SUST Journal of Natural and Medical Sciences (JNMS) vol. 19 (2) 2018
ISSN (Print): 1858-6805 e-ISSN (Online): 1858-6813

SUST
Journal of Natural and Medical Sciences
Journal home page:
http://Scientific-journal.sustech.edu/

# دراسة مقارنة بين طريقتي مارغواردت وجاوس نيوتن لتقدير معالم بعض النماذج غير الخطية
## (دراسة حالة الاسي السالب واللوجيستي بالتطبيق على تقدير الناتج المحلي الإجمالي السودان1979–2017م)

**لينا سرالختم سيد احمد الخليفة[1] وعفراء هاشم عبد اللطيف[1]**

جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا, كلية العلوم قسم الإحصاء E_mail:afory80@yahoo.com

**تاريخ الإستلام: اغسطس 2018** **تاريخ قبول الورقة: مارس 2019**

**المستخلص**

تهدف هذه الدراسة إلى التعرف على بعض النماذج غير الخطية (الأسي السالب واللوجيستي) وطرق تقديرها المتمثلة في طريقتي مارغواردت وجاوس نيوتن وتطبيقهما في تقدير دالة الناتج المحلي الإجمالي(1979–2017م). وتمت الاستعانة بالحزمة الإحصائية المحوسبة Minitab في التحليل. توصلت الدراسة إلى ان التنبؤ باستخدام النموذج اللوجستي بالطريقتين يعطي نفس النتائج أي انه لا توجد افضليه نسبيه بين الطريقتين، اما في حالة استخدام النموذج الأسي السالب كانت الافضلية لطريقة مارغواردت قياسا على مجموع مربعات الخطأ ومتوسط مربعات الخطأ ومعيار اكايكي مقارنة بطريقة جاوس–نيوتن. ونوصي باستخدام النموذج الأسي السالب بطريقة مارغواردت واستخدام النموذج اللوجستي باي من الطريقتين للتنبؤ بالناتج المحلي الإجمالي.

**الكلمات المفتاحية:** النماذج غير الخطية، مارغواردت، جاوس نيوتن، مجموع مربعات الخطأ، متوسط مربعات الخطأ.

**Abstract**

This study aims to recognizing some nonlinear models (negative exponential and logistic) and their estimation methods which represent by using Gauss-Newton and Marquardt method for estimating Growth Domestic Product (GDP (1979-2017). Minitab statistical package was used for analysis. The researcher reached that prediction by using the logistic model in the two methods gives same results. That is, there is no comparative advantage between the two methods. Concerning using the negative exponential model, Marquardt method should be used for having minimum sum of squares error (SSE) and mean squares error (MSE) and A kaik's criterion when compared to Gauss Newton methods.

The researcher recommended using Marquardt negative exponential model and using the logistic method in any of the two ways to predict the Growth Domestic Product.

**Keywords:** Nonlinear regression, Marquardt, Gauss-Newton, Sum square error, Mean squares error

**المقدمة**

للوصول الى تنبؤات دقيقة لقيم الظواهر لابد من استخدام اسلوب مناسب للحصول علي مقدرات جيدة للمعالم في نموذج الانحدار. وينتج عن عدم استخدام أسلوب مناسب لهذه البيانات اختلاف ما بين القيمة الحقيقية والتقدير الذى ينتج عنه بالتالي أخطاء في القرارات التي تعتمد على هذه التقديرات. ويعتبر جانب التقدير من الجوانب المهمة في علم الاحصاء بصورة عامة وفى تحليل نماذج الانحدار بصورة خاصة حيث نجد ان هناك العديد من الطرق التي تستخدم لهذا الغرض. وفى الغالب الأعم تنتج تقديرات مختلفة عن كل اسلوب من اساليب التقدير.

ويتمثل موضوع هذه الدراسة في معرفة النموذج غير الخطي الافضل لاستخدامه في التنبؤ بالناتج المحلي الاجمالي في الفترة 1979–2017م للجهاز المركزي للإحصاء بالسودان، لذلك يتم تقدير النموذجين غير الخطيين (الأسي السالب واللوجيستي) بطريقتي مارغواردت وجاوس_نيوتن وذلك لأهميتهما في ايجاد أفضل المقدرات وتطبيقها ثم المقارنة بينها باستخدام المعايير الإحصائية لإثبات فرضيات الدراسة والتحقق من أن البيانات طبيعية وغير خطيه ومن ثم تحليل النتائج.

**الاطار النظري**

**النماذج غير الخطية**

هي النماذج التي تكون في شكل غير خطي في المعالم كما يمكننا تطبيق طريقة المربعات الصغرى المناسبة بغرض الحصول على نماذج تتسم بخواص المقدرات الجيدة ، إلا أنه في بعض الأحيان تواجه الباحث نماذج تتخذ أشكالاً غير خطية في المتغيرات أو في المعالم أو في المتغيرات والمعالم معاً .(Jolivet2003)

1. **النموذج اللوجستي Logistic Model** (Christensen 1997)

$$Y_t = \frac{\beta_0}{1+\beta_1 e^{-\beta_2 t}} + \varepsilon_t \_\_\_\_\_\_ (1)$$

التفاضل الجزئي بالنسبة للمعالم:

$$Y_t = \frac{\beta_0}{1+\beta_1 e^{-\beta_2 t}} + \varepsilon_t$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial \beta_0} = \frac{1}{1+\beta_1 e^{-\beta_2 t}}$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial \beta_1} = \frac{-\beta_0 e^{-\beta_2 t}}{(1+\beta_1 e^{-\beta_2 t})^2}$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial \beta_2} = \frac{\beta_0 \beta_1 t}{(1+\beta_1 e^{-\beta_2 t})(e^{-\beta_2 t})}$$

**2. النموذج الأسي السالب Negative Exponential Model** (Seber2003)

$$Y_t = \beta_0\left(1-e^{-\beta_1 t}\right) + \varepsilon_t \_\_\_\_\_\_ (2)$$

التفاضل الجزئي بالنسبة للمعالم:

$$Y_t = \beta_0\left(1-e^{-\beta_1 t}\right) + \varepsilon_t$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial \beta_0} = 1 - e^{-\beta_1 t}$$

$$\frac{\partial Y_t}{\partial \beta_1} = 0$$

**طرق التقدير**

**اولا:–طريقة جاوس_نيوتن التكرارية للتقدير:**

هي من اكثر طرق تقدير النماذج غير الخطية استخداما ولتطبيقها يجب اتباع الخطوات التالية :–

1– البدء بتقدير القيم الابتدائية لكل معلمة في النموذج.

2– توليد نموذج القيم الابتدائية.

3– حساب مجموع مربعات الأخطاء.

4– نعدل المعالم حتى يكون النموذج ممثلاً لنقاط البيانات بصورة جيدة.

5– نكرر الخطوة السابقة حتى نختبر جودة تمثيل الدالة للبيانات.

6– نتوقف عن التكرار عندما تشير التعديلات إلى ثبات قيمة مجموع المربعات SS.

7– نعيد تقدير النتائج للحصول على أدق قيم معتمدة على القيم الابتدائية.

اتباع هذه الطريقة في الانحدار غير الخطي إلى تقدير القيم الابتدائية وأفضل قيم مقدرة في خطوة واحدة وبتكرار حساب القيم الابتدائية عدة مرات نتحصل على أفضل قيم مقدرة للمعالم التي تعطي أفضل دالة، بمعنى آخر تقدير :(عفراء هاشم 2005م، E.Jolivet2003)

$$\beta_0 = (\beta_{1.0}, \beta_{2.0}, \dots, \beta_{p.0})$$

الصيغة العامة لنموذج الانحدار غير الخطي هي كالآتي:

$$Y_i = f(X_i , \beta) + \varepsilon_i \_\_\_\_\_\_ (3)$$

وإيجاد قيمة مجموع مربعات الأخطاء تعطى بالصيغة:

$$SSE = \sum_{i=1}^{n} \left[Y_i - f(x_i , \hat{\beta})\right]^2 \_\_\_\_\_\_ (4)$$

وحسب هذه الطريقة يجب أولاً وضع المعادلة (4) في صيغة سلسلة تايلر (Taylor Series) حول $\beta$ التي تعطي فقط حدود خطية كما يلي:

$$f(x_i , \beta) = Y_i = f(x_i , \beta_0) + (\beta_1 - \beta_{1,0}) \left[\frac{\partial f(x_i , \beta)}{\partial \beta_1}\right]_{\beta=\beta_0} + (\beta_2 - \beta_{2,0}) \left[\frac{\partial f(x_i , \beta)}{\partial \beta_2}\right]_{\beta=\beta_0} + \dots + (\beta_K - \beta_{K,J}) \left[\frac{\partial f(x_i , \beta)}{\partial \beta_K}\right]_{\beta=\beta_0} \_\_\_\_\_\_ (5)$$

i = 1 , 2 , .... , n

خطية المعادلة أعلاه تظهر في الصيغة التالية:

$$f(x_i , \beta) - f(x_i , \beta_0) = \gamma_1 W_{1i} + \gamma_2 W_{2i} + \dots + \gamma_p W_{pi} \_\_\_\_\_\_ (6)$$

i = 1 , 2 , ... , n

حيث:

$W_{ji} \equiv$المشتقة الجزئية للنموذج غير الخطي بالنسبة للمعلمة$\beta_j$ في المشاهدة i ويضم كل القيم الابتدائية:

$$\gamma_j = \beta_j - \beta_{j,0} \_\_\_\_\_\_ (7)$$

$\gamma_p \equiv$ الفرق بين القيم الابتدائية والنظرية (وهي تمثل معامل الانحدار) أما الجانب الأيسر من المعادلة (6) يمثل الأخطاء.

$y_j - f(x_i , \beta_0)$ الذي تم فيه تعويض المعالم بالقيم الابتدائية، عليه أصبح تعديل جاوس–نيوتن للانحدار بالصيغة:

$$y_j - f(x_i , \beta_0) \equiv \gamma_j W_{ji} + \gamma_2 W_{2i} + \dots + \gamma_p W_{pi} + \varepsilon \_\_\_\_\_\_ (8)$$

تحليل الانحدار للمعادلة أعلاه يتم بخطوة واحدة، فتقدير $y_p$ هو تقدير لمعالم النموذج التي تعتمد على القيم الابتدائية ويتم ذلك حسب الخطوات الآتية: (E.Jolivet 2003)

1. تقدير $y_1, y_2 \dots \dots, y_p$ في النموذج (8) باستخدام المربعات الصغري الخطية

أي نحصل على $\hat{\gamma}_1, \hat{\gamma}_2, \dots, \hat{\gamma}_p$

2. حساب المعلم في الخطوة الأولي $\hat{\beta}_{j,1}$حسب الصيغة :

$$\hat{\beta}_{j,1} = \hat{\beta}_{j,0} + \hat{y}_{1,j} \_\_\_\_\_\_ (9)$$
$$j = 1,2, \dots, p$$

3. قيم المعالم من الخطوة (2) تصبح القيم الابتدائية في النموذج (8)

4. نرجع إلى الخطوة الاولي نحسب $\hat{\gamma}_{1.2}, \hat{\gamma}_{2.2}, \dots, \hat{\gamma}_{p.2}$ ثم $\hat{\beta}_{1.2}, \hat{\beta}_{2.2}, \dots, \hat{\beta}_{P.2}$ علي التوالي

5. نستمر في هذه العملية حتي يحدث التقارب على انه بعد مثلا $s$ تكراراً لا يحدث تغير يذكر في مجموع مربعات البواقي وتقدير المعالم في كل تعديل تمثل $\hat{\gamma}_S$ الزيادة التي حدثت في التقدير من الخطوة السابقة حسب الخطوة (2) فاذا

حدث تقارب نعمل هذه الزيادة عندما نتحصل على اصغر مجموع لمربعات الخطأعليه فان متجه المقدرات لعدد (s) من التعديلات هو :

$$\hat{\beta}_s = [\hat{\beta}_{1,s}, \dots, \hat{\beta}_{p,s}] \_\_\_\_\_\_(10)$$

وهو مرتبط بالتعديل الذي يسبقه بمعني انه مرتبط بالتعديل (s-1)أي ان : (E.Jolivet 2003)

$$\hat{\beta}_s = \beta_{s-1} + (w'_{s-1}w_{s-1})^{-1}w'_{s-1}[y - f(x_i, \hat{\beta}_{s-1})]\_\_\_\_\_\_(11)$$

$$=\beta_{s-1} + \gamma_{s-1}$$

حيث :

$w_{s-1} \equiv$مصفوفة p×n التي عناصرها هي التفاضلات الجزئية للمعالم .

$$w_{s-1} = \left[\frac{\partial f(x_i\ ,\ \beta)}{\partial \beta_j}\right]_{\beta=\beta_{s-1}} \_\_\_\_\_\_\_(12)$$

$Y - f(x_i\ , \hat{\beta}_{s-1}) \equiv$ متجه الاخطاء وهو متجه عناصره (n) يحتوي على$f(x_i\ , \hat{\beta}_{s-1})$ لتقدير $\hat{\beta}_{s-1}$

نعتمد أي نتيجة للمعلمات التي تتبع التقدير غير الخطي بواسطة طريقة جاوس–نيوتن المعدلة مصفوفة التباين–التغاير لمعاملات الانحدار الخطي وهناك مصفوفة تباين –تغاير للانحدار الغير خطي مماثلة ل$S^2(x'x)^{-1}$ بالحالة الخطية وتقدير التباين –التغاير التقريبية للمعالم تعطي ب:

$$Var(\hat{\beta}) = S^2(w'w)^{-1}\_\_\_\_\_\_\_(13)$$

حيث :

$w \equiv$مصفوفة التفاضلات الجزئية – سالفة الذكر من اخر تعديل

$S^2 \equiv$مربع متوسط البواقي يعطي بالمعادلة :

$$S^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n}[y_i - f(x_i\ ,\hat{\beta})]}{n-p}\_\_\_\_\_\_\_(14)$$

**صعوبات طريقة جاوس–نيوتن**

عند استخدام طريقة جاوس–نيوتن المعدلة هنالك بعض الصعوبات المتمثلة في تقدير $\hat{\gamma}_s$ ونتيجة لذلك فإن التقارب يكون بطئ مما يتطلب إجراء عدد من التكرارات في بعض الحالات تظهر قيمة $\hat{\gamma}_s$ بإشارة خاطئة مما يؤدي إلى خطأ في طريقة جاوس–نيوتن المعدلة بالتالي زيادة في قيمة مجموع مربعات الأخطاء.

تحل هذه المشكلة باستخدام بعض من تعديلات جاوس–نيوتن المعدلة، فمعظم البرامج الخاصة بتحليل الانحدار غير الخطي تؤدي إلى تحسين الحل الذي يخضع لحساب $\hat{\gamma}_s$ من معادلات الانحدار عندما تشير النتائج المتحصل عليها إلى ذلك( Ronald Christensen 1997)

**ثانياً: طريقة Marquardt التكرارية في التقدير**

هي طريقة لتقدير معلمات سطوح الاستجابة غير الخطية بطريقة المربعات الصغري، وقد تطورت هذه الطريقة من قبل Marquardt في عام (1963)، وتفترض هذه الطريقة وجود تقديرات أولية$\beta_{10}, \beta_{20}, \dots, \beta_{k0}$ للمعلمات $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_k$ بحيث تستعمل جميع المعلومات المتاحة، ويعتبر التقدير الأولي الجيد طريقة سريعة للاقتراب من الحل، وتلعب الخبرة هنا دوراً كبيراً في اختيار القيم الأولية من البيانات مباشرة من خلال التجربة وتكون القيم الأولية لـ $\beta_0$ بحيث يكون :(مهدي2011م).

$$\acute{\beta}_0 = (\beta_{1,0}, \beta_{2,0}, \dots, \beta_{k,0})$$

ولإيجاد قيم $\hat{\beta}$ التي تجعل مجموع مربعات الخطأ أقل ما يمكن كما في المعادلة، نتبع الخطوات التالية:

1- نبدأ بالدالة غير الخطية المفترضة في المعادلة التالية

$$\sum_{i=1}^{n} e_i^2 = \sum_{i=1}^{n} [y_i - f(x_i, \beta_i)]^2$$

$$y_i = \beta_0 e^{x_i \beta_i}$$

و لغرض تمثيل الدالة غير الخطية للمعادلة اعلاه في سلسلة تايلر ل $\beta = \beta_\beta$ واخذ الحدود الخطية لها نحصل على الصيغة الاتية:

$$f(x_i, \beta) \cong f(x_i, \beta_0) + (\beta_1 - \beta_{1,0}) \left[\frac{\partial f(x_i,\beta)}{\partial \beta_1}\right]_{\beta=\beta_0} - (\beta_2 - \beta_{2,0}) \left[\frac{\partial f(x_i,\beta)}{\partial \beta_2}\right]_{\beta=\beta_0} + \cdots +$$

$$(\beta_k - \beta_{k,0}) \left[\frac{\partial f(x_i,\beta)}{\partial \beta_k}\right]_{\beta=\beta_0} \_\_\_\_\_\_\_ (15)$$

حيث $i = 1, 2, \dots, n$

2- ان المعادلة السابقة توضح في الاساس عملية التحويل من الشكل غير الخطي إلى الشكل الخطي لها ويمكن كتابته المعادلة بالصورة التالية:

$$f(x_i, \beta_0) - f(x_i, \beta) = y_1 w_{1i} + y_2 w_{2i} + \cdots + y_k w_{ki} \_\_\_\_\_\_\_ (16)$$

وان $w_{ij}$ تمثل مشتقة الدالة غير الخطية بالنسبة للمعلمة $\beta_J$ ول $j = 1, 2, \dots. k$

$$w_{ji} = \left[\frac{\partial f(x_i,\beta)}{\partial \beta_j}\right]_{\beta=\beta_0} \_\_\_\_\_\_\_ (17)$$

$$\therefore y_j = \beta_j - \beta_{J,0}$$

وبذلك يمكن كتابة الطرف الايسر من المعادلة بالشكل التالي$y_j - f(x_i, \beta_0)$

3- من الملاحظ ان $w_{ji}$ اصبحت معروفة وتمثل متغيرات الانحدار في النموذج الخطي في حين $y_i$ تمثل الفرق بين المعالم والقيم الاولية لها وتمثل معامل الانحدار

4.نتيجة لذلك فان طريقة Marquardt بنيت على اساس نموذج الانحدار الخطي المتعدد

$$y_j - f(x_i, \beta_0) = \gamma_1 w_{1i} + \gamma_2 w_{2i} + \cdots\cdots + \gamma_k w_{ki} \_\_\_\_\_\_\_ (18)$$

حيث

$$y_j - f(x_i, \beta_0) = \gamma_s w_{si}$$

$$i = 1, 2, 3, \cdots, n \quad , \qquad s = 1, 2, \cdots, k$$

$$\grave{w}_s [y_i - f(x_i, \beta_0)] = [\grave{w}_s w_s + \lambda I] \partial_s$$

حيث ان اضافة λ يؤكد عل تتابع الخطوات هي مصفوفة المتغيرات وبهذه الحالة يمكن تقدير المعلمات بطريقة المربعات الصغرى حيث ان ($w_s$) تعطى بالعلاقة:

$$w_s = \left[\frac{\partial f(x_i,\beta)}{\partial f Q_i}\right]_{\beta_s = \beta_s - 1} \_\_\_\_\_\_ (19)$$

وبذلك يمكننا تقدير معلمات النموذج اللوجستي بطريقة Marquardt من خلال المعادلة (18) و تحويلاتها فان العلاقة (18) تصبح:

$$f(x_i, \beta) - f(x_i, \beta_0) = \gamma_1 w_{1i} + \gamma_2 w_{2i} + \cdots + \gamma_k w_{ki} \_\_\_\_\_\_ (20)$$

$$w_{kj} = \frac{\partial f(x_i,\beta)}{\partial \beta_k} = \frac{x_k e^{-(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k)}}{[1 + e^{-(\beta_0 + \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_k)}]^2} \_\_\_\_\_\_\_\_ (21)$$

$$\gamma_k = \beta_k - \beta_{k,0}$$

SUST Journal of Natural and Medical Sciences (JNMS) vol. 19 (2) 2018
ISSN (Print): 1858-6805 e-ISSN (Online): 1858-6813

ويمكن كتابة الطرف الايسر من المعادلة بالشكل التالي:

$$y_j = f(x_i, \beta_0)$$

وبذلك تصبح المعادلة (15) كالآتي:

$$y_j - f(x_i, \beta_0) = \gamma_0 w_{oj} + \gamma_1 w_{1j} + \cdots + \gamma_k w_{kj} \_\_\_\_\_\_(22)$$

$$y_j - f(x_i, \beta_0) = \gamma_s w_{si}$$

حيث

$$s = 1, 2, \cdots, k$$

$$w_s[y_i - f(x_i\,, \beta_0] = w_s w_s y s_s\_\_\_\_\_\_\_(23)$$

ثم نضيف قيمة ( $\lambda$ ) فتصبح المعادلة (20) كالاتي:

$$w_s[y_i - f(x_i, \beta)] = [w_s w_s + \lambda I]\_\_\_\_\_\_(24)$$

ونستمر بالعمل في تكرارات خطوات Marquardt حتي نتحصل على المعلمات النهائية ولتقدير معلمات النموذج الأسي يتم التقدير بنفس الطريقة السابقة ايضاً

$$w_{ki} = \beta_0 x_n e^{(\beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \cdots + \beta_k x_n)}$$

وبتكرار الخطوة كما في نموذج اللوجستيك السابق تحصل على التقديرات النهائية للمعلمات. ولاختيار القيم الابتدائية للمعلمات فإن استخدام نماذج الانحدار غير الخطي يتطلب وجود قيم اولية (initial values ) لمتجه المعلمات $\beta_0$ وذلك لغرض تقدير المعلمات بإحدى طرق التكرار،هذا وان اختيار القيم الأولية يعتبر الشيء الاساسي لطريقة Marquardt واحيانا تكون لدي الباحث القدرة على اختيار القيم الاولية لدالة اللوجستي والدالة الأسية في حالة تعدد المتغيرات.( ازهرهادي مهدي 2011م).

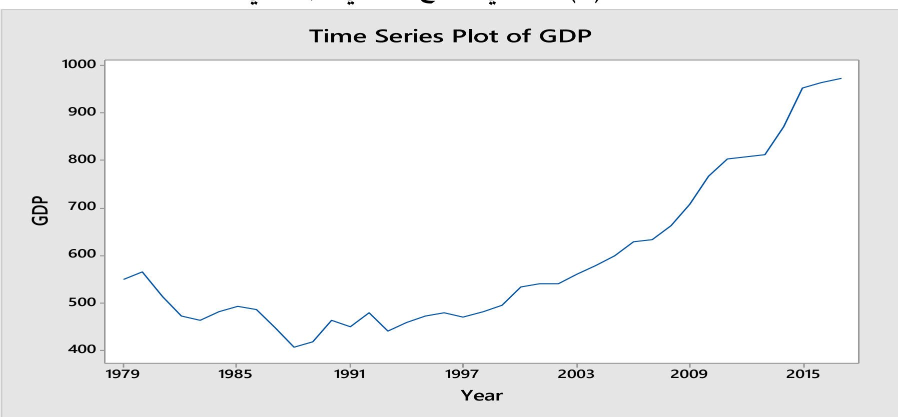
**الجانب التطبيقي**

لقد تم استخدام الحزمة الإحصائية المحوسبة Minitab لتحليل بيانات الناتج المحلي الإجمالي(GDP) كمتغير معتمد والصادرات (Export) كمتغير مستقل خلال الفترة (1979-2017) والتي جُمعت من الجهاز المركزي للإحصاء.

**أولاً: وصف متغيرات الدراسة:**

**1- متغير الناتج المحلي الإجمالي:**

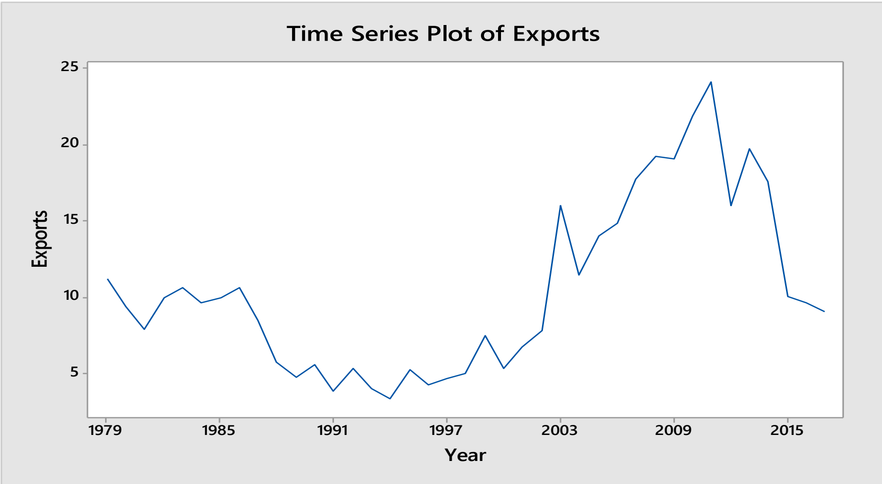
شكل (1): منحنى الناتج المحلي الإجمالي




نلاحظ من الشكل (1) ان الناتج المحلي الاجمالي في سنة (1979-1980) في نقصان ومن عام (1980-1997) تذبذب بين الزيادة والنقصان ومن العام 1997 حتي 2017 كانت الزيادة العظمي.

**2- متغير الصادرات**

شكل (2): منحني الصادرات




نلاحظ من الشكل (2) ان البيانات في نقصان في سنة 1979م وزياده في سنة 1980م وانخفاض كلي حتي سنة 1990م وتذبذب من (1991-2000) ثم ارتفاع الصادرات في العام 2009م ونقصانها حتي العام 2017م.

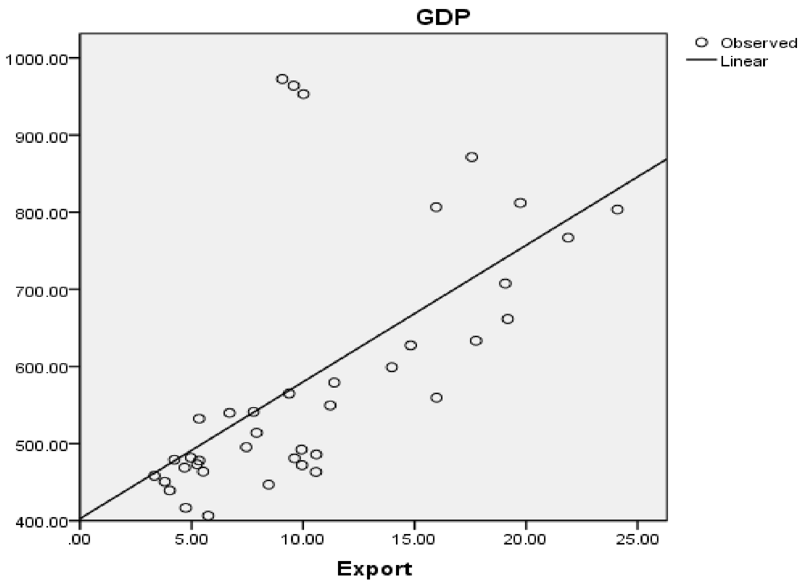
**ثانياً: اختبار عدم خطية بيانات الدراسة**

بالرجوع للشكلين (1) و (2) نلاحظ التذبذب في بيانات الناتج المحلي الاجمالي والصادرات والتي تأخذ شكل المنحني أي عدم ظهورها في خط مستقيم وهذا مؤشر علي ان البيانات غير خطية. للتأكد من ذلك نختبر الفرضية التالية:

$H_o$: المتغيرات تمثيلها خطياً

$H_1$: المتغيرات تمثيلها غير خطي

شكل رقم (3):تشتت الناتج المحلي الاجمالي مقابل الصادرات



SUST Journal of Natural and Medical Sciences (JNMS) vol. 19 (2) 2018
ISSN (Print): 1858-6805 e-ISSN (Online): 1858-6813

جدول رقم(1): قيم الاختبار

| Equation | R square | F | Df1 | Df2 | sig |
|---|---|---|---|---|---|
| Linear | .373 | 22.023 | 1 | 37 | 0.000 |

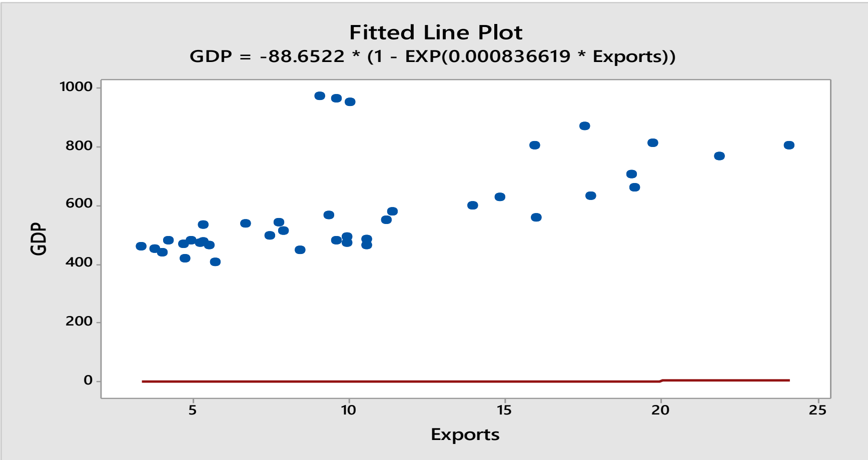
نلاحظ من الشكل رقم (3) والجدول رقم (1) ان الناتج المحلي الاجمالي والصادرات لا يرتبطان خطياً فعند مقارنة (sig=0.000) مع (0.05) نجدها اقل، أي انه تم رفض فرض العدم وقبول الفرض البديل أي ان العلاقة غير خطية.

**ثالثاً: تقدير النماذج**

**1- النموذج الأسي السالب:**

**أ) تقدير النموذج الأسي السالب باستخدام طريقة جاوس نيوتن:**

شكل رقم (4): العلاقة بين الناتج المحلي الإجمالي والصادرات
للنموذج الأسي السالب بطريقة جاوس نيوتن




جدول رقم(2): تقدير معلمات النموذج الأسي السالب بطريقة جاوس نيوتن

| الخطأ القياسي S.E | التقدير | القيمة الابتدائية | المعلمة |
|---|---|---|---|
| 4410608 | -88.6522 | 0.5 | $B_0$ |
| 41 | -0.0008 | 0.3 | $B_1$ |

نلاحظ ان الخطأ القياسي لمعلمة المقطع كبيره مقارنة بالخطأ القياسي للمعلمة الاولي .

عليه فان المعادلة المقدرة هي:

$$\widehat{GDP} = -88.6522 * (1 - EXP(0.00083 * Exports)$$

جدول رقم(3): مقاييس النموذج الأسي السالب بطريقة جاوس نيوتن

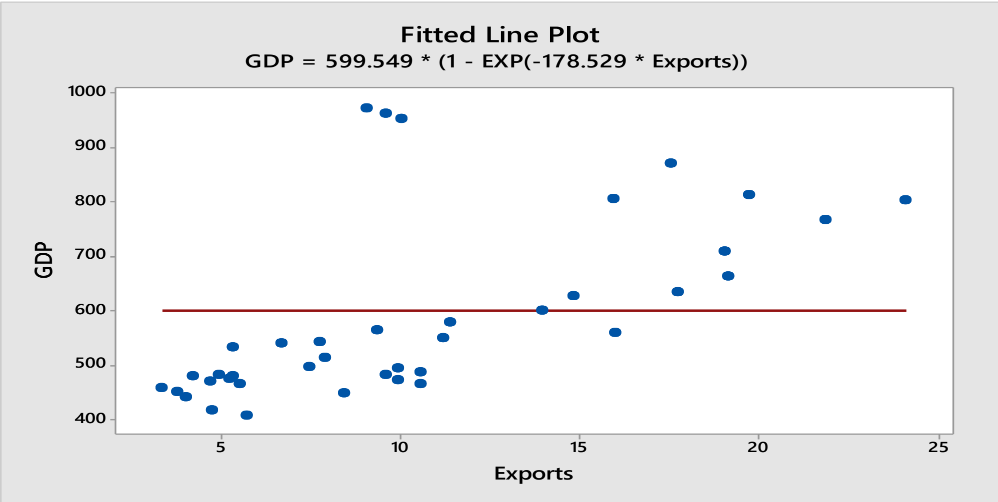
| القيمة | المقياس |
|---|---|
| 0.00001 | Toleranceالتفاوت |
| 200 | Max iterations اكبر تكرار |
| 14427754 | SSE |
| 37 | DFE |
| 389939 | MSE |
| 624.451 | S |
| 200 | Iterations |

الجدول يوضح عدد التكرارات Iterations وهي 200 مره والتي في هذه الحالة تطابقت مع أكبر تكرار Max iterations والتي تم التوصل إليها بعد ثبات قيم مجموع مربعات الخطأ SSE=14427754 وتم التوصل الي القيم المقدرة كما موضحه في الجدول(2).

**ب) تقدير النموذج الأسي السالب باستخدام طريقة مارغوارد:**

شكل رقم (5): العلاقة بين الناتج المحلي الإجمالي والصادرات

للنموذج الأسي السالب بطريقة مارغوارد




جدول رقم(4): تقدير معلمات النموذج الأسي السالب بطريقة مارغواردت

| الخطأ القياسي S.E | التقدير | القيمة الابتدائية | المعلمة |
|---|---|---|---|
| 48.0612 | 599.549 | 0.5 | $B_0$ |
| 0.0406 | 178.529 | 0.3 | $B_1$ |

نلاحظ ان الخطأ القياسي لمعلمة المقطع كبيره مقارنة بالخطأ القياسي للمعلمة الاولي .

عليه فان المعادلة المقدرة هي

$$\widehat{GDP} = 599.549 * (1 - EXP(-178.529 * Exports))$$

جدول رقم(5): مقاييس النموذج الأسي السالب بطريقة مارغواردت:

| القيمة | المقياس |
|---|---|
| 0.00001 | Toleranceالتفاوت |
| 200 | Max iterationsاكبر تكرار |
| 1011450 | SSE |
| 37 | DFE |
| 27336.5 | MSE |
| 165.338 | S |
| 200 | Iterations |

الجدول (5) يوضح عدد التكرارات وهي 200مره التي تم التوصل إليها بعد ثبات قيم مجموع مربعات الخطأ SSE=1011450 وتم التوصل إلى القيم المقدرة كما موضحه في الجدول(4).

**ج) المقارنة بين طريقتي التقدير للنموذج الأسي السالب:**

نستخدم اسلوب مقارنة بين النماذج وهو اسلوب اكايكي حسب الصيغة التالية:-

$$AIC = nLn\left(\frac{SSE}{n}\right) + 2K$$

لدينا من الجداول (3) قيمة SSE=14427754 لجاوس نيوتن وجدول (5) قيمة ال SSE=1011450 لمارغواردت ومن ثم نعوض مباشرة في الصيغة اعلاه علما بان عدد المعلمات K=2.

– قيمة اكايكي لجاوس نيوتن

$$AIC = 39\ln\left(\frac{14427754}{39}\right) + 4 = 504.02$$

– قيمة اكايكي لمارغواردت

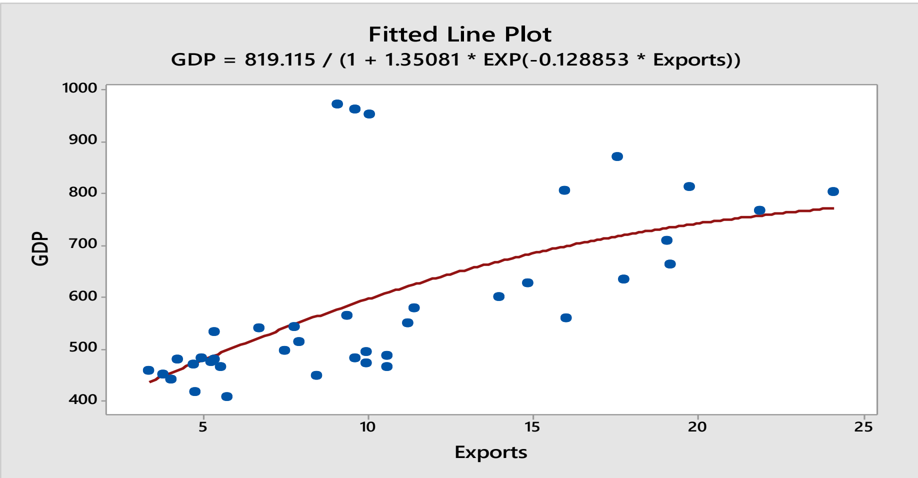
$$402.37 = AIC = 39\ln\left(\frac{1011450}{39}\right) + 4$$

نلاحظ ان قيمة اكايكي لمارغوادت اقل من قيمة اكايكي لجاوس نيوتن وهذا يعني انه الافضل أي انه يمكننا التنبؤ بطريقة مارغواردت للناتج المحلي الإجمالي خاصة النموذج الأسي السالب .

**2.النموذج اللوجستي:**

**أ) تقدير النموذج اللوجستي باستخدام طريقة جاوس نيوتن:**

شكل رقم (6): العلاقة بين الناتج المحلي الإجمالي والصادرات
للنموذج اللوجيستي بطريقة جاوس نيوتن




جدول رقم(6): تقدير معلمات النموذج اللوجيستي بطريقة جاوس نيوتن :

| الخطأ القياسي S.E | التقدير | القيمة الابتدائية | المعلمة |
|---|---|---|---|
| 171.302 | 819.115 | 0 | $B_0$ |
| 0.410 | 1.351 | 1 | $B_1$ |
| 0.093 | -0.129 | 0.5 | $B_2$ |

نلاحظ ان الخطأ القياسي لمعلمة المقطع كبير مقارنة بالخطأ القياسي للمعلمة الاولي .
عليه فان المعادلة المقدرة هي

$$\widehat{GDP} = 819.115 / (1 + 1.351 * EXP(0.129 * Export))$$

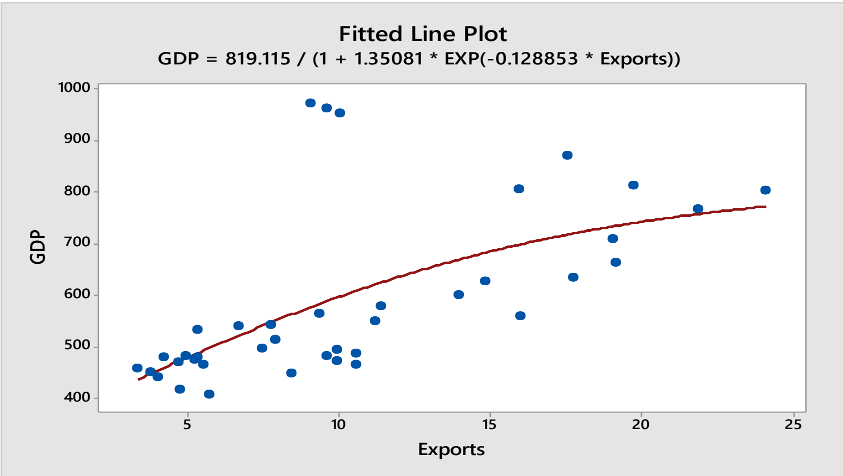
جدول رقم(7): مقاييس النموذج اللوجيستي بطريقة جاوس نيوتن:

| القيمة | المقياس |
|---|---|
| 0.00001 | Tolerance التفاوت |
| 200 | Max iterations اكبر تكرار |
| 621632 | SSE |
| 36 | DFE |
| 17267.6 | MSE |
| 131.406 | S |
| 15 | Iterations |

الجدول يوضح عدد التكرارات وهي 200مره التي تم التوصل إليها بعد ثبات قيم مجموع مربعات الخطأ SSE=621632 وتم التوصل الي القيم المقدرة كما موضحه في الجدول(6).

**ب) تقدير النموذج اللوجستي باستخدام طريقة مارغواردت:**

شكل رقم (7): العلاقة بين الناتج المحلي الإجمالي والصادرات للنموذج اللوجيستي بطريقة مارغواردت




جدول رقم(8): تقدير معلمات النموذج اللوجيستيبطريقة جاوس نيوتن :

| الخطأ القياسي S.E | التقدير | القيمة الابتدائية | المعلمة |
|---|---|---|---|
| 171.302 | 819.115 | 0 | $B_0$ |
| 0.410 | 1.351 | 1 | $B_1$ |
| 0.093 | -0.129 | 0.5 | $B_2$ |

نلاحظ ان الخطأ القياسي لمعلمة المقطع كبيره مقارنة بالخطأ القياسي للمعلمة الاولي .
عليه فان المعادلة المقدرة هي

$$\widehat{GDP} = 819.115 / 1 + (1.351 * EXP(0.129 * Export))$$

جدول رقم(9): مقاييس النموذج اللوجيستي بطريقة مارغواردت:

| القيمة | المقياس |
|---|---|
| 200 | Max iterations اكبر تكرار |
| 0.00001 | Tolerance التفاوت |
| 621632 | SSE |
| 36 | DFE |
| 17267.6 | MSE |
| 131.406 | S |
| 200 | iterations |

الجدول يوضح عدد التكرارات وهي 200مره التي تم التوصل إليها بعد ثبات قيم مجموع مربعات الخطأ SSE=621632 وتم التوصل الي القيم المقدرة كما موضحه في الجدول(8).

**ج) المقارنة بين طريقتي التقدير للنموذج اللوجيستي:**

نستخدم اسلوب مقارنة بين النماذج وهو اسلوب اكايكي حسب الصيغة التالية:-

$$AIC = nLn\left(\frac{SSE}{n}\right) + 2K$$

لدينا من الجداول (7) قيمة SSE=621632 لجاوس نيوتن وجدول(9) قيمة ال SSE=621632 لمارغواردت ومن ثم نعوض مباشرة في الصيغة اعلاه علما بان عدد المعلمات K=4.

- قيمة اكايكي لجاوس نيوتن

$$AIC = 39\ln\left(\frac{621632}{39}\right) + 8 = 385.38$$

- قيمة اكايكيلمارغواردت

$$385.38AIC = 39\ln\left(\frac{621632}{39}\right) + 8=$$

نلاحظ ان قيمة اكايكي لجاوس نيوتن ومارغواردت هي نفس القيمة(385.38)أي ليس هنالك افضلية بين

الطريقتين عليه يمكننا التنبؤ باي منهما.

رابعاً: **اختبار F:**

1. اختبار F للنموذج الأسي السالب:

جدول رقم(10): اختبار F للنموذج الأسي السالب

| Sig | F | متوسط المربعات | درجات الحرية | مجموع مربعات | مصادر البيانات |
|---|---|---|---|---|---|
| 0.000 | 247.59 | 6730378.851 | 2 | 13460757.702 | الانحدار |
| | | 27183.280 | 37 | 1005781.349 | الخطأ |
| | | | 39 | 14466539.051 | المجموع |

نلاحظ من الجدول ان (sig=0.000)اقل من P value=0.05 وهذا يعني ان النموذج معنوي.

2. اختبار F للنموذج اللوجيستي:

جدول رقم(11): اختبار F للنموذج اللوجيستي

| مصادر البيانات | مجموع مربعات | درجات الحرية | متوسط المربعات | F | Sig |
|---|---|---|---|---|---|
| الانحدار | 13835973.11 | 3 | 4611991.37 | 263.3 | 0.000 |
| الخطأ | 630565.941 | 36 | 17515.721 | | |
| المجموع | 14466539.05 | 93 | | | |

نلاحظ من الجدول (10) والجدول (11) ان قيمة اختبار F للنموذج الأسي السالب اقل من قيمة اختبار F للنموذج اللوجيستي أي ان النموذج الأسي السالب هو الافضل.

جدول رقم(12): معايير المقارنة بين النموذجين

| النموذج | متوسط مربعات الخطأ (MSE) | | معيار اكايكي (AIC) | | F |
|---|---|---|---|---|---|
| | جاوس نيوتن | مارغواردت | جاوس نيوتن | مارغواردت | |
| الأسي السالب | 389939 | 27336.5 | 504.02 | 402.37 | 247.59 |
| اللوجستي | 17267.6 | 17267.6 | 383.38 | 383.38 | 263.3 |

## مناقشة النتائج

1. بيانات الناتج المحلي الاجمالي والصادرات لا يرتبطان خطياً عليه فان العلاقة غير خطية.
2. مجموع مربعات الخطأ في النموذج الأسي السالب كانت (SSE=1011450) لمارغواردت اقل من مجموع مربعات الخطأ لجاوس نيوتن (SSE=14427754)، أي ان طريقة مارغواردت افضل. اما في حالة النموذج اللوجيستي كانت قيمة (SSE=621632) لمارغواردت مساوية لقيمة (SSE=6216332) لجاوس نيوتن أي انه لا توجد افضلية بينهما للتنبؤ أي يمكننا التنبؤ باي منهما.
3. متوسط مربعات الخطأ في النموذج الأسي السالب كانت (MSE=27336.5) لمارغواردت اقل من متوسط مربعات الخطأ (MSE=389939) لجاوس نيوتن أي ان طريقة مارغواردت افضل للتنبؤ. اما في حالة النموذج اللوجيستي فان (MSE=17267.6) لمارغواردت هو نفس متوسط مربعات الخطأ لجاوس نيوتن (MSE=17267.6) أي انه يمكننا التنبؤ باي من الطريقتين.
4. عند المقارنة بين قيمتي AIC للطريقتين نجد أنها كانت (504.02) لجاوس نيوتن وكانت (402.37) لمارغواردت ونلاحظ القيمة الأقل لمارغواردت أي انه افضل للتنبؤ في حالة النموذج الأسي السالب، وعند المقارنة بين قيمتي AIC للطريقتين نجد انها كانت (385.38 ) لجاوس نيوتن وهي نفسها لمارغواردت أي ليس هنالك افضليه بينهما للتنبؤ، عليه فان النموذج اللوجيستي هو افضل للتنبؤ من النموذج الأسي السالب وذلك لان له اقل قيمة لمعيار اكايكي .
5. من الجدول رقم (10) والجدول رقم (11) نلاحظ ان قيمة جدول F للنموذج الأسي السالب كانت (F=247.59) قليله مقارنة بقيمة F للنموذج اللوجيستي (F=263.3) أي ان النموذج الأسي السالب افضل.
6. عند مقارنة اكايكي لنفس الطريقة واختلاف النموذج نجد الآتي:

قيمة معيار اكايكي بطريقة جاوس نيوتن للنموذج الأسي السالب (AIC=504.02) اكبر من قيمة معيار اكايكي بطريقة جاوس نيوتن للنموذج اللوجيستي (AIC=385.38) أي ان النموذج اللوجيستي افضل لان له اقل قيمة لمعيار اكايكي.

قيمة معيار اكايكي بطريقة مارغواردت للنموذج الأسي السالب (AIC=402.37) اكبر من قيمة معيار اكايكي بطريقة مارغواردت للنموذج اللوجيستي (AIC=385.38) أي ان النموذج اللوجيستي افضل لان له اقل قيمة ل اكايكي.

**الخلاصة**

من خلال النتائج السابقة توصلت الدراسة الي استخدام النموذج اللوجيستي في تقدير الناتج الاجمالي باستخدام طريقتي التقدير مارغواردت او جاوس نيوتن لانهما يعطيان نفس النتيجة أي انه ليست هنالك افضلية بينهما . واوصت الدراسة باجراء دراسات مستمرة للناتج المحلي الاجمالي وخاصة في التغيرات السائدة مؤخرا. وعلي القائمين علي الجهاز المركزي للإحصاء الاستفادة من النتائج التي تم التوصل اليها وتكثيف الدراسة في هذا المجال بهدف الحصول علي افضل النتائج واكثرها دقة.

**المراجع**


1- حسين، محمد عباس ،(2016)،" استخدام الطريقة التكرارية جاوس _نيوتن لتحليل وتقدير النماذج غير الخطية بالتطبيق على انتاج النفط في السودان للفترة1997-2015م ، رسالة ماجستير كلية العلوم جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا.

2- عبد اللطيف، عفراء هاشم، (2005)، " تقدير وتحليل نماذج الانحدار اللاخطية بالتطبيق على انتاج السكر في السودان للفترة 1980-2004م" ، رسالة ماجستير كلية العلوم جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا.

3- مهدي، ازهر هادي، (2011)،" استخدام النماذج الخطية واللاخطية لقياس قوة تحمل الكونكريت للضغط المسلط عليه، مجلة الهندسة والتكنولوجيا 30(4) ،99-107.

4- Ronald Christensen,(1997),"Log linear Models and Logistic Regression", Springer.

5- S. Huet , A.Bouvier, MA Poursat E.Jolivet, (2003),"Statistical Tools for Nonlinear Regression", springer.

6- G.A.F.Seber ,C.J.Wild,(2003),"Nonlinear Regression", John Wiley and sons.

## بيانات الدراسة

| الصادرات | الناتج المحلي الاجمالي | السنه |
|---|---|---|
| 11.22 | 549.52 | 1979 |
| 9.38 | 564.83 | 1980 |
| 7.92 | 513.95 | 1981 |
| 9.96 | 472.02 | 1982 |
| 10.58 | 463.27 | 1983 |
| 9.62 | 480.98 | 1984 |
| 9.94 | 492.41 | 1985 |
| 10.60 | 485.88 | 1986 |
| 8.46 | 446.92 | 1987 |
| 5.75 | 406.42 | 1988 |
| 4.74 | 416.67 | 1989 |
| 5.52 | 463.68 | 1990 |
| 3.80 | 450.52 | 1991 |
| 5.34 | 478.00 | 1992 |
| 4.02 | 439.31 | 1993 |
| 3.34 | 458.28 | 1994 |
| 5.25 | 473.21 | 1995 |
| 4.23 | 479.11 | 1996 |
| 4.69 | 468.74 | 1997 |
| 4.97 | 481.79 | 1998 |
| 7.45 | 495.42 | 1999 |
| 5.34 | 532.25 | 2000 |
| 6.70 | 539.75 | 2001 |
| 7.78 | 541.10 | 2002 |
| 15.98 | 559.43 | 2003 |
| 11.40 | 579.14 | 2004 |
| 13.98 | 599.10 | 2005 |
| 14.83 | 627.34 | 2006 |
| 17.76 | 633.38 | 2007 |
| 19.18 | 661.64 | 2008 |
| 19.07 | 707.67 | 2009 |
| 21.89 | 766.92 | 2010 |
| 24.10 | 803.56 | 2011 |
| 15.97 | 806.68 | 2012 |
| 19.74 | 812.05 | 2013 |
| 17.57 | 871.54 | 2014 |
| 10.02 | 953.05 | 2015 |
| 9.58 | 964.06 | 2016 |
| 9.07 | 972.65 | 2017 |