جامعة السودان للعلوم و التكنولوجيا

كلية التربية

قسم العلوم - شعبة الرياضيات

بحث تكميلي لنيل درجة بكالريوس شرف التربية في الرياضيات

بعنوان:

إستخدام متسلسلتي تايلور ولورانت في حل بعض التكاملات الخطية

إعداد الطلاب:

الفاتح حولي الهادي

عزة مصطفى محمد

فتحية التجاني الطاهر

معتز آدم النـــــــور

إشراف:

أ:أبوذر حسين علي

سبتمبر 2018

بسم الله الرحمن الرحيم

الآية

قال تعالى:

(قل لو كان البحر مداداً لكلمات ربي لنفد البحر قبل أن تنفد كلمات ربي ولوجئنا بمثله مدداً)

(الكهف 109)

صدق الله العظيم.

إهداء

بدأنا بأكثر من يد وقاسينا أكثر من هم وعانينا الكثير من الصعوبات وهانحن اليوم والحمد لله نطوي سهر الليالي وتعب الأيام وخلاصة مشوارنا بين دفتي هذا العمل المتواضع.

إلى منارة العلم الأمام المصطفى سيد الخلق أجمعين سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم .

وبذات الحب الذي منحونا وبكل إمتنان نهدي إلى هؤلاء :

إلي الينبوع الذي لايمل العطاء إلى من حاكت سعادتي بخيوط منسوجة من قلبها

إلي من أثقلت الجفون سهرا وحملت الفؤاد هما وجاهدت الأيام صبرا وشغلت البال فكرا ورفعت الأيادي دعاءا وأيقنت باله أملا

أغلى الغوالي والدتي

إلي من سهر الليالى ونسى الغوالي وظل سندي الموالي وحمل همي غير مبالي

بدر التمام والدي

إلي من آثروني على أنفسهم وأشعلوا أصابعهم لتضي عتمة طريقي إلى من حبهم يجري في عروقي ويلهج بذكراهم فؤادي.

أخواني وأخواتي

إلى ورود المحبة وينابيع الوفاء وإلي من رافقوني فى السراء والضراء.

أصدقائي

إلي المعلمين الأوفياء الذين يمشون على شوك الدروب ليهيئوا للاخرين طرقا مرصوفة الحواف .

أساتذتنا الكرام

الشكر والتقدير

إلهي لايطيب الليل الا بشكرك ولايطيب النهار الابطاعتك ولاتطيب اللحظات الا بذكرك ولاتطيب الاخرة الابعفوك ولاتطيب الجنة الابرؤيتك فلك الحمد أولا واخرا, ثم الصلاة والسلام على من لانبي بعده حبيبي محمد بن عبد الله.

ونزجي جزيل شكرنا إلى تلك الصرح الشامخ المعبقه بأريج الحب لن ننساها وسنقدم كل ما بوسعنا لها وسنكون كالماء أينما وقعنا نفعنا جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا أساتذه وموظفين وعاملين والشكر أجزله إلى أسرة كلية التربية .

ثم نتقدم بالشكر إلى من تلذذ بالمعاناة وكان شمعة تحترق لينير دربنا صاحب التواضع الجم أستاذ: أبوذر حسين .

الذي له القدح المعلى في إخراج هذا البحث المفيد إن شاء الله وجزاه الله عنا كل خيروالشكر كل الشكر لكل من ساهم بفكرة أو نصيحة في سبيل نجاحنا.

مستخلص البحث

هذا البحث يتضمن ثلاثة فصول وكل فصل يضم عدة محتويات:

في الفصل الأول تم التعرف على الأعداد المركبة والعمليات الجبرية عليها , ودوال المتغير المركب , والدوال التحليلية والتوافيقة ومعادلتي كوشي وريمان.

ومن ثم في الفصل الثاني تم التعرف على بعض الطرق العادية لحل التكاملات الخطية .

وأخيرا في الفصل الثالث تم التعرف على كيفية حل بعض التكاملات الخطية بإستخدام متسلسلتي تايلور ولورانت و بعض الأمثلة عليها .

Abstract

This research includes three chapters .each chapter contains several contents. In the first chapter we identify complex numbers and algebraic processes on it, the functions of the complex variable, analytical functions, compatibility, and the equations of Kochi and Riemann. Thus, in Chapter two, we identify some normal methods of solving linear integrals. Finally, in the third chapter we have identified how to solve some linear integrations using Tylor and Lorentz series and some examples of them.

الفهرس

الفـــصل الأول

مـقـدمـة في التـحلـيل الـمركـب

(1-1)مـــقدمــة:

التحليل المركب (التحليل العقدي): هو أحد فروع الرياضيات التى تبحث في توابع (دوال)الأعدادالمركبة , للتحليل المركب إستخدامات واسعة في الرياضيات التطبيقية وفي فروع متعددة في الرياضيات, وهو الذي يهتم بدراسة الأعداد المركبة , الدوال و النهايات والإتصال , مشتقات دوال المتغير المركب , معادلتي كوشي وريمان, صيغ تكامل كوشي , الدوال التحليلية والتوافقية وتطبيقاتها, الكفافات , التكامل الخطي , نظريات على التكامل, النقاط الشاذة , المتبقيات , متسلسلتي تايلور ولورانت وبعض التطبيقات عليها... الخ.

الإهتمام الأساسي للتحليل المركب هو الدوال التحليلية ذات المتغيرات المركبة أو مايعرف بالدوال تامة الشكل.

من خلال الدراسات السابقة في التحليل المركب وجدنا صعوبة في حل بعض التكاملات الخطية بالطرق العادية , لذا لجأنا إلى إستخدام متسلسلتي تايلور ولورانت في حل التكاملات الخطية وذلك لدقتها و سهولة إستخدامها واللتان تسمحان لنا بالتعبير عن أي دالة رياضية عن طريق كثيرة حدود فيمكننا ذلك من إيجاد حلول تقريبية لمسائل ما إذا كان الحل الدقيق مستعصياً .

(2-1) الأعداد المركبةComplex Numbers:

عرف علماء الرياضيات خط الأعداد في مجموعة الأعداد الحقيقية Rتعريفا محكماً .

هذه المجموعة كانت تفي بالغرض حينما يطلب مجموعة الحل لمعادلات رياضية مثل:

($x^2 - 9 = 0$) أو ($x^2 - 2x + 1 = 0$) وغيرها وكذلك حينما يطلب مجموعة الحل لمتباينات (متراجحات) من أمثال ($x + 1 > 0$) وغيرها.ولكن كيف نستطيع إيجاد مجموعة الحل لمعادلة مثل ($x^2 + 1 = 0$)؟ .. إن مجموع المربعات لايساوي صفرا لأن مربع العدد (دائما) موجب , فكيف يمكن لمجموع أعداد مربعة أن يكون صفرا او سالبا ؟

للأجابة على هذا السؤال أفترض العلماء وجود ما يسمى بالعدد التخيلي Imaginary number

هو العدد المعرف كالاتي: $i = \sqrt{-1}$

فهذا التعريف يمكننا من حل المعادلة($X^2 + 1 = 0$) إذا أن :

$$X^2 + 1 = 0 \quad \rightarrow \quad X^2 = -1 \quad \rightarrow \quad X = \pm\sqrt{-1} = \pm i$$

ولكن إلى أي مجموعة تنتمي مجموعة الحلول ؟ فكان لابد من توسيع مجموعة الأعداد الحقيقية لتستوعب الوافد الجديد , ولذلك تم تعريف العدد المركب ليكون مكونا بصورة عامة من جزء حقيقي Real part وجزء تخيلي Imaginary part كالتالي: $z = a + ib$

حيث $a, b \in R, i = \sqrt{-1}$ هذه المجموعة الموسعة التي تحتوي أمثال هذه الأعداد سميت بمجموعة الأعداد المركبة Z وبالتالي $z = a + ib$يحقق $z \in Z$, كذلك $R \in Z$ جزئية من Z , أي أن مجموعة الأعداد الحقيقية هي مجموعة جزئية من Z وذلك لأنه عندما نضع$b = 0$فإن $z \in R$.

العدد المركب z هوعدد ينتمي إلي مجموعة الأعداد المركبة Z بحيث يكون $z = a + ib$ لكل $i = \sqrt{-1}, a, b \in R$,يتكون من جزء حقيقي وجزء تخيلي .الجزء الحقيقي a=Re(z),الجزء التخيلي($b = Im(z)$,سعة العددالمركب($\theta = \tan^{-1}(\frac{b}{a})$, القيمة المطلقة $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

(3-1) بعض العمليات الأساسية في جبر الأعداد المركبة :

إذا كان $z_1 = a_1 + ib_1$, $z_2 = a_2 + ib_2$ فإن:

(1-3-1)عملية الجمع***Addition***:

إذا كان $z_1 = a_1 + ib_1$,$z_2 = a_2 + ib_2$ فإن:

(1-3-1) عملية الطرحSubtraction:

إذاكان $z_2 = a_2 + ib_2$, $z_1 = a_1 + ib_1$فإن:

(2-3-1) عملية الضرب Multiplication:

إذاكان $z_1 = a_1 + ib_1$,$z_2 = a_2 + ib_2$ فإن:

$$z_1 z_2 (a_1 + ib_1)(a_2 + ib_2) = a_1 a_2 + ia_1 b_2 + ib_1 a_2 - a_2 b_2$$

(3-3-1) عملية الترافق Conjunction:

إذا كان $z = a + ib$ فإن العدد المركب:

$\bar{z} = a - ib$ يسمي مرافق العدد z.ويحقق الترافق غياب العدد التخيلي i عند إجراء عملية الضرب $\bar{z}z$ حيث أن :

$$z\bar{z} = a^2 + b^2 \in R$$

وبالتالي فحاصل ضرب العدد في مرافقه دائما يعطي عددا صحيحا .

(4-3-1) عملية القسمةDivision :

إذا كان $z_2 = a_2 + ib_2$, $z_1 = a_1 + ib_1$ فإن:

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{a_1 + ib_1}{a_2 + ib_2}$$

(5-3-1) القيمة المطلقة للعدد المركب Absolute value:

إذا كان $z = a + ib$ فإن القيمة المطلقة $|z|$ للعدد المركب z تعطي ب:

$|z| = \sqrt{z\bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$ يطلق علي القيمة المطلقة أيضا طول z.

(6-3-1) المعكوس الجمعيAdditive inverse:

لكل عدد $z \in Z$ يوجد عدد $(-z) \in Z$ يسمي المعكوس الجمعي للعدد z بحيثأن:

$$z + (-z) = 0$$

(7-3-1) المعكوس الضربيinverseMultiplicative:

كل عدد $z \in Z$ يوجد عدد $(z^{-1}) \in Z$ يسمي المعكوس الضربي للعدد Z بحيث :

$$Z^{-1}Z = 1$$

إذا كان $z = 3 + 10i$ جد $Im(z), Re(z)$

الحل:

$$Re(z) = 3$$

$$Im(z) = 10$$

(4-1) نظرية ديموفر Demover's Theorem:

إذا كان

$$(\cos\theta \pm i\sin\theta)^{n} = \cos n\theta \pm i\sin\theta$$

حيث n أي عدد نسبي $(n \in R)$

الإثبات:

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{n} = (e^{i\theta})^{n} = \cos n\theta + i\sin n\theta$$

وبالمثل حيث أن $cos(-\theta) = \cos\theta, \sin(-\theta) = -\sin\theta$

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^{n} = (\cos(-\theta) + i\sin(-\theta))^{n} = e^{i(-\theta)^{n}} = e^{i(-n\theta)}$$

$$\therefore Z = \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta) = \cos n\theta - i\sin n\theta$$

مثال(1) :

ضع المقدار التالي في ابسط صورة ممكنة

$$Z = \frac{(\cos\theta - i\sin\theta)^{6}\,(\cos 2\theta + i\sin 2\theta)^{-5}}{(\cos 3\theta + i\sin 3\theta)^{7}\,(\cos 4\theta - i\sin 4\theta)^{3}}$$

الحل:

$$z = \frac{(\cos 6\theta - i\sin 6\theta)\,(\cos(-10\theta) + i\sin(-10\theta)}{(\cos 21\theta + i\sin 21\theta)\,(\cos 12\theta - i\sin 12\theta)}$$

$$= \frac{(\cos 6\theta - i\sin 6\theta)(\cos 12\theta - i\sin 12\theta)}{(\cos 21\theta + i\sin 21\theta)(\cos 12\theta - i\sin 12\theta)}$$

$$= \frac{\cos(-16\theta) + i\sin(-16\theta)}{\cos(9\theta) + i\sin(9\theta)}$$

$$= \cos(-25\theta) + i\sin(-25\theta)$$

كما أن هنالك تطبيقات هامة لنظرية ديموفر حيث يمكننا إيجاد $\cos n\theta$, $\sin n\theta$ بدلالة قوى $\sin\theta$, $\cos\theta$ فمثلا خذ المفكوك $(\cos\theta + \sin\theta)^4$ فانه باستعمال مفكوك ذات الحدين

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^4 \\ &= \cos\theta^4 + 4\cos\theta^3\,(i\sin\theta) - 6\cos\theta^2\,(\sin\theta)^2 \\ &+ 4\cos\theta(i^3\sin\theta^3 + i^4\sin\theta^4\end{aligned}$$

وبإستعمال الدورة الرباعية لI فإن:

$$\begin{aligned}(\cos\theta + i\sin\theta)^4 \\ &= (\cos\theta^4 - 6\cos\theta^2\sin\theta^2 + \sin\theta^4) \\ &+ i(4\cos\theta^3\sin\theta - 4\cos\theta\sin\theta^3)\end{aligned}$$

كذلك بإستعمال نظرية ديموفر: $(\cos\theta + i\sin\theta)^4 = \cos 4\theta + i\sin 4\theta$

بمساواة الجزء الحقيقي بالجزء الحقيقي والجزء التخيلي بالجزء التخيلي في كل منهما فإننا نحصل علي هذين المفكوكين :

$$\cos 4\theta = \cos\theta^4 - 6\cos\theta^2\sin\theta^2 + \sin\theta^4$$

$$\sin 4\theta = 4\cos\theta^3\sin\theta - 4\cos\theta\sin\theta^3$$

(5-1) إيجاد الجذور النونية للاعداد المركبة

$$Z = re^{i\theta}$$

$$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$$\sqrt[n]{Z} = z^{\frac{1}{n}} = (re^{i\theta})^{\frac{1}{n}} = r^{\frac{1}{n}}(e^{i(\theta+2\pi k)})^{\frac{1}{n}}, k = 0,1,2,\ldots\ldots, n-1$$

فإن:

$$r^{\frac{1}{n}}e^{i(\frac{\theta+2\pi k}{n})} = \sqrt[n]{r}\,[\cos(\frac{\theta + 2\pi k}{n}) + i\sin\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)]$$

وعندما تكون $k = 0$ فإن القيمة تسمي بالقيمة الاساسية *Principal* ,ثم نضع $k = 1$ ثم $k =$ 2الخ.......وذلك للحصول علي الجذور المختلفة .

ملحوظة :

لا يمكننا الحصول علي الجذور بإستخدام التعبير الكارتيزي لذا لابد من التحويل الى الصورة القطبية .

مثال(2):

جد الجذور ل$\sqrt{1+i}$ حيث ان : $1 + i = \sqrt{2}e^{i(\frac{\pi}{4})}$

اذن: $\sqrt{1+i} = \sqrt{\sqrt{2}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\left(\frac{\frac{\pi}{4}+2\pi k}{2}\right),K=0,1}$

$$= 2^{\frac{1}{4}}e^{(\frac{\pi}{8}+\pi k)}, K = 0,1$$

وبالتالي يكون الجذران كاللأتي :

$$Z_1 = 2^{\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{(\frac{\pi}{8})}$$

$$= 2^{\frac{1}{4}}[\cos\left(\frac{\pi}{8}\right) + \mathrm{i}\sin(\frac{\pi}{8})], K = 0$$

$$Z_2 = 2^{\frac{1}{4}}\mathrm{e}^{\mathrm{i}(\frac{\pi}{8}+\pi)} = 2^{\frac{1}{4}} + i\left[\cos\left(\frac{9\pi}{8}\right) + \mathrm{i}\sin\left(\frac{9\pi}{8}\right)\right], K = 1$$

مثال (3):

جد جذور المعادلة $Z^5 = 1$

الحل:

$Z = 1^{\frac{1}{5}}$هي الجذور الخمسة للعدد 1 هي:

$$k = 0,1,2,3,4 \; n = 5$$

$$Z_{\mathrm{k}} = \mathrm{e}^{\frac{2\pi k}{5}}$$

$$Z_0 = \mathrm{e}^0 = \cos 0 + \mathrm{i}\sin 0 = 1$$

$$Z_1 = \mathrm{e}^{\frac{2\pi}{5}\mathrm{i}} = \cos\frac{2\pi}{5} + \mathrm{i}\sin\frac{2\pi}{5}$$

$$Z_2 = e^{\frac{4\pi}{5}i} = \cos\frac{4\pi}{5} + i\sin\frac{4\pi}{5}$$

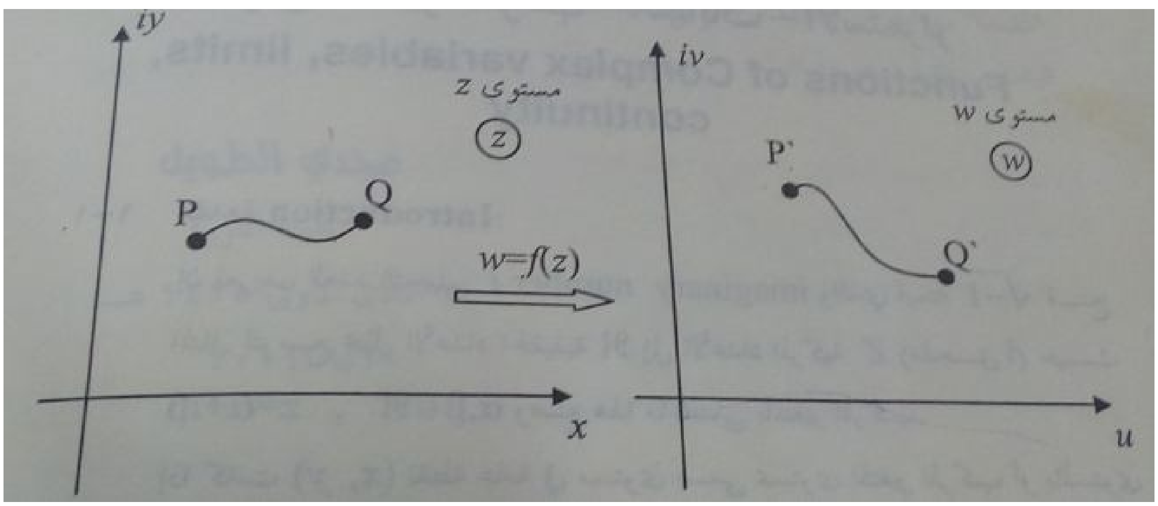
$$Z_3 = e^{\frac{6\pi}{5}i} = \cos\frac{6\pi}{5} + i\sin\frac{6\pi}{5}$$

$$Z_4 = e^{\frac{8\pi}{5}i} = \cos\frac{8\pi}{5} + i\sin\frac{8\pi}{5}$$

(6-1) دوال المتغير المركب :Functions of complex variables

إذا كان $Z = x + iy$ فان $W = f(z)$ تمثل علاقة بين ال z, w وتحت الشروط المعروفة للعلاقات لكي تكون دوال فإن الشروط نفسها تنتج لنا دوال المتغير المركب.

وتكون هذه الدوال وحيدة القيمة إذا كانت كل قيمة لـZ ينتج قيمة وحيدة لـw ويمثل هذا النوع من التحويل بين مستويين خياليين كما بالشكل (1-1)



حيث $Z = x + iy$ و$W = u + iv$

وهذا التحويل ينتج أشياء غير موجودة في واقع المستوي الحقيقي وتحويلاته.

إذا لا يمكن رسم العلاقة بين Z, W في مستوي خاص بهما لان Z تقع في مستوي و W تقع في مستوي أخر ولايمكن رسم العلاقة بين z, w مباشرة فنحن ننقل النقطة من مستوي z الى مستوي w وهكذا ينقل الشكل في مستوي z الى شكل اخر في مستوي w.

مثال(4):

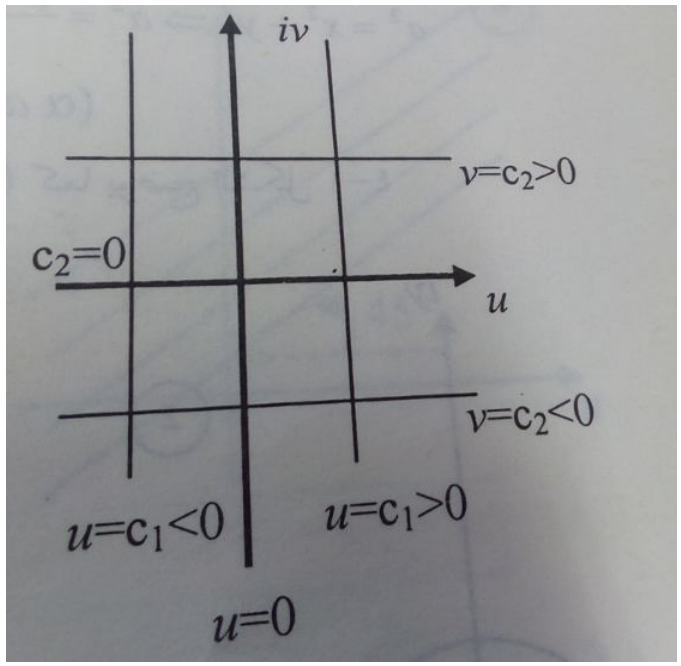
اذا كان $w = z^2$ فان علاقات التحويل $u = x^2 - y^2$

$$v = 2xy$$

فاذا اخذنا العلاقات التي فيها u, v ثابتين فان هذا معناه ان الاشكال غير الخطية .

$$x^2 - y^2 = c_1$$
$$2xy = c_2$$

تنتج أشكال أفقية $v = c_2$ وأشكال راسية $u = c_1$ مصاحبة لها كما بالشكل (2-1)



ويتضح
من الشكل أن الشبكة غير الخطية $x^2 - y^2 = c_1 > 0$ تتحول إلي خطوط راسية متوازية وان $x^2 - y^2 = c_1 < 0$ تتحول ايضا الي شبكة خطوط راسية متوازية بينما تتحول $2xy = c_2$ الي شبكة خطوط افقية ويتحول الخطان $x^2 - y^2 = 0$ الي المحور التخيلي في مستوي w بينما يتحول الخطان $x = 0,\ y = 0$ الي المحور الحقيقي في مستوي wوهي تحويلات يمكن استغلالها في كثير من التطبيقات.

واحيانا ينتج من هذه التحويلات دوال عديدة القيم وفيها يتم الحصول علي اكثر من قيم لw لقيمة واحدة z والدوال الناتجة من أمثال هذه العلاقات يمكن اعتبارها مجموعة من الدوال وحيدة القيمة ويطلق علي كل عضو في المجموعة بالفرع *Branch*.

مثال(5):

الدالة $W = z^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x + iy}$

الحل:

في هذه الحالة $k = 0,1$

$$w = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\left(\frac{\theta + 2\pi k}{2}\right)}$$

حيث $\theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$

وبالتالي فهنالك قيمتان للدالة الأولى :

$$w_0 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}}, k = 0$$

وتسمي بالفرع الاساسي للدالة .

والأخرى $w_1 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\left(\frac{\theta + 2\pi}{2}\right)}, k = 1$

$$w_1 = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\left(\frac{\theta}{2}\right)} e^{i\pi}$$

$$w_1 = -\left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^{\frac{1}{2}} e^{i\frac{\theta}{2}}$$

ولذلك فان $w = z^{\frac{1}{2}}$ دالة مزدوجة القيم .

ملاحظة :

الدالة $w = z^{\frac{1}{n}}, n \in N^+$ هي دالة عديدة القيم بدرجة n بحيث يكون

$$w_k = \left(\sqrt{x^2 + y^2}\right)^{\frac{1}{n}} e^{i\left(\frac{\theta + 2\pi k}{n}\right)}, k = 0,1,2 \ldots\ldots, n-1$$

ودائما عند k=0 فإننا نحصل علي الدالة الأساسية .

ولاحظ أن العلاقة تعطي بالمعادلة $w^n = z$ وهي معادلة من درجة n ولذلك فلها n من الجذور جميعها تحقق المعادلة :

$$w_k{}^n = \sqrt{(x^2 + y^2)} e^{i(\theta + 2\pi k)} = \sqrt{(x^2 + y^2)} e^{i\theta} e^{i2\pi} = re^{i\theta}$$

(5-1) الدوال الحدودية *Polynomial functions*:

وفيها يكون

$$w = a_0 + a_1 z + a_2 z + \cdots + a_n z^n, a_n \in z$$

والعلاقة الخطية تحافظ على الأشكال ولكن العلاقة غير الخطية تعطي تغيرا وحيدا للأشكال.

نظرية(1) :

التحويلة الخطية $w = \alpha z + \beta$ حيث $\alpha \in R$ تحافظ على شكل العلاقات في مستوي Z

الاثبات:

من المعلوم أنه إذا كان $C = f(x, y)$ تمثل شكلا ما في مستوي z فإن:

$c = f(\alpha x, \alpha y)$ تمثل نفس الشكل ولكن بمقياس *Scale* مختلف فإن الدائرة

$n^2 = x^2 + y^2$ تحافظ على شكلها كدائرة إذا كان $a^2 = (\alpha x)^2 + (\alpha y)^2$ ولكن بنصف قطر مختلف (a/α)كذلك فإن $f(x-\alpha, y-\beta)$ تمثل نفس الشكل ايضا بنقل المحاور الى النقطة(α, β) كانتقال الدائرة من $a^2 = x^2 + y^2$ الي دائرة $a^2 = (x-\alpha)^2 + (y-\beta)^2$ فإذا حدث التحويلان معا فهو تغير في المقياس مصحوبا بانتقال المحاور ولكن الشكل يظل كما هو دون تغيير .فإن علاقات التحويل هي

$$u = \alpha x + \beta_1, v = \alpha y + \beta_2$$

أي أن: $y = \frac{v-\beta_2}{\alpha}$, $x = \frac{u-\beta_1}{\alpha}$ وبالتالي فإن العلاقة

$$f\left(\frac{u-\beta_1}{\alpha}, \frac{v-\beta_2}{\alpha}\right) = c \quad , f(x, y) = c$$

وهي تمثل نقلا للمحاور الى النقطة (β_1, β_2) وتغييرا في القياس بمقدار α وهذا يثبت أن التحويلية الخطية تحافظ على الأشكال.

ملاحظات :

إذا كانت $\alpha \in Z$ فإن معادلات التحويل تصبح :

$$U = \alpha_1 X - a_2 y + \beta_1$$

$$V = \alpha_2 x + \alpha_1 y + \beta_2$$

أي أن:

$$\alpha_1 x - a_2 y = u - \beta_1$$

$$\alpha_2 x + \alpha_1 y = v - \beta_2$$

$$\binom{x}{y} = \left(\frac{1}{{\alpha_1}^2 + {\alpha_2}^2}\right)\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ -\alpha_2 & \alpha_1 \end{pmatrix}\binom{u-\beta_1}{v-\beta_2}$$

وهي مازالت تمثل علاقات خطية بين المحاور القديمة(x, y) والجديدة (u, v) وبالتالي تعطي نفس فصيلة الاشكال بدوران ونقل المحاور .

مثال(6):

إذا كان $w = (1+i)z$ فإن :

$$u = x - y$$

$$v = x + y$$

الحل:

أي أن:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}$$

وبالتالي فإن الدائرة $x^2 + y^2 = a^2$ تصبح:

$$1/4\,(u+v)^2 + 1/4\,(u-v)^2 = a^2$$

$$u^2 + 2uv + v^2 + v^2 - 2uv + u^2 = 4a^2$$

$$u^2 + v^2 = 2a^2$$

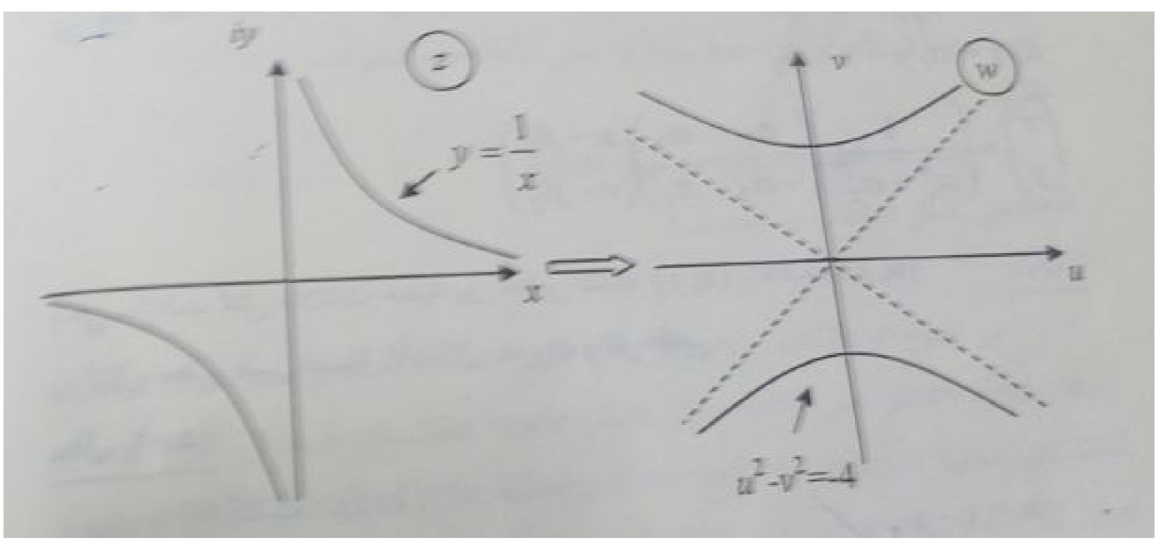
$$u^2 + v^2 = \left(\sqrt{2}a\right)^2$$

وبالتالي فإن الدوائر بنصف القطر a تتحول إلى دوائر بنصف قطر $\left(\sqrt{2}a\right)$ كذلك فإن القطع الزائد $xy = 1$ يتحول إلى :

$$1/4\,(u+v)(u-v) = 1$$

$$u^2 - v^2 = -4$$

هو قطع زائد كما مبين بالشكل (1-3)



وهو مجرد دوران للمحاور للشكل الأصلي .

(6-1) النهايات*Limits*:

يجرى التعريف المعتاد للنهاية على الدالة وحيدة القيمة $f(z)$كالتالي :

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = e$$

اذا كان $|z - z_0| < \delta$

فإن:

$|f(z) - e| < \varepsilon$لأي عدد موجبδ أي أن $f(z)$ تقترب من e و e إذا ما إقتربت z من z_0

,ويجب أن تكون النهاية مستقلة عن الطريقة التى تؤول فيها z الي z_0 فإذا كانت هذه النهاية موجودة exists فهي فريدة unique وفي حالة كون $f(z)$ عديدة القيم فإن قيمة النهاية قد تعتمد على الفرع ,أي أن لكل فرع نهاياته مستقلة عن الفرع الاخر .

فإذا ما الت $z_0 \to \infty$ فإن تعريف النهاية يأخذ الشكل الأتي :

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = \mathrm{e}$$

إذا كان:

$|Z| > M$ فإن $|\mathrm{f(z)} - \mathrm{e}| < \varepsilon$ لأي$\varepsilon > 0, m > 0$ كذلك فإن

$\lim_{z \to z_0} f(z) = \infty$إذا ما كان :

لاي عدد موجب $\delta > 0, N > 0$

(7-1) الاتصال(الاستمرار)*Continuity*:

الدالة $f(z)$ تكون دالة مستمرة في منطقة R من مستوي Z إذا ماكانت مستمرة في كل النقاط في R ايضا إذا كانت $f(z), g(z)$ دالتان متصلتان عند النقطة $z = z_0$ فان $f(z) \pm g(z)$ دالة متصلة و$f(z).g(z)$ دالة متصلة و $f(z)/g(z)$ دالة متصلة بشرط ان $g(z) \neq 0$.

مثال (7):

جد قيمة $\lim_{z \to -i} \frac{z^2+1}{z+i}$

الحل:

بالتعويض المباشر $= \frac{\text{صفر}}{\text{صفر}}$ ك.غ.م

$$\lim_{z\to -i} \frac{z^2+1}{z+i} = \lim_{z\to -i} \frac{(z-i)(z+i)}{(z+i)} = \lim_{z\to -i} z-i = -2i$$

مثال(8) :

بين فيما إذا كان الدالة :

$$f(z) = \begin{bmatrix} z^2+1 & z \neq -i \\ -2i & z = -i \end{bmatrix}$$

الحل:

معرفة عند

$$f(-i) = -2i$$

.:الدالة متصلة .

(8-1) الدالة التحليلية Analytic Function :

إن تعريف المشتقة الأولى لدالة مركبة عند نقطة z_0 في مجال تعريفها لا يختلف عن تعريف المشتقة الأولى للدالة الحقيقية كما يبينذلك التعريف التالي :

لتكن الدالة f معرفة على جوار للنقطة z_0 فإن الدالة f قابلة للاشتقاق عند z_0 إذا وفقط إذا وجد عدد مركب w_0 بحيث إن :

$$w_0 = \lim_{z\to z_0} \frac{f(z)-f(z_0)}{z-z_0}$$

ويسمي عادة هذا العدد المركب w_0 بأنه المشتقة الاولى للدالة f عند النقطة z_0

وإذا كان $\Delta Z = Z - Z_0$ فإن التعريف يأخذ الصورة :

هذه هي صيغة المشتقة .

مثال على ذلك:

بإستخدام تعريف المشتقة جد $f\,'(z)$ اذا كانت $f(z) = \sqrt{z}$ لكل z تحقق

الحل:

بتطبيق صيغة المشتقة $f'(\mathrm{z}) = \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\sqrt{z+\Delta z}-\sqrt{z}}{\Delta z}$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\left(\sqrt{z+\Delta z} - \sqrt{z}\right)\left(\sqrt{z+\Delta z} + \sqrt{z}\right)}{\Delta z\left(\sqrt{z+\Delta z} + \sqrt{z}\right)}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta \mathrm{z}}{\Delta \mathrm{z}\left(\sqrt{\mathrm{z}+\Delta \mathrm{z}} + \sqrt{\mathrm{z}}\right)}$$

$$= \lim_{\Delta z \to 0} \frac{1}{\sqrt{z+\Delta z} + \sqrt{z}} = \frac{1}{\sqrt{z} + \sqrt{z}} = \frac{1}{2\sqrt{z}}$$

(9-1) معادلتا كوشي وريمانCauchy Riemann Equations:

سميت بهذا الإسم نسبة للعالم الفرنسي كوشي والعالم الألماني ريمان.

تعريف:

نفرض ان $f = u + iv$ فإن المعادلتين :

$u_{\mathrm{x}} = \mathrm{v}_{\mathrm{y}}, \mathrm{u}_{\mathrm{y}} = -\mathrm{v}_{\mathrm{x}}$ تسميان معادلتا كوشي-ريمان حيث أن

$u_x, \mathrm{u}_{\mathrm{y}}, v_x, v_y$ترمز للمشتقات الجزئية للدالتين u, v بالنسبة للمتغيرين x, y على الترتيب .

مثال لذلك:

بين بإستخدام معادلتا كوشى- ريمان أن الدالة $f(z) = \bar{z}$ ليست تحليلية

الحل:

بما ان $f(z) = x - iy$ فان $u(x, y) = x$, $v(x, y) = -y$

ومن ذلك فإن $u_x = 1, u_y = 0, v_x = 0, v_y = -1$

وبما أن $u_x = 1 \neq v_y = -1$ لجميع قيم $z = x + iy$ فإن الدالة F ليست قابلة للإشتقاق عند أى عدد مركب وبالتالى ليست تحليلية .

(10-1) الدوال التوافقية وتطبيقاتها Harmonic Functions:

من المعادلات الهامه فى العلوم الفيزيائية والهندسية المعادلة التفاضلية الجزئية من الدرجة الثانية التالية:

$$\frac{\partial^2 U}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} = 0$$

والتى تسمى معادلة لابلاس نسبة للعالم الفيزيائي Laplace.

إن الدالة الحقيقية للقيمة ذات المتغيرين $u(x, y)$ التي تمثل حلا لهذه المعادلة ذات أهمية كبيرة ومعان هامة .

تعريف:

تسمى الدالة حقيقية القيمة $u(x, y)$ ذات المتغيرين x, y دالة توافقية فى المجال D إذا كانت المشتقات الجزئية من الدرجة الثانية لهذه الدالة u بالنسبة للمتغيرين x, y موجودة ومتصلة وتحقق

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \Delta^2 u = 0$$

نظرية(2) :

إذا كانت الدالة $f = u + iv$ تحليلة علي المجال D فإن كلا من $u(x, y)$, $v = (x, y)$ توافقية في المجال D.

البرهان:

بما ان $f = u + iv$ تحليلة في المجال D فان u, v تحققان كوشي وريمان باللإضافة الى كون المشتقات الجزئية لهما موجودة ومتصلة وبالتالي ينتج أن :

$u_x = v_y,\ \ u_y = -v_x$ نجد ان $u_{xx} = v_{yx}, u_{yy} = -v_{xy}$

ولكن معروف أن من التفاضل و التكامل أن أي دالة قابلة للاشتقاق تحقق المساواة

$v_{yx} = v_{xy}$ وبهذا فإن :

$u_{xx} + u_{yy} = 0$ وهذا بحيث أن u توافقية (اي تحقق معادلة لابلاس).

مثال(9) :

بين أن الدالة $u(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ توافقية علي كل الأعداد المركبة $z \neq 0$ ومن ثم جد المرافق التوافقي $v(x,y)$ لها

الحل:

اولا:نثبت أنها توافقية ام لا

نجد المشتقات الجزئية من الدرجة الثانية للدالة $u(x,y)$ بالنسبة للمتغيرين x, y هي :

$$u_x = \frac{2x}{x^2 + y^2} \quad , u_{xx} = \frac{2(y^2 - x^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$u_y = \frac{2y}{x^2 + y^2} \quad , \quad u_{yy} = \frac{2(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)^2}$$

وبالجمع نستنتج ان $u_{xx} + u_{yy} = 0$ وهذا يشير إلى ان u دالة توافقية علي كل الأعداد المركبة $z \neq 0$ بما ان v هي المرافق التوافقي للدالة u فإن $u + iv$ تحليلة علي كل الأعداد المركبة $z \neq 0$ وبالتالي فإن u, v تحققان معادلتا كوشي وريمان .

ومن ذلك نستنتج أن :

$$u_x = v_y \quad , u_y = -v_x$$

ومن المعادلة أعلاه فإن:

$$v_y = u_x = \frac{2x}{x^2 + y^2}$$

باجراء التكامل بالنسبة للمتغير y نستنتج ان:

$$v(x,y) = \int \frac{2x}{x^2 + y^2} dy = 2\tan^{-1}\frac{y}{x} + g(x)$$

نفاضل (x, y) بالنسبة لx نستنتج ان :

$$v_{\mathrm{x}}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = \frac{2}{1 + \left(\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}\right)^2} \frac{d}{\mathrm{dx}}\left(\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{x}}\right) + \mathrm{g}'(\mathrm{x})$$

$$v_x = \frac{-2y}{x^2 + y^2} + g'(x)$$

ولكن $v_{\mathrm{x}} = -\mathrm{u}_{\mathrm{y}} = \frac{-2\mathrm{y}}{\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2}$

وبالمقارنة بين قيمتي v_xفان $g'(x) = 0$ لذلك فإن $g(x) = c$ وهى الدالة الثابتة , وهذا يعنى أن المرافق التوافقى للدالة u هو

$$v(x, y) = 2 \tan^{-1} \frac{y}{x} + c$$

الفصلالثاني

بعض الطرق العادية لحل التكاملات الخطية

(1-2) مقدمة:

في هذا الفصل نتناول بعض الطرق العادية لحل التكاملات الخطية التي تظهر في الكفافات ، وكذالك النظريات الخاصة بالتكاملات الخطية مثل النظرية الأساسية في الجبر ، ليوفيل، مورير، .... الخ.

(2-2) الكفافات Contours

الكفاف :هو عبارة عن منحنى مغلق يمكن أن يكون بسيط أو متعدد الترابط .

(3-2)أنواع الكفافات:

أ. كفاف بسيط الترابط simple connected Domain :

يقال أن النطاق D أنه بسيط الترابط إذا كان مساره (كنتور-كفاف) مغلق بسيط داخل D لا يحتوي داخله إلا نقاط من D .

ومثال لنطاق بسيط الترابط هو النطاق الداخلي (أي فئة جميع النقاط الداخلية) لكنتور بسيط .

ومن ناحية أخرى , فالمنطقة الحلقية الواقعة بين دائرتين متحدتي المركز تعطينا مثالا لنطاق بسيط الترابط .

ب. كفاف متعدد الترابط Multiply Connected domain :

إذا لم يكن النطاق بسيط الترابط فإنه يسمى نطاق متعدد الترابط .

(4-2) التكامل الخطي Line Integration :

التكامل المحدد للدالة f لمتغير مركب z وذات قيم مركبة , ويعرف هذا التكامل بدلالة قيم

$f(z)$على طول كفاف معطى c ممتد من النقطة $\alpha = a$ الى النقطة $z = b$ في المستوى المركب .

وقيمة هذا التكامل تتوقف عموما على الكفاف c وفي نفس الوقت على الدالة F , ومثل هذا التكامل يكتب على الصورة :

$\int_{\alpha}^{\beta} f(z)dz$ أو $\int_{c} f(z)dz$

مثال(1):

أحسب قيمة التكامل

$$I_1 = \int_{C_1} Z^2 dz$$

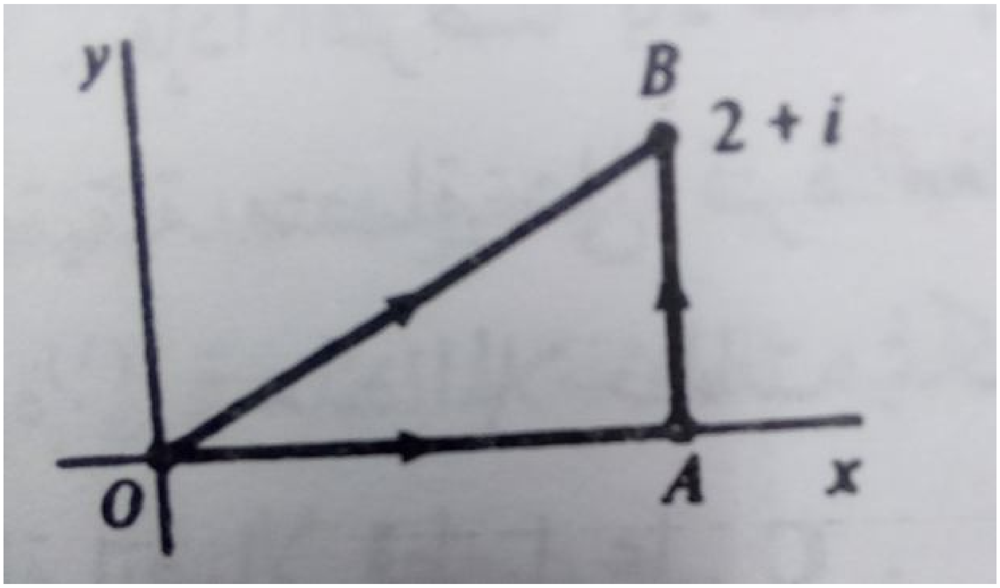
الحل:

في الحالة التى يكون فيها c_1 و القطعة المستقيمة OB من $Z = 0$ الى $Z = 2 + i$ في الشكل التالى لاحظ أن نقط c_1 تقع على الخط المستقيم $x = 2y$ ؛ وعليه اذا استخدمنا y كبارامتر فإن المعادلة البارامترية للكفاف تكون:

$$z(y) = 2y + iy \, , (0 \leqq y \leqq 1)$$

ويمكن كتابة التكامل z^2 علي c_1 على الصورة

$$z^2 = x^2 - y^2 + i2xy = 3y^2 + i4y^2$$



وعليه فإن

$$I_1 = \int_0^1 (3y^2 + i4y^2)(2 + i)\,dy$$

$$= (3 + 4i)(2 + i)\int_0^1 y^2\,dy \quad = \frac{2}{3} + \frac{11}{3}i$$

نأخذ مسار أخر c_2 للتكامل , الا وهو الكفاف OAB فى الشكل(2-1) أعلاه فى هذه الحالة

تكون قيمة التكامل .

$$I_2 = \int_{c_2} z^2 dz = \int_{OA} z^2 dz + \int_{AB} z^2 dz$$

كمعادلة بارامترية للقوس OA نأخذ $z(x) = x(0 \leqq r \leqq 2)$ وكمعادلة بارامترية للقوس AB نأخذ$z(y) = 2 + iy\ (0 \leqq y \leqq 1)$ إذن

$$I_2 = \int_0^2 x^2\, dx + \int_0^1 (2 + iy)^2 i\, dy$$

$$= \frac{8}{3} + \left[\int_0^1 (4 - y^2)\, dy + 4i\int_0^1 y\, dy\right] \quad = \frac{2}{3} + \frac{11}{3} i$$

معادلة الكفاف OAB يمكن كتابتها على الصورة :

$$Z(t) = \begin{bmatrix} T & (0 \leqq T \leqq 2) \\ 2 + i(T-2) & (2 \leqq T \leqq 3) \end{bmatrix}$$

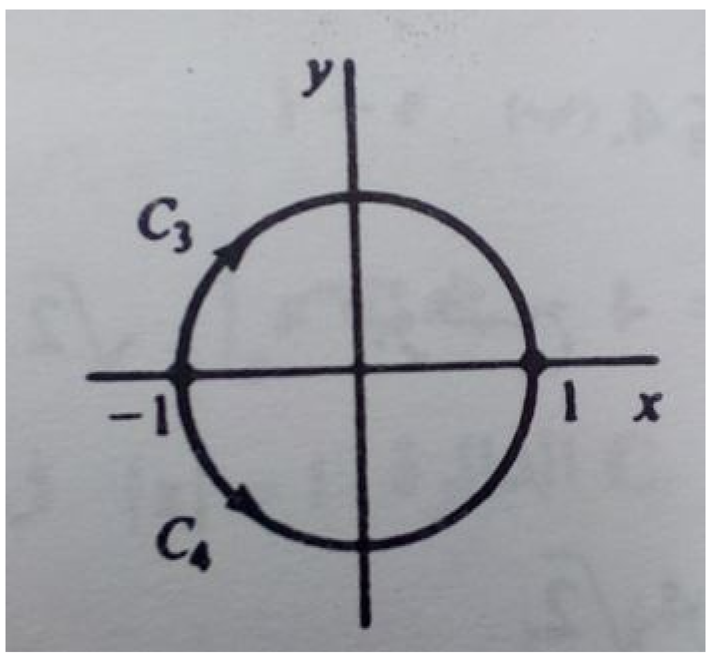
نلاحظ أن $I_2 = I_1$ ؛ وعليه فإن تكامل Z^2 على الكفاف البسيط المغلق $OABO$

$$I_2 - I_1 = 0$$

وكمثال ثالث سنعتبر التكامل المعرف بالدالة $f(z) = \bar{z}$ ونأخذ النصف الأعلى للدائرة $|z| = 1$ الى $z = 1$ كمسار c_3 للتكامل في الشكل (2-2) التالي وكمعادلة بارامترية للكفاف c_3 نأخذ

$$Z(\theta) = \cos\theta + \sin\theta$$

أي $Z(\theta) = e^{i\theta}$, $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$



إذن $I_3 = \int_{c_3} \bar{z}dz = -\int_{-c_3} \bar{z}dz = -\int_0^{\pi} e^{i\theta} ie^{i\theta}\, d\theta = -\pi i$

التكامل I_4 بين نفس النقطتين على طول نصف الدائرة السفلي c_4 والممثل بالمعادلة

$$Z(\theta) = e^{i\theta} \ ,(\pi \leqq \theta \leqq 2\pi)$$

يمكن حسابه مباشرة

$$I_4 = \int_{c_4} \bar{z}dz = \int_{\pi}^{2\pi} e^{-i\theta} ie^{i\theta} d\theta = \pi i$$

لاحظ أن التكامل $I_3 = I_4$ وبأن التكامل I_c حول الدائرة C باكملها وفي اتجاه مضاد لعقارب الساعة لايساوي صفرا

$$I_c = \int_c \bar{z}dz = I_4 - I_3 = 2\pi i$$

إذا كانت Z نقطة علي دائرة الوحدة C فإن $\frac{1}{z} = \frac{\bar{Z}}{|Z|^2} = \bar{z}$

وعليه فإن الدوال المكاملة في التكاملات $I_4 =$ و I_3 و I_c يمكن إستبدالها بالدالة $\frac{1}{z}$ وعلى وجه التخصيص $I_c = \int_c \frac{dz}{z} = 2\pi i$

وكمثال أخير ليكن الكفاف c_5 هو القطعة المستقيمة من $z = i$ الى $z = i$ بدون حساب التكامل $I_5 = \int_{c_5} \frac{dz}{z^4}$

نوجد حدا أعلى لقيمته المطلقة . مسار التكامل هو قطعة من المستقيم $y = 1 - x$ وعليه إذا كانت z نقطة على c_5 فإن :

$$|z^4| = (x^2 + y^2)^2 = (x^2 + (1 - x)^2)^2 = (2x^2 - 2x + 1)^2$$

وهذا يعني أن $|Z^4| = \left[2\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\right]^2 \geqq I_4$ وذلك لأن $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 \geqq 0$ وتبعا لذلك فإن لكل z على C_5 وحيث أن طول C_5 يساوي $\sqrt{2}$, فبوضع $M = 4$ في المتباينة السابقة

نحصل على $|I_5 \leqq 4\sqrt{2}|$.

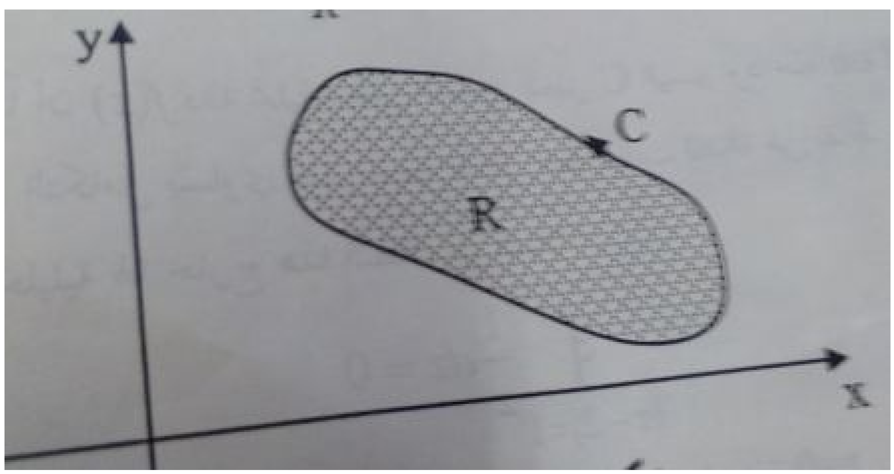
(5-2) نظرية كوشي جورسات Cauchy Theorem:

تنص على :إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية فى المنطقة R وعلى حدودها المنحنى المغلق C فإن:

$$\oint_C f(z)dz = 0$$

البرهان:

يجب التمهيد أولا أن الى نظرية شهيرة في المتغير الحقيقى وتسمى بنظرية جرين في المستوى وتنص على أنه :إذا كانت $p(x,y)$ و $Q(x,y)$ دوال متصلة ولها تفاضلات جزئية متصلة فى منطقة R وعلى حدودها C والشكل(2-3) يوضح:



$$\oint P\,dx + Q\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x}\frac{\partial Q}{\partial y}\right) dx\,dy$$

التكامل الخطى يتحول إلى تكامل مساحة وبالنسبة للنظرية فبما أن $f(z) = u + iv$ دالة تحليلية فان u, v تكون متصلة وكذلك مشتقاتها الجزئية داخل منطقة R وعلى حدود المنطقة المنحنى C مع ملاحظة أن :

$$f(z)dz = (u + iv)(dx + idy)$$
$$= (udx - vdy) + i(vdx + udy)$$

فإن

$$\oint_c f(z)dz = \oint_c (udx - vdy) + i\oint_c (vdx + udy)$$

وبتطبيق نظرية جرين علي كل من التكاملين فان :

$$\oint_c f(z)dz = \iint_R \left(-\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy + i\iint \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right) dxdy$$

ولكن $f(z)$ دالة تحليلية فهي تحقق معادلتى كوشي ريمان أي أن :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial x} (2)$$

وبإستخدام هاتين المعادلتين فإن

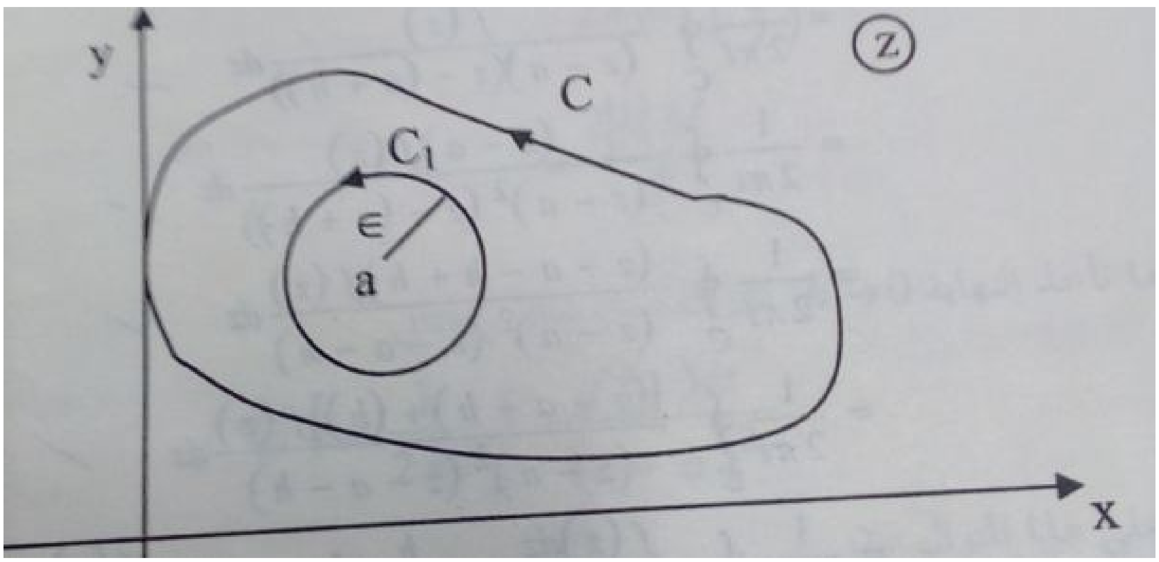
$$\oint_c f(z)dz = 0$$

(6-2) صيغة كوشي للتكامل:

وبشكل عام فإن:

$$f^{n}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_{c} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz \quad , n = 1,2,\ldots$$

البرهان:



$$\oint_{c} \frac{f(z)}{z-a}dz = \oint_{c} \frac{f(z)}{z-a}dz = \oint_{|z-a|=\epsilon} \frac{f(z)}{z-a}dz$$

$$i\int_{0}^{2\pi} F\left(a + \epsilon e^{i\theta}\right) d\theta \rightarrow (1)$$

ولكن $f(z)$ دالة تحليلية فهي متصلة وبالتالي فإن:

$$\lim_{E\to 0} F\left(a+\epsilon e^{i\theta}\right) = F(a)$$

وبأخذ النهاية عندما $\epsilon \to 0$ ل(1) فإن:

$$\oint_c \frac{f(z)}{z-a} dz = i(F(a))\, 2\pi$$

أي أن

$$F(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{z-a} dz$$

وهذا يثبت الحالة

$$n = 0$$

وعند $n = 1$ فإننا نأخذ القيمة

$$\frac{F(a+h)-F(a)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{1}{h}\left[\frac{1}{z-(a+h)} - \frac{1}{z-a}\right] f(z)dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{1}{h}\frac{z-a-z+a+h}{(z-a)(z-(a+h))} f(z)dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{(z-a)(z-(a+h))} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{z-a\, f(z)}{(z-a)^2(z-(a+h))} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{(z-a-h+h)\, f(z)}{(z-a)^2(z-a-h)} dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{[(z-a-h)+(h)]f(z)}{(z-a)^2(z-a-h)}dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{(z-a)^2}dz + \frac{h}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{(z-a-h)(z-a)^2}dz$$

وواضح أنه في حالة $h \to 0$ فإن الطرف الايسر يصبح $f'(a)$ ويأخذ الطرف الايمن الصورة المطلوب إثباتها ولذلك فبأخذ الحد الثاني أي الطرف الايمن :

$$\frac{h}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)dz}{(z-a)^2(z-a-h)} = \frac{h}{2\pi i}\oint_{c_2} \frac{f(z)dz}{(z-a)^2(z-a-h)}$$

$$= \frac{h}{2\pi i}\oint_{|z-a|=\epsilon} \frac{f(z)dz}{(z-a)^2(z-a-h)}$$

وبإختيار h صغيرة جدا بحيث أن $z = a + h$ يكون داخل المسار c_1 ايضا وبحيث يكون :

$$h < \frac{\epsilon}{2}$$

وبإستخدام المتباينة $|a-b| \geq |a| - |b|$:

$$|z-a-h| \geq |z-a| - |h| > \epsilon - \frac{\epsilon}{2} = \frac{\epsilon}{2}$$

كذلك فإن $f(z)$ دالة تحليلة فهي محدودة أي أن $|F(z)| < M$ حيث M عدد موجب .

$$\left|\frac{h}{2\pi i}\oint_{c_1} \frac{F(z)dz}{(z-a)^2(z-a-h)}\right| \leq \frac{|h|}{2\pi}\oint_{c_1} \frac{|f(z)|}{|(z-a)^2||z-a-h|}|dz|$$

$$\leq \frac{|h|M\epsilon}{2\pi(\epsilon^2)\left(\frac{\epsilon}{2}\right)}\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$\frac{2|h|M}{\epsilon^2}$$

وعندما نأخذ النهاية $h \to 0$ فإن التكامل ينعدم وبالتالي

$$f'(\mathrm{a}) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(z)dz}{(z-a)^2}$$

وعلى هذا المنوال فإن:

$$\frac{f'(a+h)-f'(a)}{h} = \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{1}{h}\left[\frac{1}{(z-a-h)^2} - \frac{1}{(z-0)^2}\right] f(z)dz$$

$$= \frac{2!}{2\pi i}\oint \frac{f(z)}{(z-a)^3}dz + \frac{h}{2\pi i}\oint \frac{3(z-a)-2h}{(z-a-h)^2(z-a)^3} f(z)dz$$

وبأخذ النهاية $h \to 0$ فإننا نصل للمطلوب عند $n = 2$ بإثبات الحد الثاني ينعدم يتم التكامل على الدائرة $|\mathrm{z}-\mathrm{a}| = \epsilon$ وبملاحظة أن

$$|(3(\mathrm{z}-\mathrm{a})-2h)f(z)| = |3(\mathrm{z}-\mathrm{a})-2h||f(z)|$$

$$\leq (3|z-a| + 2|h|)M$$

$$\leq \left[3\epsilon + 2\frac{\epsilon}{2}\right]M \leq 4\epsilon M$$

كذلك $\left|\frac{h}{2\pi i}\oint_{c_1} \frac{3(\mathrm{z-a})-2h}{(\mathrm{z-a-h})^2(\mathrm{z-a})^3} f(z)dz\right| \leq \frac{|h|}{2\pi i}\frac{4\epsilon \mathrm{M}}{\left[\frac{\epsilon}{2}\right]^2\epsilon^3} = \frac{|\mathrm{h}|16M}{\epsilon^3}$

واضح أنها تنعدم عندما $h \to 0$ أي أن الحد الثاني ينعدم وبالتالي فإن

$$f''(\mathrm{a}) = \frac{2!}{2\pi i}\oint_{\mathrm{c}} \frac{f(z)}{(\mathrm{z-a})^3}\mathrm{dz}$$

$$f^{(n)}(a) = \frac{n!}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$

مثال(2) :

أوجد التكامل $\oint_{\mathrm{c}} \frac{e^{5z}}{(z-1)^5}$ حيث c يحتوي النقطة الشاذة $z = 1$

الحل :

من صيغة كوشي للتكامل مباشرة فإن $\oint_c \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz = \frac{2\pi i}{n!} f^{(n)}(a)$

ولكن $f(z) = e^{5z}$ دالة تحليلية في كل مكان ومشتقاتها النونية $f^{(n)}(z) = (5)^n e^{5z}$ فإن :

$$\oint_c \frac{e^{5z}}{(z-1)^5} dz = \frac{2\pi i}{4!} f^{(4)}(1)$$

$$= \frac{2\pi i}{4!} (5)^4 e^5$$

(2-7) متباينة كوشي :

$$f^n(a) \leq \frac{mn!}{r^n}$$

$$|f^n(a)| \leq \frac{mn!}{r^n} \qquad ; \qquad n = 0,1,2,....$$

و $|f(z)| < m$

البرهان

$$f^n(a) = \frac{n!}{2\pi i} \int_c \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz$$

$$|f^n(a)| = \frac{n!}{2\pi i} \left| \int_c \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \right|$$

$$= \frac{n!}{2\pi i} \left| \int_{|z-a|=r} \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}} dz \right|$$

$$\leq \frac{n!}{2\pi i} \int_{|z-a|=r} \left|\frac{f(z)}{|z-a|^{n+a}}\right| |dz|$$

$$\leq \frac{n!}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{m}{r^{n+1}} |dz|$$

$$Z = re^{i\theta}$$

$$dz = ire^{i\theta}$$

$$|dz| = \left|ire^{i\theta}\, d\theta\right|$$

$$ir\left|e^{i\theta}\right| d\theta$$

$$\leq \frac{n!}{2\pi} \frac{m}{r^{n+1}}\ ir\, d\theta$$

$$\leq \frac{n!}{2\pi i} \frac{m}{r^{n+1}}\ \ ir2\pi\ \ \leq \frac{mn!}{r^n}$$

$$\therefore f^n(a) \leq \frac{mn!}{r^n}$$

وهذه هي متباينة كوشي.

(8-2) نظرية ليوفيل Liouville's Theorem :

تنص على:

إذا كانت f دالة شاملة ومحدودة لجميع قيم z في المستوى المركب فإن fتكون ثابتة القيمة .

البرهان

ليكن $M \leq |F(z)|$ لجميع قيم Z .

ولتكن Z_0 نقطة اختيارية , ومن الدائرة $C: |z - z_0| < R$ و من متباينة كوشي $n = 1$ نجد أن $|F'(Z_0)| \leq \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{R}}$ وبوضع $R \rightarrow \infty$ في متباينة كوشي فإننا نجد أن $F'(z_0) = 0$ وبالتالي

$F'(\mathrm{Z}) = 0$ لجميع قيم Z .إذا كانت مشتقتها دالة تحليلية مساوية للصفر لجميع قيم Z فإنه يجب أن تكون دالة ثابتة القيمة وعلى ذلك فإن f تكون دالة ثابتة القيمة .

(9-2) نظرية موريرا Morera's Theorem :

إذا كان $f(z)$ دالة متصلة في نطاق بسيط الترابط D وكان $\int_C \mathrm{F(z)dz} = 0$ لكل منحني بسيط مقفل فإن $f(z)$ تكون تحليلة في D.

البرهان

في الحقيقة $f'(\mathrm{z}) = f(z)$ ورغم افتراض أن الدالة f دالة تحليلة في D , فإننا لم نستخدم في البرهان الا خاصية اتصال f بالاضافة الى الشرط بأن التكامل f حول أي كنتور مغلق بسيط في داخلية D يكون مساويا للصفر .

وعليه , فان توفر هاتين الخاصتين

$$f(z) = \int_{z_0}^{z} F(T)dt \;\; \rightarrow (1)$$

$$\mathrm{F}'(\mathrm{z}) = f(z) \;\; \rightarrow (2)$$

يتبين أن F تحليلية في D , وذلك لكونها مشتقة دالة تحليلية .

(10-2) النظريةالأساسية في الجبرFundamental Theorem Algebraof:

تنص على:

كل معادلة كثيرة حدود $p(z) = a_0 + a_1(z) + \cdots + a_n z^n = 0$ ذات درجة $n \geq 1$ لها جذر واحد على الأقل .ويترتب على ذلك أن $p(z) = 0$ لها n من الجذور مع أخذ التكرار فى الاعتبار.

(2-11) نظرية أكبر مقياس Maximum Nodulus Principle:

تنص على :

إذا كانت $f(z)$ تحليلية على المنحنى المقفل C وداخله ولا تساوى ثابتا بالتطابق فإن $|f(z)|$ تأخذ اكبر قيمة على C.

(2-12) نظرية أصغر مقياس Minimum Moduls Theorem :

إذا كانت $f(z)$ تحليلية على المنحنى المقفل C وداخله $f(z) \neq 0$ داخل C فإن $|f(z)|$ تأخذ أصغر قيمة على c.

(2-13) النقاط الشاذة Singular points:

إذا كان $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z - z_0)^n + \frac{b_1}{z-z_0} + \frac{b_2}{(z-z_0)^2} + \cdots + \frac{bm}{(z-z_0)^m}$

فان z_0 تسمى نقطة شاذة من الدرجة m حيث m تمثل درجة القطب واذا كان $m = 1$ فإن القطب يسمى قطبا بسيطا Simple Pole . فعلى سبيل المثال :

$$\frac{Z^2 - 2Z + 3}{Z - 2} = 2 + (Z - 2) + \frac{3}{(Z - 2)}$$

حيث $|z - 2| > 0$, لها قطب بسيط عند $z = 2$.

(2-14) أنواع النقاط الشاذة :

أ. النقطة الشاذة الأساسية :

عندما يحوى الجزء الأساسى من دالة F عند Z_0 عددا لانهائيا من الحدود الغير صفرية فإن النقطة Z_0 يقال لها نقطة شاذة اساسية .

مثال لذلك :$(z - z_0)$ لها عدد لانهائى من القوى السالبة وكذلك

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\frac{1}{z^n}$$

حيث $0 < |z|$ التي لها نقطة شاذة أساسية عند $z = 0$.

ب. النقطة الشاذة المزالة :

عندما تكون كل المعاملات $\mathrm{b_n}$ في الجزء الاساسي من دالة f عند النقطة شاذة معزولة z_0 مساوية للصفر فإن النقطة z_0 يقال لها نقطة شاذة مزالة .

ت. النقطة الشاذة القابلة للرفع :

إذا كانت الدالة $f(z)$ يمكن اشتقاقها فإن النقطة الشاذة تسمي نقطة شاذة قابلة للرفع مثلا إذا كان :

$$f(z) = \frac{-\sin z}{\cos z} dz$$

(2-15) الأقطاب :

هي قيم z للدالة $f(z)$ في الدالة الكسرية التى لا تجعل المقام يساوي صفر.

مثلا الدالة $f(z) = \frac{1}{z}$ فإننا نقول أن z لها قطبا بسيطا عند z_0 .

ومثلا الدالة $f(z) = \frac{1}{(z-1)^2}$ فإن الدالة z لها قطبان من الدرجة الثانية عند z_0.

(2-16) حساب المتبقيات (الرواسب):

حساب مفكوك متسلسلة لورانت هي عملية مضنية , وحيث أن المتبقي عند z_0 يحتوي على معامل a_{-1} في مفكوك لورانت فإننا نبحث عن طريقة لحساب المتبقيات من بعض المعلومات حول طبيعة المتبقي عند z_0 .

أ. قانون حساب المتبقيات:

$$\mathrm{a}_{-1} = \lim_{z \to a} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z-a)^m f(z)]$$

مثال(3):

جد متبقيات الدالة $f(z) = \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$

الحل:

$z = -1$قطب من الدرجة الثانية .

$z = \pm 2i$ قطبان بسيطان .

$$\therefore \int f(z)dz = 2\pi[R_1 + R_2 + R_3]$$

عند $z = -1$ المتبقي هو :

$$\lim_{z\to -1} \frac{1}{1!}\frac{d}{dz}\left[(z+1)^2 \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}\right]$$

$$= \lim_{z\to -1} \frac{(z^2+4)[2z-2]-(z^2-2z)[2z]}{(z^2+4)^2}$$

$$\frac{5(-4)-(3)(-2)}{25} = \frac{-14}{25}$$

عند $z = 2i$

$$\lim_{z\to 2i}(z-2i)\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z+2i)(z-2i)} = \frac{7+i}{25}$$

عند $z = 2i$

$$= \frac{7-i}{25}$$

الفصل الثالث

إستخدام متسلسلتي تايلور ولورانت في حل بعض التكاملات الخطية

(1-3) مقدمة

في هذا الفصل نستخدم متسلسة تايلور اللانهائية ولورانت فى حل مسائل التكامل الخطي التى يصعب حلها بالطرق العادية بإستخدام متسلسلة تايلور ولورانت يكون حلها أسهل وأكثر دقة وفي مايلي وصف لاستخدام متسلسلتي تايلور ولورانت في حل بعض التكاملات الخطية.

(2-3) متسلسلة تايلور:

$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + \frac{f''(a)(z-a)^2}{2!} + \cdots + \frac{f^n(a)(z-a)^n}{n!}$$

ولمتسلسلة تايلور صيغ عديدة تتغير تبعا للمثال ولو وجدنا في المثال دالة لوغريثمية مثلا e^z فتكاملها بالطرق العادية اصعب فباستخدام متسلسلة تايلور للدالة اللوغريثمية e^z يكون :

$$e^z = 1 + \frac{1}{z} + \frac{z^2}{2!} + \cdots + \frac{z^n}{n!} + \cdots$$

وأن متسلسلة تايلور هي المتسلسلة المعتاد عليها في حل الدوال الحقيقية .

وكذلك لو جدنا الدالة المثلثية $sinz$ كما نعلم أن z هي دالة مركبة أي ان $z = x + iy$ فتكاملها بالطرق العادية أصعب لذلك نلجأ الى متسلسلة تايلور لسهولته فى حلول مثل هذه المسائل , فمفكوك الدالة المثلثية $sinz$ بالنسبة لتايلور هو:

$$sinz = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{(2n-1)} + \cdots$$

كذلك الدالة $\cos z$ مفكوكها كالأتي $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots$

وهذه هي دوال تحليلة في كل مكان ولذلك فليس هناك قيد علي قيمة z طالما كانت $|z| < \infty$.

فأي متسلسلة لانهائية لابد أن يكون هناك مشاكل في مجموعها فإذا كان محدودة فهي متقاربة اذا

غير محدودة (لانهائية) فهي متباعدة وهذا يعطي قيد على المنطقة التي يمكننا استعمالها فيها وتسمى هذه المنطقة بمنطقة التقارب .وبالنسبة لمفكوك تايلور فإن منطقة التقارب تعطى ب$|z-a| < R$ حيثR نصف قطر التقارب لمتسلسلة تايلور أو متسلسلة القوى بشكل عام حيث R هي المضافة من النقطة a الى أقرب نقطة شاذة للدالة $f(z)$:

من الشكل السابق يجدر الاشارة الى أنه على الدائرة $|z-a| = \mathrm{R}$ فإنه ربما تتقارب المتسلسلة أو لاتتقارب اذ يجب بحث ذلك على إنفراد.

فخارج نطاق هذه الدائرة $|z-a| = \mathrm{R}$ فإن المتسلسلة تكون متباعدة .

وعلى ضوء ذلك فهنالك متسلسلات عليها قيود كالأتي:

$$Ln(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{z^n}{n} + \cdots, |z| < 1$$

$$tan^{-1} z = z - \frac{z^3}{3} + \frac{z^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{2n-1} + \cdots, |z| < 1$$

$$(1+z)^p = 1 + p^{\mathrm{z}} + \frac{p(p-1)^2}{2!} + \cdots + \frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)}{\mathrm{n!}} + \cdots, |\mathrm{z}| < 1$$

حيث p كمية سالبة أو كسرية .

(3-3) متسلسلة لورانت:

الصورة العامة لمفكوك لورانت $f(z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} a_j(z-a)^j$

يطلق على الحدود ذات الرتبة الموجبة , أي $\cdots + \mathbf{a_0} + \mathbf{a_1}(\mathbf{z}-\mathbf{a}) + \mathbf{a_2}(\mathbf{z}-\mathbf{a})^2$ بالجزء التحليلي لمفكوك لورانت وجدير بالذكر بأنه في حالة اختفاء النقطة الشاذة فإن الجزء الأساسي ينعدم ليصبح المفكوك مفكوك تايلور العادي هذا الجزء يتكون من تكون الشذوذ.

كما نعلم أن وجود النقطة الشاذة عند $z = a$ في المركز هو الذي يسبب كل التغير الذي يحصل كما في حالة عدم وجود النقطة الشاذة في المركز فإن مفكوك لورانت يصبح مفكوك تايلور والسبب لأن $f(z)$ في هذه الحالة تصبح تحليلية في المنطقة R والتي تمتد لأسفل تصبح دائرة واحدة.

كما أن عند $z = a$ نقطة شاذة هذا الشذوذ لم تحدد نوعه فهو عام فربما يكون قطبا أو تفرعا أو يمكن إزالته أو أساسيا .

فعندما تكون $\lim_{z\to a} f(z) = \infty$ فإن $z = a$ تكون قطبا (وليكن رتبة n)وعندئذ نجد أن الجزء الأساسي من مفكوك لورانت يكون له عدد محدود بهذه الكيفية .

$$\frac{a-1}{z-a} + \frac{a-2}{(z-a)^2} \dots + \frac{a-n}{(z-a)^n}, a_{-n} \neq 0$$

أما إذا كانت الدالة $f(z)$ دالة وحيدة القيمة وغير معرفة عند $z = a$ ولتكن $\exists f(z) \lim_{z\to a}$ فإن $z = a$ تكون مزالة وفي هذه الحالة تفيد تعريف الدالة عند $z = a$ لقيمة النهاية ونقوم بحساب المفكوك .

أما اذا كان $z = a$ نقطة تفرع للدالة متعددة القيم فإنها تكون نقطة شاذة على أن كل فرع للدالة هو دالة تحليلية ويمكن فكه بمفكوك تايلور والذي له نصف قطر تقارب يقاس بالمسافة بين نقطة الفك ونقطة التفرع .

وأي نوع من الشذوذ خلاف الأنواع الثلاثة يسمى بالشذوذ الأساسي وفي هذه الحالة فإن الجزء الأساسي من مفكوك لورانت لانهائي في حدوده .

ونقطة اللانهاية تنتج نقطة شاذة عند مالانهاية فمثلا $f(z) = z^2$ لها قطب من الرتبة الثانية عند ∞ لأن $f\left(\frac{1}{\omega}\right) = \frac{1}{\omega^2}$ لها قطب عند$\omega = 0$ من الرتبة الثانية .

وكذلك $f(z) = e^z$ لها نقطة شاذة أساسية عند$\omega = 0$.

والدالة التي هي تحليلة في كل مكان من مستوى ω تسمى بالدالة الكلية من أمثال هذه الدوال $\sin z, \cos z$, e^z, $\cosh z, \sinh z$ فمثل هذه الدوال يمكن فكها بمفكوك تايلور ولها نصف قطر تقارب لانهائي .

أوجد $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2}$ عند $z = 1$.

في هذه المسالة فإن $a = 1$ وهي تمثل نقطة شاذة للدالة من نوع القطب من الرتبة 2 وبالتالى فإن التمثيل يمكن أن نستخدم فيه صيغة تكامل كوشي التى هي على النحو:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_1} \frac{e^{\omega}}{(\omega-1)^{n+3}} d\omega$$

التكامل ينعدم عند $n = 3,4,5, \dots$ ولكن عندما تكون $n = 1,2$ فإن التكامل يساوي نفس القيمة وهي e .

وبينما تنعدم بقية الحدود في الجزء الأساسي من المفكوك وبالتالي فإن :

$$f(z)=\frac{e^z}{(z-1)^2}$$
$$=\frac{e}{z-1}+\frac{e}{(z-1)^2}$$
$$+\mathrm{e}\left[\frac{1}{2!}+\frac{(\mathrm{z}-1)}{3!}+\frac{(\mathrm{z}-1)^2}{4!}+\cdots+\frac{(\mathrm{z}-1)^{\mathrm{n}}}{(\mathrm{n}+2)!}+\cdots\right]$$

كما أن التمثيل $f(z)=\frac{e^z}{(z-2)}$ حول $z=2$ إذا طلب مفكوك لورانت لهذا التمثيل فإن الوصف لحل هذا التمثيل كالأتي:

فإن الدالة تحليلية عند $z=2$ ولذلك فإن المفكوك الذي ينتج هو مفكوك تايلور , ونصف قطر التقارب هو R بحيث $|z-2|<R$ هي منطقة التقارب أي أن أي نقطة واقعة في هذه النقطة ستؤدي الى تقارب هذه المتسلسلة .

فإن هذا التمثيل يمكن ايجاده بواسطة متسلسلة تايلور , النقطة الشاذة $Z=2$ داخل الدائرة وعليه فإن الدالة في التمثيل ليست تحليلية لأن أحد أصفار المقام يقع داخل الدائرة وفبذلك يمكن استخدام نظرية كوشي للتكامل والتي تكون على الصيغة :

$$\int\frac{f(z)}{z-a}dz=2\pi i f(a)$$

كما أنه نستخدم نظرية لورانت لتلك التمثيل .

(4-3) أمثلة توضيحية :

مثال(1):

إذا كانت دالة $f(z)$ دالة تحليلية عند جميع النقط داخل وعلى الدائرة التي نصف قطرها R ومركزها عند a وإذا كانت $a+h$ اى نقطة داخل c أثبت نظرية تايلور

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{h^2}{2!}f''(a)+\frac{h^3}{3!}f'''(a)+\cdots$$

الحل:

من صيغة تكامل كوشي يكون.

$$f(a+h) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(z)dz}{z-a-h}$$

بالقسمة

$$\frac{1}{\mathrm{z-a-h}} = \frac{1}{(\mathrm{z-a})[1-\mathrm{h}/(\mathrm{z-a})]}$$

$$\frac{1}{\mathrm{z-a}}\left[1+\frac{h}{(z-a)}+\frac{h^2}{(z-a)^2}+\frac{h^3}{(z-a)^3}+\cdots+\frac{h^n}{(z-a)^n} + \frac{h^{n+1}}{(z-a)^n(z-a-h)}\right]$$

نستخدم صيغة كوشي للتكامل :

$$f(a+h) = \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{f(z)dz}{z-a} + \frac{h}{2\pi i}\oint \frac{f(z)dz}{(z-a)^2} + \cdots + \frac{h}{2\pi i}\oint \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}} + R^n$$

$$= f(a) + hf'(a) + \frac{h^2}{2!}f''(a) + \cdots \frac{h^n}{n!}f^n(a) + R_n$$

حيث

$$\mathrm{R}_n = \frac{h^{n+1}}{2\pi i}\oint \frac{f(z)dz}{(z-a)^{n+1}(z-a-h)}$$

عند z تكون على C فإن $|\mathrm{z-a}| = \mathrm{R}$, $\left|\frac{f(z)}{z-a-h}\right|$ يكون لدينا $2\pi R$ هو طول C

$$|R_n| \le \frac{|h|^{n+1}m}{2\pi \mathrm{R}^{n+1}}2\pi\mathrm{R}$$

مثال(2):

جد $\oint_{|z|=1} \sin\frac{1}{z}\,dz$

الحل:

في هذه الحالة فإن $z = 0$ نقطة شاذة من النوع الأساسي وهي داخل لمسار $|z| = 1$ وبالتالي

$$\oint \sin\frac{1}{z}\,dz = 2\pi i\ R$$

من نظرية الباقي

$$\int f(z)dz = 2\pi i\ R$$

R تمثل الباقي $a-1$ ولإيجاد R نحسب مفكوك لورانت للدالة $\sin\frac{1}{z}$

$$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^5} \ldots$$

وهي جزء اساسي فقط ونجد منها أن $R = a-1 = 1$ وبالتالي فإن

$$\oint_{|z|=1} \sin\frac{1}{z}\,dz = 2\pi(1)$$

$$\int \sin\frac{1}{z}\,dz = 2\pi i$$

مثال(3):

أوجد $\oint(z-3)\sin\frac{1}{z+2}\,dz$ حيث c يحتوى النقطة $z = -2$

الحل:

توجد نقطة شاذة اساسية عند $z = -2$ المحتواه داخل c وبالتالي

$$\oint_{C} (z-3)\sin\frac{1}{z+2}\,dz = 2\pi R$$

حول النقطة $Z = -2$ كالاتي :

بوضع $u = z + 2$

$$z - 3\sin\frac{1}{z+2} = (u-5)\sin\frac{1}{u}$$

من مفكوك لورانت $\sin\frac{1}{u}$

$$\sin\frac{1}{u} = \frac{1}{u} - \frac{1}{3!}\frac{1}{u^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{u^5} + \cdots$$

$$(u-5)\left[\frac{1}{u} - \frac{1}{3!}\frac{1}{u^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{u^5}\dots\right]$$

$$= \left[1 - \frac{1}{3!}\frac{1}{u^2} + \frac{1}{3!}\frac{1}{u^4} - \frac{-5}{u} + \frac{5}{3!}\frac{1}{u^3} - \frac{5}{5!}\frac{1}{u^5}\dots\right]$$

وبالتالي فإن

$$R = a - 1 = -5$$

أي أن

$$\oint (z-3)\sin\frac{1}{z+2}dz = 2\pi(-5)$$

$$= -10\pi i$$

مثال(4):

أوجد تكامل $\oint z^2\sin\frac{1}{z}dz$ حيث c تحتوى $z = 0$

الحل:

$$z^2\sin\frac{1}{z} = z^2\left[\frac{1}{z} - \frac{1}{3!}\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^5} - \cdots\right]$$

$$= z - \frac{1}{3!}\frac{1}{z} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^3}\dots$$

بالتالي فإن

$$R = a - 1 = \frac{1}{3!}$$

أي أن

$$\oint z^2 \sin\frac{1}{z} dz = 2\pi\left[\frac{-1}{3!}\right]$$

$$= -\frac{\pi i}{3}$$

مثال (5):

أحسب $\oint_{|z|=\frac{\pi}{2}} \frac{z}{\sin^2 z}$

الحل:

$z = 0$ هي النقطة الشاذة الوحيدة الداخلية وبالتالي

$$\frac{z}{\sin z} = 1 + \frac{1}{3!} z^2$$

$$\frac{z^2}{\sin^2 z} = 1 + \left[\frac{2}{3!} z^2 +\right]$$

بالقسمة علي z

$$\frac{z}{\sin^2 z} = \frac{1}{z} + \left[\frac{2}{3!}\right] z + \cdots$$

مفكوك لورانت $a - 1 = 1$ أي أن $z = 0$ قطب رتبة

وللتأكد من ذلك فإن $\lim_{z\to} (z) \frac{z}{\sin z^2} = 1 \neq 0$

أي أن $z = 0$ قطب من رتبة واحدة .

وبالتالي فإن$R = 1$:

$$\oint_{|z|} \frac{Z}{sin^2 z} = 2\pi(R)$$

$$= 2\pi i(1)$$

$$= 2\pi i$$

النتائج والتوصيات

اولاً : النتائج :

1. هنالك بعض التكاملات الخطية يصعب حلها بالطرق العادية المباشرة لذلك يمكن سهولة حلها عن طريق إستخدام متسلسلتي (تايلور ولورانت).
2. توجد بعض تكاملات المسارات المغلقة يسهل حلها عن طريق الرسم (الكفافات).

ثانيا: التوصيات:

1. نوصي بتوسيع تطبيقات متسلسلتي تايلور ولورانت في حل التكاملات الخطية.
2. ترجمة بعض مراجع التكامل التى تحتوي على التكامل الخطي.

المصادر والمراجع

1. أ.د مجدى الطويل ، مقدمة في علم التحليل المركب , 1426ه-2005 م , دار النشر للجامعات-مصر .
2. د.محمد رمضان جهيمة التحليل الحقيقي , 1999 م الدار الدولية للنشر والتوزيع.
3. د.موراي ر.شبيجل التفاضل والتكامل المتقدم 2008 م الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ش.م.م مصر.
4. أ.د.حسن مصطفى العويضي التحليل المركب 1427ه-2006 م مكتبة الرشد ناشرون المملكة العربية السعودية –الرياض .
5. دويل ف.تشرشل وجميس و.براون وروجر ف.فيرهى المتغيرات المركبة وتطبيقاتها 2005م الدار الدولية للاستثمارات الثقافية –مصر.
6. د.موراي ر.شبيجل الدوال المركبة مع مقدمة في التناظر الحافظ للزوايا وتطبيقاته 2005م الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ش.م.م مصر.
7. د.محمود كتكت مبادئ التحليل المركب دار ومكتبة الهلال بيروت دار الشروق للنشر والتوزيع والطباعة .