بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا

كلية التربية - قسم العلوم

شعبة الرياضيات

بحث تكميلي لنيل درجة بكالوريوس شرف التربية رياضيات

بعنوان:

نظريات التباعد والإلتفاف والإنحدار وتطبيقاتها

إعداد:
أبرار حسب الرسول زين العابدين مصطفى.
سماح لقمان أحمد عبدالرازق
فيروز أحمد فضل المولى محمد
لقمان موسى علي محمد

إشراف:
أ. عمر خليل عثمان

سبتمبر 2018م

k

الآيـة

قال تعالى:

چٹ ٺ ٺ ٹ ٹ ٹ ڈ ٿڤ ڤ ڤ ڦ ڦ ڦڦ ڦ ڦ ڄڄ

ڃ ڃ ڃڃ ڃ ڃ ڃ ڃ ڃ ڃ ڃ ڃ ڃ ڃ چ

صدق الله العظيم

سورة الرعد الآية (2)

الإهداء

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على خاتم الأنبياء والمرسلين، إلهي لا يطيب الليل إلا بشكرك ولا يطيب النهار إلا بطاعتك ولا تطيب اللحظات إلا بذكرك ولا تطيب الآخرة إلا بعفوك ولا تطيب الجنة إلا برؤيتك ...

إلى من اسقتني الحب والحنان ... إلى رمز الحب وبلسم الشفاء ... إلى القلب الناصع بالبياض ... إلى من أكبر على يديها وعليها أعتمد ...

أمي الحبيبة

إلى من كلله الله بالهيبة والوقار إلى من علمني العطاء بدون إنتظار ... إلى من أحمل اسمه بكل افتخار ...

إلى القلب الكبير والدي

إلى من هم أقرب إلي من روحي ... إلى من شاركوني حضن الأم وبهم استمد عزتي وإصراري ...

أخوتي الأعزاء

إلى من يحلو بهم الإخاء تميزوا بالوفاء والعطاء ... إلى ينابيع الصدق إلى من سعدت برفقتهم

أصدقائي ورفقاء دربي

إلى من وهبوني الأمل والتفاؤل في الحياة ونهلت من تجاربهم وكانوا ومازالوا عوناً في حياتنا.

الأساتذة الأجلاء

الشكر والتقدير

بحروف نكتبها لكم من نور ..صدقاً وأمانة نطوقها بالعهد والوفاء نترجمها شكراً وتبجيلاً لفضائل وجلائل أعمالكم التي أشرأبت لها هامة الزمان وتظل أعمالكم شعلاًً تضيئ عزة وشموخاً .

فعندما يتوارث الناس روائع الأشياء ...تكون منبعاً للأصالة أو في ألق التهذيب ... هكذا عرفناكم ... وانصهرت هممكم العالية بذلاً وعطاء وامتزجت أرواحكم بالنيل والنقاء وكنتم قناديلاً تحترق لتهب غيرها الضياء.

وتختبئ الكلمات بعيداً عن عيون القلم لأنها طعم المستحيل في التعبير عن الشكر والثناء ويبقى ما نكتب وثيقة للصدق والمحبة إعترافاً لما قدمته لنا الأب الروحي وقائد السرب.

أستاذ: عمر خليل عثمان

بكل فخر وإعزاز تتوجك اليوم ملكاً في بحور العلم والمعرفة ونزف لك أسمى آيات الشكر المعبقة بعطر الفل والياسمين.

والشكر كل الشكر إلى جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا ذلك الصرح الشامخ بمتمثلاً في كلية التربية قسم العلوم –رياضيات.

ملخص البحث:

تحدثنا في هذا البحث عن نظريات الالتفاف والإنحدار والتباعد، وما مدى أهميتها في الرياضيات والحياة العامة؟ وللإجابة عن هذا السؤال تطرقنا لمفاهيم عدة من خلال البحث فتناولنا في الفصل الثاني مقدمة عن المتجهات ونظريات قرين واستوكس ومن ثم بعض الأمثلة على نظريات الالتفاف والانحدار والتباعد وطرق إيجادها.

كل باب يبدأ بعبارات ونصوص واضحة وبتعريفات وثيقة الصلة بالموضوع وكذلك الأساسيات والنظريات سوياً ثم أعقبناها ببعض التطبيقات الفيزيائية على تلك النظريات وفي الفصل الخامس النتائج والتوصيات.

Abstract:

This research focused on the theories of curl, Gradient and divergence and its importance in the field of mathematics and life in general. For answering this question we talked about many concepts so the second chapter gave introduction about the vectors and green and stocks theories and some examples in the theories of curl, gradient and divergence and of How to find it.

Every chapter begins with clear and obvious concepts and definitions related to the title of the research. Focusing both on the theories and principles and we added the physical applications to these theories.

Therefore in the fifth chapter we introduced the findings and recommendations for the study.

الفهرس

	الموضوع	الصفحة
	البسملة	أ
	الآية	ب
	الإهداء	ج
	الشكر والتقدير	د
	ملخص البحث	هـ

	Abstract	و
الفصل الأول		
1-1	المقدمة	1
2-1	مشكلة البحث	1
3-1	أسئلة البحث	1
4-1	أهداف البحث	2
5-1	أهمية البحث	2
6-1	منهج البحث	2
الفصل الثاني		
1-2	الكمية غير المتجهة (القياسية)	3
2-2	الكمية المتجهة	3
3-2	متجهات الوحدة	7
4-2	جبر المتجهات	8
5-2	قوانين المتجهات	9
6-2	مركبات المتجهات	12
7-2	عملية الضرب الداخلي (أو الجداء القياسي) (dot)	17
8-2	نظرية التباعد لجاوس	17
9-2	نظرية ستوكس	18
10-2	نظرية جرين في المستوى	18
الفصل الثالث		
1-3	التباعد	21
2-3	برهان قوانين التباعد	25

3-3	الالتفاف (الدوران)	27
4-3	الإنحدار أو الميلان	34
الفصل الرابع		
1-4	الانحدار	40
2-4	التباعد	42
3-4	تطبيقات محلولة	44
الفصل الخامس		
1-5	النتائج	51
2-5	التوصيات	52
3-5	المصادر والمراجع	53

الفصـــل الأول

1-1 المقدمة:

دراسة المتجهات عموماً مهمة جداً وخاصة ذلك الفرع الذي ينبثق منها وهو نظريات الإلتفاف والإنحدار والتباعد وتطبيقاتها، وهي تتضمن بعض المفاهيم منها الكمية القياسية: هي الكمية التي ليس لها اتجاه في الفراغ.

أيضاً الكمية المتجة وهي التي يكون لها مقدار واتجاه في نفس الزمن.

2-1 مشكلة البحث:

من خلال دراسة مادة تحليل المتجهات استشعر الدارسون أن نظريات الالتفاف والانحدار والتباعد لها من الأهمية مكان وللتعرف عليها أكثر تحتاج لدراسة موسعة لذلك اتجه الدارسون للتنقيب في أعماق هذه النظريات ودراستها بشكل أوسع.

3-1 أسئلة البحث:

1- ما أهمية دراسة نظريات الالتفاف والانحدار والتباعد؟

2- هل توجد علاقة بين تلك النظريات الثلاث؟

3- هل لهذه النظريات تطبيقات في العلوم الأخرى؟

1-4 أهداف البحث:

1- دراسة نظريات الالتفاف والانحدار والتباعد بصورة أوسع.

2- التعرف على العلاقة بين النظريات (الالتفاف والانحدار والتباعد).

3- بيان تطبيقاتها في العلوم الأخرى.

1-5 أهمية البحث:

لقد إزدادت الحاجة إلى دراسة الالتفاف والانحدار والتباعد، لأنها تتضمن حل المتجهات، وتبرز أهميتها في التطبيقات الفيزيائية المختلفة.

1-6 منهج البحث:

استخدم الباحثون في هذا البحث المنهج التحليلي الوصفي

الفصـــل الثانـي

2-1 الكمية غير المتجهة (القياسية):

هي الكمية التي ليس لها اتجاه في الفراغ مثل الطول، الزمن، درجة الحرارة، الكتلة، الكثافة، الحجم فكل منها لها مقدار فقط وليس له اتجاه.

يتم تعيين الكميات القياسية بمعرفة الأرقام الدالة على مقاديرها، وتجمع وتطرح بالطرق العادية، ويرمز لها عادة بالحروف العادية.

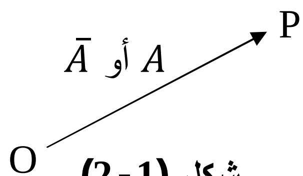
2-2 الكمية المتجهة:

هي الكمية التي يتم تعريفها تماماً بتعيين كل من مقدارها واتجاهها ومن أمثلتها الازاحة، السرعة، العجلة، القوة. مثلاً متجه الإزاحة يمكن أن يكون التغير في الموضع من نقطة معينة إلى نقطة أخرى على بعد 2 cm من النقطة الأولى في الاتجاه x، كذلك السيارة المتحركة في اتجاه الجنوب بسرعة 40km/h ولها (متجه سرعة) مقداره 40 km/h في اتجاه الجنوب.

تعريف آخر: المتجة هو كمية لها مقدار واتجاه مثل السرعة، التسارع، المجال الكهربي، العزم، الإزاحة.

* يمثل المتجه بيانيا بسهم $\overrightarrow{OP}$يحدد الاتجاه، وطول هذا السهم يعين مقدار المتجه (شكل 1-2)، ونهاية ذيل السهم تسمى نقطة البداية للمتجه أو نقطة الأصل ويسمى الرأس P بنقطة النهاية.

* يعبر عن المتجه تحليلياً بحرف فوقه سهم كما في شكل 1-1 ومقدار هذا المتجه يرمز له بالرمز $|\vec{A}|$.



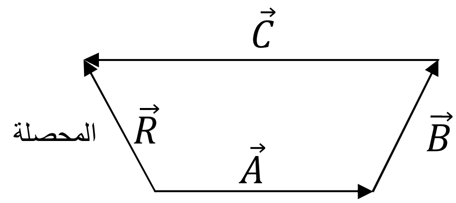
شكل (1-2)

* لا يمكن تعريف المتجه بصورة كاملة ما لم نحدد بعض القواعد للتعامل معه وهي:

- المحصلة لعدد من المتجهات من نوع معين (متجهات قوة مثلاً) هي ذلك المتجه الوحيد الذي يكون له نفس تأثير المتجهات مجتمعة.

- طريقة الرسم التخطيطي لجمع المتجهات (طريقة متعدد الأضلاع):

تتلخص هذه الطريقة لايجاد المحصلة $\vec{R}$ لعدة متجهات $(\vec{A}, \vec{B}, \vec{C})$ بالبدء عند أي نقطة يرسم سهم كل متجه (بمقياس رسم مناسب في الاتجاه المحدد) طبقاً لأي ترتيب، مثلاً تتصل بداية كل سهم بنهاية السهم الذي يسبقه كما في الشكل التالي:



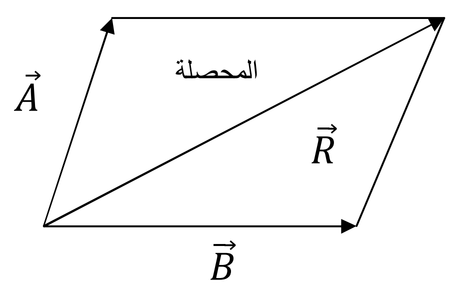
$$\vec{A} + \vec{B} + \vec{C} = \vec{C} + \vec{A} + \vec{B} = \vec{R}$$

تمثل المحصلة بسهم يبدأ من نقطة البدء ويقع رأسه عند نقطة نهاية المتجه الآخر

إذا كانت $\vec{R}$ هي المحصلة فإن $R = |\vec{R}|$ هو مقدار المتجه.

- طريقة متوازي الأضلاع لجمع متجهين:

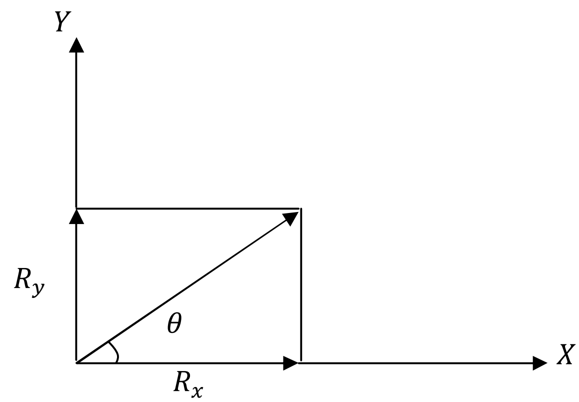
يمكن تمثيل محصلة المتجهين بينهما زاوية ما بقطر متوازي الأضلاع. تمثل المتجهات بضلعي متوازي الأضلاع وتكون المحصلة ممثلة بقطره، كما هو مبين في الشكل:



- مركبة متجه ما:

هي قيمته الفعالة في اتجاه معين، فعلى سبيل المثال مركبة الإزاحة في الاتجاه x هو الإزاحة للمحور x ويمكن اعتبار أي متجه في الفراغ على أنه

محصلة مركباته في أي ثلاث اتجاهات متعامدة، بالمثل يمكن تحليل متجة ما في اتجاهين إلى مركبتين في اتجاهين متعامدين كما في الشكل:



الشكل يوضح المتجه $\vec{R}$ومركبتيه $\vec{R}_x, \vec{R}_r$ في اتجاه المحورين x, y

مقدار كل منهما

$$\vec{R}_x = |\vec{R}| \cos\theta, \qquad \vec{R}_y = |\vec{R}| \sin\theta$$

وأيضاً تكتب على الصورة:

$$R_x = R\cos\theta, \qquad R_y = R\sin\theta$$

- طريقة المركبات لجمع المتجهات:

يتم تحليل كل متجه إلى مركباته في الاتجاهات x, y, z مع اعتبار المركبات في الاتجاهات المعاكسة سالبة، المركبة القياسية R في الاتجاه (R_x) هي حصل الجمع الجبري لكل المركبات القياسية في الاتجاه x.

بنفس الطريقة يتم ايجاد المركبتين القياسيتين للمحصلة في الاتجاهين y, z، يحسب مقدار المحصلة بمعلومية المركبات من المعادلة $R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2 + R_z^2}$ في حالة بعدين نحسب زاوية ميل المحصلة على المحور x من المعادلة $\tan\theta = \frac{R_y}{R_x}$.

2-3 متجهات الوحدة:

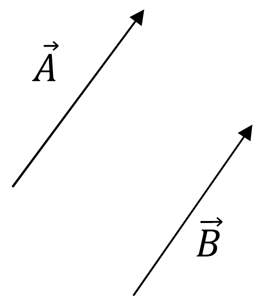
لها مقدار يساوي الواحد وتمثل برمز أسود ثقيل فوقه علامة (^) يرمز لمتجهات الوحدة الخاصة في الاتجاهات X, Y, Zعلى الصورة $\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$على الترتيب، المتجه $3\hat{\imath}$ يمثل متجه مقداره ثلاث وحدات في الاتجاه X بينما يمثل المتجه $5\hat{k}$مقدار خمس وحدات في الاتجاه Z، المركبتان القياسيتان R_y, R_xفي الاتجاهين X, Y للمتجه $\hat{R}$ يمكن كتابتها على الصورة $R = R_x\hat{\imath} + R_y\hat{\jmath} + R_z\hat{k}$

الإزاحة:

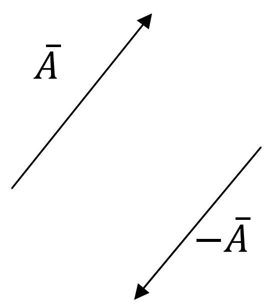
عندما يتحرك جسم ما من نقطة إلى نقطة أخرى في الفراغ فإن الإزاحة تمثل بمتجه من الموضع الابتدائي إلى الموضع النهائي، وتعتمد الازاحة على المسافة الفعلية المقطوعة.

4-2 جبر المتجهات:

1- يقال أن $\vec{A}$يساوي $\vec{B}$إذ أن كان لهما نفس المقدار والاتجاه بغض النظر عن موضع نقطة البداية وبذلك يكون $A = B$كما في الشكل:

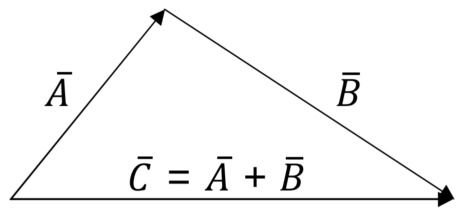


2- المتجه الذي له نفس مقدار المتجه $\hat{A}$ ولكن يعاكسه في الاتجاه هو المتجه $-\hat{A}$ كما في الشكل التالي:



3- مجموع أو محصلة متجهين $\hat{A}, \hat{B}$ هو المتجه $\hat{C}$ المتكون بوضع نقطة البداية للمتجه $\hat{B}$ على نقطة النهاية للمتجه $\hat{A}$ ثم نوصل نقطة البداية للمتجه $\hat{A}$ بنقطة النهاية للمتجه $\hat{B}$ كما في الشكل (2-4).

* لاحظ أن اتجاه المحصلة $\hat{C}$ يعاكس اتجاه المتجهين $\hat{A}, \hat{B}$.



الشكل (2-4)

4- الفرق بين متجهين $\hat{A}, \hat{B}$ هو آخر $\hat{C}$ يعبر عنه بالرمز $\hat{A} - \hat{B}$ والمتجه $\hat{A} - \hat{B}$ يكافئ المتجه $\hat{A} + (-\hat{B})$.

ملاحظة: إذا كان $\hat{A}$ يساوي $\hat{B}$ فإن $\hat{A} - \hat{B} = 0$ وهذا ما يسمى بالمتجه الصفري أما المتجه غير الصفري فهو متجه حقيقي.

5- ضرب المتجه بكمية عددية m هو متجه $m\hat{A}$ الذي قيمته $|m|$ مضروباً في مقدار $\hat{A}$ وله نفس الاتجاه، وا إذا كانت $m = 0$ فإن $(\hat{A})(0) = 0$.

2-5 قوانين المتجهات:

إذا كان كل من A, B, C متجهات و k, m, n أعداد فإن:

1- الخاصية التبديلية لجمع المتجهات:

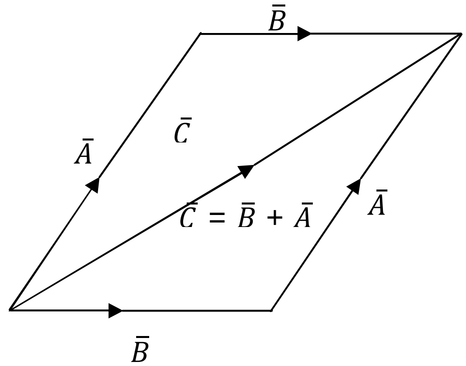
$$\hat{A} + \hat{B} = \hat{B} + \hat{A}$$

البرهان:

$$\hat{A} + \hat{B} = \hat{C} \qquad (1)$$

$$\hat{B} + \hat{A} = \hat{C} \qquad (2)$$

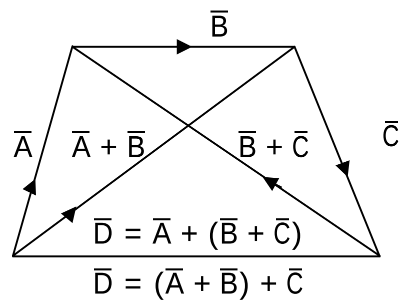
من (1) و (2) $\hat{A} + \hat{B} = \hat{B} + \hat{A} \longleftarrow$



شكل (2-5)

2- الخاصية التجميعية لجمع المتجهات:

$$\hat{A} + \left(\hat{B} + \hat{C}\right) = \left(\hat{A} + \hat{B}\right) + \hat{C}$$



الشكل (2-6)

من الشكل:

$$\left(\hat{A} + \hat{B}\right) + \hat{C} = \widehat{D} \ldots (1)$$

$$\hat{A} + \left(\hat{B} + \hat{C}\right) = \widehat{D} \ldots (2)$$

$$\left(\hat{A} + \hat{B}\right) + \hat{C} = \hat{A} + \left(\hat{B} + \hat{C}\right) \longleftarrow (2), (1)$$

3- الخاصية التبديلية لضرب المتجه بعدد حقيقي:

$$K\vec{A} = \vec{A}K, \qquad K \in \Re$$

4- الخاصية التجميعية لضرب المتجه بعددين حقيقيين:

$$K\left(L\vec{A}\right) = (KL)\vec{A}$$

$$\forall K, L \in \Re$$

5- خاصية التوزيع:

$$(K + L)\vec{A} = K\vec{A} + L\vec{A}$$

$$K\left(\vec{A} + \vec{B}\right) = K\vec{A} + K\vec{B}$$

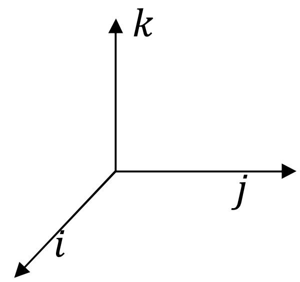
$$K, L \in \Re$$

وحدة المتجه:

تعريف:وحدة المتجه $\vec{A}$ هو متجه آخر مثلاً $\vec{a}$ ويعطى حسب العلاقة $\vec{a} = \frac{\vec{A}}{\vec{A}}$ حيث $A \neq 0$.

6- متجهات الوحدة الأساسية (العمودية)$\hat{\imath}, \hat{\jmath}, \hat{k}$:

تعريف: متجهات الوحدة الأساسية تكون في نفس الاتجاه الموجب للمحاور الثلاثة المتعامدة $X, Y. Z$ مع تطبيق اليد اليمنى على حركة وحدة المتجه.

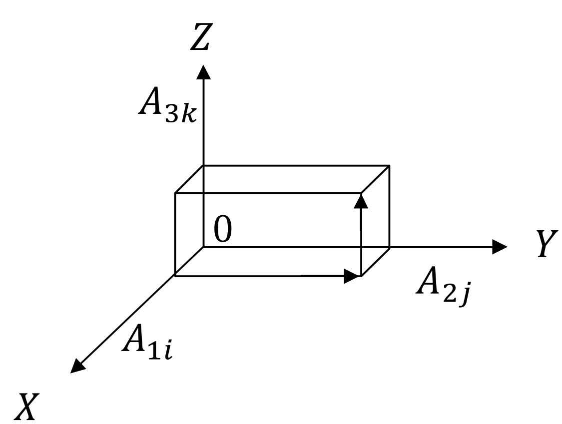


شكل (2-7)

2-6مركبات المتجهات:

تعريف:

ليكن $\vec{A} = A_{1i} + A_{2j} + A_{3k}$ فإن A_{1i}, A_{2j}, A_{3k} هي مركبات المتجه $\vec{A}$ وهي في نفس اتجاه المحاور الثلاثة ويمكن توضيحها كما هو مبين في الشكل التالي:

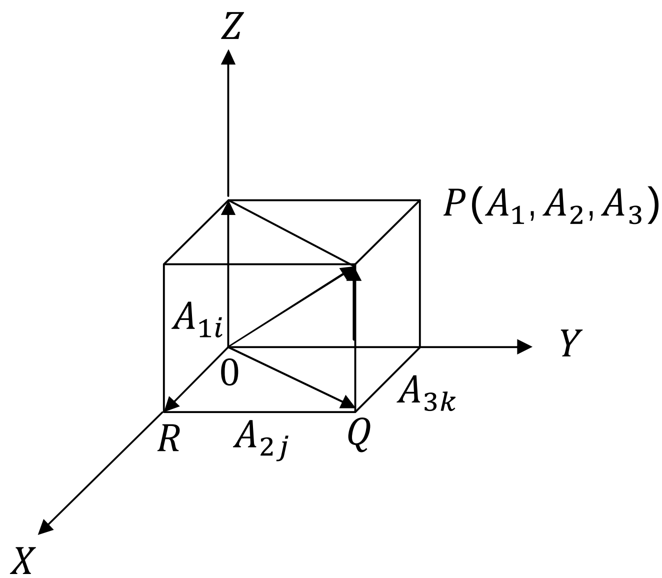


مقدار المتجه $\vec{A}$:

ليكن $\vec{A} = A_{1i} + A_{2j} + A_{3k}$ ويرمز له بالرمز $|\vec{A}|$ يعطى حسب العلاقة التالية:

$$|\vec{A}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$$

البرهان:



$$(\overrightarrow{OP})^2 = (\overrightarrow{OG})^2 + (\overrightarrow{QP})^2 \ldots (1),$$

$$(\overrightarrow{OQ})^2 = (\overrightarrow{OR})^2 + (\overrightarrow{OG})^2 \ldots (2)$$

نعوض (2) في (1)

$$\Rightarrow (\overrightarrow{OP})^2 = (\overrightarrow{OR})^2 + (\overrightarrow{RQ})^2 + (\overrightarrow{QR})^2 \ldots (3)$$

$$\left.\begin{array}{r}\overrightarrow{OP} = \vec{A}\\ \overrightarrow{OR} = \vec{A}_{1i}\\ \overrightarrow{RQ} = \vec{A}_{2j}\\ \overrightarrow{QR} = \vec{A}_{3k}\end{array}\right\} \dots (4)$$

نعوض (4) في (3) مع أخذ المقدار لكل حد

$$\Longrightarrow \left|\vec{A}\right|^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2$$

بأخذ الجذر التربيعي للطرفين

$$\Longrightarrow \left|\vec{A}\right| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$$

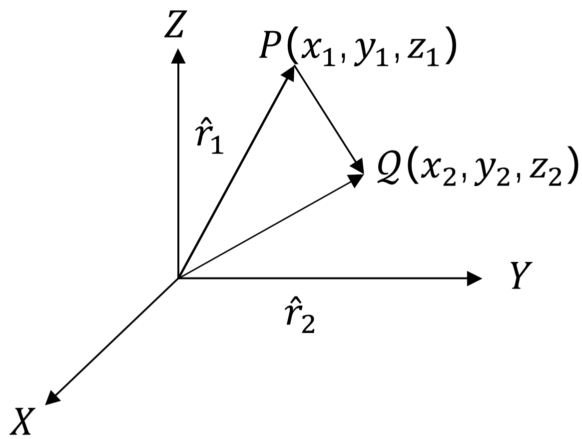
المتجه القياسي:

تعريف:المتجه القياسي هو المتجه الذي بدايته نقطة الأصل ونهايته إلى نقطة في الفضاء. ليكن $\vec{A} = \overrightarrow{PQ}$ بحيث أن أحداثيات $Q(x_2, y_2, z_2), P(x_1, y_1, z_1)$ فإن:

$$\vec{A} = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 + z_1)k$$

$$\left|\vec{A}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 + z_1)^2}$$

البرهان:



$\overrightarrow{r_1} = x_{1i} + y_{1j} + z_{1k} \ldots (1)$

$\overrightarrow{r_2} = x_{2i} + y_{2j} + z_{2k} \ldots (2)$

ولكن

$\overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{r_2}$

$\Longrightarrow \overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_1}$

$\overrightarrow{PQ} = \left(x_{2i} + y_{2j} + z_{2k}\right) - (x_{1i} + y_{1j} + z_{1k})$

$\overrightarrow{PQ} = (x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 + z_1)k$

$\left|\overrightarrow{PQ}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 + z_1)^2}$

11- إذا كانت α, β, γ هي الزوايا التي يصنعها المتجه $\overrightarrow{PQ}$مع المحاور x, y, z على التوالي فإن:

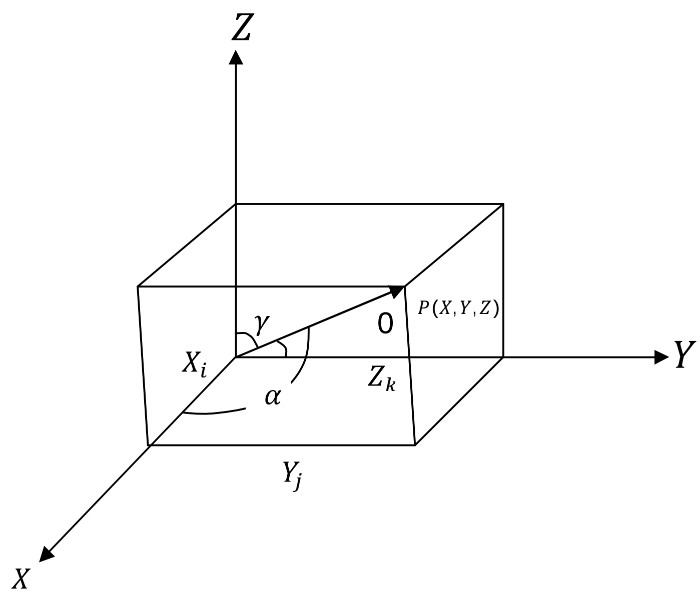
$$\cos\alpha = \frac{x}{|r|}, \quad \cos\beta = \frac{y}{|r|}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{|r|}$$

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

البرهان:

من الشكل نلاحظ أن:

$$\cos\alpha = \frac{x}{|r|}, \quad \cos\beta = \frac{y}{|r|}, \quad \cos\gamma = \frac{z}{|r|}$$



$$\Longrightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2}{r^2} + \frac{y^2}{r^2} + \frac{z^2}{r^2}$$

$$\Longrightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

حيث

$$|\vec{r}| = r$$

$$\Longrightarrow \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} = \frac{r^2}{r^2} = 1$$

2-7 عملية الضرب الداخلي (أو الجداء القياسي) (dot):

تعريف:

عملية الضرب الداخلي أو عملية الجداء القياسي أو عملية الضرب القياسي للمتجهين $\vec{A},\vec{B}$ ويرمز لها بالرمز $\vec{A}\cdot\vec{B}$ وتقرأ $\vec{A} Dot \vec{B}$

وتعطى حسب العلاقة التالية:

$$\vec{A}\cdot\vec{B} = |\vec{A}||\vec{B}|\cos\theta$$

حيث θهي الزاوية المحصورة بين المتجهين $\vec{A},\vec{B}$ و $0 \leq \theta \leq \pi$.

2-8 نظرية التباعد لجاوس:

تنص على أنه إذا كانت V هي الحجم المحدد بسطح مغلق A, S دالة موضع متجه لها تفاضل مستمر إذن

$$\iiint_V \nabla\cdot A\, dV = \iint_S A\cdot n\, dS = \oiint_S A\cdot dS$$

حيث n هو العمود الموجب على S (في اتجاه الخارج).

2-9 نظرية ستوكس:

تنص على أنه إذا كانت Sسطحاً مفتوحاً، ذا جانبين محدداً بمنحنى غير متقاطع C(منحنى بسيط مغلق) حينئذ إذا كانت A لها مشتقات مستمرة.

$$\int_c A \cdot dr = \iint_S (\nabla \times A) \cdot n\, dS = \iint_S (\nabla \times A) \cdot dS$$

حيث C تتحرك في الاتجاه الموجب. يسمى اتجاه C موجباً إذا كان مشاهداً يسيراً على حدود S في هذا الاتجاه، ورأسه تشير إلى اتجاه العمود الموجب لـS يكون السطح على شماله.

2-10 نظرية جرين في المستوى:

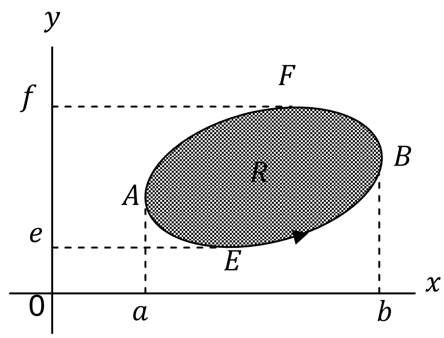
إذا كانت R منطقة مغلقة في المستوى xyمحددة بمنحنى مغلق بسيط C وا إذا كانت N, Mدوال مستمراً في x و y ولهما مشتقات مستمرة في المنطقة فإن:

$$\int_c M\, dx + N\, dy = \iint_R (\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y})\, dx\, dy$$

حيث Cتتحرك في الاتجاه الموجب (عكس عقارب الساعة) مما لم لم يذكر غير ذلك سنفترض دائماً أن ϕأن التكامل مذكور في الاتجاه الموجب.

تطبيق (1):

أثبت أن نظرية جرين في المستوى إذا كان C منحنى مغلق الذي له الخاصية أن أي خط مستقيم يوازي محاور الاحداثيات تقطع C في نقطتين على الأكثر.



لتكون معادلات المنحنيات AEB و AFB (شكل 6-2) هي $y = Y_1(x)$ و $y = Y_2(x)$على الترتيب. إذا كانت R هي منطقة محددة بـ C يكون لدينا

$$\iint_R \frac{\partial M}{\partial y} dx\, dy = \int_{x=a}^{b} \left[\int_{y=Y_1(x)}^{Y_2(x)} \frac{\partial M}{\partial y} dy \right] dx$$

$$= \int_{x=a}^{b} M(x,y)\Big|_{y=Y_1(x)}^{Y_2(x)} dx$$

$$= \int_a^b [M(x, Y_2) - M(x, Y_1)] dx$$

$$= -\int_a^b M(x, Y_1) dx - \int_b^a M(x, Y_2) dx = -\oint_C M\, dx$$

حينئذ

$$\oint_C M\,dx = -\iint_R \frac{\partial M}{\partial y}\,dx\,dy \qquad (1)$$

بالمثل لتكن معادلات المنحنيات EAF و EBF هي $x = X_1(y)$ و $x = X_2(y)$ على الترتيب. إذن

$$\iint_R \frac{\partial N}{\partial x}\,dx\,dy = \int_{y=e}^{f}\left[\int_{x=X_1(y)}^{X_2(y)} \frac{\partial N}{\partial x}\,dx\right]dy =$$

$$= \int_e^f [N(X_2, y) - N(X_1, y)]dy$$

$$= \int_f^e N(X_1, y)dy + \int_e^f N(X_2, y)dy = \oint_C N\,dy$$

إذن

$$\oint_C N\,dy = \iint_R \frac{\partial N}{\partial x}\,dx\,dy \qquad (2)$$

بجمع (1) و (2)

$$\oint_C M\,dx + N\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial M}{\partial y} + \frac{\partial N}{\partial x}\right)dx\,dy$$

الفصـــلالثالث

نظريات التباعد والالتفاف والانحدار

3-1 التباعد($\vec{\nabla} \circ \vec{E}$ أو $\text{div}\,\vec{E}$):

لنفرض مجالاً متجهاً مثل E حيث $E = \vec{E}(x, y, z)$ فإن تباعد المجال يمثل فيزيائياً الشغل المنجز من قبل هذا المجال وهو كمية قياسية.

ليكن $V(x, y, z) = v_1 i + v_2 j + v_3 k$ معرفة وقابلة للتفاضل عند كلنقطة (x, y, z) في نقطة معينة في الفراغ (أي أن V هي مجال المتجه القابل للتفاضل) إذن تباعد v يكتب $\nabla \cdot v$ أو $\text{div}\, v$ ويعرف بالمعادلة:

$$\nabla \cdot v = \left[\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right] \cdot (v_1 i + v_2 j + v_3 k)$$
$$= \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

نلاحظ التشابه مع

$$\vec{\Lambda} \cdot \vec{B} = A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3$$

أيضاً نلاحظ أن:

$$\nabla \cdot v \neq v \cdot \nabla$$

$$\nabla \cdot v = \frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}$$

$$= (v_1 i + v_2 j + v_3 k) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right)$$

$$= v_1 \frac{\partial}{\partial x} + v_2 \frac{\partial}{\partial y} + v_3 \frac{\partial}{\partial z}$$

تطبيق (1):

$$\vec{A} = x^2 z i - 2y^3 z^2 j + xy^2 z k$$

أوجد $\nabla \cdot \vec{A}(\mathrm{div}\,\vec{A})$ عند النقطة $(1,-1,1)$

الحل:

$$\nabla \cdot \vec{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right) \cdot (x^2 z i - 2y^3 z^2 j + xy^2 z k)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(x^2 z) + \frac{\partial}{\partial y}(-2y^3 z^2) + \frac{\partial}{\partial z}(xy^2 z)$$

$$= 2xz - 6y^2 z^2 + xy^2 |_{(1,-1,1)}$$

$$= 2(1)(1) - 6(-1)^2(1)^2(1)(-1)^2 = 2 - 6 + 1 = -3$$

تطبيق (2):

إذا كان: $\phi = 2x^3 y^2 z^4$

أ- أوجد $\nabla \cdot \nabla\phi$ (div grad (ϕ)

ب- بين أن: $\nabla \cdot \nabla\phi = \nabla^2\phi$

حيث:

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

تمثل معامل لابلاس

الحل:

أ/

$$\nabla\phi = i\frac{\partial}{\partial x}(2x^3y^2z^4) + j\frac{\partial}{\partial y}(2x^3y^2z^4) + k\frac{\partial}{\partial z}(2x^3y^2z^4)$$
$$= 6x^2y^2z^4 i + 4x^3yz^4 j + 8x^3y^2z^3 k$$

أي أن:

$$\nabla \cdot \nabla\phi = \left[\frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k\right].$$

$$6x^2y^2z^4 + 4x^3yz^4 + 8x^3y^2z^3$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(6x^2y^2z^4)i + \frac{\partial}{\partial y}(4x^3yz^4)j$$
$$+ \frac{\partial}{\partial z}(8x^3y^2z^3)k$$
$$= 12xy^2z^4 + 4x^3yz^4 + 24x^3y^2z^2$$

ب-

$$\nabla \cdot \nabla \phi = \left[\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right] \cdot \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} i + \frac{\partial \phi}{\partial y} j + \frac{\partial \phi}{\partial z} k\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial \phi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = \left[\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right] \phi$$

$$= \nabla^2 \phi$$

حيث ∇^2 تسمى بمعامل لابلاس

تطبيق (3):

أثبت أن $\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = 0$

$$\nabla^2\left(\frac{1}{r}\right) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2+y^2+z^2)^{-\frac{1}{2}} = -x(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-3}{2}}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-x(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-3}{2}}\right)$$

$$= -x\left(-\frac{3}{2}(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-5}{2}} \cdot 2x\right) - (x^2+y^2+z^2)^{\frac{-3}{2}}$$

$$= 3x^2(x^2+y^2+z^2)^{\frac{-5}{2}} - (x^2+y^2+z^2)^{\frac{-3}{2}} = \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}}$$

$$\rightarrow (1)$$

بالمثل:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right] = \frac{2x^2-y^2-z^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} \rightarrow (2)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right] = \frac{2z^2-y^2-x^2}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{5}{2}}} \rightarrow (3)$$

بجمع (1) ، (2) ، (3)

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\right) = 0$$

المعادلة $\nabla^2\phi = 0$ تسمى معادلة لابلاس

3-2 برهان قوانين التباعد:

أثبت أن:

1-$\nabla(A + B) = \nabla \cdot A + \nabla \cdot B$

2-$(\phi A) = \nabla\phi \cdot A + \phi(\nabla \cdot A)$

الاثبات:

1- إذا كان:

$\vec{A} = A_1 i + A_2 j + A_3 k$

$\vec{B} = B_1 i + B_2 j + B_3 k$

إذن

$$
\begin{aligned}
\nabla(A+B) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right) \\
&\cdot \left((A_1 + B_1) i + (A_2 + B_2) j + (A_3 + B_3) k\right) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(A_1 + B_1) + \frac{\partial}{\partial y}(A_2 + B_2) + \frac{\partial}{\partial z}(A_3 + B_3) \\
&= \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right) + \left(\frac{\partial B_1}{\partial x} + \frac{\partial B_2}{\partial y} + \frac{\partial B_3}{\partial z}\right) \\
&= \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right) \cdot (A_1 i + A_2 j + A_3 k)\right] \\
&+ \left[\left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right) \cdot (B_1 i + B_2 j + B_3 k)\right] \\
&= \nabla \cdot A + \nabla \cdot B
\end{aligned}
$$

2-$\nabla \cdot (\phi A) = \nabla \phi \cdot A + \phi(\nabla \cdot A)$

$$\nabla \cdot (\phi A) = \nabla \cdot (\phi A_1 i + \phi A_2 j + \phi A_3 k)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(\phi A_1) + \frac{\partial}{\partial y}(\phi A_2) + \frac{\partial}{\partial z}(\phi A_3)$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial x} A_1 + \phi \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} A_2 + \phi \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial z} A_3 + \phi \frac{\partial A_3}{\partial z}$$

$$= \frac{\partial \phi}{\partial x} A_1 + \frac{\partial \phi}{\partial y} A_2 + \frac{\partial \phi}{\partial z} A_3 + \phi \left[\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right]$$

$$= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} i + \frac{\partial \phi}{\partial y} j + \frac{\partial \phi}{\partial z} k\right) \cdot (A_1 i + A_2 j + A_3 k)$$

$$+ \phi \left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right) \cdot (A_1 i + A_2 j + A_3 k)$$

$$= (\nabla \phi) \cdot A + \phi (\nabla \cdot A)$$

3-3الالتفاف (الدوران): $\mathbf{curl}\,\vec{E}\,\mathbf{or}\,\nabla \otimes E$

يفهم من الالتفاف فيزيائياً بأنه الشغل المنجز على وحدة المساحة العمودية.

يعرف الالتفاف للمتجه كالآتي:

$$\text{curl}\,\vec{A} = \nabla \times \vec{A} = \left(i \frac{\partial}{\partial x} + j \frac{\partial}{\partial y} + k \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (A_1 i + A_2 j + A_3 k)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= i\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_2 & A_3\end{vmatrix} - j\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial z}\\ A_1 & A_2\end{vmatrix} + k\begin{vmatrix}\frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y}\\ A_1 & A_2\end{vmatrix}$$

$$= \left|\frac{\partial A_3}{\partial y} + \frac{\partial A_2}{\partial z}\right| i + \left|\frac{\partial A_3}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial z}\right| j + \left|\frac{\partial A_2}{\partial x} + \frac{\partial A_1}{\partial y}\right| k$$

يلاحظ عند فك المحدد أنه من الضروري أن تسبق $\frac{\partial}{\partial z}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial x}$ المركبات

A_1, A_2, A_3

صيغ تحتوي على ∇:

إذا فرضنا وجود المشتقات الجزئية للمقادير A, B, U, V فإن:

1-Grad$(u + v)$ = Grad u + Grad v

أو $\quad \nabla(u + v) = \nabla u + \nabla v$

2-div$(A + B)$ = div A + div B

أو $\quad \nabla \cdot (A + B) = \nabla A + \nabla B$

3-curl$(A + B)$ = curl A + curl B

أو $\quad \nabla(A + B) = \nabla A + \nabla B$

4-$\nabla \cdot (uA) = (\nabla u) \cdot A + u(\nabla \cdot A)$

5-$\nabla \times (uA) = (\nabla u) \times A + u(\nabla \times A)$

6-$\nabla \cdot (A \times B) = B \cdot (\nabla \times A) - A \cdot (\nabla \times B)$

$7\text{-}\nabla \times (A \times B) = (B \times \nabla)A - B(\nabla \cdot A) + A(\nabla \cdot B)$

$8\text{-}\nabla(A \cdot B) = (B \cdot \nabla)A + (A \cdot \nabla)B + B \times (\nabla \times A) + A \times (\nabla \times B)$

$$9 - \nabla \cdot (\nabla u) = \nabla^2 u = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

التي تسمى لابلاسيات المقدار u وتسمى

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

مؤثر لابلاس

10- $\nabla_x(\nabla u) = 0$ التفاف التدرج للمقدار يساوي صفر.

11- $\nabla_x(\nabla \times A) = \nabla \cdot (\nabla \cdot A) - \nabla^2 A$

تطبيق (4):

إذا $\phi = x^2yz^2 A = xzi - y^2j + 2x^2yk$

أوجد التفاف (ϕA)

الحل:

$$(\phi A) = \nabla \times (\phi A) = \nabla \times (x^3yz^4i - x^2y^3z^3j + 2x^4y^2z^3k)$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ x^3yz^4 & -x^2y^3z^3 & 2x^4y^2z^3 \end{vmatrix} =$$

$$(4x^4yz^3 + 3x^2y^3z^2)i + (8x^3y^2z^3 - 4x^3y^2z^3)j$$
$$- (2xy^3z^3 + x^3z^4)k$$

تطبيقات (5):

برهن أن:

$$\nabla \cdot (\phi A) = (\phi A) \cdot A + \phi(\nabla \cdot A)$$

البرهان:

$$\nabla(\phi A) = \nabla \cdot (\phi A_1 i + \phi A_2 j + \phi A_3 k)$$
$$= \frac{\partial}{\partial x}(\phi A_1) + \frac{\partial}{\partial y}(\phi A_2) + \frac{\partial}{\partial z}(\phi A_3)$$
$$= \frac{\partial \phi}{\partial x} A_1 + \phi \frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial y} A_2 + \phi \left(\frac{\partial A_1}{\partial x} + \frac{\partial A_2}{\partial y} + \frac{\partial A_3}{\partial z}\right)$$
$$= \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} i + \frac{\partial \phi}{\partial y} j + \frac{\partial \phi}{\partial z} k\right) \cdot (A_1 i + A_2 j + A_3 k)$$

$$+\phi\left(\frac{\partial}{\partial x} i + \frac{\partial}{\partial y} j + \frac{\partial}{\partial z} k\right) \cdot (A_1 i + A_2 j + A_3 k)$$
$$= (\nabla \phi) \cdot A + \phi(\nabla \cdot A)$$

إذا كان: $\phi = x^2yzA = 2xz^2i - yzj + 3xz^3k$

أوجد:

$$a-\nabla\times A\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xz^2 & -yz & 3xz^3 \end{vmatrix}$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial y}(3xz^3)+\frac{\partial}{\partial z}(yz)\right)i$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial z}(2xz^2)-\frac{\partial}{\partial x}(3xz^2)\right)j$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial x}(-yz)-\frac{\partial}{\partial y}(2xz^2)\right)k$$

$$=0+yi+(4xz-3z^2)j+0=yi+(4xz-3z^2)j$$

b- (1,1,1) عند النقطة $\nabla\times A$ أوجد نقطة

$$\nabla\times A_{(1,1,1)}=i+(4-3)j=i+j$$

c-curl$(\phi A)=\nabla\times(\phi A)$

$$\phi A=2x^3yz^3i-x^2y^2z^3j+3x^3yz^2k$$

$$=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x^2yz^2 & -x^2y^2z^3 & 2x^3yz^2 \end{vmatrix}$$

d- (1,1,1) عند النقطة curl ϕA أوجد نقطة

$$\text{curl}\,\phi A_{(1,1,1)} = (3+2)i + (6-9)j - (2-2)k$$
$$= 5i - 3j - 4k$$

إذا كان $\vec{r} \times \vec{w} = \vec{v}$أثبت أن: $\vec{v} \times \nabla \frac{1}{2} = w$ حيث w متجه ثابت

البرهان

نفرض أن:

$$\vec{w} = (w_1 i + w_2 j + w_3 k)$$

$$\vec{r} = xi + yj + zk$$

$$\nabla \times V = \nabla \times \begin{vmatrix} i & j & k \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$\nabla \times \vec{V} = \nabla \times [(w_2 z - w_3 y)i + (w_3 x - w_1 z)j + (w_1 y - w_2 x)k]$$

$$\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ w_2 z - w_3 y & w_3 x - w_1 z & w_1 y - w_2 x \end{vmatrix} = \nabla \times \vec{V}$$

$$= \left(\frac{\partial}{\partial y}(w_1 y - w_2 x) + \frac{\partial}{\partial z}(w_3 x - w_1 z)\right) i$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial z}(w_2z - w_3y) - \frac{\partial}{\partial x}(w_1y - w_2x)\right)j$$

$$+\left(\frac{\partial}{\partial x}(w_3x - w_1z) - \frac{\partial}{\partial y}(w_2z - w_3y)\right)k$$

$$= w_1i + w_1i + w_2j + w_2j + w_3k + w_3k$$

$$\nabla \times \vec{v} = 2w_1i + 2w_2j + 2w_3k = 2(w_1i + w_2j + w_3k) = 2\vec{w}$$

$$\Rightarrow \vec{w} = \frac{1}{2}(\nabla \times \vec{v})$$

أثبت:

$$\nabla(\phi A) = (\nabla\phi) \times A + \phi(\nabla \times A)$$

الاثبات:

$$\nabla \times (\phi A) = \nabla \times (\phi A_1i + \phi A_2j + \phi A_3k)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \phi A_1 & \phi A_2 & \phi A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial x}(\phi A_3) + \frac{\partial}{\partial z}(\phi A_2)\right]i$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial z}(\phi A_1) = \frac{\partial}{\partial x}(\phi A_3)\right]j$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial x}(\phi A_2) - \frac{\partial}{\partial y}(\phi A_1)\right]k$$

$$= \left[\phi\frac{\partial A_3}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial y}A_3 - \phi\frac{\partial A_2}{\partial z} - \frac{\partial\phi}{\partial z}A_2\right]i$$

$$+ \left[\phi\frac{\partial A_1}{\partial z} + \frac{\partial\phi}{\partial z}A_1 - \phi\frac{\partial A_3}{\partial x} - \frac{\partial\phi}{\partial x}A_3\right]j$$

$$+ \left[\phi\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial\phi}{\partial x}A_2 - \phi\frac{\partial A_1}{\partial y} + \frac{\partial\phi}{\partial y}A_1\right]k$$

$$= \phi\left[\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)j\right.$$

$$\left.+ \left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)k\right]$$

$$+ \left[\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}A_3 - \frac{\partial\phi}{\partial z}A_3\right)i + \left(\frac{\partial\phi}{\partial z}A_1 - \frac{\partial\phi}{\partial x}A_3\right)j\right.$$

$$\left.+ \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}A_2 - \frac{\partial\phi}{\partial y}A_1\right)k\right]$$

$$= \phi(\nabla \times A) + \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \\ A_1 & A_2 & A_3 \end{vmatrix}$$

$$= \phi(\nabla \times A) + (\nabla\phi) \times A$$

3-4الإنحدار أو الميلان:$\nabla\phi$أو Grad ϕ

الانحدار فيزيائياً هو معدل تغير الدالة ϕ بالنسبة إلى x, y, z إذا كان نظام الاحداثيات الديكارتية التي كانت هذه الاحداثيات هي المعتمدة ويأخذ الانحدار صيغ مختلفة باختلاف الاحداثيات.

لتكن $\phi(x, y, z)$ معرفة وقابلة للاشتقاق لكل نقطة (x, y, z) التي تنتمي إلى مستوى محدد في الفضاء أي أن ϕ هي المجال العددي القابل االتفاضل إذن فإن انحدار ϕ يكتب على صورة $\nabla\phi$ أو انحدار ϕ، Grad ϕ

ويعرف بالمعادلة:

$$\nabla\phi = \left[\frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k\right]\phi = \left[\frac{\partial\phi}{\partial x}i + \frac{\partial\phi}{\partial y}j + \frac{\partial\phi}{\partial z}k\right]$$

نلاحظ أن $\nabla\phi$ تعرف مجال المتجه مركبة $\nabla\phi$ في اتجاه وحدة المتجه هي $\nabla\phi \cdot a$ وتسمى التفاضل الاتجاهي للقيمة ϕ في اتجاه a. فيزيائياً هذا هو معدل التغيير ϕ عند (x, y, z) في اتجاه a أو المشتقة المتجه ϕ في اتجاه a.

قاعدة (1):

إذا كان ω, ϕ اقترانين بحيث أن كل منهما اقتران غير متجه وقابل للاشتقاق فإن

$$\nabla(\phi + w) = \nabla\phi + \nabla w$$

تطبيق (6):

إذا كان $\phi(x, y, z) = 3x^2y - y^3z^2$ أوجد انحدار ϕ عند النقطة $(1, -2, 1)$

الحل:

$$\nabla\phi = \left[\frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k\right]\phi$$

$$\nabla\phi = \left[\frac{\partial}{\partial x}i + \frac{\partial}{\partial y}j + \frac{\partial}{\partial z}k\right](3x^2y - y^3z^2)$$

$$\nabla\phi = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2y - y^3z^2)i + \frac{\partial}{\partial y}(3x^2y - y^3z^2)j$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}(3x^2y - y^3z^2)k \Longrightarrow \nabla\phi$$

$$= 6xyi + (3x^2 - 3y^2z^2)j - (+2y^3z)k$$

عوض النقطة $(1, -2, 1)$

$$\Longrightarrow \nabla\phi = 6(1)(-2)i + [3(1) - 3(4)(1)]j - [(2)(-2)^3(1)]k$$

$$\Longrightarrow \nabla\phi = -12i - 9j + 16k$$

تطبيق (7)

إذا كان $\phi = \ln|\vec{r}|$ أوجد $\nabla\phi$

الحل:

$$\vec{r} = xi + yj + zk, |\vec{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\phi = \ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

$$\nabla\phi = \frac{\partial}{\partial x}\left(\ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) i + \frac{\partial}{\partial y}\left(\ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) j$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}\left(\ln\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right) k$$

$$\Longrightarrow \nabla\phi \left[\frac{\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right] i + \left[\frac{\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right] j$$

$$+ \left[\frac{\frac{2z}{2\sqrt{x^2+y^2+z^2}}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}\right] k$$

$$\nabla\phi = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} i + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} j + \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} k$$

$$= \frac{x}{x^2 + y^2 + z^2} i + \frac{y}{x^2 + y^2 + z^2} j$$

$$+ \frac{z}{x^2 + y^2 + z^2} k = \frac{xi + yj + zk}{x^2 + y^2 + z^2} \Longrightarrow \nabla\phi \frac{r}{|\vec{r}|^2}$$

أثبت أن: $\nabla(F + G) = \nabla F + \nabla G$

الاثبات:

$$\nabla(F+G)=\left(\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k\right)(F+G)$$

$$=i\frac{\partial}{\partial x}(F+G)+j\frac{\partial}{\partial y}(F+G)+k\frac{\partial}{\partial z}(F+G)$$

$$=i\frac{\partial F}{\partial x}+i\frac{\partial G}{\partial x}+j\frac{\partial F}{\partial y}+j\frac{\partial G}{\partial y}+k\frac{\partial F}{\partial z}+k\frac{\partial G}{\partial z}$$

$$=\left(i\frac{\partial F}{\partial x}+j\frac{\partial F}{\partial y}+k\frac{\partial F}{\partial z}\right)+\left(i\frac{\partial G}{\partial x}+j\frac{\partial G}{\partial y}+k\frac{\partial G}{\partial z}\right)$$

$$=\left(\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k\right)F+\left(\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k\right)G$$

$$=\nabla F+\nabla G$$

ب-

$$\nabla(FG)=F\nabla G+G\nabla F$$

$$\nabla(FG)=\left(\frac{\partial}{\partial x}i+\frac{\partial}{\partial y}j+\frac{\partial}{\partial z}k\right)(FG)$$

$$=\frac{\partial}{\partial x}(FG)i+\frac{\partial}{\partial y}(FG)j+\frac{\partial}{\partial z}(FG)k$$

$$=\left(F\frac{\partial G}{\partial x}+G\frac{\partial F}{\partial x}\right)i+\left(F\frac{\partial G}{\partial y}+G\frac{\partial F}{\partial y}\right)j$$

$$+\left(F\frac{\partial G}{\partial z}+G\frac{\partial F}{\partial z}\right)k$$

$$=F\left(\frac{\partial G}{\partial x}i+\frac{\partial G}{\partial y}j+\frac{\partial G}{\partial z}k\right)+G\left(\frac{\partial F}{\partial x}i+\frac{\partial F}{\partial y}j+\frac{\partial F}{\partial z}k\right)$$

$$=F\nabla G+G\nabla F$$

ج- أثبت أن: $\nabla r^n = nr^{n-2}r$

$$\therefore \nabla r^n = \nabla\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)^n = \nabla(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}}$$

$$= i\frac{\partial}{\partial x}\left[(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}}\right] + j\frac{\partial}{\partial y}\left[(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}}\right]$$

$$+ k\frac{\partial}{\partial z}\left[(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}}\right]$$

$$= i\left\{\frac{n}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}-1} \cdot 2x\right\}$$

$$+ j\left\{\frac{n}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}-1} \cdot 2y\right\}$$

$$+ k\left\{\frac{n}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}-1} \cdot 2z\right\}$$

$$= n(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}-1} \cdot (xi + yj + zk)$$

$$= n(r^2)^{\frac{n-2}{2}} \cdot r = nr^{n-2} \cdot r$$

نلاحظ أنه إذا كان $r - rr_1$ حيث r_1 هي وحدة المتجه في اتجاه r إذن

$$\nabla r^n = nr^{n-1}r_1$$

الفصل الرابع

4 تطبيقات فيزيائية:

4-1 الانحدار:

1- ليكن $p(x,y,z)$ و $\phi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ هي درجات الحرارة عند نقطتين متقاربتين $p(x,y,z)$ و $\phi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)$ لمنطقة معينة.

أ- علل فيزيائياً الكمية $\frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \frac{\phi(x+\Delta x, y+\Delta y, z+\Delta z)}{\Delta s}$ حيث ΔS هي المسافة بين النقطتين p و ϕ.

ب- أحسب:

$$\lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \frac{\partial\phi}{\partial s}$$

ج-بيّن أن:

$$\frac{\partial\phi}{\partial s} = \Delta\phi \cdot \frac{\partial r}{\partial s}$$

أ- حيث $\Delta\phi$ هي التغيير في درجة الحرارة بين النقطتين p و ϕ و Δs هي المسافة بين هاتين النقطتين وتمثل $\frac{\Delta\phi}{\Delta s}$ متوسط معدل تغيير درجة الحرارة لكل وحدة مسافة في الاتجاه من p إلى ϕ.

ب- من حساب التفاضل والتكامل

$$\Delta\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial\phi}{\partial y}\Delta y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\Delta z$$

رتبة متناهية الصغر أعلى من Δx، Δy، Δz إذن

$$\lim_{\Delta s\to 0}\frac{\Delta\phi}{\Delta s} = \lim_{\Delta s\to 0}\frac{\partial\phi}{\partial s}\cdot\frac{\Delta x}{\Delta s} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\cdot\frac{\Delta y}{\Delta s} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\cdot\frac{\Delta z}{\Delta s}$$

أو $$\frac{\partial\phi}{\partial s} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\cdot\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\cdot\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\cdot\frac{\partial z}{\partial s}$$

$\frac{\partial\phi}{\partial s}$ يمثل معدل تغير درجة الحرارة بالنسبة للمسافة عند النقطة أ في الاتجاه نحو النقطة ϕ هذه أيضاً تسمى المشتقات الاتجاهية للكمية ϕ.

2- لتكن R هي المسافة من نقطة ثابتة $A(a,b,c)$ إلى أي نقطة $P(x,y,z)$ بيّن أن ∇R هي وحدة المتجه في اتجاه $AP = R$

الحل:

إذا كان r_R، r_P هي متجهات الموضع $xi + yj + zk$ و $ai + bj + ck$ لكل من A و P على الترتيب.

إذن: $R = r_p - r_a = (x-a)i + (y-b)j + (z-c)k$

بحيث أن: $R = \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$ إذن

$$\nabla R = \nabla\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}$$

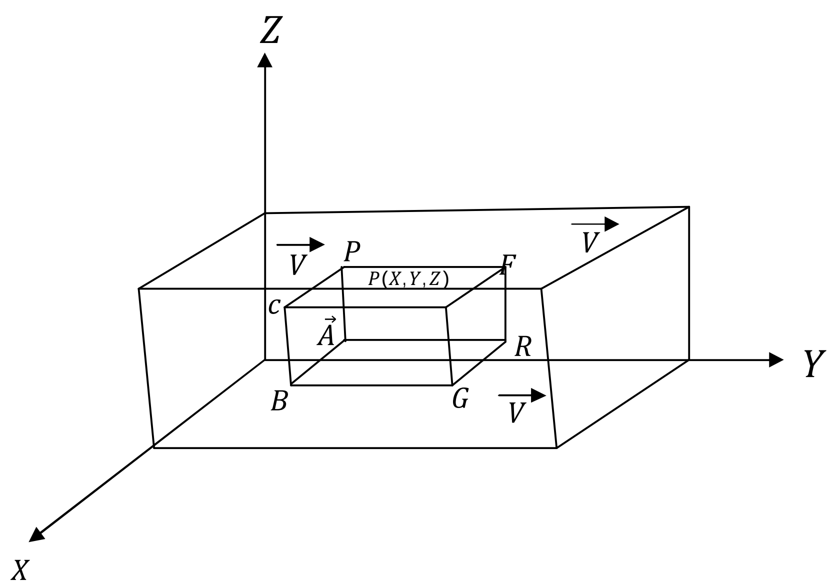
$$= \frac{(x-a)i + (y-b)j + (z-c)k}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}} = \frac{R}{R}$$

تكون وحدة المتجه في اتجاه R.

2-4 التباعد:

- مائع يتحرك بحيث أن سرعته عند أي نقطة تكون $V(x, y, z)$ يبين أن زيادة السائل لكل وحدة حجم لكل وحدة زمن في متوازي سطوح صغيرة مركزة عند $P(x, y, z)$و أحرفه توازي محاور الاحداثيات ولها القيم $\Delta x, \Delta y, \Delta z$على الترتيب يعطى تقريباً بالمعادلة

$$\operatorname{div} v = \Delta \cdot v$$



من الشكل

- x مركبة السرعة v عند p = v_1

- x مركبة عند مركز الوجه $AFED$ $v_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial v_1}{\partial x}\Delta x$ تقريباً .

- x مركبة v عند مركز الوجه $CHCB$ $v_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial v_1}{\partial x}\Delta x$ تقريباً .

إذن:

1- حجم المائع الذي يعبر $AFED$ في وحدة الزمن =

$$\left[v_1 - \frac{1}{2}\frac{\partial v_1}{\partial x}\Delta x\right]\Delta y \Delta z$$

2- حجم المائع الذي يعبر $CHCB$ في وحدة الزمن =

$$\left[v_1 + \frac{1}{2}\frac{\partial v_1}{\partial x}\Delta x\right]\Delta y \Delta z$$

الزيادة في الحجم لكل وحدة زمن في اتجاه x = $\frac{\partial v_1}{\partial x}\Delta x, \Delta y, \Delta z$

بالمثل الزيادة في الحجم لكل وحدة زمن في اتجاه y = $\frac{\partial v_2}{\partial x}\Delta x, \Delta y, \Delta z$

إذن الزيادة الكلية في الحجم لكل وحدة حجم لكل وحدة زمن

$$\frac{\left[\frac{\partial v_1}{\partial x} + \frac{\partial v_2}{\partial y} + \frac{\partial v_3}{\partial z}\right]\Delta x \Delta y \Delta z}{\Delta x \Delta y \Delta z} = \operatorname{div} v = \nabla \cdot v$$

وهذه صحيحة فقط في النهاية التي ينكمش متوازي السطوح إلى p أي أن $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ تقترب من الصفر إذا كان لا يوجد زيادة للمائع في أي مكان، إذن $\nabla \cdot v$ وهذه تسمى المعادلة المستمرة للمائع غير القابل للانضغاط حيث أن السائل لا يمكن أن يغلق أو ينعدم عند أي نقطة يقال أنه لا يوجد منبع أو مصب.

متجه مثل v الذي تباعده يساوي صفر في بعض يسمى لولبي.

3-4 تطبيقات محلولة:

1- بين أن $\nabla\phi$هو متجه عمودي على السطح $\phi(x, y, z)$ حيث c ثابت ليكن $r = xi + yj + zk$ هو متجه الموضع لأي نقطة $p(x, y, z)$على السطح.

الحل:

إذن $dr = xi + yj + zk$تقع في المستوى المماس للسطح عند السطح ولكن:

$$\partial\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}\partial y + \frac{\partial\phi}{\partial z}\partial z = 0$$

$$or \left[\frac{\partial\phi}{\partial x}i + \frac{\partial\phi}{\partial y}j + \frac{\partial\phi}{\partial z}k\right] \cdot (dxj + dyj + dzk) = 0$$

أي أن $\nabla\phi \cdot dr$ وبذلك $\nabla\phi$يكون عمودياً على dr وبالتالي على السطح.

2- أوجد الوحدة العمودية للسطح $x^2y + 2xz = y$ عند النقطة $(3, -2,2)$

$$\nabla(x^2y + 2xz) = (2xy + 2z)i + xj + 2xk = 2i + 4j + 4k \Longrightarrow$$

عند النقطة $(3, -2,2)$

إذن الوحدة العمودية للسطح

$$\frac{-2i + 4j + 4k}{\sqrt{(-2)^2 + (4)^2 + (4)^2}} = \frac{1}{3}i + \frac{2}{3}j + \frac{2}{3}k$$

وحدة عمودية أخرى هي: $\frac{1}{3}i + \frac{2}{3}j + \frac{2}{3}k$ لها اتجاه معاكس للوحدة الموضحة عاليه.

3- أوجد معادلة مستوى المماس للسطح:

$$2xz^2 - 3xy - yx = 7$$

عند النقطة $(1, -1,2)$

$$\nabla(2xz^2 - 3xy - yx) = (2z^2 - 3y - y)i - 3xj + yxk$$

الحل

إذن العمودي للسطح عند النقطة $(1, -1,2)$ هي $7i - 3j + 8k$ معادلة المستوى المار خلال النقطة التي لها متجه الموضع r_0ويكون متعامداً على العمود N هو $(r - r_0) \cdot N = 0$.

إذن المعادلة المطلوبة هي:

$$[(xi + yj + zk) - (i - j + 2k)] \cdot (7i - 3j + 8k) = 0$$

$$or \quad 7(x - 1) - 3(y + 1) + 8(z - 2) = 0$$

4- أوجد المشتقة الاتجاهية للكمية $\phi = x^2yz + yxz^2$ عند $(1, -2, -1)$

فإن:

$$\nabla\phi = \nabla(x^2yz + yxz^2)$$
$$= (2xyz + 4z^2)i + x^2zj + (x^2y + 8xz)k$$
$$= 8i - j - 10k$$

- وحدة المتجه في اتجاه $2i - j - 2k$ هو:

$$a = \frac{2i - j - 2k}{\sqrt{(2)^2 + (-1)^2 + (-2)^2}} = \frac{2}{3}i - \frac{1}{3}j - \frac{2}{3}k$$

∴ المشتقة الاتجاهية المطلوبة هي:

$$\nabla\phi \cdot a \qquad = 8i - j - 10k \cdot \frac{2}{3}i - \frac{1}{3}j - \frac{2}{3}k$$
$$= \frac{16}{3} + \frac{1}{3} + \frac{20}{3} \qquad\qquad = \frac{37}{3}$$

حيث تكون موجبة و ϕ تتزايد في هذا الاتجاه

5- أحسب $\nabla \cdot (A \times r) iF \nabla \times A = 0$

الحل

ليكن $A = A_1 i + A_2 j + A_3 k,\ \ r = xi + yj + zk$

إذن:

$$A \times r = \begin{vmatrix} i & j & k \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ x & y & z \end{vmatrix}$$

$$= (zA_2 - yA_3)i + (xA_3 - zA_1)j + (yA_1 - xA_2)k$$

$$= \nabla \cdot (A \times r)$$

$$= \frac{\partial}{\partial x}(zA_2 - yA_3) + \frac{\partial}{\partial y}(xA_3 - zA_1)$$

$$+ \frac{\partial}{\partial z}(yA_1 - xA_2)$$

$$= z\frac{\partial A_2}{\partial x} - y\frac{\partial A_3}{\partial x} + x\frac{\partial A_3}{\partial y} - z\frac{\partial A_1}{\partial y} + y\frac{\partial A_1}{\partial z} - x\frac{\partial A_2}{\partial z}$$

$$= x\left(\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right) + y\left(\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right)$$

$$+ z\left(\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right)$$

$$= [xi + yj + zk] \cdot \left[\frac{\partial A_3}{\partial y} - \frac{\partial A_2}{\partial z}\right]i + \left[\frac{\partial A_1}{\partial z} - \frac{\partial A_3}{\partial x}\right]j$$

$$+ \left[\frac{\partial A_2}{\partial x} - \frac{\partial A_1}{\partial y}\right]k$$

$$\therefore \nabla \times A = 0 = r \cdot (\nabla \times A) = r \cdot \operatorname{curl} A$$

6- أثبت أن $(\nabla\phi) \times \nabla$ (تباعد الالتفاف A يساوي 0)

الاثبات

$$\nabla \times (\nabla\phi) = 0 \Longrightarrow \nabla \times \left(\frac{\partial\phi}{\partial x} i + \frac{\partial\phi}{\partial y} j + \frac{\partial\phi}{\partial z} k\right)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial\phi}{\partial x} & \frac{\partial\phi}{\partial y} & \frac{\partial\phi}{\partial z} \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right)\right] i + \left[\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right) - \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial z}\right)\right] j$$

$$+ \left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\phi}{\partial y}\right) - \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\right)\right] k$$

$$= \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial z} - \frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial y}\right) i + \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial z\partial x} - \frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial z}\right) j$$

$$+ \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x\partial y} - \frac{\partial^2\phi}{\partial y\partial x}\right) k = 0$$

على فرض أن ϕ لها المشتقة الثانية الجزئية المستمدة بحيث أن رتبة التفاضل غير ذات موضوع.

7- أوجد التفاف $\big(rF(r)\big)$ حيث $F(r)$ قابلة للتفاضل

$$\text{curl}\big(rF(r) = \nabla \times rF(r)\big) = \nabla \times (xF(r)i + yF(r)j + zF(r)k)$$

$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xF(r) & yF(r) & zF(r) \end{vmatrix}$$

$$= \left(z\frac{\partial F}{\partial y} - y\frac{\partial F}{\partial z}\right)i + \left(x\frac{\partial F}{\partial z} - z\frac{\partial F}{\partial x}\right)j$$

$$+ \left(y\frac{\partial F}{\partial x} - x\frac{\partial F}{\partial y}\right)k$$

ولكن:

$$= \frac{\partial F}{\partial x} = \left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial r}{\partial x}\right) = \frac{\partial F}{\partial r}\frac{\partial}{\partial x}\left(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}\right)$$

$$= \frac{\grave{F}(r)x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{\grave{F}(x)}{r}$$

بالتماثل

$$\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\grave{F}y}{r}, \frac{\partial F}{\partial z} = \frac{\grave{F}z}{r}$$

إذن النتيجة:

$$= \left(z\frac{\grave{F}y}{r} - y\frac{\grave{F}z}{r}\right)i + \left(x\frac{\grave{F}z}{r} - z\frac{\grave{F}x}{r}\right)j + \left(y\frac{\grave{F}x}{r} - x\frac{\grave{F}y}{r}\right)k = 0$$

8- إذا كان $\phi = x^2yz$ ، $A = 2xz^2i - yzj + 3xz^3k$

أوجد:

$$a)\ \nabla \times A = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xz^2 & -yz & 3xz^3 \end{vmatrix}$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial y}(3xz^3) + \frac{\partial}{\partial y}(yz)\right] i + \left[\frac{\partial}{\partial z}(2xz^2) - \frac{\partial}{\partial x}(3xz^3)\right] j$$
$$+ \left[\frac{\partial}{\partial x}(-yz) - \frac{\partial}{\partial y}(2xz^2)\right] k$$

$$= 0 + yi + (4xz - 3z^2 j) + 0k = yi + (4xz - 3z^2)j$$

أوجد $(1,1,1)$ $A \times \nabla$عند النقطة

1- $i + [4(1)(1) - 3(1)^2]j = i + j$

2- $\text{curl}(\phi A) = \nabla \times (\phi A)$

الحل

$$(\phi A) = 2x^3yz^3 i - x^2y^2z^2 j + x^3yz^4 k$$

$$\therefore \text{curl}(\phi A) = \nabla \times (\phi A)$$
$$= \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ (2x^3yz^3) & (-x^2y^2z^2) & (x^3yz^4) \end{vmatrix}$$

$$\text{curl}(\phi A) = (3x^2z^4 + 2x^2y^2z)i + (6x^3yz^2 - 9x^2z^4y)j$$
$$- (2xyz + 3x^3z^3)k$$

أوجد $\text{curl}(\phi A)$ عند النقطة $(1,1,1)$

$$\text{curl}(\phi A)|_{(1,1,1)} = (3 + 2)i + (6 - 9)j - (2 + 2)k$$
$$= 5i - 3j - 4k$$

الفصل الخامس

1-5 النتائج:

- أن عامل المتجه (Del) يمتلك خواص تشبه تلك المتجهات العادية.

- يتم تعيين الكميات القياسية لمعرفة الأرقام الدالة على مقاديرها.

- لا يمكن تعريف المتجه بصورة كاملة ما لم نحدد بعض القواعد للتعامل معها.

5-2 التوصيات:

- توفير الكتب التي تتوفر فيها نظريات الالتفاف والانحدار والتباعد.

- ترجمة الكتب المكتوبة باللغات الأجنبية.

- أن تدرس نظريات الإنحدار والإلتفاف والتباعد كمادة بعينها في التعليم الجامعي.

3-5 المصادر والمراجع:

1- أسس علم الرياضيات، الهندسة التحليلية المستوية والفراغية، أ.د/ عبدالشافي فهمي عبادة، ترجمة، تحقيق أ.د/ حسن مصطفى العويضي، أ.د/ محمد طلعت عبدالناصر، دار الفكر العربي، ط1، م1، 2005م.

2- تحليل المتجهات ومقدمة لتحليل الكميات الممتدة، تأليف مواري ر. ستيفيل. ت: د. سميرة عبدالحفيظ رستم، الطبعة العربية الثامنة، 2005م.

3- تحليل المتجهات ومقدمة لتحليل الكمياتالممتدة، تأليف مواري ر. ستيفيل، ت: د. سميرة عبدالحفيظ رستم، الطبعة العربية الثانية عشر.

5- محاضرات في مقرر الكهرومغناطيسية، إعداد الدكتور نوري حسين نور الهاشمي.