{t+k} الشرطي بالرمز $Z_t(F)$ أي أن:

ويعتبر $Z_t(F)$ كتنبؤ نقطة للمتغير Z_{t+k} له خاصية جيدة وهي أنه ينتج أخطاء ذات أقل متوسط مربعات.

2-9-4-1 دوال التنبؤ باستخدام نماذج تحليل السلاسل الزمنية بإتجاه الزمن :

i. دالة التنبؤ لنموذج الإنحدار الذاتي AR(p) :

الصيغة الرياضية لدالة التنبؤ ذات متوسط مربع الأخطاء الأدني لنموذج AR(P) هي

$$z_n(\ell)=u+\Phi_1[z_n(\ell-1)-u]+\Phi_2[z_n(\ell-2)-u]+\cdots+\Phi_1[z_n(\ell-p)-u\cdots\cdots(99-2)]$$

ii. دالة التنبؤ لنموذج الإنحدار الذاتي من الدرجة الأولى AR(1) :

تكون الصيغة الرياضية لدالة التنبؤ ذات متوسط مربع الأخطاء الأدني لنموذج AR(1) هي

$$Z_n(\ell)=\sigma^2\,\frac{1-\phi_1^{2\ell}}{1-\phi_1^2},\ell\geq 1\cdots\cdots(100-2)$$

دالة التنبؤ لنموذج الإنحدار الذاتي من الدرجة الثانية AR(2) :

ان الصيغة الرياضية لدالة التنبؤ ذات متوسط مربع الأخطاء الأدني لنموذج AR(2) هي

$$z_n(\ell)=u+\phi_1[z_n(\ell-1)-u]+\phi_2[z_n(\ell-2)-u],\ell\geq 1\cdots\cdots(101-2)$$

دالة التنبؤ لنموذج المتوسطات المتحركة MA(P) :

الصيغة الرياضية لدالة التنبؤ ذات متوسط مربع الأخطاء الأدني لنموذج MA(P) هي

$$z_n(\ell)=\left[\begin{matrix}U-\theta_{\ell a_n}-\theta_{\ell+1}a_{n-1}-\cdots-\theta_q a_{n+\ell-q},\ell=1,2,...,q\\ u\quad \ell\geq q+1,q+2,................\end{matrix}\right)\cdots\cdots(102-2)$$

iii. دالة التنبؤ لنموذج المتوسطات المتحركة MA(1) :

حيث إن الصيغة الرياضية لدالة التنبؤ ذات متوسط مربع الأخطاء الأدني لنموذج MA(1) هي

$$z_{n(\ell)}=\begin{cases}\mu+\theta_1 a_n, & \ell=1\\ \mu, & \ell\geq 2\end{cases}\cdots\cdots(103-2)$$

دالة التنبؤ لنموذج المتوسطات المتحركة MA(2) :

الصيغة الرياضية لدالة التنبؤ ذات متوسط مربع الأخطاء الأدني لنموذج MA(2) هي

$$z_{n(\ell)} = \begin{cases} \mu - \theta_1 a_n - \theta_2 a_{n-1}, & \ell = 1 \\ \mu - \theta_2 a_n, & \ell = 2 \\ \mu, & \ell \geq 3 \end{cases} \cdots\cdots (104-2)$$

iv. دالة التنبؤ لنموذج الإنحدار الذاتي والمتوسط المتحرك من الدرجة ARMA(1,1) :

الصيغة الرياضية لدالة التنبؤ ذات متوسط مربع الأخطاء الأدني لنموذج ARMA(1,1) هي

$$z_{n(\ell)} = \begin{cases} \mu + \phi_1 (z_n - \mu) - \theta_1 a_n, & \ell = 1 \\ \mu + \phi_1 (z_n(\ell - 1) - \mu), & \ell \geq 2 \end{cases} \cdots\cdots (105-2)$$

2-4-9-2 التنبؤ بإتجاه التكرار :

إن التنبؤ باستخدام النماذج الطبقية يمكن تمثيلها بالعلاقة التالية :

$$t_p = k_n + t'$$

حيث أن t' هي قيمة ل t عليه $t = 1,2',....., n$ وبما أن

$$\cos(w_i t_p) = \cos[w_i (mn + t')]$$

$$\cos(w_i t_p) = \cos(w_i mn)\cos(w_i t') - \sin(w_i mn)\sin(w_i t')$$

حيث أن m عدد صحيح لا يساوي صفر فان

$$\cos(w_i mn) = \cos\left[2\left(\frac{1}{n}\right)mn\right] = 1$$

$$\cos(w_i mn) = \sin\left[2\left(\frac{1}{n}\right)mn\right] = 0$$

$$\cos(w_i t_p) = \cos(w_i t')\cos(w_i t') = \cos(w_i t) \cdots\cdots (106-2)$$

وهذا يعني عندما يراد التنبؤ لأي قيمة أكبر من n فان التنبؤ في تلك النقطة $t_p = k_n + t'$ سيكون مساويا للقيمة في النقطة $t = t'$ وهذا لدورية النموذج .