بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة السودان للعلوم و التكنولوجيا

كلية التربية

قسم العلوم – شعبة الرياضيات

بحث تكميلي لنيل درجة بكالوريوس الشرف في التربية رياضيات

بعنوان:

التكامل الثنائي وبعض تطبيقاته

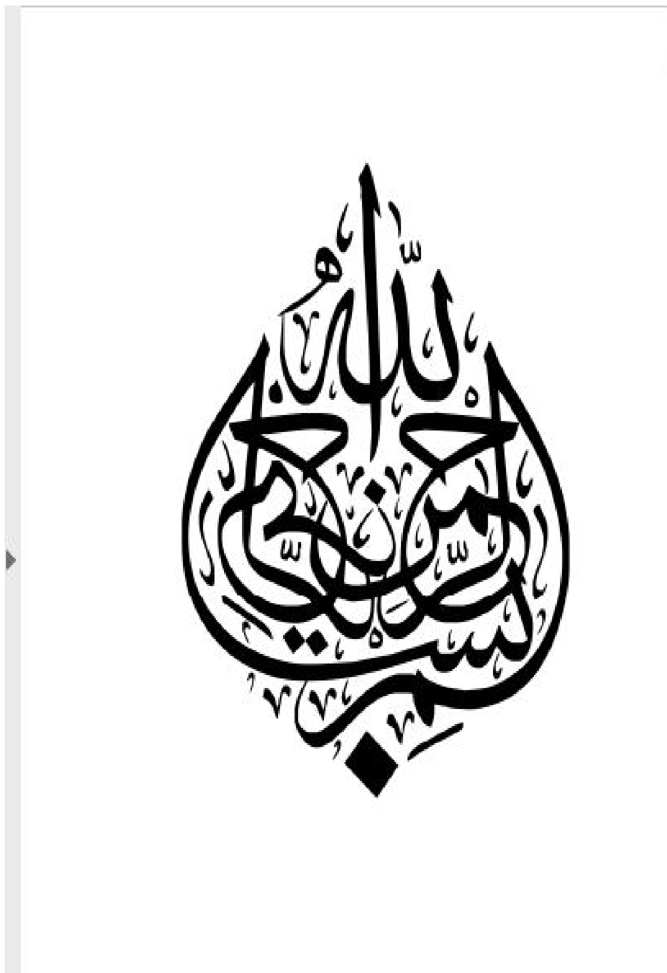
اعــداد:

- رقية خميس رمضــان لـــيج
- بدرالدين سليمان محمداحمد
- سلمى حامد احــمد محـــمد
- الشريفة احمد محــمد احــمد

اشراف الدكتور:

عبدالقادرالبشرى الضي

سبتمبر 2018م


بسم الله الرحمن الرحيم

الآية الكريمة

قال تعالى في محكم تنزيله :

" إِنْ أُرِيدُ إِلَّا الإِصْلَاحَ مَا اسْتَطَعْتُ وَمَا تَوْفِيقِي إِلَّا
بِاللهِ عَلَيْهِ تَوَكَّلْتُ وَإِلَيْهِ أُنِيبُ "

صـدق الله العظيـم

(سـورة هـود الأيــة 88)

الاهداء

الحمد لله رب العالمين والصلاة و السلام على خاتم الانبيا و المرسلين سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم مرشدنا الى الطريق المستقيم و ناهينا عن غيره موصينا بالعلم و المعرفة بقوله:

(من اراد الدنيا عليه بالعلمومن ارد الاخرة عليه بالعلم ومن ارادهما معا عليه بالعلم).

الى امهاتنا الحبيبات الائي زودونا بالحب و الحنان والائي هن بلسم شفاؤنا وهن من يملكن القلب الطيب ناصعالبياض الى من اعتمدنا عليهن طوال مراحل حياتنا و هن الشمعات الائي تنير حياتنا بل هن قوتنا الائينعتز بهن في حياتنا.

الى اباؤنا الفضائل اصحاب الهيبة و الوقار اللذين علمونا الصبر في عز الشدائد و الثقة في النفس و التصرف بحكمة في اكبر المواقف فهم قوتنا و فخرنا في الحياة , ارجو ان يمدهم الله بطول العمر ليروا ثمارا قد هان قطفها بعد طول انتظار تبقى كلماتكم درر نهتدوا بها طول عمرنا.

الى من هم ارواحنا و قلوبنا اصحاب الالحان و الالوان اللذين يجملون حياتنا و بهم تحلو الحياة ونستمد اصرارنا و عزتنا منهم الا وهم اخواننا و اخواتنا الاعزاء.

الى من يحلو بهم الاخاء تميزا بالوفاء و العطاء الى ينابيع الصدق الى من سعدنا برفقتهم اصدقاؤنا و رفقاء الدرب.

الى من وهبونا العلم والمعرفة و التفاؤل والتمسك بالحياة ونلنا من تجاربهم الكثير و الكثير و كانوا و ماذالوا عونا لنا في حياتنا و هم الاساتذة الاجلاء.الى ذلك المكان الذي نعتبرة بيتنا الثاني و امنا الثانية و هي جامعتنا الحبيبة جامعة السودان للعلوم و التكنولوجيا.

الشكر و العرفان

لابد لنا ونحن نخطو خطواتنا الأخيرة في الحياة الجامعية من وقفة نعود إلى أعوام قضيناها في رحاب الجامعة مع أساتذتنا الكرام الذين قدموا لنا الكثير باذلين بذلك جهودا كبيرة في بناء جيل الغد لتبعث الأمة من جديد

وقبل أن نمضي تقدم أسمى آيات الشكر والامتنان والتقدير والمحبة إلى الذين حملوا أقدس رسالة في الحياة

إلى الذين مهدوا لنا طريق العلم والمعرفة

إلى جميع أساتذتنا الأفاضل

وأخص بالتقدير والشكر الدكتور: عبد القادر البشرى الضوء

الذي أشرف علي هذا البحث ولم يبخل علينا بشئ

وكذلك أشكر كل من ساعد على إتمام هذاالبحث والي كل من قدم لنا العون ومد لنا يد المساعدة وزودنا بالمعلومات اللازمة لإتمام هذا البحث

والي الذين كانوا عونا لنا في بحثنا هذا ونورا يضيء الظلمة التي كانت تقف أحيانا في طريقنا

إلى من زرعوا التفاؤل في دربنا وقدموا لنا المساعدات والتسهيلات والأفكار والمعلومات، ربما دون يشعروا بدورهم بذلك فلهم منا جزيل الشكر

(1-1)المقدمـة:

يعتبر علم التفاضل و التكامل من العلوم القديمة قدم البشرية و لا شك انه يشكل ركيزة هامة في حياة الافراد بالرقم من انه تبلور في القرن السابع عشر الميلادي الا انه كان من اكثر العلوم استخداما في مجال الحياة التطبيقية.

التكامل بصورة عامة يحتوي على الكثيرمن الاشياء مثل الطرق و الانواع و الخواص و الصيغه الأساسية و هذه الاشياء ضروري جدا لفهم التكامل الثنائي لانها بمثابة نقطة انطلاقة للوصول الى الفهم كامل للتكامل الثنائي وقد يضيف خلفية عامة للذين درسو انماطا مختلفة من مقررات علم التفاضل و التكامل, و هناك التكامل الثنائي و بعض تطبيقاته و التي يمكن تطبيقها في الحياة العامة و معهاعبارات و نصوص و مسائل واضحة وكذلك الأساسيات و النظريات مع مادة علمية موضحة و اخرى وصفية لها ويتبع هذا فئات مصنفة من مسائل محلولة توضح وتفصل النظريات ثم اعقبناها بتطبيقات التكامل الثنائي مع البراهين و الأمثلة لكي يدرك الدارس اهمية التكامل الثنائي وتطبيقاته.

(2-1)نبذة تاريخية:

استخدم التكامل قديما في عهد المصريين القدما حوالي 1800 قبل الميلاد فقد دلت بردية موسكو الرياضية على علمهم بصيغة لحساب حجم الهرم المقطوع و تعد طريقة الأستنزاف من اوائل الطرق المستعملة في ايجاد التكاملات حيث تعود الى370قبل الميلاد و كانت تحسب بها الحجوم و المساحات و ذالك بتقسيمها الى اشكال صغيرة غير منتهية معلومة المساحة او الحجم كما تم تطوير هذه الطريقة من قبل ارخميدس و تم استعمالها في حساب مساحات القطع المكافئ و التقريب لمساحات الدائرة.

في الصين طورت طرق مماثلة في القرن الثالث الميلادي بواسطة اليهودي الذي استخدمها لايجاد مساحة الدائرة كما تم استعمال هذه الطريقة فيما بعد في القرن الخامس من قبل الرياضيين الصنيين الأب و الأبن

(تسو تشونغ و زوجينغ)لايجاد حجم الكرة , في نفس القرن استخدم الرياضي الهندي اريا بهاتا طريقة مشابهة لحساب حجم المكعب.

اتت الخطوة الهامة والتالية في التفاضل التكاملي في القرن الحادي عشر عندما أخترع العالم الفلكي الحسن بن الهيثم ما يعرف اليوم باسم (مسألة الحسن) نسبة لاسمه المشهور عند الاوروبيين و التي تقود الى معادلة الدردة الرابعة في كتابه المناظرة بينما كان يحل هذه المسألة قام بعملية تكامل لايجاد حجم السطح المكافئ و قد استطاعبالاستقراء الرياضي تعميم هذه النتيجة لدوال كثيرة الحدود وقد كان بالتالي قادرا على ايجاد صيغة عامة لتكاملات دوال كثيرة الحدود لكنه لم يعد للامر اهمية لذلك في وقته.

لم يبدأ ظهورالتقدم الملحوظ في علم التكاملات الا مع القرن السادس عشر و بهذه الوقت كان عمل (كافاليري) بطريقة الكل لا تجزي,عمل فيرمات بوضع الاساسيات لعلم التفاضل و التكامل الحديث.

وكان لاسحاق نيوتن و تورشيلي دورا هاما ايضا في توسيع هذه العلم ففي اوائل القرن السابع عشر قدماء التلميحات الاولى في وجود صلة بين التكامل و الاشتقاقوقد استطعة الياباني (سيكي كاوا) بتوسيع طريقة الاستنزاف تم صياغة التكامل باستعمال النهايات من قبل(برنارد ريمان).

بالنسبة لعلامة التكامل فقد حاول اعطاؤها رمز معين او علامة معينة فلذلك استعمل عمودا صغيرا فوق المتغير للاشارة الى عملية التكامل او ان يضع المتغير داخل مربع الا انه لم يتم تبني هذه العلامة نسبة لصعوبة تعامل الطابعة معها.فالرمز الحديث تم تقديمها من قبل لبيبنزعام1675 كما انه قام بموئمة رمز التكامل بعد اطالته للحرف s هذا بالنسبة للتكامل غير المحدود, اما بالنسبة للتكامل المحدود استعمل لاول مرة من قبل (جوزيف فوريير) باضافة حدود التكامل اعلى و اسفل الرمز السابق.

(3-1)أهمية البحث:

تظهر اهمية التكاملات بصورة عامة و التكاملات الثنائية بصورة خاصة في العديد من الحالات التطبيقية فمثلا اذا اعتبرنا بركة سباحة مستطيلة او مربعة فيمكن ايجاد مساحتها و حجمها بالطرق العادية كذالك حجم الماء الذي يمكن احتوائها و كذالك ايجاد مساحتها السطحية اما اذا كانت البركة بيضاوية او مدورة من القعر فانها تستدعي استخدام التكاملات و كافة التطبيقات الفيزيائية للرياضيات و ميكانيكة الموائع و تتطلب الايفاء بانواع التكاملات.

كما يدخل في برمجة بعض الاجهزة التقنية التي تساعد في حساب المساحات.اما في الطب فهي تضم كافة انواعها و الانجازات الطبية و كل ما يتعلق بالادوية و الغذاء و الامراض و طرق الوقاية منها و المحافظة على الصحة اذا نجد انها تدخل في كافة المجالات لتحل كافة المشكلات التي تظهر اثناء القيام بعملية ما.

(4-1)اهداف البحث:

1- أن يتعرف الطالب على التكامل و صيغه الأساسية.
2- ان يتعرف الطالب على بعض طرق التكامل.
3- ان يتعرف الطالب على التكامل الثنائي.
4- ان يفهم الطالب طريقة حساب التكامل الثنائي.
5- ان يطبق الطالب على التكامل الثنائي.

(5-1)اسباب اختيار مشكلة البحث:

ان التكامل العادي او الخطي يفشل في حالة الدوال المعرفة في متغيرين مثلا الدالة $f(x,y)$المعرفة في المنطقة r عند المستوىx,y و كذالك يفشل في حالة ايجاد مساحة السطوح و ايجاد المركز المتوسط و عزم القصور الذاتي للسطوح المستوية او في الكهرومغنطيسية و الحرارة و الموجات الصوتية لذالك كان بالضروري لوجود التكامل الثنائي لحل هذه المشكلاتلانه يشمل على دوال معرفة على متغيرين بخلاف التكامل العادي

او الخطي او الاحادي.

و ايضا توجد بعض المناطق التي تكون عليها الدوال المتصلة غير قابلة للتكامل و هي عديدة منها مناطق يمكن عليها حساب قيمة التكامل الثنائي في المنطقة الراسية و الافقية البسيطة الواقعة بين رسم الدالتين احداهما اكبر من الاخرى.

(6-1) المســتخلص:

تناولنا في هـذا البحـث التكامـل بصفـة عامـة وعن التكامل الثنـائي بصفة خاصة ولقد تطرقنا لمفاهيم عدة من خلال البحث فتناولنا في الفصل الثاني مقدمة عن التكامل وتعريفه ومن ثم تناولنا بعض صيــغ التكامل وكذلك تناولنا الصيغة العامة للتكامل وكذلك تناولنا انواع التكامل من حيث كونه محدد وغير محدد وكذلك بعض طرق ايحاد التكامل مثلا التجزئة والتعويض .

وتناولنا في الفصل الثالث التكامل الثنائي وحيث ان ضرورة وجود التكامل الثنائي نسبة لفشل التكامل العادي في حالة الدوال المعرفة في متغيرين مثلا الدالة $f(x,y)$ في المنطقة r عند المستوي xy وكذلك فشل التكامل العادي في حالة ايجاد المساحة والسطوح والحجم وغيرهم وتناولنا في هذا الفصل ايضا خواص التكامل الثنائي وكذلك نظريات في التكامل الثائي مثل نظرية قرين في المستوى ونظرية استوكس .

ومن ثم ايضا تناولنا بعض من تطبيقات التكامل الثنائي مثل الحجم والمساحة والكتلة ومراكز الكتلة ومراكز العزم وعزم القصور الذاتي .

Abstract

In this search we discussed the integration in general ,bilateral integration in particular , we discussed several concepts through research in second chapter ,we presented an integration to integration and its definition , and then we dealt with some integration formulas ,we also dealt with some general forms of integration ,as wellas methods of integration of fragmentation and integration of compensation .

In third we examine the dualintegration in the term of necessity of dual integration in the relation of failure of normal integration in case of function defined by tow variables such as the function $f(x, y)$ in region (r) at level x, y as wellas the failure of normal integration in the case of finding the area ,surfaces, volumes and others .

In this chapter we also discussed the properties of binary integration as well as the theory Green in the level and the theory of Stokes then we also dealt with some integration application such as size, area, mass, center of mass.

(1-2)التكامل Integration

مقدمـة:

يعرف بعكس المشتقات او مقابلات المشتقات ,عندما درسنا التفاضل عرفنا ان المشتقة للدالة= $f(x)$ yهي $f'(x) = \frac{dy}{dx}$ اي معدل تغير y بالنسبة الى x.

كما عرفنا ايضا معدل تغير المسافة بالنسبة للزمن تعني السرعة اللحظية اي ان$\frac{ds}{dt} = v(t)$ حيث ان $v(t)$السرعة اللحظية ,$s(t)$المسافة كدالة في الزمن t لنفترض ان لدينا السرعة$v(t)$ و المطلوب حساب المسافة المقطوعة sفي هذه الحالة المعلوم لدينا هو المشتقة و المطلوب ايجاد الدالة $s(t)$ و هذه العملية هي عملية عكسية للتفاضل و عملية ايجاد الدالة المعطاة مشتقتها تسمى مقابل المشتقةاوالتكامل.

و ايضا يعرف بأصل المشتقة و عملية ايجاده هي في الواقع بعكس عملية ايجاد المشتقة فاذا كانf اقتران فاننا نبحث عن اقتران اخر f يحقق$f'(x) = f(x)$ لكلx ينتمي الى مجال مناسب.

فالتكامل له انواع و خصائص و طرق و صيغ أساسية لايجادها و من انواع التكامل التكامل المحدد و التكامل غير المحدد, ان التكامل المحدد يمثل الخطوة العكسية لعملية الاشتقاق و هذا ما يجعلنا نضع مع كل قاعدة نصادفها لاجراء التكامل غير المحدد و من خلال ذالك توفر لدينا رصيد من قواعد التكامل ثم سنتعرف في البنود اللاحقة الى بعض الطرق التي نستخدمها لتحويل التكامل الى صورة قابلة للحل باحدى القوعد المعروفة .

(2-2)تعريف التكامل:

افرض ان $f(x)$ مشتقة الداله$F(x)$ اي ان $F(x)$ تكون تكامل للداله $f(x)$ ونعبر عنها في صور

$$\int f'(x)dx = F(x)$$

الدالة المراد تكاملها تسمى مكاملة, وعلامة التكامل تعني عملية تكامل dx تحدد ان متغير التكامل هو x و لايجاد قيمة التكامل نوجد دالة f تكون مشتقتها هي$f(x)$.

ثابت التكامل:هذه الخاصية مشتركة لكل مقابلات المشتقات, و عليه تكون التكامل

$$\int f'(x)dx = f(x) + c$$

حيث c هو ثابت التكامل

(2- 3)انواع التكامل:

(2-3-1) تكامـل غير المحدد:

تعريف:

يسمى الاقتران f بانه الاقتران العكسي لاشتقاق الاقتران f على الفترة غير المحددة I اذا كان $f'(x) = f(x)$ لكل قيم x

بصورة عامة لحل انواع التكاملات لابد منمعرفة بعض الصيغ الاساسية للتكامل.

(2-4) الصيغ الأساسية لتكامـل:

$$1. \int u^n du = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c n \neq -1 \text{حيث}$$

وهي الصيغة العامة لقانون التكامل.

$$2. \int \frac{1}{u} du = \ln(u) + c$$

وهذ الصيغة تستخدم اذا كانت البسط مشتقة المقام.

$$3. \int e^u \, du = e^u + c$$

$$4. \int e^{au} du = \frac{1}{a} e^{au}$$

هي صيغة الدالة الاسية و تعني مقلوب تفاضل الاس في الدالة الاسية نفسها.

$$5. \int \sin(u) du = -\cos(u) + c$$

$$6. \int \cos(u) du = \sin(u) + c$$

$$7. \int \tan(u) du = \ln(\sec(u)) + c$$

$$O\ r \int \tan(u)\, du = -\ln(\cos(u)) + c$$

وتمثل هذه الصيغ 5,6,7 صيغ الدوال المثلثية

$$8. \int \frac{du}{\sqrt{a^2-u^2}} = \sin^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$$

$$9.\int \frac{du}{\sqrt{a^2+u^2}} = \frac{1}{a}\tan^{-1}(\frac{u}{a}) + c$$

$$10.\int \frac{du}{\sqrt{u^2-a^2}} = \frac{1}{a}\sec^{-1}\left(\frac{u}{a}\right) + c$$

وتمثل الصيغ 8,9,10 صيغ الدوال المثلثية العكسية

$$11. \int \sinh(u)du = \cosh(u) + c$$

$$12.\int \cosh(u)du = \sinh(u) + c$$

$$13.\int \operatorname{sech}(u)\tanh(u)du = -\operatorname{sech}(u) + c$$

وتمثل الصيغ 11,12,13 صيغ الدوال المثلثية الزائدية

خصائص التكامل غير المحدد:

أذا كان لدينا الدالتين $f(x)$ و$g(x)$ فأن:

$$1.\int cf(x)\,dx = c\int f(x)\,dx$$

$$2.\int f(x)\,dx \pm g(x)\,dx = \int f(x)\,dx \int g(x)\,dx$$

وهذا تكامل جمع و طرح دالتين

مثال(1):

جد التكامل غير المحدد لدالة $f(x) = 6x^2$

الحل:

من الواضح ان$f(x) = 2x^3$ هو اصل المشتقة لدالة$6x^2$

لذلك فان التكامل غير المحدد هو

$$\int 6x^2\,dx = 2x^3 + c$$

حيث C ثابت التكامل .

مثال(2):

جد التكامل غير المحدد لدالة $f(x) = \sin x - x^2 + 1$

الحل:

$$\int (\sin x - x^2 + 1)dx = -\cos x - \frac{1}{3}x^3 + x + c$$

مثال(3):

احسب تكامل الدالة $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$

الحل:

من الواضح انه يمكن كتابة الدالة$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ في الصورة $f(x) = x^{\frac{2}{3}}$

عندئذ نجد ان :

$$\int \sqrt[3]{x^2}\,dx = \int x^{\frac{2}{3}}\,dx$$

$$\int x^{\frac{2}{3}}\,dx = \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} + c$$

مثال(4):

احسب تكامل الدالة $\int \frac{x}{\sqrt{8x^2+1}}dx$

الحل:

نضع $u = 8x^2 + 1, du = 16x\,dx$

$$dx = \frac{du}{16x}$$

لذلك نستطيع كتابة التكامل غير المحدد على النحو التالي:

$$\int \frac{x}{\sqrt{8x^2 + 1}}dx = \frac{1}{16}\int \frac{1}{\sqrt{u}}du$$

$$\frac{1}{16}\int u^{\frac{-1}{2}}du = \frac{1}{8}u^{\frac{1}{2}} + c$$

وبتعويض قيمة $u = 8x^2 + 1$ نحصل على $\frac{1}{8}\sqrt{8x^2 + 1 + c}$

مثال(5):

احسب

$$\int \frac{dx}{x \ln x}$$

الحل:

نضع $u = \ln x$ ونحصل على $du = \frac{dx}{x}$ ومنها

وعندئذ نجد ان $dx = xdu$

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \int \frac{du}{u} = \ln u + c$$

وبتعويض قيمة $u = \ln x$ نجد ان

$$\int \frac{dx}{x \ln x} = \ln(\ln x) + c$$

مثال(6):

احسب

$$\int 4\cos x dx$$

الحل:

$$\int 4\cos x dx = 4\int \cos x dx = 4\sin x + c$$

مثال(7):

احسب $\int \frac{\cos x}{(\sin x)^2} dx$

الحل:

$$\int \frac{\cos x}{(\sin x)^2} dx = \int \frac{\cos x}{\sin x} \frac{1}{\sin x} dx$$

$$= \int \cot x \,.\, \csc x = -\csc x + c$$

مثال(8):

جد التكامل الاتي:

$$\int \frac{t^2 - 2t^4}{t^4} dt$$

الحل:

$$\int \frac{t^2 - 2t^4}{t^4} dt = \int \left(\frac{t^2}{t^4} - \frac{2t^4}{t^4}\right) dt$$

$$= \int \left(\frac{1}{t^2} - 2\right) dt = \int t^{-2} dt - 2\int dt$$

$$= -t^{-1} - 2t + c$$

$$= \frac{-1}{t} - 2t + c$$

(2-3-2)التكامل المحدد:

اذا كانت $a \le x \le b$ وكانت$f(x)$ دالة معرفة على الفترة $[a, b]$ وهي الفترة التي تكون فيها الدالة $f(x)$ متصلة فان تعريف التكامل المحدد لدالة $f(x)$ من a الى b هو قيمة التكامل

$$\int_a^b f(x)\, dx$$

شرط ان تكون النهاية في الطرف الايمن موجودة a وb هما حدود التكامل حيث a يمثل الحد السفلي لتكامل و b يمثل الحد العلوي لتكامل.

خواص التكامل المحدد:

اذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دوال تكاملية في $[a, b]$ فان:

$$1.\int_a^b (f(x) \pm g(x))dx = \int_b^a f(x)dx \pm \int_b^a g(x)dx$$

$$2.\int_a^b Af(x)dx = A \int_a^b f(x)dx$$

حيث A اي مقدار ثابت.

$$3.\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

بشرط $f(x)$ تكاملية في $[a, b]$ و $[c, d]$

$$4.\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

$$5.\int_a^a f(x)dx = 0$$

اذا كانت .6 $f(x) \leq g(x), \ a \leq x \leq b$

فان:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$$

مثال(9):

احسب $\int_0^2 (x^2 + 2)dx$

الحل:

$$\int_0^2 (x^2 + 2)dx = \frac{1}{3}x^3 + 2x = \left(\frac{1}{3}2^3 + 2(2)\right) - \left(\frac{1}{3}0^3 - 2(0)\right) = \frac{20}{3}$$

مثال(10):

جد $\int_0^{2\pi} \cos 4x \, dx$ قيمة

االحل :

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4x \, dx = \frac{1}{4}(\sin 4x)\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = [\frac{1}{4}\sin(\pi)] - \frac{1}{4}[\sin(0)]\frac{1}{4}[0] = \frac{1}{4}[1] - \frac{1}{4}$$

$$\therefore \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos 4x \, dx = \frac{1}{4}$$

مثال(11):

$$\int_1^{16} x^{\frac{3}{2}} \, dx = \frac{2}{5} x^{\frac{5}{2}}]_1^{16} = \frac{2}{5}[(\sqrt{16})^5 - (\sqrt{1})^5])$$ 1424- 2006م (م

$$= \frac{2}{5}(1024 - 1) = \frac{2}{5}(1023) = \frac{2046}{5} = 409.2$$

مثال(12):

$$\int_4^5 \left(\frac{2}{\sqrt{x}} - x\right) dx = (4x^{\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}x^2]_4^5$$

$$-\frac{25}{2})(4\sqrt{5} - (8 - 8) = -\frac{25}{2}) = (4\sqrt{5}.$$

مثال(13):

احسب $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin x \, dx$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \sin x \, dx = \frac{1}{2}\sin^2 x]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{2} - \sin^2(0)] = \frac{1}{2}[\sin^2(\frac{\pi}{2}.$$

مثال(14):

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{3x^2-2x+3}\ (3x-1)\,dx$$

لحلها نستخدم التكامل بالتعويض بوضع $u = 3x^2 - 2x + 3$ فنحصل على= $du = (6x-2)dx$ $2(3x-1)dx$ ومنه

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{3x^2-2x+3}\ (3x-1)\,dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{u}\,du$$

$$= \frac{1}{2}\ (\frac{2}{3}u^{\frac{3}{2}}) = \frac{1}{3}(3x^2-2x+3)^{\frac{3}{2}}$$

اذن

$$\int_{-1}^{1}\sqrt{3x^2-2x+3}\,(3x-1)\,dx = \frac{1}{3}(3x^2-2x+3)^{\frac{3}{2}}\,]_{-1}^{1}$$

$$= \frac{8}{3}\left(1-2\sqrt{2}\right))= \frac{1}{3}(3-2+3)^{\frac{3}{2}}-(3+2+3)^{\frac{3}{2}} = \frac{1}{3}\ (8-16\sqrt{2}$$

مثال(15):

اوجد$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1+\cot^2 x}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1+\ \cot^2 x}\ = \frac{1}{\csc^2 x} = \frac{1}{2}(1-\cos 2x)$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{dx}{1+\ \cot^2 x} = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-\cos 2x)dx\ = \frac{1}{2}(x-\frac{1}{2}\sin 2x)\ ]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$= \frac{1}{2}(\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2} = \frac{1}{8}\ (\pi-2)$$

مثال(16):

حل $\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^5(x)\cos(x)dx$

الحل:

نضع $u = \sin\ \ (x)\ ,\ \ du = \cos(x)\,dx$

و $dx = \dfrac{du}{\cos(x)}$

وبتعويض قيمة

$$= \frac{1}{6}(1-0) = \frac{1}{6}$$

(2-5)طرق التكامل:

(2-5-1) التكامل بالتجزئة:

اذا كانت الدالتين $u = u\ (x)$ و$v = v(x)$ قابلتين للاشتقاق فان مشتقة دالة الضرب $u\ v$ موجودة وهي حسب القاعدة :

$$\frac{d}{dx}(uv) = \frac{du}{dx}v + \frac{dv}{dx}u$$

نستخدم تفاضلات هذه الدوال ونعيد ترتيبها لنحصل على

$$udv = d(uv) - vdu$$

وعندما نكامل الطرفين نحصل على قاعدة التكامل التالية:

$$\int udv = uv - \int vdu$$

وهي قاعدة التكامل بالتجزئة او الاجزاء ان هذه القاعدة تعبر عن تكامل معين بدلالة تكامل اخر , وهذا يعني ان النجاح في تطبيق هذه القاعدة يعتمد على اختيارنا للدالتين المناسبتين $u\ ,v$ حتى يجعل اجراء هذا التكامل الاخر متيسرا لاستخدام احدى قواعد التكامل المعروفة لدينا.

مثال(17):

احسب تكامل $\int xe^x\,dx$

الحل:

ضع $u = x\,, du = dx$

$dv = e^x\,, v = e^x$

بالتعويض في قانون التجزئة نحصل على

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int xe^x\,dx = xe^x - \int e^x\,dx$$

$$= xe^x - e^x + c$$

لاحظ إذا فرضنا أن $u = e^x\,, dv = xdx$ لحصلنا على ان

$$v = \frac{1}{2}x^2 \text{ و } du = e^x dx$$

وبذلك يصبح $vdu = \frac{1}{2}x^2e^xdx$

وبذلك نكون قد عقدنا المكامل بدلا من تبسيطه ,ولذلك يجب علينا اختيار الدالتين المناسبتين u, v.

مثال(18):

اوجد $\int x^3 \ln x dx$

الحل:

ضع $u = \ln x\,,\ du = \frac{dx}{x}$

$dv = x^3dx \quad ,v = \frac{1}{4}x^4$

و بالتعويض في قانون التكامل بالتجزئة

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int x^3 \ln x dx = \frac{1}{4}x^4 \ln x - \int \frac{1}{4}x^4 \frac{dx}{x}$$

$$= \frac{1}{4}x^4 \ln x - \frac{1}{16}x^4 + c$$

مثال(19):

اوجد تكامل $dx \int x\sqrt{1+x}$

الحل:

نضع $u = x , du = dx$

$$dv = \sqrt{1+x}dx , v = \frac{2}{3}(1+x)^{\frac{3}{2}}$$

و بالتعويض في قانون التجزئة

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\frac{2}{3}x(1+x)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(1+x)^{\frac{5}{2}} + c$$

مثال(20):

احسب $\int xcosxdx$

الحل:

ضع $u = x , du = dx$

$$dv = \cos x , v = \sin x$$

و بالتعويض في قانون التجزئة

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int x\cos x dx = x\sin x - \int \sin x dx$$

$$= x\sin x + \cos x + c$$

مثال(21):

احسب $\int \ln x dx$

الحل:

ضع $u = \ln x \ , du = \frac{1}{x} \quad , \quad dv = dx \ , v = x$

بالتعويض في قانون التجزئة

$$\int udv = uv - \int vdu$$

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int \frac{1}{x} x dx$$

$$\int \ln x dx = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + c$$

(2-5-2) التكامــل بالتعويض:

اذا كانت f دالة يمكن مفاضلتها وكذلك اذا كانت $u = f(x)$ فان

$$\int [f(x)]^n f'(x)dx = \frac{u^{n+1}}{n+1} + c$$

ومنها

$$\int [f(x)]^n f'(x)dx = \frac{[f(x)]^{n+1}}{n+1} + c$$

مثال(22):

اوجد $\int \sqrt{5x+2}\,dx$

الحل:

نلاحظ بان المقدار تحت الجذر تفاضله هو (5dx) و عليه نفرض ان

$$u = 5x + 1 \;, du = 5dx$$

نعوض $\int \sqrt{u}\frac{du}{5} = \int \sqrt{5x+2}\,dx$

$$= \frac{1}{5}\int u^{\frac{1}{2}}du = \frac{2}{15}u^{\frac{3}{2}} + c$$

نعوض قيمة u نحصل على

$$\int \sqrt{5x+2}\,dx = \frac{2}{15}[5x+2]^{\frac{3}{2}} + c$$

مثال(23):

احسب $\int x^2\sqrt{1+x}\,dx$

الحل:

نفرض ان $u = \sqrt{1+x} \;, u^2 = 1 + x \;, x = u^2 - 1 \;,$

$$dx = 2udu \;, \quad x^2 = (u^2-1)^2$$

$$\therefore \int x^2\sqrt{1+x}\,dx = \int (u^2-1)^2(u)(2udu)$$

$$= \int (2u^6 - 4u^4 + 2u^2)du = \frac{2}{7}u^7 - \frac{4}{5}u^4 + \frac{2}{3}u^3 + c$$

وبتعويض قيمة u نحصل على

$$\int x^2\sqrt{1+x}\,dx = \frac{2}{7}(\sqrt{1+x})^7 - \frac{4}{5}(\sqrt{1+x})^5 + \frac{2}{3}(\sqrt{1+u})^3 + c$$

مثال(24):

احسب $\int e^{5x+2}dx$

الحل:

نفرض ان $u = 5x + 2$

$$du = 5\,dx \ , dx = \frac{du}{5}$$

$$\therefore \int e^{5x+2}dx = \frac{1}{5}\int e^{u}du$$

$$= \frac{1}{5}e^{5} + c$$

وبتعويض قيمة u نحصل على

$$\therefore \int e^{5x+2}dx = \frac{1}{5}e^{5x+2} + c$$

مثال(25):

اوجد $\int (\ln x)^4 \frac{dx}{x}$

الحل:

نلاحظ ان $\frac{dx}{x}$ هو تفاضل $\ln x$ وعليه

نفرض ان $u = \ln x$ ومنها $du = \frac{dx}{x}$

$$\therefore \int (\ln x)^4 \frac{dx}{x} = \int u^4 du = \frac{1}{5}u^5 + c$$

وبتعويض قيمة u نحصل على

$$\frac{1}{5}(\ln x)^5 + c \therefore \int (\ln x)^4 \frac{dx}{x} = \frac{1}{5}(\ln x)^5 + c$$

مثال(26):

اوجد قيمة $\int (\sin x)^2 \cos x\, dx$

الحل:

نضع $u = \sin x \;,\; du = \cos x dx$

ومنها $dx = \frac{du}{\cos x}$

$$\therefore \int (\sin x)^2 \cos x\ dx = \int u^2 \cos x \frac{du}{\cos x} = \int u^2\, du = \frac{1}{3} u^3 + c$$

وبتعويض قيمة u

$$\therefore \int (\sin x)^2 \cos x\ dx = \frac{1}{3} (\sin x)^3 + c$$

مثال(27):

احسب $\int \sqrt{\tan x}\, (\sec x)^2\, dx$

الحل:

نفرض ان $u = \tan x \;, du = (\sec x)^2\, dx$ ومنها $dx = \frac{du}{(\sec x)^2}$

$$\therefore \int \sqrt{\tan x}\, (\sec x)^2\, dx = \int u^{\frac{1}{2}}\, du = \frac{2}{3} u^{\frac{3}{2}} + c$$

وبتعويض قيمة u نحصل على. $\therefore \int \sqrt{\tan x}\, (\sec x)^2\, dx = \frac{2}{3} (\tan x)^{\frac{3}{2}} + c$

تعريف:

ليكن لدينا الدالة(x, y) $z =$ المتصلةفي منطقة محددة R من المستوىX, Y وهذه المنطقة يقسم علىn منطقة جزئية $R_1, R_2 \ldots \ldots R_n$ مساحتها $\Delta_1 A_n \Delta_n \ldots . A_1, \Delta_2 A_2 \ldots$ على الترتيب لنختبر بعد ذلك في كل منطقة جزئيةR_k نقطة $P_k(x_k y_k)$ وتشكل المجموعة

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_n y_n)\Delta_n A =$$

$$f(x_1 y_1)\Delta_1 + f(x_2 y_2)\Delta_2 + \cdots f(x_n y_n)\Delta_n$$

لكي نعرف قطر منطقة جزئية على انه من بين اي نقطتين واقعتين داخل المنطقة او على حدودها و لنرمزبλ_n لاكبر قطر المناطق الجزئية و لنفرض ان عدد المناطق الجزئية يزداد بحيث $0 \to \lambda_n$ عندما$n \to \infty$ عندئذ يمكن تعريف التكامل الثنائي للدالة$f(x, y)$ على المنطقة R على انه

$$\iint_R f(x, y)dA = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(x_k y_k)\Delta_k$$

مثال(1):

جد قيمة الاتي

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{x} dy\, dx$$

الحل:

$$\int_0^1 [y]_{x^2}^{x} dx = \int_0^1 (x - x^2)dx$$

$$[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3}]_0^1 = \frac{1}{6}$$

مثال(2):

احسب الاتي

$$\int_1^2 \int_y^{2y} (x + y)\, dx\, dy$$

الحل:

$$\int_1^2 \left(\frac{1}{2}x^2 + xy\right) \Big]_y^{2y} = \therefore \int_1^2 4y^2\, dy = [2y^2]_1^2 = 6$$

مثال(3):

احسب قيمة الاتي

$$\int_{-1}^2 \int_{2x^2+2}^{x^2+2} x\, dy\, dx$$

الحل:

$$\int_{-1}^2 [xy]_{2x^2+2}^{x^2+2}$$

$$\int_{-1}^2 (x^2 + 2 - 2x^2 + 2)dx =$$

$$(x^2 + 2 - 2x^2 + 2)\,]_{-1}^2 = 6$$

مثال(4):

اوجد قيمة التكامل التالي

$$\int_0^{\pi} \int_0^{\cos\theta} p \sin\theta\, dp\, d\theta$$

الحل:

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{2} p^2 \sin\theta \Big]_0^{\cos\theta} = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \cos^2\theta \sin\theta\, d\theta = \left(-\frac{1}{6}\cos^2\theta\right) \Big]_0^{\cos\theta} = \frac{1}{3}$$

مثال(5):

احسب قيمة

$$\int_0^1 \int_{2y}^{y} e^{x^2}\, dx\, dy$$

لايجاد الحل نعكس ترتيب التكامل لانه لايمكن التعبير عن $\int e^{x^2}$ بدوال ابتدائية فتصبح

$$\int_0^3 \int_0^{\frac{x}{3}} e^{x^2} dy\, dx = \int_0^3 e^{x^2} y \,\Big]_0^{\frac{x}{3}} dx$$

$$\frac{1}{3}\int_0^3 e^{x^2} x\ \ dx = \frac{1}{6} e^{x^2}\ \Big]_0^3 = \frac{1}{6}\ (e^9 - 1)$$

مثال(6):

احسب قيمة التكامل الثنائي التالي

$$\int_2^3 \int_1^5 (x + 2y) dx\, dy$$

الحل:

$$\left(\frac{1}{2}x^2 + 2yx\right)$$

$$\int_1^5 \frac{1}{2}x^2 + 2yx\ \Big]_1^5 = \left(\frac{25}{2} + 10y\right) - \left(\frac{1}{2} + 2y\right)$$

$$= 12 + 8y$$

$$\int_2^3 (12 + 8y) dy = 12y + 4y^2\ \Big]_2^3\ \ =\ \ (36 + 36) - (24 + 16)\ = 32$$

مثال(7):

جد قيمة

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{x^3} (x^2 + y^2)dy\, dx$$

الحل:

$$\int_{x^2}^{x^3} (x^2 + y^2)dy = x^2y + \frac{1}{3}y^3 \,]_{x^2}^{x^3} =$$

$$\int_0^1 \left(x^5 + \frac{1}{3}x^9 - x^4 + \frac{1}{3}x^6\right) dx = \frac{1}{6}x^6 + \frac{1}{30}x^{10} - \frac{1}{5}x^5 + \frac{1}{21}x^7]_0^1$$

$$\frac{1}{6} + \frac{1}{30} - \frac{1}{5} + \frac{1}{21} = -\frac{1}{21}$$

مثال(8):

احسب قيمة التكامل الثنائي التالي

$$\int_{-\pi}^{\pi}\int_0^2 r\sin\theta\, dr\, d\theta$$

الحل:

$$\int_{-\pi}^{\pi} 2\sin\theta d\theta = 0$$

اذن

$$\int_0^2 r\sin\theta\, dr = \frac{1}{2}r^2\sin\theta]_0^2 = 2\sin\theta$$

مثال(9):

احسب

$$\int_0^{\ln 4}\int_0^{\ln 3} e^{x+y}\, dy\, dx$$

الحل:

لحل هذه المثال نستبدل التكامل الثنائي بالجداء

$$\left(\int_0^{\ln 4} e^x dx\right)\left(\int_0^{\ln 3} e^y\, dy\right) =$$

$$(3-1)(4-1) = (2\times 3) = 6$$

مثال(10):

اوجد قيمة التكامل

$$\int_1^2\int_0^y x\sqrt{y^2-x^2}\ dxdy$$

الحل:

$$\int_0^y x\sqrt{y^2-x^2} = \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}(y^2-x^2)]_0^y$$

$$-\frac{1}{3}\ (y^2-x^2)^{\frac{3}{2}}]_0^y = -\frac{1}{3}[-\left(y^2\right)^{\frac{3}{2}}] = \frac{1}{3}y^3$$

$$\int_1^2 \frac{1}{3}y^3 dy = \frac{1}{12}y^4]_1^{2}=$$

$$\frac{1}{12}(16-1) = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}$$

مثال(11):

باستخدام الاحداثيات القطبيةاحسب التكامل الثنائي

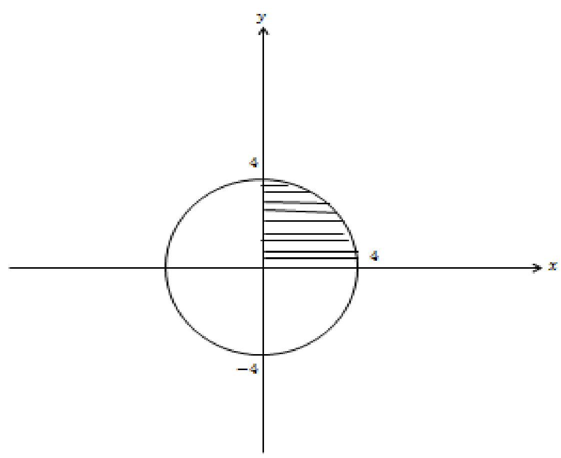
$$\int_{0}^{16}\int_{0}^{\sqrt{16-x^2}} (x^2 + y^2)dydx$$

الحل:

يمكن وصف منطقة التكامل بالمنحنيات

$$x = 0, x = 4, y = 0, y$$

الربع الاول من الدائرة$x^2 + y^2 = 16$



وباستخدام الاحداثيات القطبية نضع

$$x = r\cos\theta \,, y = r\sin\theta \,, \theta = 0 \,, \theta = \frac{\pi}{2} \,, r = 0 \,\,, r = 4$$

فان التكامل يتحول الى

$$\mathbf{I} = \int_{\mathbf{0}}^{\frac{\pi}{2}}\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{4}} (r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)r\,drd\theta = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{4} r^3drd\theta$$

$$\int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \theta r^3]_0^{\frac{\pi}{2}} dr = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{4} r^3 dr = \frac{\pi}{8} r^4]_0^4 = 32\pi$$

مثال(12):

بأسخدام الاحداثيات القطبية أثبت أن التكامل

$$\int_{\mathbf{0}}^{\infty} e^{-\mathbf{x}^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

الحل:

نفرض ان

$$I = \int_{\mathbf{0}}^{\infty} e^{-\mathbf{x}^2} dx , \mathbf{I} = \int_{\mathbf{0}}^{\infty} e^{-y^2} dy$$

$$\mathbf{I}^2 = \int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dydx$$

باستخدام الاحداثيات القطبية

$$x = r\cos\theta , y = r\sin\theta , dydx = rdrd\theta$$

$$\theta = 0 , \theta = \frac{\pi}{2} , r = 0 , r = a$$

فان التكامل يتحول الى

$$\mathbf{I}^2 = \lim_{a \to \infty}\int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{a} e^{-r^2} rdrd\theta = \lim_{a \to \infty}\frac{\pi}{2}[-\frac{1}{2}e^{-r^2}]_0^a =$$

$$\lim_{a \to \infty}\frac{\pi}{4}(1 - e^{-a^2}) , \therefore I^2 = \frac{\pi}{4} , I = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

مثال(13):

باستخدام الاحداثيات القطبية احسب التكامل الثنائي

$$\iint_{D} (x^2 + y^2)dydx$$

حيث D منطقة التكامل المحدد بلمنحنى

$$x^2 + y^2 = a^2$$

الحل:

منطقة التكامل D يمكن وصفها بالرسم

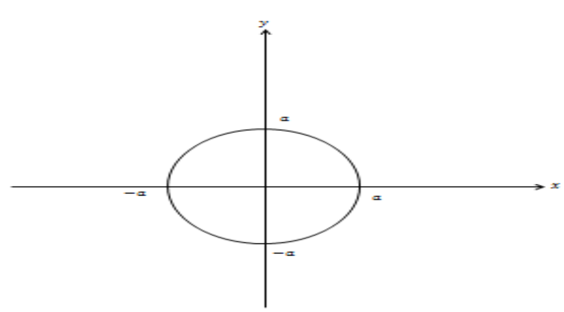
وباستخدام الاحداثيات القطبية

$$x = r\cos\theta \,, y = r\sin\theta \ \,, dydx = rdrd\theta$$

فان التكامل يتحول الى

$$I = \int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{a} (r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta)rdrd\theta =$$

$$\int_{0}^{2\pi} \int_{0}^{a} r^3 \, drd\theta = \int_{0}^{a} \theta r^3]_{0}^{2\pi} dr = 2\pi \int_{0}^{a} r^3 dr = \frac{2\pi}{4} r^4]_{0}^{a} = \frac{\pi a^4}{2}$$



التكاملالثنائيباستخدامجاكوبيانالتحويل:

$$\iint_{D_{xy}} f(x,y)dydx$$

حيث D_{xy} هيالمنطقةالمعرفةعليهاالتكاملالثنائيفاذاأخذنا :

$$x = \varphi(u,v)\ , y = \omega(u,v) \neq 0$$

فباستخدامجاكوبيانالتحويل :

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix}$$

فانعنصر المساحةفيالتكاملالثنائي :

$$dydx = \left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)}\right| dvdu$$

وبالتاليفانالتكاملالثنائييتحولالى :

$$\iint_{D_{xy}} f(x,y)dydx = \iint_{D_{uv}} f(u,v)|J|dvdu$$

ملاحظة: باستخدامالاحداثياتالقطبية

$$x = r\cos\theta\ , y = r\sin\theta\ , dydx = rdrd\theta$$

فيكونجاكوبيانالتحويل

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & -r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

$$J = r \text{ و} |J| = r$$

فانالتكاملالثنائييتحولالى :

$$\iint_{D_{r\theta}} f(r,\theta)|J|drd\theta = \iint_{D_{r\theta}} f(r,\theta)rdrd\theta$$

ويمكناستخدامذلكمباشرةفيحلالمسائل

مثال (14):

احسبالتكاملالثنائي

$$\iint_{\mathbf{D}} xydydx$$

حيث$\mathbf{D}$ منطقةالتكاملالمحددبـ

$$x^2 = y\,, x^2 = 2y\,, y^2 = x\,, y^2 = 2x$$

الحل:

$$\frac{x^2}{y} = 1\,, \frac{x^2}{y} = 2\,, \frac{y^2}{x} = 1\,, \frac{y^2}{x} = 2$$

باستخدامالاحداثيات

$$u = \frac{x^2}{y}\,, v = \frac{y^2}{x}$$

$$x = u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{2}{3}}, y = u^{\frac{2}{3}}v^{\frac{1}{3}}$$

$$u = 1\,, u = 2\,, v = 1\,, v = 2$$

فيكونجاكوبيانالتحويل

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{u^{\frac{-2}{3}}v^{\frac{2}{3}}}{3} & \frac{2u^{\frac{1}{3}}v^{\frac{-1}{3}}}{3} \\ \frac{2u^{\frac{-1}{3}}v^{\frac{1}{3}}}{3} & \frac{u^{\frac{2}{3}}v^{\frac{-2}{3}}}{3} \end{vmatrix}$$

$$J = \frac{1}{9} - \frac{4}{9} = \frac{-1}{3}$$

وبالتليالتكامليتحولالى

$$I = \iint\limits_{Duv} f(u,v)|J|dudv = \frac{1}{3}\int_{1}^{2}\int_{1}^{2} uvdudv$$

$$I = \frac{1}{3}\int_{1}^{2} udu \int_{1}^{2} vdv = \frac{1}{3}[\frac{u^2}{2}]_1^2 [\frac{v^2}{2}]_1^2$$

$$I = \frac{1}{12}[4-1][4-1] = \frac{3}{4}$$

مثال (15):

احسبالتكاملالثنائي

$$\int_{0}^{2}\int_{0}^{x} ydydx$$

الحل:

يمكنوصفمنطقةالتكاملبالمنحنيات

$$x = 0 , x = 2 , y = 0 , y = x$$

عندما$x = 2$, $x = r\cos\theta$فان$r = 2\sec\theta$حيثاستخدامالاحداثياتالقطبية

$$x = r\cos\theta , y = r\sin\theta , dydx = rdrd\theta$$

فيكونجاكوبيانالتحويل

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & -r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

$J = r$ و $|J| = r$

وبالتاليالتكامليتحولالى

$$I = \iint_{Dr\theta} f(r,\theta)|J|drd\theta = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{0}^{2\sec\theta} r^2 \text{sindrd}\theta \; I = \frac{1}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta r^3]_0^{2\sec\theta} dr$$

$$\frac{8}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta \sec^3 dr = \frac{8}{3}\int_{0}^{\frac{\pi}{4}} \tan\theta \sec^2\theta dr =$$

$$\frac{4}{3}\tan^2\theta]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{3}$$

مثال (16):

احسبالتكاملالثنائي

$$\int_{0}^{\infty}\int_{0}^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dydx$$

الحل:

باستخدامالاحداثياتالقطبية

$$x = r\cos\theta \,, y = r\sin\theta \,, dydx = rdrd\theta$$

فيكونجاكوبيانالتحويل

$$J = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta \\ y_r & y_\theta \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & -r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

$J = r$ و $|J| = r$

وبالتاليالتكامليتحولالى

$$I = \iint_{D_{r\theta}} f(r,\theta)|J|drd\theta = \int_{0}^{\frac{\pi}{2}}\int_{0}^{\infty} e^{-r^2} rdrd\theta$$

$$I = \frac{\pi}{2}\int_{0}^{\infty} e^{-r^2}dr = \frac{\pi}{4}e^{-r^2}dr]_0^{\infty} =$$

$$\frac{-\pi}{4}(0-1) = \frac{\pi}{4}$$

(2-3) خواص التكامل الثنائـي:

الخواص الاساسية للتكامل الثنائي مشابهة تماما لخواص التكامل لدالة في متغير واحد وفيما يلي سنذكر اهم الخواص الاساسية للتكامل الثنائي:-

اذا كانت الدالتين f, g قابليتين للتكامل في المنطقة R فان:-

$$(1)\iint_R c\,f(x,y)dA = c\iint_R f(x,y)dA$$

حيث C مقدار ثابت

$$(2)\iint_R [f(x,y) \pm g(x,y)]dA = \iint_R f(x,y)dA \pm \iint_R g(x,y)dA$$

(3) اذاكان لكل من (x,y) في R يكون $m \le f(x,y) \le M$ واذا كان $A(R)$ نرمز الى المسافة R-:فان

$$A(R) \le \iint_R f(x,y)dA \le MA(R)$$

(4) اذا كانت $f(x,y) \le g(x,y)$ فان:-

$$\iint_R f(x,y)dA \le \iint_R g(x,y)dA$$

(5) اذا كانت R مكونة من عدة مناطق $(R_1R_2R_3 \ldots\ldots\ldots)$ و f متصلة في R فان:-

$$\iint_R [f(x,y)]dA = \iint_{R_1} f(x,y)dA \le + \iint_{R_2} f(x,y)dA \ldots\ldots\ldots$$

مثال(17) :

أوجد اصغر قيمة و اكبر قيمة للتكامل الثنائي$\iint_{R_1} f(x,y)dA$ حيث ان$R = (x,y): a \le x \le b: c$

$$R = (x,y): a \le x \le b: c \le y \le d$$

و$f(x,y) = \sin(x - 3y)$

الحل:

بما ان$-1 \le \sin(x - 3y) \le 1$ ومسافة المنطقة R تكون و حسب الخاصية(3)

$$A(R) = (b - a)(d - c)$$

نجد ان:

$$-(b - a)(d - c) \le \iint_R \sin(x - 3y) \le (b - a)(d - c)$$

نظرية:

اذا كانت $f(x,y)$ متصلة في المنطقة Rحيث انو $f_2(x)$ و $f_1(x)$, $a \le x \le b f_1(x) \le f_2(x)$

متصلتان فان:

$$\iint_R f(x,y)dA = \int_a^b \int_{f_1(x)}^{f_2(x)} f(x,y)dy\,dx$$

وبصورة مشابهة تماما اذا كانتRعلى الصورةو$g_2(x)$و$g_1(x)$, $c \le x \le d g_1(x) \le g_2(x)$

متصلتان فان:

$$\iint_R g(x,y)dA = \int_c^d \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} g(x,y)dx\,dy$$

مثال(18):

أوجد الحجم تحت السطح$z = x + 2y$ وفوق المستطيل R حيث ان:

$$R = [(x,y): 1 \le x \le 2, 3 \le y \le 5]$$

الحل:

$$V = \iint_R (x + 2y)dA = \int_1^2 \int_3^5 (x + 2y)dy\,dx$$

$$= \int_1^2 (xy + y^2)]_3^5 dx$$

$$= \int_1^2 [(5x + 25) - (3x + 9)]dx$$

$$\int_1^2 (2x + 16)dx = (x^2 + 16x)]_1^2$$

$$(4 + 32) - (1 + 16) = 19$$

مثال(19):

أوجد قيمة التكامل الثنائي

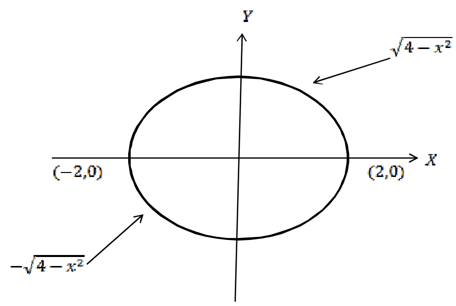
$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} y\,dy\,dx$$

وارسم المنطقة R حيث انR دائرة نصف قطرها 2 و مركزها نقطة الاصل.

الحل:

$$\int_{-2}^{2} \int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} y\,dy\,dx = \int_{-2}^{2} \frac{1}{2} y^2]_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} dx =$$

$$\frac{1}{2} \int_{-2}^{2} (4 - x^2) - (4 - x^2) = 0$$



مثال(20) :

أوجد

$$\int_{0}^{2}\int_{x^2}^{2x^2} x\cos y\, dy\, dx$$

و أرسم المنطقة R

الحل:

$$R = f(x,y): x^2 \leq 2x^2, 0 \leq x \leq 2$$

$$\int_{0}^{2}\int_{x^2}^{2x^2} x\cos y\, dy\, dx = \int_{0}^{2} x\sin y]_{x^2}^{2x^2}$$

حيث x ثابت

بالتعويض عن y

$$\int_{0}^{2} [x\sin(2x^2) - x\sin(x^2)]dx$$

باجراء التكامل بالتعويض

$$\int_{0}^{2} x\sin(2x^2)\,dx$$

$$u = 2x^2 \qquad ,du = 4xdx \qquad ,dx = \frac{du}{4x}$$

$$\int_{0}^{2} x\sin u\,\frac{du}{4x} = \frac{1}{4}\int_{0}^{2} \sin u\,du =$$

$$-\frac{1}{4}\cos u = -\frac{1}{4}\cos 2x^2$$

وكذلك بالنسبة لـ

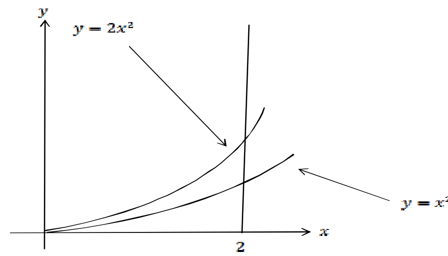
$$\int_{0}^{2} x\sin x^2 dx$$

بالتعويض نحصل على

$$\int_{0}^{2} x\sin x^2 dx = \frac{1}{2}\cos x^2$$

$$\int_{0}^{2} [x\sin(2x^2) - x\sin(x^2)]dx = -[\frac{1}{4}\cos 2x^2 + \frac{1}{2}\cos x^2]_0^1$$

$$= -\frac{1}{2}[\cos(8) - 2\cos(4)$$



مثال(21):

أوجد

$$\iint_R x\,y\,dA$$

حيث R المنطقة المغلقة الواقعة بين$x = 2, y = 2x, y = 0$

الحل:

اذا اخترنا الترتيب dy, dx

$$\iint_R x\,y = \int_0^2 \int_0^{2x} x\,y\,dy\,dx =$$

$$\int_0^2 \frac{x}{2} y^2]_0^2\,dx = \int_0^2 \frac{x}{2}(4x^2)dx = \frac{1}{2}x^4]_0^2 = 8$$

وهنا يمكن اجراء التكامل حسب الترتيب $dy\,dx$ او$dx\,dy$

(3-3) نظريات في التكامل الثنائي:

هنالك نظريات في التكامل الثنائي مثل نظرية جرين في المستوى و نظرية استوكس وهذه النظريات حلتا الكثيرمن المسائل بطريقة مبسطة وسهلة وهما من اهم النظريات في التكامل الثنائي.

(1-3-3) نظرية جرين فيالمستوى:8....

النظرية:اذا كانت $\emptyset(x,y)$, $P(x,y)$ و$\frac{\partial \emptyset}{\partial x}, \frac{\partial P}{\partial y}$ دوال متصلة و وحيدة القيمة في منطقة بسيطة D محددة بالمنحنى فان:

$$\oint_c P(x,y)dx + \emptyset(x,y)dy = \iint_D \left[\frac{\partial P}{\partial y} + \frac{\partial \emptyset}{\partial x}\right] dxdy$$

حيث $\oint$ يستعمل للتأكيد بان المنحنى مقفل و مرسوم في الاتجاه الموجب.

مثال(22):

أحسب

$$\int_c (2xy + y^2)dx + (x^2 + xy)dy$$

حيث c هي المنطقة المحددة بالمنحنى $y = 1 - x^3$ الماخوذ في الاتجاه الموجب.

الحل:

نستخدم نظرية جرين لحساب هذا التكامل.

نضع

$$P(x,y) = 2xy + y^2, \emptyset(x,y) = x^2 + xy$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = 2x + 2y, \qquad \frac{\partial \emptyset}{\partial x} = 2x + y$$

$$\frac{\partial \emptyset}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x} = -y$$

$$\iint_D [\frac{\partial \emptyset}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial x}]dxdy = \iint_D -ydxdy = -\int_0^1 dx \int_0^{1-x^3} ydy = \frac{-9}{28}$$

مثال(23):

أوجد باستخدام نظرية جرين التكامل الخطي التالي :

$$I = \oint_c \log(x^2 + y^2)(ydy - xdx)$$

حيثc المنحنى المقفل من النصف العلوي للكارديويتد $r = a(1 + \cos\theta)$ ومحور المنحنى مأخوذ في اتجاه موجب .

الحل:

باستخدام نظرية جرين نضع

$$P(x,y) = -x\log(x^2 + y^2), \emptyset(x,y) = (ydy - xdx)$$

$$I = \oint_c \log(x^2 + y^2)(ydy - xdx) = \iint_D \frac{4xy}{x^2 + y^2} dxdy$$

حيث D المنطقة المحددة بالمستقيم $o\ b$ من المحور السيني و الجزء العلوي $b\ o\ c$

للكارديويتد $r = a(1+\cos\theta)$ وبالتحويل الى أحد القطبية الثابتة يكون

$$I = \int_0^{\pi} \int_0^{a(1+\cos\theta)} \frac{4r^2\cos\theta\sin\theta}{r^3} r\, drd\theta == \int_0^{\pi} \int_0^{a(1+\cos\theta)} r\cos\theta\sin\theta\, rdrd\theta = \frac{8}{3}a^2$$

(2-3-3) نظرية استوكس:

نعطي الان نظرية هي تعميم لنظرية قرين في المستوى و تسمى نظرية استوكس من خلال النظرية الاتية:

نظرية : نفرض ان σ هو سطح مفتوح وله جانبين محددين بمنحنى بسيط مغلق C فان:

$$\oint_c < f, dr >= \iint_\sigma < curl\, f, dA >=$$

$$\iint_\sigma < curl\, f, dA > |dA|$$

حيث f مجال اتجاهي متصل و تفاضلي و معرف على امتداد السطحσ واتجاه المنحنى C هوالاتجاه الموجب و$|dA|$ طول عنصر المساحة .

مثال(24):

حقق نظرية استوكس للمجال الاتجاهي$f = (2x - y. -yz^2, -y^2z)$ المعرفة على النصف العلوي لكرة مركزها نقطة الاصل و نصف قطرها الوحدة .

الحل:

السطحσ المعرفة عليه المجالf هو$x^2 + y^2 + z^2 = 1, z > 0$ الحد C هو دائرة نصف قطرها واحد و مركزها نقطة الاصل اي معادلتها $x^2 + y^2 = 1, z > 0$ (الدائرة الاستوائية)

التمثيل البارومتري للحدC هوالتمثيل البارومتري لدائرة واقعة في المستوى $z = 0$ و مركزها نقطة اصل الاحداثيات اي هو

$$x = \cos t, y = \sin t, z = 0, 0 \le x < 2\pi$$

$$\therefore \oint_c < f, dr > = \oint_c (2x - y)dx - yz^2dy - y^2zdz$$

$$\int_0^{2\pi} (2\cos t - \sin t)(-\sin t)dt = \pi$$

ويمكن حساب $\operatorname{curl} f = \nabla \times f = e_3$

$$\therefore \iint_\sigma < curl\, f, dA > = \iint_\sigma < e_3, dA > = \iint_D dxdy$$

حيثD $|dA|$ $< e_3, dA > = < e_3, N >$, هو مسقط σ على السطح x, y

$$\therefore \iint_\sigma < curl\, f, dA > = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dydx =$$

$$4\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} dydx = 4\int_0^1 \sqrt{1-x^2}dx = \pi$$

اذا نظرية استوكس محققة

مثال(25):

حقق نظرية استوكس للمجال الاتجاهي$f = (3y, -xz, yz^2)$

حيثσ هو سطح المجسم المكافئ الدوراني$x^2 + y^2 = 2z$ و المحدد بالمستوى $z = 2$

الحل:

نلاحظ ان المنحنى C (حد للسطح σ) هو دائرة (تقاطع السطح بالمستوى) اي هو

المنحنى C (الحد) معادلاته البارومترية هي المعادلات البارومترية لدائرة نصف $x^2 + y^2 = 4, z = 2$ قطرها 2 وهي

$$x = 2\cos t, y = 2\sin t, z = 2, 0 \le t < 2\pi$$

$$\therefore \int_c < f, dr >= \int_c 3ydx - xzdy - yz^2dz$$

وحين ان$dr = (-2\sin t, 2\cos t, 0)$

وبسهولة يمكن التاكد من ان

$$\therefore \int_c < f, dr >= 20\pi$$

$$\text{curl } f = \nabla \times f = (z^2 + x, 0, -(z + 3))$$

$$N = \frac{\nabla(x^2 + y^2 - 2z)}{|\nabla(x^2 + y^2 - 2z)|} = \frac{(x, y, -1)}{\sqrt{x^2 + y^2 + 1)}}$$

$$\iint_\sigma < curl\, f, dA >= \iint_\sigma < curl\, f, N >= \frac{dxdy}{< N, e_3 >}$$

$$\iint_\sigma (xz^2 + x^2 + 3)dxdy = \iint_\sigma \left(x\left(\frac{x^2 + y^2}{2}\right) + x^2 + 3\right)dxdy$$

وباستخدام الاحداثيات القطبية نجد ان

$$\int_0^{2\pi}\int_0^2 (\frac{r^3}{2}\cos\theta + r^2\cos^2\theta + 3)rdrd\theta = \int_0^{2\pi}\int_0^2 (\frac{r^4}{2}\cos\theta + r^3\cos^2\theta + 3r)drd\theta = 20\pi$$

اذن نظرية استوكس محققة

(4-3) تطبيقات التكامل الثنائي:

لتكامل الثنائي تطبيقات عديدة ومنها:

(1-4-3) الحجم:

اذا كانت $z = f(x, y)$ تمثل معادلة السطح فأن :

$$v = \iint_R f(x,y)dA$$

تعطي حجم المجسم الواقع بين السطح والمستوى (x,y) .

(2-4-3) المساحة:

اذا كانت $f(x,y) = 1$ فأن :

$$A(R) = \iint_R dA$$

حيث ان $A(R)$ تمثل مساحة المنطقة المغلقة R .

(3-4-3) الكتلة :

اذا كانت $f(x,y)$ تمثل الكثافة $\frac{\Delta m}{\Delta v}$ فأن :

$$M(R) = \iint_R f(x,y)dA$$

حيث $M(R)$ كتلة الصفيحة التي على شكل المنطقة R .

(4-4-3) مراكز الكتلة:

اذا كانت الدالة تمثل الكثافة فأن مراكز الكتلة (x,y) لصفيحة الممثلة بالمنطقة R يعطى بالمعادلتين :

1. $M_x = \iint_R yf(x,y)dA$

2. $M_y = \iint_R xf(x,y)dA$

(5-4-3)عزم القصور الذاتي :

أ- عزم صفيحة حول محور x

$$I_y = \iint_R x^2 f(x,y)dA$$

ب- عزم صفيحة حول محور y

$$I_x = \iint_R y^2 f(x,y)dA$$

وكذلك عزم القصور الذاتي القطبي حول نقطة الاصل :

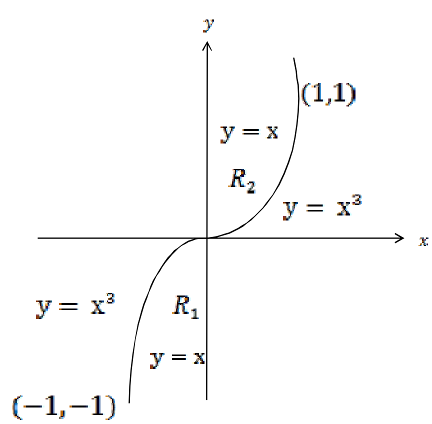
$$I_0 = I_x + I_y = \iint_R (x^2 + y^2) f(x,y)dA$$

مثال (26) :

اوجد المساحة الواقعة بين المنحنى $y = x^3$ والمستقيم $y = x$

الحل :

من الواضح ان المعادلتان تتقطعان عند النقاط (0,0) , (1,1) , (-1,-1) كما هو في الشكل التالي :



ولذلك فأن :

$$A(R) = \int_{-1}^{0}\int_{x}^{x^3} dydx + \int_{0}^{1}\int_{x}^{x} dydx$$

$$= \int_{-1}^{0} (y)|_{x}^{x^3} dx + \int_{0}^{1} (y)|_{x^3}^{x} dx$$

$$= \int_{-1}^{0} (x^3 - x)dx + \int_{0}^{1} (x - x^3)\, dx$$

$$= \left(\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{2}x^2\right) |_{-1}^{0} + (\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4)|_{0}^{1}$$

$$= \left(0 - \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - 0\right) = \frac{1}{2}$$

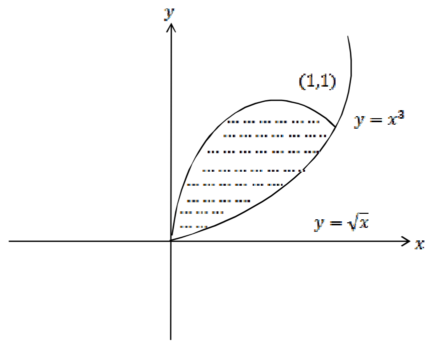
∴المساحة الواقعة بين المنحنى $y = x^3$ والمستقيم $y = x$ تساوي $\frac{1}{2}$

مثال (27) :

اوجد المساحة المحصورة بين المعادلتين $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$

الحل:

من الواضح ان المعادلتين يتقاطعان عند النقطتين (0,0) , (1,1) كما في الشكل التالي :



ولذلك فأن :

$$A(R) = \int_0^1 \int_{x^3}^{\sqrt{x}} dy dx$$

$$= \int_0^1 (y)|_{x^3}^{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \left(\sqrt{x} - x^3\right) dx$$

$$= \left(\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{4} x^4\right) |_0^1 = \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4}\right) = \frac{5}{12}$$

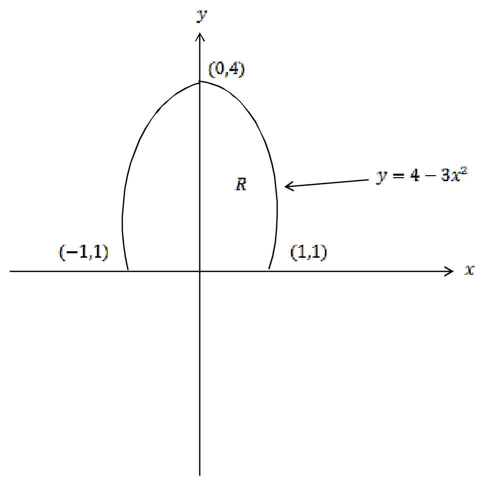
∴ المساحة المحصورة بين المعادلتين $y = x^3$, $y = \sqrt{x}$ تساوي $\frac{5}{12}$

مثال (28) :

اوجد مساحة المنطقة R الواقعة بين المنحنيين $y = x^4$, $y = 4 - 3x^2$

الحل:

من الواضح ان المنحنيين يتقاطعان عند النقطتين (1,1) , (-1,1) كما في الشكل التالي :



لذلك فأن :

$$A(R) = \iint\limits_{-1\ \ x^4}^{1\ \ 4-3x^2} dydx$$

$$= \int_{-1}^{1} (y)|_{x^4}^{4-3x^2} dx = \int_{-1}^{1} (\ 4 - 3x^2 - \ x^4)\ \ dx$$

$$= \left(4x - \ x^3 - \frac{1}{5}x^5\right) |_{-1}^{1}$$

$$= \left(4 - 1 - \frac{1}{5}\right) - \ \left(-4 + 1 + \frac{1}{5}\right) = \ \frac{28}{5}$$

∴ مساحة المنطقة R الواقعة بين المنحنيين $y = x^4$, $y = 4 - 3x^2$ تساوي $\frac{28}{5}$

مثال(29) :

اوجد حجم المجسم المحدد بالسطوح التالية :

$$x = 2\ \ , z = 0 \ , y = 0\ \ , x^2 = y + z$$

الحل:

$$v = \int_0^2\int_0^{x^2} (x^2 - y)dydx$$

$$= \int_0^2 (x^2y - \frac{1}{2}y^2)|_0^{x^2} dx = \int_0^2 (x^4 - \frac{1}{2}x^4)\, dx$$

$$= \int_0^2 \frac{1}{2}x^4 dx = (\frac{1}{10}x^5)|_0^2$$

$$v = \frac{32}{10} = \frac{16}{5}$$

∴ حجم المجسم (v) يساوي $\frac{16}{5}$

مثال(30):

صفيحة معدنية لها شكل المنطقة R في المستوى xy محددة برسم المعادلتين $x = y^2$, $x = 4$ اوجد مركز الكتلة اذا كانت الكثافة عند $p(x, y)$ تتناسب طردا مع المسافة من محور y الى النقطة p

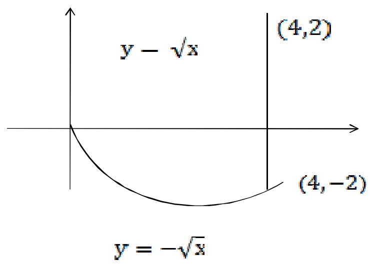
الحل:

من المعطيات $p(x, y) = kx$ حيث k مقدار ثابت, و حسب التعريف السابق كتلة الصفيحة (M) تساوي

$$\iint_R kxdA = \text{k} \int_0^4\int_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} xdydx$$

$$= k\int_0^4 (xy)|_{\sqrt{x}-}^{\sqrt{x}} dx = k\int_0^4 (x\sqrt{x} + x\sqrt{x})|_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}} dx$$

$$= 2k\int_0^4 x\sqrt{x}dx = 2k\int_0^4 x^{\frac{3}{2}}dx$$



نوجد العزم الصفيحة :

1- عزم الصفيحة بالنسبة لمحور y

$$M_y = \iint\limits_{0\ -\sqrt{x}}^{0\ \sqrt{x}} x(kx)dydx$$

$$= k\iint\limits_{0\ -\sqrt{x}}^{4\ \sqrt{x}} x^2dydx = k\int_0^4 (x^2y)|_{-\sqrt{x}}^{\sqrt{x}}$$

$$= 2k\int_0^4 x^{\frac{5}{2}}\,dx = 2k(\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}})|_0^4$$

$$= \frac{4}{7}k(128) = \frac{512}{7}k \ , \therefore M_y = \frac{512}{7}k$$

ومركز الكتلة يساوي

$$x = \frac{M_y}{M} = \left(\frac{512K}{7}\right)\left(\frac{5}{128K}\right) \ , \therefore X = \frac{20}{7}$$

2- عزم الصفيحة بالنسبة لمحور x

$$M_X = \iint_{-2\ 4}^{2\ y^2} y(kx)dxdy = k\int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{2}yx^2\right)\Big|_4^{y^2}dy$$

$$= k\int_{-2}^{2}\left(\frac{1}{2}y^5 - 8y\right)dy = k\left(\frac{1}{12}y^6 - 4y^2\right)\Big|_{-2}^{2}$$

$$= k\left(\frac{64}{12} - 16\right) - \left(\frac{64}{12} - 16\right) = k(0)\ , M_x = 0$$

ومركز الكتلة يساوي

$$y = \frac{M_x}{M} = (0)\left(\frac{5}{128k}\right)\ , \therefore y = 0$$

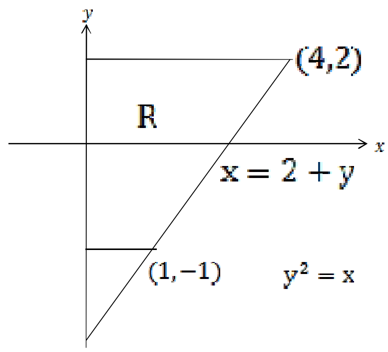
$$\therefore (x,y) = \left(\frac{20}{7}, 0\right)$$

مثال(31) :

اوجد كتلة المنطقة R المحددة ب $y^2 = x,\ x = y + 2$ حيث ان الكثافة تعطى بالمعادلة $p(x^2y^2)$

الحل:

من الواضح ان المنحنيين يتقاطعان عند النقطتين (1,-1) , (2,4)



$$\therefore M = \iint_R P(x,y)\,dA$$

$$= \int_1^2\int_{y^2}^{y+2} (x^2y^2)\,dx\,dy = \frac{1}{3}\int_1^2 (y^2x^3)|_{y^2}^{y+2}dy$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^2 ((y+2)^3 - y^6)y^2dy$$

$$= \frac{1}{3}\int_1^2 (y^6 - y^8 + 6y^4 + 8y^2 + 12y^3)\,dy$$

$$= \frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}y^6 - \frac{1}{9}y^9 + \frac{6}{5}y^5 + \frac{8}{3}y^3 + 3y^4\right)|_1^2 = 20.7$$

مثال(32):

اوجد كتلة صفيحة دائرية R نصف قطرها a علما بأن الكثافة تساوي عدديا البعد عن المركز

الحل:

نفرض ان $r = a$ يؤدي ان

$$M = \iint\limits_{R} r dA = \int_{0}^{2\pi}\int_{0}^{a} r^2 dr d\theta$$

$$= \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} r^3 |_0^a d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{3} a^3 d\theta$$

$$= \left(\frac{1}{3} a^3 \theta\right) |_0^{2\pi} = \left(\frac{2\pi}{3} a^3 - 0\right)$$

$$M = \frac{2\pi}{3} a^3$$

$\therefore$ كتلة الصفيحة الدائرية تساوي $\frac{2\pi}{3} a^3$

مثال(33):

أوجد عزمي العتالة للمثلث المحدود بالمستقيمات $3x + 4y = 24$,$x = 0$,$y = 0$ علما بان كثافته يساوي الواحد الصحيح.

الحل:

عزم العتالة حول المحور x

$$I_x = \int_0^8 \int_0^{6-\frac{3}{4}x} y^2 dy dx =$$

$$\int_0^8 \frac{1}{3} y^3]_0^{6-\frac{3}{4}x} dx = \frac{9}{64} \int_0^8 (8-x)^3 dx = \frac{9}{64} (-1) \frac{(8-x)^4}{4}]_0^8 = \frac{9}{64} \cdot \frac{8^4}{4} = 144$$

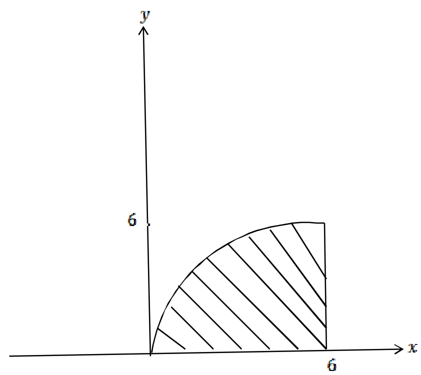
عزم العتالة حول المحور y هو:

$$I_y = \int_0^8 \int_0^{6-\frac{3}{4}x} x^2 dy dx = \int_0^8 x^2 \cdot \frac{3}{4}(8-x) dx = \frac{3}{4}\left(\frac{8}{3}x^3 - \frac{x^4}{4}\right)]_0^8 =$$

$$= \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{12} (8)^4 = 256$$

مثال(34):

أوجد المركز المتوسط$(\bar{y} \quad , \quad \bar{x})$ للمنطقة الواقعة في الربع الاول والمحاطة بالقطع المكافئ $y^2 = 6x$
والمستقيمين$y = 0, x = 6$.h



الحل:

مساحة المنطقة المشار اليها:

$$A = \int_0^6 \int_{\frac{y^2}{6}}^6 dxdy = \int_0^6 \left(6 - \frac{y^2}{6}\right) dy =$$

$$(6y - \frac{1}{18} y^3]_0^6 = 6(6 - 2) = 24$$

بأخذ العزم حول المحورx

$$M_x = \int_0^6 \int_{\frac{y^2}{6}}^6 ydxdy = \int_0^6 y \left(6 - \frac{y^2}{6}\right) dy =$$

$$3y^2 - \frac{1}{24}\frac{y^4}{y}]_0^6 = 36\left(3 - \frac{3}{2}\right) = 54$$

اذن$\bar{y} = \frac{M_x}{A} = \frac{54}{24} = \frac{9}{4}$

ناخذ العزم حول المحور y:

$$M_y = \int_0^6 \int_{\frac{y^2}{6}}^6 ydxdy =$$

$$\int_0^6 \frac{1}{2}x^2]_{\frac{y^2}{6}}^6 dy = \frac{1}{2}\int_0^6 \left(36 - \frac{y^4}{36}\right)dy =$$

$$\frac{1}{2}\left(36y - \frac{1}{180}y^5\right)]_0^6 = 3\left(36 - \frac{36}{5}\right) = \frac{12.36}{5}$$

$$\therefore \quad \bar{x} = \frac{M_y}{A} = \frac{12.36}{5} \backslash 24 = \frac{18}{5}$$

فيكون مركز المتوسط المطل$\left(\frac{18}{5}, \frac{9}{4}\right)$

مثال(35):

عين المركزالمتوسط للسطح المستوي المحصوربين القطعتين المكافئتين $y = 2x - x^2, y = 3x^2 - 6x$

الحل:

$$A = \iint_R dA =$$

$$\int_0^2 \int_{3x^2-6x}^{2x-x^2} dydx = \int_0^2 (8x - 4x^2)dx = \frac{16}{3}$$

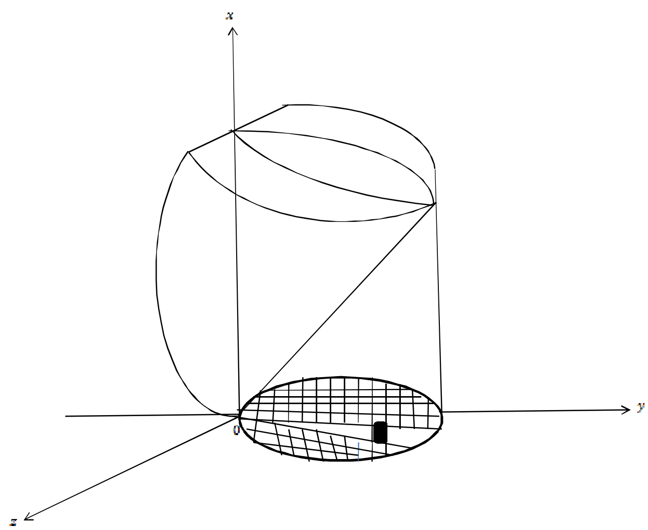
$$M_y = \iint_R xdA = \int_0^2 \int_{3x^2-6x}^{2x-x^2} xdydx = \int_0^2 (8x^2 - 4x^3)dx = \frac{16}{3}$$

$$M_x = \iint_R xdA = \frac{1}{2}\int_0^2 (2x - x^2)^2 - (3x^2 - 6x)^2 = \frac{-64}{15}$$

بالتالي فان$\frac{M_y}{A} = \frac{-4}{5}$,$\bar{x} = \frac{M_y}{A} = 1$ والمركزالمتوسط هو$(1, \frac{-4}{5})$

مثال(36):

أحسب الحجم بين مجسم القطع المكافئ $x^2 + y^2 = 4z$ والاسطوانة $x^2 + y^2 = 8y$ والمستوى$z = 0$ كما في الشكل:



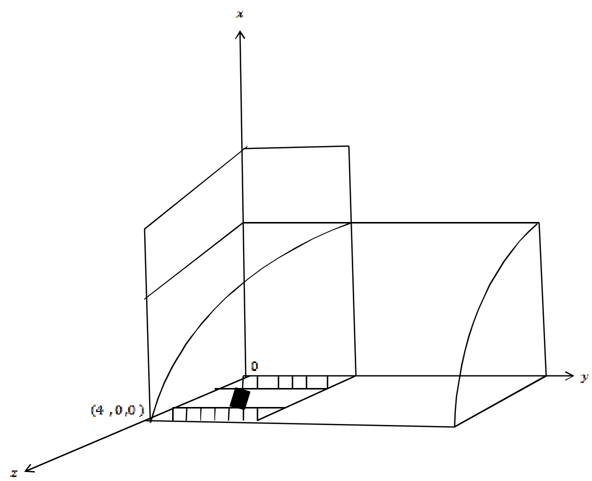
نحصل على الحجم المطلوب بتكامل= $z = \frac{1}{4}(x^2 + y^2)$ على الدائرة $x^2 + y^2 = 8y$ واذا استخدمنا الاحداثيات القطبية فاننا نحصل على الحجم المطلوب$z = \frac{1}{4}P^2$ على الدائرة $P = 8sin\theta$

$$V = \iint_R z\, dA = \int_0^{\pi}\int_0^{8\sin\theta} z_p\, dP\, d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\pi}\int_0^{8\sin\theta} P^2\, dP\, d\theta$$

$$\frac{1}{16}\int_{0}^{\pi} P^4]_0^{8\sin\theta} d\theta = 256\int_{0}^{\pi} \sin^4\theta \, d\theta = 96\pi$$

مثال(37):

أحسب مساحة قطعة الاسطوانة $x^2 + z^2 = 16$ الواقعة داخل الاسطوانة $x^2 + y^2 = 16$ كما في الش



الحل:

من القطعة المطلوب حساب مساحتها ان مسقط هذه القطعة على المستوى xoy هو مربع الدائرة $x^2 + y^2 =$ 16للاسطوانة $x^2 + z^2 = 16$ يكون من قانون

$$1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2 = \frac{x^2 + z^2}{z^2} = \frac{16}{16 - x^2} \frac{dz}{dx} = \frac{-x}{z} \quad , \frac{dz}{dy} = 0$$

ومنه

$$s = 8\int_{0}^{4}\int_{0}^{\sqrt{16-x^2}} \frac{4}{\sqrt{16 - x^2}} dydx = 32\int_{0}^{4} dx = 128$$

(1-4)النتـائــج:

1- تعرفنا على التكامل الثنــائي

2- توصلنا الى أن التكامـل الثنائـي يستخدم في حالة الدوال المعرفــة في متغيريين

3- يمكن إستخدام التكامـل الثنائـي لحسـاب قيـمة التكامل لبعض الدوال غيـر القابــلة لتكامل

4- إستنتجنا بعض صيـغ التكامـل الثنــائي للحجـم والكتلة والمسـاحة وعزم القصــور الذاتـــي

(2-4) التوصيــات:

1- توفيـر مصـــادر ومراجــع حديثـة تتناول التكامـل الثنـائي وتطبيقـاته الحديثــة

2- عمـل دراســة وبحــوث فـي التكامل الثنـائي

3- الإهتمام بتطبيقات المختلــفة للتكامل الثنـــائي

4- التوســع بدراس التكامل الثــنائي نسبـــة لأهميته في الحيـاة من خلال تطبيقاتــه العملية

(3-4) المراجــع:

1- حساب التفاضل والتكامل الجزء الرابع الطبعة الثانيةتأليف الاستاذ الدكتور نصارحسن عبد العال السلمي – دار النشر مكتبـــة الرشد (1424م - 2006م)

2- 3000 مسألة في حساب التفاضل والتكامل - اليوت مندلسون – حقوق الطبعة العربيـة – أكاديميا إنتــرناشيـونال 200,1995م

3-حساب التفاضل والتكامل - تأليف الدكتور فرنك ايرز وجاك اولز حقوق النشر2013م

4-اساسيات الرياضيات –حساب التفاضل والتكامل الدكتور: محمد عون 2002م

5- رياضيات عامة - ريم مصطفــى الريــس - مكتبة المجتمع العربي للنشـر والتوزيـع 2014م –1435هـ

6- الحسبان الشامـل في التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية -الجزء الاول – د.عبد المجيـد نصيــر - د.بســام الناشــف – دار الكنـدي للنشـر والتوزيــع – اربد حقوق الطبع-1996م

7- أساسيات التفاضل والتكامل والمصفوفات والمتجهات -دكتور فوي محمد عون – دار الكتب العلمية للنشر والتوزيــع - حقوق النشر 2003م

8-التفاضل والتكامل المتقدم - الدكتور:رومي ابراهيم الخطيب.

9– التفاضل والتكامل الجزء الثاني – رمضان محمد جهيمة ود.احمد عبدالعالي - دار الكتاب المتحدة-1999م