بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا

كلــــــــــــــــــــية

التربيــة

قســـم العلوم

شعبة الرياضيات

بحث تكميلي لنيل درجة بكلاريوس الشرف في الرياضيات

بعنوان :

الإنحناء الجيوديسي

إعداد الطالبات :

الاء قاسم عبد الوهــاب

رحاب ميرغني خلــف الله

شهندة عبدالقـادر محمد

ضـــحى عبدالله عــــــــلى

إشراف الأستاذه:

مها بلة محــــــمد عجـبا

لخنســـــاء محــمد ميرغني

سبتمبر - 2018م

بسم الله الرحمن الرحيم

إستـــــــــهلال

ٹ ڈ

چ □ □ □ □ □ □ □ □ □

□ □ □ چ

صدق الله العظيم

النجم: ٣٩ - ٤٠

الاهداء

إلهي لا يطيب الليل إلا بشكرك ....ولا يطيب النهار إلا بطاعتك.... ولا تطيب اللحظات إلا بذكرك ....ولا تطيب الآخرة إلا بعفوك ....ولا تطيب الجنة إلا برؤيتك.الله جل جلاله

إلي من بلغ الرسالة وأدى الأمانة ونصح الأمة إلى نبي الرحمة ونور العالمين سيدنا محمد صلى الله عليه وسلم

إلى من جرع الكأس فارغا ليسقيني قطرة حب إلى من كلت أنامله ليقدم لنا لحظة سعادة إلى من حصد الأشواك عن دربي ليمهد لي طريق العلم.إلى القلب الكبير والدي العزيز

إلى ملاكي في الحياة..إلى معنى الحب إلى معنى الحنان والتفاني ...إلى بلسم الحياة وسر الوجود ...إلى من كان دعاءها سر نجاحي وحنانها بلسم جراحي إلى أغلى الحبايبأميالحبيبة

إلى نصف روحي وسندي في الحياة ...إلى ملاذي حينما تعصف بي أمواج الهموم ..إلى من تحمل العناء معي وشاطرني التعب والسهر ...إلى روضة الحياة وبستان الدنيا.......زوجي العزيز

إلى من قاسموني رحم أميإلى من ينتظرون نجاحي بلهفة الأخوة

إلى الوجوه التي ترتسم براءتها فتزهر قلبي   أخوتي وأخواتي

إلي من صادفتهم على مقاعد الدراسة فصاروا لي كأخوتي وأكثر جمعتنا الدفاتر والحقائب ولكن ربطتناالقلوب ....زملائي

الشكر والعرفان

ب

في مثل هذه اللحظات يتوقف اليرـ يـــر ـبل أن يخط الحروف ليجمعها في كلمات وتتبعثر الأحرف خجلا وعبثا نحاول تجميعها في سطور..

إلى من أشعلت شمعة في دروب عملنا ....

وإلى من وقفت على المنابر واعطتنا حصيلة فكرها لتنير دربنا.

الأستاذة :**الخنساء محمد ميرغني**

التي تفضلت بالإشراف على هذا البحث فجزاها الله خيرا.

كما نتقدم بالشكر إلى جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا وأمناء مكتبات كل من :كلية التربية وكلية العلوم وكلية الهندسة بجامعة السودان .

مستخلص البحث

تناولنا في هذا البحث دراسة المنحـ ج ـام والسطوحوالصيغ الأساسيةو الإنحناء الجيوديسي,ثم تناولنا بعض تطبيقاته وصيغ دارﻫا التفاضلية .

وقد قسم البحث إلي خمسة فصول ,تناولنا في الفصل الأول خطة البحث وأهميته واهدافة .

أما في الفصل الثاني تحدثنا عن المنحني (الإنحناء) و السطوح وتناولنا في الفصل الثالث الإنحناء الجيوديسي و صيغ دارﻫا التفاضلية وفي الفصل الرابع بعض من التطبيقات و في الفصل الخامس النتائج والتوصيات والمراجع .

Abstract

In this study, we studied t in general, surfaces, basic formulas and geodetic curvature, and then we discussed some of its applications and Darbwa differential formulas.

The research was divided into five chapters. In the first chapter, we discussed the research plan, its importance and its scope.

In the second chapter, we talked about bending and surfaces. In the third chapter, we discussed the geodetic curve and the Darboa differential equations. In the fourth chapter, some of the applications and in Chapter 5, the results, recommendations and references.

قائمه هـ ات

الرقم	الموضوع	رقم الصفحة
-	البسملة	أ
-	الأية	ب
-	الإهداء	ج
-	الشكر والعرفان	د
-	مستخلص البحث	هـ
-	Abstract	و
-	فهرست المحتويات	ل
	الفصل الأول **خطة البحث**	
	مقدمة البحث	1
	أهمية البحث	4
	اهداف البحث	4
	مشكلة البحث	4
	حدود البحث	4

	منهجية البحث	4
الفصل الثاني **الإطار النظري**		
(1-2)	مفهوم المنحنى في الفراغ	5
(2-2)	خواص المنحنى	6
(3-2)	تعريف الانحناء	6
(4-2)	رسم المنحنيات	7
(5-2)	السطوح	7
(6-2)	مفهوم السطوح	10
(1-6-2)	السطح المنتظم	12
(2-6-2)	الصيغة المترية على السطح	14
(3-6-2)	الصيغة الأساسية الثانية	15
(4-6-2)	الصيغة الأساسية الثالثة	17
الفصل الثالث **الإنحناء الجيوديسى**		
(1-3)	تعريف الجيوديسي	21
(2-3)	الانحناء الجيوديسي	21
(3-3)	إستخدامات الإنحناء الجيوديسي	22
(4-3)	تطبيقات المساحة الجيوديسية	22
(5-3)	الآطارات المصاحبة للمنحنى على السطح	23
(6-3)	صيغ داربوا التفاضلية	24
(7-3)	المنحنيات الجيوديسية	27
الفصل الرابع		

تطبيقات		
(1-4)	تطبيقات على الانحناء الجيوديسي وصيغ داربوا	34
الفصل الخامس **النتائج والتوصيات**		
(1-5)	النتائج	39
(2-5)	التوصيات	39
(3-5)	المصادر والمراجع	40

الفصل الأول

خطة البحث

(1_1)المقدمة :

نشأة الهندسة وتطورت من قبل الميلاد حتى وصلت الى ذلك البناء العظيم فى العصر الحديث،لما لها من تداخلات في أفرع العلوم المختلفة وتطبيقاتها في مجالات الحياة العلمية .ونبين كيف أن مفهوم النظرة للهندسة كأشياء محسوسة تغير ليصبح مفهوم مجرد وهذا التجريد هو صلب الواقع العلمي كما ظهر في كل من ريمان ولوباتشفيسكي والذى ثبت فيما بعد مدى ملائمة هذه الهندسات لكثير من مشاكل الحياة. وهذا الغرض مبنى على نظام المسلمات الذي قامت عليه الهندسة وتصنيفاتها المختلفة .وفي النهاية نركز على موضوع الهندسة التفاضلية وتوضيح مدى أهمية دراسة هذا التخصص لما له من ارتباط وثيق بأفرع الرياضيات المختلفة وكذلك التطبيقات العملية .

يرجع تاريخ الهندسة إلى الماضى السحيق حيث ظهرت في محاولات البابليون والمصريون القدماء لتأسيس حضاراتهم العريقة . وفي القرن السابع قبل الميلاد بدأ تطور الهندسة على أيدي المدارس الآغريقية .كثير من الحقائق الأساسية تم الحصول عليها في القرن السادس والخامس قبل الميلاد وظهرت في مفهوم النظرية وكيفية البرهان .

وفي القرن الثالث قبل الميلاد أصبح الإغريق لهم معرفة عميقة بالهندسة ،ليس فقط في تراكم عدد كبير من الحقائق الهندسية ولكن في طرق البرهان . ولهذاكانت هذه الفترة موجهة لتجميع كل النتائج معاً ووضعها في ترتيب منطقى كذلك قام الإغريق بأعمال كثيرة من أجل تطوير الهندسة ،ولكنها لم تظهر إلينا وخصوصاً بعد ظهور عمل إقليدس الشهير والذي أسماء الأصول هذا العمل يحتوي على ثلاثة عشر كتاباً تفصيلها كالآتي:

الكتب الست الاولى احتوت على دراسة الاشكال المستوية ،الكتب من الحادي عشر إلى الثالث عشر تخصصت في دراسة الأشكال المجسمة ،الكتب الباقية تخصصت في دراسة الحساب بشكل هندسي .

إذاالأصول لإقليدس احتوت على المفاهيم الأساسية في الهندسة . هذه الكتب قسمت إلى **ثلاثة مجموعات** هى :

المجموعة الأولى : التعاريف

المجموعة الثانية : الفرضيات

المجموعة الثالثة :المسلمات

اعتمد إقليدس علي هذه المجموعات من التعاريف والفرضيات والمسلمات فى ترتيب نظريات الهندسة ترتيبا منطقيا .

الفرضية الخامسة :

كلنا يعرف القاعده الأساسية التى تلعبها المسلمة الخامسة من دراسة الأولية حيث أنها تشكل أساس نظرية توازى الخطوط المستقيمة وكل ما يتعلق بها مثل التشابه للأشكال وحساب المثلثات.

الهندسة التفاضلية :

النظرة الحديثة للفراغ الهندسي تشكلت بتوسع عندما تطورت الهندسة التفاضلية وعام 1827م توصل جاوس الي مجموعة من الخصائص الخاصة بالسطوح التي شكلت الهندسة الذاتية أو الداخلية للسطوح .هذه الهندسة هى دراسة الخواص التي يمكن ملاحظتها عن طريق ملاحظة بواسطة قياسات علي السطح نفسه مثل الأطوال,المساحات والزوايا وكان منشأ هذه الهندسة هو الهدف العملي من عملية مسح الأرض وخلاف ذلك فائنها تسمى الهندسة الخارجية .

الدراسة التحليلية البحتة التي طبقها ريمان في دراسة الأشكال الهندسية مكنته من تعميم مفهوم الإنحناء مباشرة للحالات متعددة الأبعاد وفراغات ريمان المعممة أصبحت مفيدة للفيزياء النظرية.

ماذا تعنى الهندسة التفاضلية ؟

1. الهندسة التفاضلية تعنى بدراسة الخواص المحلية والموسعة للمجموعات التفاضلية في الفراغ الإقليدي
2. جاوس بيّن أن الخواص الهندسية المحلية تظل لاتغيرية طالما المسافة علي السطح تظل لاتغيرية
3. ريمان عّرف السطح بدون النظر الي فراغ يحتويه واستنتج خواصه المحلية من تعريف المسافة علي السطح
4. السطوح والمنحنيات هى مجموعات نقطية من الفراغ الثلاثي نحتاج لدراستها لمؤثر (دالة) يقوم بعمل بارمترية لهذه المجموعات
5. الهندسة التفاضلية تهتم بالدالة أو الدوال التي تولد عديد الطيات (منحنى أو سطح) وهذه الدالة مجالها قد يكون مناطق بها تجاعيد أو طيات أو نقاط شاذة والتجاعيد يتم وصفها خلال دالة تفاضلية وهى دالة الإنحناء التي من خلالها نستطيع التمييز بين شكل و اخر مثل اختلاف

بصمة الأصبع في الكائن الحي حيث تتضح المنحنيات المختلفة التي تغطي السطح مثل المنحنيات البارمترية والتقاربية الإنحنائية والجيوديسية وغيرها.

(2_1)**أهمية البحث** :

1. التعرف على المنحنيات والسطوح .
2. التعرف على الانحناء الجيوديسي .
3. لتعرف على صيغ دار بوا التفاضلية

(3_1)**أهداف البحث**:

1) يهدف البحث إلي أن يفهم الطالب ما هو الإنحناء وما هو الإنحناء الجيوديسي.

2) يهدف البحث الي دراسة المنحنياتالجيوديسيه وصيغ دار بوا التفاضلية وكيفية الاستفادة من الانحناء الجيوديسي.

(4_1)**مشكلة البحث**:

صعوبة تحديد بعض النقاط والمنحنيات على سطح الأرض ،وصعوبة إنشاء خرائط للمساحات الشاسعة .

(5_1)**حدود البحث:**

الحدود المكانية : ولاية الخرطوم

الحدود الزمانية : 2017-2018م

(6_1)منهجية البحث :

يتبع هذا البحث المنهج الوصفي.

الفصل الثاني

الإطار النظري

(1-2) مفهوم المنحني في الفداغ :

هو المدى لدالة متجة متصلة علي فترة من الأعداد الطبيعية ويمكن صياغة هذا التعريف رياضياً علي أنه مجموعة النقط c والتحويل المتصل T حيث يكون c صورة الفترة المغلقة [a, b] تحت المتصل T.

المنحني هندسياً :

هو المحل الهندسي لنقطة ذات حدية واحدة .

(2_2)خواص المنحني:

1- يسمي المنحني مستوى إذا وقع بكاملة في مستوي ويكون ملتو إذا كان غير ذلك .

2- يكون المنحي c مغلقا علي الفترة[a, b]اذا حقق التمثيل البارامتري $r(a) = r(b)$ اي اذا انطبقت نقطة البداية للمنحني مع نقطة النهاية للمنحني مثل الدائرة

3-يسمي المنحني بسيط إذا لم يتقاطع مع نفسه مثل القطعة المستقيمة .

4-قد يتقاطع المنحني مع نفسه ويسمي منحني متقاطع وتسمي نقط التقاطع بنقط تقاطع مزدوجة للمنحني $\propto$.

5-تكون الدالة ملساء اذا كانت r لها مشتقات متصلة علي الفترة I ويكون المنحني c اذا كان التمثيل البارامتري املس اما اذا كانت الدالة المتجة r المعرفة علي الفترة I مكونة من عدد محدود من الفترات تكون في كل منها r ملساء وبذلك يكون المنحني c املس علي قطع .

(3_2)تعريف الانحناء:

ليكن K منحني املس له تمثيل بارامتري $N(t)$ قابل للاشتقاق فان المنحني يعرف

وهو يمثل معدل متجه تغير وحده المماس بالنسبة لمقدار طول قوس المنحني .

تعريف اخر :

لديك c هو منحني املس ويكون له التمثيل البارامتري بدلالة دالة طول القوس s وليكن $\emptyset = \emptyset(s)$ هي الزاوية المقاسة في عكس عقارب الساعة من الانحناء الموجب لمحور السينات الي متجة الوحدة المماس $T = T(s)$ وعليه فان الانحناء هو معدل تغيير الزاوية $\emptyset$ بالنسبة الي طول القوس $K = \frac{d\phi}{ds}$

ومتجة الوحدة العمودي$\vec{N} = \frac{\overrightarrow{dT}}{d\emptyset}$

(4_2)رسم المنحنيات :

رسم المنحنيات هو التمثيل البيانى للدوال ويقوم على تتبع سلوك $f(x)$ لدالة f عندما تتغير قيمة x في فترة معينة . ويتم هذا التمثيل عملياً بفرض قيم للمتغير x واقعة في مجال f ثم رصد القيمة $y = f(x)$ المقابلة ، وبحصر جميع الأزواج المرتبة $(x_i, y_i), i = 1,2, \dots . . n$ في جدول حيث n عدد نقط التمثيل ، نكون قد حصلنا على تمثيل عددى للدالة .

وأخيراُ تقع النقط $P(x_i, y_i), i = 1,2, \dots . , n$ في المستوى xy المحدد بالمحورين المتعامدين $0y = 0x$ اللذين يضمان على الترتيب الأحداثيات السينية $x_i, i = 1,2, \dots . , n$ للنقط والأحداثيات الصادية $y_i, i = 1,2, \dots . , n$ لها ،وبتوصيل هذه النقط بخطوط مستقيمة بينها ينشأ ما يسمى بمنحنى الدالة .

وكلما زاد عدد النقط n زادت دقة التمثيل حتى يقترب الرسم من المنحنى الحقيقى إلى حد كبير

(5_2)السطوح:

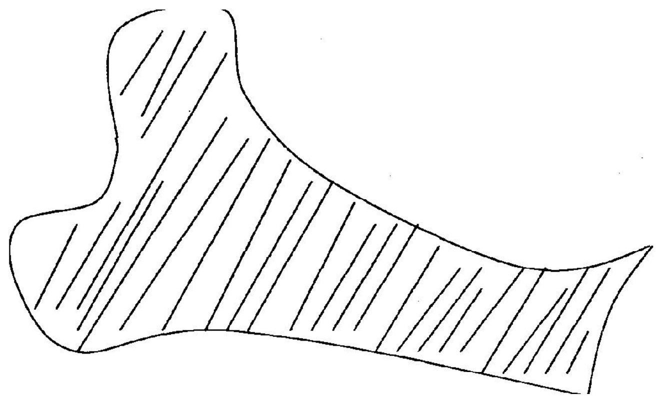
في الحياة اليومية نرى سطوح كثيرة مثل البالونات والأنابيب وأكواب الشاي والأغشية الرقيقة مثل فقاعات الصابون والتى تمثل نماذج فيزيائية ولدراسة هندسة هذه السطوح نحتاج إلى إحداثيات لعمل الحسابات اللازمة . هذه السطوح موجودة في الفراغ الثلاثي لكن لا يمكن أن نفكر بأنها ثلاثية البعد على سبيل المثال إذا قطعنا أسطوانة مقطع طولى فإنه يمكن فردها أو بسطها لتصبح قطعة مستوية على سطح المكتب هذا يوضح أن هذه السطوح ثنائية البعد بالوراثة ولهذا يجب وصفها بإحداثين .

هذا يعطينا الانطباع الأول عن كيفية الوصف الهندسى للسطوح بالتحديد نحاول فرد قطعة من المستوى حول سطح ويتطلب ذلك تمدد(بلا إنقطاع)ولى(ضغط أوانحناء)بدون لصق أوتمزق وهذا يوضح كيف تظهر منحنيات السطح في الفراغ هذا الفرد يقدم إحداثيات لعمل حساب التفاضل والتكامل على السطح حساب التفاضل على السطح يمكننا من الوصف الهندسى للسطح مثل حساب التفاضل الخاص بضيغ فرينية بالنسبة للمنحنى .

السطح المنتظم يمكن الحصول علية من قطع من الورق المستوى وترتيبها بطريقة ما بحيث الشكل الناتج يكون خالى من النقاط الحادة أوالأن 6 ، المدببة أو التقاطعات الذاتية (السطح يقطع

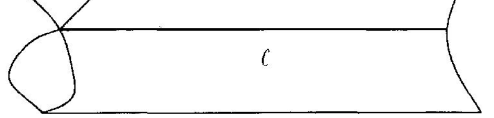
نفسه)وبالتالى يمكن التحدث عن المستوى المماس عند نقاط الشكل وبالتالى يمكن القول أن السطح في الفراغ الثلاثي الإقليدى$\mathbb{R}^3$ وهو مجموعة جزئية من $\mathbb{R}^3$ (بمعنى تجمع خاص من النقاط)وبالطبع ليست كل المجموعات الجزئية تكون سطوح وبالتاكيد نعنى سطوح ملساء وثنائية البعد.

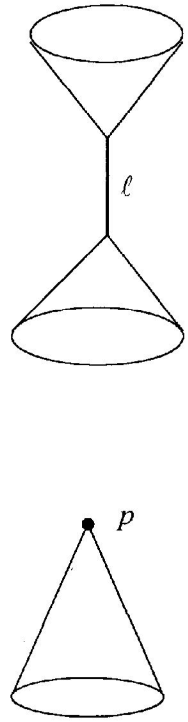
وتوضح ذلك من خلال سطوح تبدو محلياُ مثل ورقة ثنائية البعد مطوية كما هو موضح من خلال الأشكال الأتية



ببب

شكل رقم (2- 1)



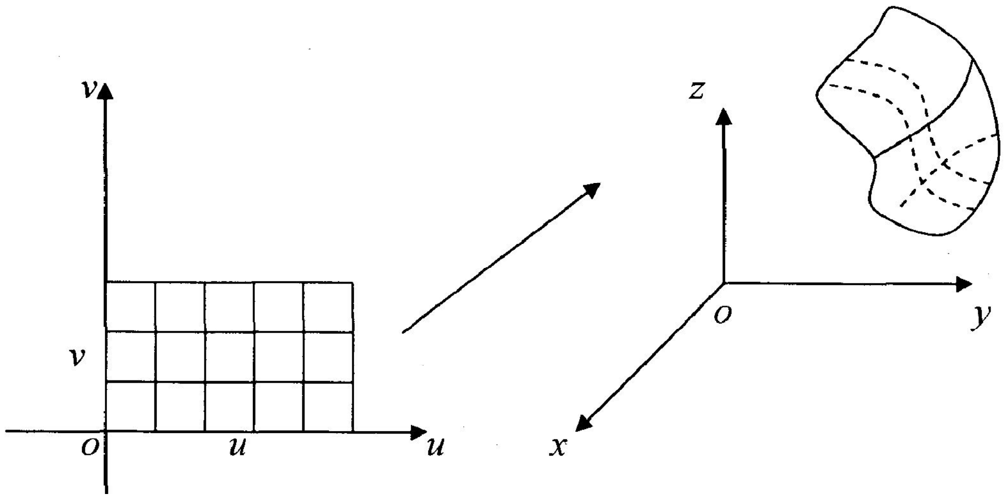


شكل رقم (2-2)

نلاحظ أن (شكل مجموعة جزئية ليست سطح) لا تمثل سطح بسبب خط التقاطع ولكن نفس الشكل بعد حذف خط التقاطع يصبح سطح كذلك في شكل (مجموعة جزئية ليست سطح) الشكل لايمثل سطح بسبب الخط الواصل بين رؤوس المخروطين وفي شكل (مجموعة جزئية ليست سطح) نرى أن الشكل ليس سطح بسبب رأس المخروط (ناب)إى أن المخروط بدون رأسه يصبح سطح .

والمنحنى المنتظم يعنى وجود متجة مماس غير صفري وبالنسبة للسطوح يعنى وجود مستوى مماس معرف تعريف جيد .

السطوح في الفراغ الثلاثي تكون ثنائية البعد ونستطيع أن نمثيلها بارامترياُ (وسيطاُ) بمتغيرين وتوضح ذلك في الشكل



شكل رقم (2-3)

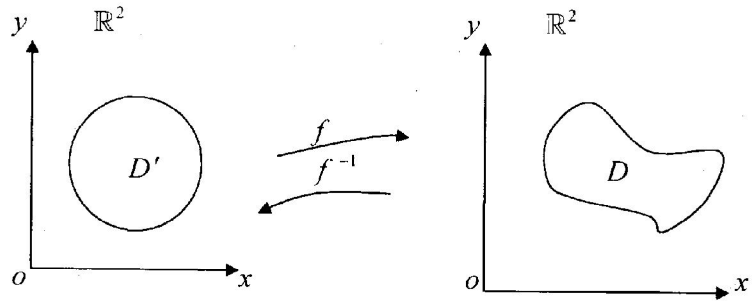
(6_2)مفهوم السطوح:

نفرض أن D جزء من مستوي ما وأن D^X المنطقة الموجودة داخل دائرة ما والتي تسمي قرص مفتوح إي أن

$$\grave{D} = \{X^1, X^2 : (X)^2 + (X^2)^2 < a^2\}$$

اذا كانت D صورة للقرص المفتوح $\acute{D}$ بواسطة راسم توبولوجي فان D تسمي منطقة بسيطية اذا وفقط اذا كان $D = F(\acute{D})$ حيث راسم تناظري احادي وان F, F' دوال متصلة بمفهوم التبولوجي في هذه الحالة يقال أن D تكافي $\acute{D}$.

تكافؤ هوميورفيك كما موضح في الشكل



شكل رقم (2-3)

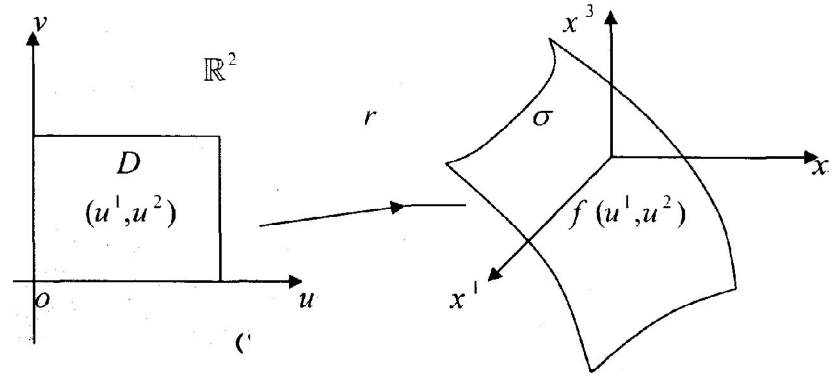
نفرض ان Cهو منحني بسيط مغلق في المستوي من نظرية جوردان نجد ان Cيقسم المستوي الي جزئين احد هذه الاجزاء محدود والاخر غير محدود والجزء المحدود في هذه الحاله يمكن اعتبارة صورة قرص مفتوح بواسطة تبولوجي مثل المناطق الموجودة داخل كل من المربع والمستطيل والقطع المكافي هي مناطق بسيطة

تعريف

مجموعة النقط σ في الفراغ E^3تسمي بالسطح الأولي اذا كانت محددة لمنطقة بسيطة Dفي مستوي ما بواسطة راسم توبولوجي اي ان σ سطح اولي اذا كان $\sigma = F(D)$ نفرض ان u^1, u^2هي الاحداثيات الكارتيزية لاي نقطة في المنطقة Dوان x^1, x^2, x^3هي احداثيات النقطة المناظرة لها علي السطح البسيط الاحداثيات x^1, x^2, x^3هي دوال في احداثيات المنطقة D اي $x^1 = f_1(u^1, u^2), x^2 = f_2(u^1, u^2), x^3 = f_3(u^1, u^2)$

هذا النظام من المعادلات يسمي بمعادلات السطح σفي الصورة البارامترية وهذه المعادلات تكافي في الصورة الإتجاهية

$\underline{r} = \underline{r}(u^1$



شكل رقم (2-3)

حيث الدالة الإتجاهية $\underline{r} = \underline{r}(u^1,u^2)$ وحيدة القيمه والإحداثيات البارامترية u^1,u^2 الإحداثيات المنحنية وعند تثبيت u^1,u^2 فاننا نحصل علي منحني يقع علي سطح هذه المنحنيات تسمي بمنحنيات الإحداثيات

وهذه المجموعة مرتبطة سطح بسيط ويسمى متكامل إذاكانت النهاية لاى متتابعة تقاربية من النقط التى على السطح هى أيضا نقطة على السطح . مثل سطح الكرة ومجسم القطع المكافىء.

إذا كان السطح البسيط المتكامل محدود فإن السطح يسمى بالسطح المغلق. مثل سطح الكرة و سطح قار ب النجاة .

وسطح عام إذا كانت هى صورة لسطح بسيط بواسطة راسم توبولوجى محلى فى الفراغ E^3 .

(1_6_2)السطح المنتظم :

يقال ان السطح σ انة منتظم (قابل للتفاضل K من المرات) إذا كان كل نقطة من نقاطه لها منطقة مجاورة تسمح بتمثيل بارمتري منتظم على الصوره:

$x^i = x^i(u^{\text{٤}}$

حيث x^i دوال منتظمة (دوال منتظمة وقابلة للتفاضل K من المرات) معرفة فى منطقة DCR^2 من المستوى uv.

فمثلا التمثيل البارامتري للسطح هو:

أو مايكافئ:

$x^i =$

ونستخدم أسلوب أبنشتين الاختزالى الجمعى لمعالجة نظرية السطوح ولذلك تعتبرمجموعتين من الرموز الترقمية أحداهما لاتينية i, j, k ومداها هو $1,2,3$ وأخرى إغريقية $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ومداها هو 1,2 توضيحا لذلك تعتبر الامثلة الاتية:

$a^i b_i = a^1$

$A_{\alpha\beta} E$

إذا كانت $x^i = x^i(u^\alpha) = x^i(u^1, u^2)$, $i = 1,2,3$ هى دوال منتظمة فى المنطقة D من المستوى u^1, u^2

والتى تحقق أن المصفوفة الجاكوبية :

لها المرتبة 2 عند كل نقطة $\left((u^1, u^2) \in D\right)$ فإن المعادلات(2,2) تعين سطح ما σ هو صورة لسطح بسيط D بواسطة راسم توبولوجى محلى والذى يحدد للنقطة $(u^1, u^2) \in D$ نقطة فى الفراغ إحداثيات تعطى بالمعادلات (2,2) لاثبات ذالك نثبت ان الرسم

راسم أحادى (متباين) محلى نفرض على العكس أن الراسم غير أحادى ولذلك توجد النقطة (u_0^1, u_0^2) بحيث أنة فى النقطة المجاورة لها والصغيرة صغرا كافيا يمكن أختيار النقطتين $(u^\alpha) = (u^1, u^2), (v^\alpha) = (v^1, v^2) \in D$ والتى تحقق المعادلات $x^i(u^\alpha) - x^i(v^i) =$ 0 $i = 1,2,3$ $, \alpha = 1,2$

او ما يكافئ:

ولكن

$x^i(u^1, u^2) - x^i(v$

$= (u$

(وبذلك نستخدم مفكوك تيلور فى منطقة الجوار المباشر من الرتبة الاولى)

إى يكون لدينا نظام المعادلات الخطية (فى المجاهيل $u^2 - v^2, u^1 - v^1$) المتجانسة الاتية :

$(u^2 - v^2) x_2^i ($

$$x_\alpha^i = \frac{\partial x^i}{\partial u^\alpha} \quad \alpha = 1,2$$

نفرض ان $u^1 - v^1, u^2 - v^2$ لايتساويان الصفر فى أن واحد ومن المعادلة (4,2) يكون للمصفوفة

مرتبة اقل من 2 اى ان جميع محددات الرتبة الثانية تنعدم فى القيمة ومن أستمرار الدوال x_2^i, x_1^i ينتج ان جميع محددات الرتبة الثانية للمصفوفة :

تنعدم عند النقطة (u_0, v_0) أى أن مرتبة المصفوفة تقل عن العدد 2 وحيث أن المصفوفة (5,2) هى المصفوفة البديلة للمصفوفة (3,2) ولذلك نكون قد توصلنا الى تناقض أى أنة لابد أن يكون الراسم $F: D \to \sigma$ راسم توبولوجى .

نظام المعادلات (2,2) يمثل سطحا فى الفراغ إذا كان وفقط مرتبة المصفوفة الجاكوبية(3,2) تساوي 2 .

البرهان :

المصفوفة الجاكوبية تعطى (3,2) ولذلك نعتبر الحالات الاتية :

أ. مرتبة المصفوفة (3,2) تساوى صفرا وفى هذه الحالة لابد من تنعدم جميع عناصر المصفوفة إى أن $x_u^i = \frac{\partial x^1}{\partial u^u} = 0 \quad i = 1,2,3 \;, \alpha = 1,2$ وبالتالى يكون $x^i = a^i = \cos t$ ولذلك المجموعة (2,2)تمثل نقطة ثابتة $(x^i) = (a^1, a^2, a^3)$ فى الفراغ E^3.

ب. مرتبة المصفوفة (3,2) تساوي 1 فى هذه الحالة توجد $3 - 1 = 2$ من العلاقات التى تربط الدوال الاحداثية x^i وتكون خالية تماما من u^1, u^2. أى توجد العلاقات :

$f_2(x^1, x^2, x^3) = 0 \quad , \quad f_1(x^1, x^2, x^3) = 0$ التى تمثل معا منحنى عى الفراغ أى أن المعادلات (2,2) تمثل منحنى فراغى وليست سطحا

مرتبة المصفوفة (3,2) تساوى 2 وعلية يجب أن ترتبط الدوال x^i بعلاقة واحدة $f(x^i) =$ $f(x^1, x^2, x^3)$ وهذه تمثل سطحا فى الفراغ أى أن مجموعة المعادلات (2,2) تسمى التمثيل البارامترى للسطح ويعطى بالمعادلات الاتجاهية :

$$r(u^1, u^2) = r(u^\alpha)$$

إذا كانت الدالة الاتجاهية (6,2)لها مشتقات جزئية متصلة لاى رتبة بالاضافة الى $\underline{r_1}, \underline{r_2} \neq 0$

حيث $\underline{r_\alpha} = \frac{\partial r}{\partial u^\alpha}$

فإن الثمثيل البارمتري (7,2)أو (7,6) يسمى ثمثيل بارامترى منتظم .

(2_6_2)الصيغة المترية على السطح :

لنعتبر سطحا فى الفراغ معطى بالتمثيل البارامترى :

ومنحنى واقع علية معطى بالمعادلتين $u^a = u^a(t)$ إذا المماس لهذا المنحنى هو :

$$\underline{r}^1 = \underline{r}_a u^a = \frac{d}{dt}$$ أومايكافئ

وهذه الصيغة تعطى الإتجاهات على السطح لتكن s هى المسافة القوسية على المنحنى $u^a = u^a(t)$ وبناء علية يكون :

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \left|\frac{dr}{dt}\right|^2 =< \dot{\underline{r}}, \dot{\underline{r}} >=< \underline{r}_a u^r, \underline{r}_p u$$ (من خواص الضرب القياسي)

لنرمز الأن للصيغة$< \underline{r}_a, \underline{r}_B$ بالرمز g, B وبالتالى نحصل على :

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = g_{11}$$

حيث :

$$\therefore \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = g_{11}\left(\frac{du^1}{dt}\right)^2 + 2g_{12}\frac{du^1}{dt}\frac{du^2}{dt} + g_{22}\left(\frac{du^2}{dt}\right)^2$$

وهذه تعطى مربع عنصر المسافة القوسية على المنحنى الذى يقع على السطح وهى صحيحة لاى منحنى واقع على السطح إذا يمكننا حذف t من الطرفين ونحصل على ds^2 وهى تمثل عنصر المسافة بين نقطتين متجاورتين على السطح أى أن :

وهذه الصيغة تسمى الصيغة المترية للسطح أو الصيغة الاساسية الأولى على السطح وتسمى الكميات الاساسية الأولى[الكميات المترية على السطح] بالنسبة للصيغة المترية اعلاه نعرف مميز الصيغة المترية (محددالصيغة التربيعية الاولى) للسطح ونرمز للسطح عادة ب g ويعطى من :

(3_6_2)الصيغة الأساسية الثانية :

نعتبر سطح M فى الفراغ $\mathbb{R}^3$ تمثيله البارامترى المنتظم على الصورة :

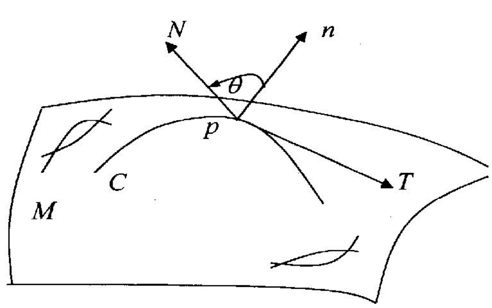
$M: R(u^1,$

المنحنى c واقع على السطح M وله تمثيل بارامتري بدلالة بارامتر طول القوس s على الصورة :

ومايكافئ:

لتكن P هى أحدى نقاط المنحنى T , c وحدة المماس له عند n, P وحدة متجة العمود الاساسى للمنحنى c عندN, P متجة الوحدة العمودى على السطح عند P ولتكن θ هى الزاوية بين N, n أى أن

كما مبين فى الشكل :



شكل (4,2)

وحدة المماس تعطى ب :

$T =$

أو مايكافئ :

بالتفاضل مرة أخرى بالنسبة إلى s واستخدام صيغة فرتية التفاضلية نحصل على :

$$\frac{d^2R}{ds^2} =$$

حيث: $\frac{d^2R}{du^\alpha du^\beta} = R_{\beta\alpha} = R_{\alpha\beta}$ لان نظرية بنج لتبادل الإشتقاق متحققه ولذلك لان R دالة منتظمة .

بضرب طرفى العلاقة فى N واستخدام العلاقة (9,4) نحصل على :

K

ولكن N عمودى على المماس T_pM فهو عمودى على $R_2R_1 \cdot T$ عند P

وبوضع $L_{\alpha\beta} =< N, R_{\alpha\beta} >=< N, R_{\beta\alpha} >= L_{\beta\alpha}$

$$\therefore K\cos\theta = \frac{L_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta}{ds^2} =< \frac{d^2R, N}{ds^2} >$$

حيث المقام ds^2 هو الصيغة الأولى I أو الصيغة المترية والبسط صيغة تربيعية أيضا تسمى الصيغة الاساسيةالثانية ويرمز لها بالرمز II حيث :

$$= L_{11}(du^1)^2 + 2L_{12}du^1du^2 + L_{22}(du^2)^2$$

العلاقة تأخذ الصورة : $\therefore$ $K\cos\theta = \frac{II}{I}$

أو من تعريف I : $\text{ɔs}\,\theta = \frac{L_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta}{g_{\alpha\beta}du^\alpha du^\beta}$

- ❖ كل من البسط والمقام صيغ جمعية كل منها منفصل عن الأخر أى لا يجوز إختصار du^α فى البسط مع du^α فى المقام .

الكميات الأساسية الثانية $L_{\alpha\beta}$ المعرفة يمكن إعطا ئها فى صور تفصيلية أكثر كالاتى:

$L_{11} =$

وبالمثل: $L_{12} = \frac{1}{\sqrt{g}}[R_{12}, R_1, R_2] = \frac{1}{\sqrt{g}}[R_{21}, R_1, R_2]$

حيث [,] يعنى حاصل الضرب الثلاثي القياسي وهو عبارة عن محدد من الرتبة الثالثة .

❖ الصيغ التربيعية I, II تكتب بلغة المصفوفات على الصورة:

حيث: $du = (du^1, du^2)$, $(L_{\alpha\beta}), (g_{\alpha\beta})$ مصفوفات ذات أبعاد 2×2 .

1. الصيغة الأساسية الثانية II ليست موجبة بالتحديد.

نجد من العلاقة $K\cos\theta = \frac{II}{I}$ المقام الايمن $= I$ وهى صيغة تربيعية موجبة بالتحديد ولكن الطرف الأيسر $K\cos\theta$ من الممكن أن يساوى صفراً أو مقدار سالب أو موجب,أى أن إشارة II هى إشارة $K\cos\theta$ وبالتالى فإن II متميزة الإشارة أى ليست موجبة بالتحديد.

(4_6_2)الصيغة الأساسية الثالثة:

للسطح المنتظم M والموجة نعرف الصيغة الأساسية الثالثة وهى عبارة عن الصيغة الأساسية الأولى للصورة الكروية (أو المرسومة بحقل المتجة العمودى).ويرمز لها بالرمز III .

من هذه التعريف يمكن كتابه III على الصورة :

ولا تتغير بتغير إتجاه السطح أى أنها لاتغيرية مثل الصيغة الأولى .

على السطح المنتظم $M: R = R(u^1, u^2)$ يتحقق:

حيث H, K هما الإنحناء الجاوسى والمتوسط على الترتيب I, II, III هى الصيغ الأساسية الأولى و الثانية والثالثة على الترتيب .

دون خسارة فى التعميم نختار سطح منتظم مغطى أساسى $(L_{12} = g_{12} = 0)$ وبإستخدام صيغ روديجر نحصل على :

dN

$= -k$

= -

وبالمثل يمكن أثبات أن :

بضرب المعادلة (2,4) قياسيا نحصل على :

$< dN + K_1 dl$

وحيث أن (غطاء أساسى) $g_2 =< R_1, R_2 > 0$

وبإستخدام خواص الضرب القياسي يكون لدينا :

$< dN, dN > +K$

$\therefore < dN, dN$

وبإستخدام تعريف الصيغ الأساسية الأولى والثانية والثالثة وكذلك تعريف الإنحناء الجاوسي والمتوسط نحصل على : $III - 2HII + KI = 0$ وهكذا يكون البرهان .

الفصل الثالث

الإنحناء الجيوديسى

تمهيد:

منحنى الفراغ ثالانحناء ولى يحددان شكله وا إطار محلى متحرك مع المنحنى يسمى إطار فرينيه. ولكن إذا كان المنحنى C واقع على سطح منتظم M . ويوجد انحناء K للمنحنى وانحناء عمودى K_n وهو مركبة متجة الانحناء K في إتجاءالعمودى N على السطح .

ماذا عن مركبة الأخرى للانحناء أي المركبة في إتجاة المستوى العمودي على Nوهو طبعاً المستوبالمماس T_pM ونذكر من أنواع الانحناءات عند نقطة ما على منحنى واقع على سطح منتظم M :ومنها مثلا الانحناء العمودى والانحناءات الأساسية.

ونركز على الإنحناءالاخر الذى هو مركبة متجة الانحناء في المستوى المماس T_pM والذى يسمى الانحناء الجيوديسي . كذلك كانت الإنحناءات الأساسية ترتبط مع منحنيات تسمى خطوط الانحناء أو الاتجاهات الأساسية (الانحنائية) .بطريقة مماثلة توجد منحنيات واقعة على السطح ترتبط بالإنحناء الجيوديسي والتى تسمى الخطوط الجيوديسية أو خطوط اقصر بعد وهى تعميم للخط المستقيم في الفراغ الإقليدي.

(1_3)تعريف الجيوديسي:

الجيوديسيا:هى كلمة يونانية الأصل معناها ذلك العلم الذى يختص بقياس ومراقبة كل من حجم وشكل الارض بالاضافة الى تحديدمواضع النقط على سطح الأرض .وهو ذلك الفرع منعلم المساحة الذى يبحث عن تحديد الشكل الرياضي للكرة الأرضية .

وفي الرياضيات الجيوديسي وخاصة في الهندسة التفاضلية هو تعميم للخط المستقيم ضمن الفضاءات المخفية ,ففي الهندسة الإقليدية فإن الخط المستقيم هو اقصر مسافة بين نقطتين .ولكن على سطح الكرة فإن اقصر مسافة بين نقطتين هو الخط الجيوديسي. يعتمد طول الخط الجيوديسي على طبيعة الفضاء المنحنى فإذا كان الفضاء يراعى المترية النظامية فعندئذ يمكن تعريفة على أنه اقصر خط بين نقطتين على متعدد التفرع .

(2_3)الانحناء الجيوديسي :

نفرض أن C منحنى واقع على السطح المنتظم $M: X = X(u^{\alpha})$ وممثل تمثيل بارامترى طبيعى أى $u^{\alpha} = u^{\alpha}(s)$ حيث s بارامتر طول القوس وبالتالى فإن معادلتة الاتجاهية تكون على الصورة :

المشتقة الثانية للدالة $X(s)$ بالنسبة الى s هي $\ddot{X} = \frac{d^2x}{ds^2} = K_n, . = \frac{d}{ds}$ حيث n العمود الأساسي للمنحنى عند p, k انحناء المنحنى cعند p حيث المتجة $\ddot{X}(s)$ يعنى حقل متجة الانحناء $\underline{K}$ للمنحنى ومعرف على امتداد نقاط السطحM والمقيدة على المنحنى C إذا يمكن كتابتة فى صورة مجموع جزئين إحداهما مماسي والاخر في إتجاه العمودى على السطح وليكن

$$\underline{K} = \ddot{X} = \underline{K}_n + \underline{K}_g:$$

$$\text{or} K_n = \frac{d^2X}{ds^2} = k_n N + K_g n_g$$

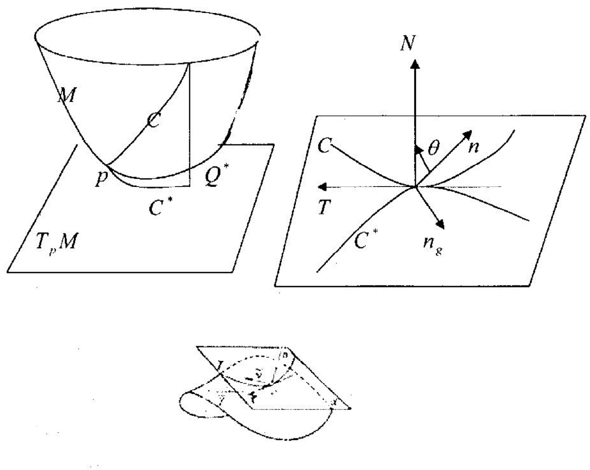
حيث N العمودى على السطح M عند النقطة p و K_g, n_g هى مركبة مماسية عمودية على المنحنى C اى أن K_g, n_g واقعة في المستوى المماسي T_pM اى أن $n_g \epsilon T_pM$ متجة وحده عمودي على N وعمودي على المماس للمنحنى عند P المركبة K_n سبق وأن عرفناها وهى الانحناء العمودى وله علاقة بالصيغة الأساسية الثانية II على السطح M.

تعريف :

المركبة K_g تسمى الانحناء الجيوديسي للمنحنى c على المستوى المماسي T_pM إى أنه اذا كان c^* هو مسقط المنحنى c على المستوى المماسي T_pM وكان K انحناء المنحنى c فإن K_g هو انحناء المسقط c^*. K_n هو انحناء العمودى للمنحنى c فى اتجاه N بحيث تكون صياغته كلاتى :

الانحناء الجيوديسي$\underline{k}_g$للمنحنى c عند النقطة pهو المسقط الاتجاهي لمتجة الانحناء $\underline{k}$ للمنحنى cعندp علي مستوي المماسT_pMعند النقطة P.

الانحناء الجيوديسي يرتبط بالصيغة الأساسية الاولي Iعلي السطح ولكن حسابها ليس بالامر السهل حيث أننا نستخدم رموز كرسيتوفل والمعادلات الأساسية علي السطح .



شكل رقم (3-1)

(3-3) إستخدامات الانحناء الجيوديسي :

علم المساحة التطبيقية أو علم تقسيم الأرض وشكل الأرض ومساحتها أو الجيوديسيا هو علم يبحث في كثير من الموضوعات التى تتصل بحجم الأرض وشكلها وأبعادها وباطنها ومجالها المغنطيسى وحرارة باطنها وأيضاً يهتم بموضوعات تتعلق بدراسة القشرة الأرضية وحركتها .

وتبحث الجيوديسيا في دراسة معلومات خاصة بإجزاء كبيرة من سطح الأرض في الموضوعات التالية:

1. مواقع نقط عديد على سطح الأرض تسمى (نقط المثلثات) لعمل مساحات كبيرة .
2. الرصد الفلكي : لتعين مكان الراصد بالنسبة لسطح الأرض والفرض منه تثبيت مواقع نقط المثلثات .
3. الميزانيات الدقيقة لتعين إرتفاعات النقط فوق سطح البحر .
4. دراسة المد والجزر وقاع البحار.
5. إنشاء الخرائط للدوال والمساحات الشاسعة .
6. التغير في منسوب السطح المتوسط للبحار .
7. تركيب القشرة الأرضية .

(4_3) تطبيقات المساحة الجيوديسيه:

1. تحديد التحركات والأنذلآقات التى تحدث للقشرة الأرضية .
2. إستخراج البترول من الصحاري والمحيطات .

3. تحديد مسارات الأهداف للصواريخ عابرة القارات .
4. الملاحة الجوية والبحرية .
5. المسوحات التى تختص بالزلازل .
6. تشغيل نظام تحديد المواقع.

(5_3)الاطارات المصاحبة لمنحنى علي السطح:

بالنسبة لمنحنى فراغ منتظم وممثل بدلالة بارمتر طول القوس أمكن تكوين إطار فرنينة $[T,n,b]$الان إذا كان المنحنى

$(1,3)C: V \rightarrow X\left(u^1(v), u^2(v)\right)$ وقع علي

السطح$M:X=\left(u^1,u^2\right)$ونفترض أنc ممثل بدلالة بارمتر طول القوس أي أن

بما أن$\frac{dx}{ds}$ متجة وحدة وهو مماس للمنحنى إذا فهو حقل متجة وحدة وليكنT حيث

$T=X_1\dot{u}^1 + X_2\dot{u}^2 (5,3)$

وهو في الحقيقة مماس للمنحنى وكذلك للسطح ولكن n هو العمود الاساس للمنحنى إذا ليس من الضروري ان يكون عمودي علي المستوي المماس T_pMعند Pعلي المنحنى $C: X = X\left(u^\alpha(v)\right)$

إذا لدراسة سلوك الانحناء (أي كيف يتغير)عندما المنحنى Cيتغير سلوكة حول النقطة p

فإن إطار فرينية $\{T,n,b\}$المصاحب للمنحنى Cيكون غير مناسب لأن كل من n,b يتغير مع C بالاضافة الي أن nيكون غير معرف عندما $k = 0$في مثل هذة الحالة يكون من المناسب تكوين إطار مصاحب للمنحنى ومرتبط مع العمودي Nعلي السطحMعند النقطة p هذا الاطار هو $[T,n_g,N]$حيث

$N = \frac{X_{\cdot}}{}$

والمتجة n_gيسمي متجة الجيوديسي العمودي .

- الثلاثي العياري المتعامد$[T,n_g,N]$يحقق$[T,n_g,N]=1$

- n_g هو متجة وحدة عمودي علي المنحنى وواقع في المستوي T_pM عند p أذا باستخدام الإطار $[T, n_g N]$ يمكن كتابة

$$.kn = k_n N + k_g n_g \quad (7,3)$$

حيث $k_n N$ المسقط العمودي للمتجة k_n علي إتجاة العمودي N المركبة $k_g n_g$ هي المسقط العمودي لحقل المتجة k_n (حقل الانحناء للمنحنى)علي المستوي المماس T_pM عند النقطة p.

الان إتجاة المماس لمنحنى ورفع علي السطح يعطي من

$$\frac{dx}{ds} = x_\alpha \dot{u}^\alpha, . \frac{d}{ds} \quad (8,3)$$

$\therefore \frac{d^2x}{ds^2} = x_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta + x_\alpha \ddot{u}^\alpha$ (9,3) وبستخدام معادلات جاوس فينجارتن نجد أن:

$\therefore$ |

$\therefore$ k

أو مايكافئ (من تعريف K_n)

حيث

وبما أن $n_g = N \wedge T$ وبضرب طرفي العلاقة ضربا قياسيا في n_g واستخدام وخواص المحددات نحصل علي

$$+\left(\ddot{u}^2 + \Gamma^2_{\alpha\beta}\dot{u}^\alpha \dot{u}^\beta\right)[X_2, N, X_1\dot{u}^1 + X_2\dot{u}^2]$$

وبما أن:

$[X_1, X_2$

$\therefore k_g = \sqrt{g}$

الانحناء الجيوديسي علي إمتداد منحنى علي سطح هو خاصية ذاتية (داخلية)سطح لأن الصيغة(13,3)تعتمد فقط علي الكميات المترية $g_{\propto\beta}$ من العلاقة (11,3)يمكن الحصول علي صورة أخري للانحناء الجيوديسي k_gوذلك بضرب طرفيها في $n_g = N \times T$ والتي تعطى من خلال حاصل الضرب القياسي حيث:

أو $\left(\underline{k} = \frac{d^2x}{ds^2}\right)$

هذة العلاقة سهلة في التعامل والحساب حيث أنة إذا أعطينا معادلة السطح $x = x(u^1, u^2)$ والدوال $u^1 = u^1(s), u^2 = u^2(s)$ والتى تعرف المنحنى الواقع علي السطح تقوم بحساب $\frac{dx}{ds}, \frac{d^2x}{ds^2}$ وكذالك العمودي علي السطح علي إمتداد نقاط المنحنى c ويعطي من

وبالتعويض في الصيغة (14,3) وحساب حاصل الضرب الثلاثي القياسي أي بإيجاد قيمة المحور الثلاثي.

نفرض ان المنحنى c الواقع علي السطح M معطى من خلال الدوال

حيث v بارمتر عام أي ليس بارمتر طول القوس sفي هذة الحالة يكون $\left(\frac{d\bar{s}}{dv} \neq 0\right)$

$\frac{dx}{ds} = \frac{dx}{dv}\frac{dv}{ds}, \frac{dv}{ds} \neq 0$ وبالتفاضل مرة أخرى بالنسبة الي s

وبالتعويض في(14,3)وأستخدام خواص المحددات يحصل علي

∴

الصيغة (15,3) تعتبر غاية في الاهمية لأنها أكثر عملية من الصيغة (14,3) حيث أنها تتعامل مع بارمتر عام وليس بارمتر طول القوس ولاتحتاج الي التحويل بدلالة بارامترطول القوس.

حقل الأطار $\{T, n_g, N\}$ المعرف علي إمتداد منحنى$C: X = X(u^a(s))$ واقع علي سطح منتظم $M: X = X(u^\alpha)$يسمي إطار داربرو ا يحقق بعض الخواص منها.

،

حيث bهو العمودي الثانوي علي النحنى c ومن هذة العلاقة(بالتربيع والجمع)نحصل علي

(6_3)صيغ داربوا التفاضلية:

بنفس الطريقة التي أتبعناها في الاستنتاج الصيغ التفاضلية لإطار فرينية نقوم الأن بالتوصيل الي صيغ تفاضلية مشابهة لصيغ فرينية ولذلك نرمز لحقل المتجة (T, n_g, N) بالرمز D ليصبح= $\dot{D}$ (T, n_g, N) وبما ان $< T, n_g >= 0$ وبالتفاضل بالنسبة لs نحصل علي

وحيث أن $\dot{n}_g$ حقل متجة علي إمتداد Cفإنة يمكن كتابتة علي الصورة $0\dot{n}_g = a_1(s)T + a_2(s)n_g + a_3(s)N$

$$\therefore \langle k_g n_g + k_g N, n_g\rangle + \langle T, a_1T, a_2n_g + a_3N\rangle = 0$$

وباستخدام خاصية العيارية المتعامدة لعناصر إطار دابرو نحصل علي $k_g + a_1 = 0$

وبالمثل بمفاضلة العلاقة $< T, N > = 0$ بالنسبة ل s مع فرض أ ن $\dot{N} = b_1(s)T + b_2(s)n_g + b_3(s)N$

فإننا نحصل علي $k_n + b_3 = 0$

وبتفاضل العلاقة $\langle N, n_g \rangle$ بالنسبة لs نحصل علي

$$\therefore \langle b_1T + b_2n_g + b_3N, n_g \rangle + \langle N, a_1T + a_2n_g + a_3N \rangle = 0$$

وبأستخدام العلاقات $\langle N, N \rangle = 1$, $\langle n_g, n_g \rangle = 1$ وبالتفاضل بالنسبة ل s نحصل على $a_1 = 0, b_1 = 0$ لأن$\dot{N}$عمودي عليN و $\dot{n}_g$ عمودي علي n_g ل(حقول متجهات وحدة)وبالتالي تكون قد توصلنا الي الصيغ التفاضلية الاتية: (3,4), (2,4), (1,4), (16,3)

تعريف:

الدالة $a_3(s)$ المعرفة في الصيغ التفاضلية (4,4) تسمي اللي الجيوديسي ونرمز لها بالرمز τ_gوالدالة $k_g(s)$ تسمي الانحناء الجيوديسي للمنحنى cالواقع علي السطح .M

الصيغ التفاضلية (14,28) يمكن كتابتها في الشكل المصفوفي

هذة الصيغ متشابهة لصيغ فرينية لمنحنى فراغ حيث منحنى الفراغ كان يتحدد من خلال الانحناء kواللي tبينما لمنحنى واقع علي السطح فإنة يتحدد من خلال ثلاث لامتغيرات invariant هما k_n, T_g, k_g وهذا معناه أن شكل السطح يؤثر في شكل المنحنى c الواقع علية من خلال تغير العمودي N علي السطح علي أمتداد المنحنى .c

من المعادلة المصفوفية (4,5) يتضح أن معدل تغير إطار داربو يعطي من خلال مصفوفة مربعة 3×3 عناصرها دوال في بارامترطول القوس وبالتالي فهي تعتبر مولد متناهى الصغر لكل

الحركات علي أمتداد المنحنى C الواقع علي السطح M عند أي نقطة علية لها البارامتر s وهذا
يقودنا الي تعريف الراسم (التطبيق)التالي:

حيث $So(1,3)$ ترمز لزمرة التحويلات الخطية المتعامدة والمعرفة من خلال مصفوفة داربوا D والتى معدل تغيرها يعطى من المصفوفة $\left(\frac{d}{ds}D\right)D^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & k_g & k_n \\ -k_g & 0 & t_g \\ -k_n & -t_g & 0 \end{bmatrix}$ (4,6).

واضح أنها مصفوفة عكسية (مختلفة) التماثل ناتجة من مشتقة مصفوفة دالية فيs وعمودية ونوضح ذلك في الحالة العامة أي لاي مصفوفة عمودية يتحقق

وبتفاضل الطرفين بالنسبة لـs نحصل علي

$$\therefore \left(\frac{dD}{ds}\right)D' = -D\left(\frac{dD'}{ds}\right) = -D\left(\frac{dD}{ds}\right)' \qquad (4,8)$$

واضح أن المصفوفة $\frac{dD}{ds}D'$ عكسية التماثل.

تعريف:

زمرة التحويلات المتعامدة $So\ (1,3)$بارامتر المعرفة علي المنحنى c الواقع علي السطح Mتعتمد بارامتر واحد هو طول القوس إذا هي زمرة بارامترية أحادية البارامتر

في نهاية هذا الجزء نكون قد توصلنا الي بناء أربع إطارات متحركة علي السطح المنتظم $M: X = X(u^a)$ وهي:

1-إطار جاوس فينجارتن$\{X_1, X_2, N\}$

ومعادلات الحركة لة تعطى من معادلات جاوس فينجاريت.

2-إطار جاوس فينجاريت العياري المتعامد (E_1, E_2, E_3) حيث

$$E_1 = \frac{X_1}{\sqrt{g}}$$

3-إطار فرينية $[T, n, b]$ علي إمتداد منحنى فراغ واقع علي السطح M ومعادلات الحركة لة تعطى من خلال صيغ فرينية.

4-إطار داربوا $D = [T, n_g, N]$ علي إمتداد منحنى فراغ C واقع علي السطح Mومعادلات الحركة لة تعطى من خلال صيغ داربوا التفاضلية.(4,7)

إذا كان اللى جيوديسي $\tau_g = 0$ فإن المنحنى خط إنحنائى حيث يكون في هذة الحالة $T, \frac{dN}{ds}$ مرتبطين خطيا (من تعريف صيغة رودريجز لخطوط الانحناء)

إذا كانت $\theta = \cos t$ فإن $\tau = \tau_g$ لأن $\frac{d\theta}{ds} = 0$

(7_3)المنحينات الجيوديسية (الجيوديسيات):Geodesics

توجد علي السطح M منحينات تعطى أقصر مسافة بين أي نقطيتين علية وهي تعميم لمفهوم أقصر مسافة بين نقطتين (الخط المستقيم) في الفراغ اللاإقليدي إذا الجملة الشائعة هي الخط المستقيم أقصر مسافة بين نقطتين تكون صحيحة بالمرة ولكن الاصح أن نقول أن أقصر مسافة بين نقطتين تكون خاطئة في بعض الأحيان وصحيحة في البعض الأخر.

الخلاصة أن الجملة غير صحيحة بازمرة ولكن الأصح أن نقول أن أقصر مسافة بين نقطتين هي خط جيوديسي أي منحنى لة أقصر طول من بين سائر المنحنيات التى تصل بين نقطتين علي السطح ونوضح ذلك من خلال التعريف التالي.

تعريف:

الخط الجيوديسي أو المنحنى الجيوديسي أو الجيوديسي علي السطح هو أقصر مسار (منحنى) بين نقطتين علي السطح.

تعريف:

يقال ان المنحنى$I \subset \mathbb{R} \to cCM$ الواقع علي السطح M إنة خط جيوديسي إذا كان إنحنائة الجيوديسي منعدم لجميع نقاطة $k_g = 0 \ , \forall s \in I$.

ومن الخصائص الكثيرة التى تتمتع بها الخطوط الجيوديسية مايلي :

نظرية:

حقل متجهة الانحناء $(\underline{k} = k_n)$ عند أي نقطة علي منحنى جيوديسي يكون إمتداد الحقل العمودي Nعلي السطح عند تلك النقطة

البرهان

إذا كان $C: X = X(u^{11}(s))$ منحنى واقع علي السطح $M: X = X(u^{11})$ وممثل بدلالة بارامتر طول القوس S فإن

$$\ddot{X} = \frac{d^2x}{ds^2} = k_n$$

هو حقل متجهة الانحناء والذي يوازي العمود الاساسي n لمنحنى ومن الصيغة (14,3) التى تعطى الانحناء الجيوديسي نجد أنة إمتداد الخط الجيوديسي $(k_g = 0)$ يجب ان يحقق

وهذا معناة أن حقل المماس $\frac{dx}{ds}$ عمودي علي حقل المتجة $\ell(s)$ حيث

أي أن ℓ في إتجاة العمودي علي السطح وعلية يجب أن يكون $\frac{d^2x}{ds^2}$ مرتبط خطيا او في إتجاة عمودي N علي السطح وبذلك نكون قد توصلنا الى برهان النظرية.

نظرية :

إذا تماسا سطحان علي إمتداد منحنى وكان هذا المنحنى خط جيوديسي علي أحدهما فإنة يكون جيوديسي علي الأخر .

الان نحاول إشتقاق المعادلات التفاضلية التى تحدد الخط الجيوديسي علي السطح

المنحنى الجيوديسي (من التعريف) يتحدد من$k_g = 0$ والتي تكافي حلول معادلتين تفاضلتين في أن واحد وهذا يتضح من وضع$k_g = 0$ في (14.16) لنحصل علي

$(\ddot{u}^1 +$

وحيث $\dot{u}^1 \neq 0, \dot{u}^2 \neq 0$ وبالتالي يكون لدينا

(3,

أو مايكافي بالتفصيل

$$\ddot{u}^1 + \Gamma^1_{11}(\dot{u}^1)^2 + \Gamma^1_{22}(\dot{u}^2)^2 + 2\,\Gamma^1_{12}\dot{u}^1\dot{u}^2 = 0$$

$\ddot{u}^2 +$

أو بشكل مختصر

أو مايكافي

$$\frac{d^2}{ds}$$

وعلية نكون قد توصلنا إلي ذلك

نظرية

الخطوط الجيوديسية علي السطح المنتظم $X = X(u^\alpha)$ تتحد من حلول نظام المعادلات التفاضلية (5,5).

الفصل الرابع

تطبيقات علي الانحناء الجيوديسي

تطبيق :(1)

أوجد الانحناء الجيوديسي لمنحنى الحلزون الدائري $u^1 = u^2 = v$ الواقع علي سطح الأسطوانة الدائرية القائمة.

الحل:

بوضع $u^1 = u^2 = v$ في (14,19) فإننا نحصل علي

وهي معادلة الحلزون الدائري الواقع علي أسطوانة دائرية قائمة نصف قطرها الوحدة.

وبحساب المشتقة الأولي والثانية من معادلة منحنى الحلزون نجد أن

d

d

$$\frac{d^2X}{ds^2} = (-\cos v, -$$

الكميات الأساسية الأولي علي سطح الاسطوانة الدائرية القائمة هي:

وكذلك فإن المتجهة الوحدة العمودي Nيعطى من

N

العمودي N علي إمتداد($u^1 = u^2 = v$) يكون

وبالتعويض في الصيغة (15,3)نحصل علي الانحناء الجيوديسي علي الصورة

=

تطبيق(2):

أوجد الانحناء الجيوديسي للمنحنى $u^1 = v^1 , u^2 = v^2$ علي المستوي

الحل:

بالنسبة لسطح المستوي تكون المماسات X_α هي

ومنها نقوم بحساب g_{aB} حيث

وحقل العمودي N يعطى من

N =

واضح أن الحقل Nثابت لانة العمودي علي مستوي المنحنى المعطي هو $x = x(v)$ نحصل علي معادلتة الإتجاهية من معادلة المستوي (وذلك بوضع $u^1 = v^1, u^2 = v^2$)علي الصورة

$$\therefore \frac{dx}{dv}$$

$$\left|\frac{dx}{dv}\right.$$

وبالتعويض في العلاقة (15.3) نحصل علي

$$k_g = \frac{1}{(6 + 12v + \ldots}$$

k

فمثلا عند $v = 0$يكون

تطبيق(3):

بين أن الانحناء الجيوديسي للخط المستقيم علي السطح يساوي صفر

الحل:

بإستخدام المعادلة

$$k^2 = k^2{}_n + k^2{}_g$$

حيث k=0 للخط المستقيم ومنها نحصل علي $k_g = 0, k_s = 0$

تطبيق(4):

إستخدام صيغ داربوا التفاضلية لحساب اللى ُ جيوديسيτ_g

الحل :

المعادلة الثالثة في (16,4) لها الصورة

بضرب طرفي المعادلة إتجاهيا في T من اليسار نحصل علي $(T \wedge T = 0)$

وبضرب طرفي المعادلة في N قياسيا من اليمين نحصل علي :

ومن تعريف n_g في (14,9)وا إستخدام المتطابقة التالية:

نحصل علي $([T, n_g, N] = 1)$

حيث [, ,] تعني حاصل الضرب الثلاثي القياسي وهي الصيغة الصريحة لحساب اللى جيوديسي بينما الانحناء الجيوديسي بينما الانحناء الجيوديسي k_g يعطي من(15,3) بإستخدام العلاقات (16,3) ,(17,3) وتفاضل العلاقة

بالنسبة لs نحصل علي

وباستخدام صيغ فرينية بالنسبة ل $\dot{n}$ وصيغ داربوا بالنسبة ل $\dot{N}$ نحصل

وبما أن $< b, N > = < n, n_g > = \sin\theta$

(bالعمود الثانوي علي المنحنى) $\therefore \tau\sin\theta - \tau\sin\theta = -\sin\theta\frac{d\theta}{ds}$

أهمية هذة العلاقة تتضح من أنها تربط اللى للمنحنى واللى جيوديسي τ_g ومعدل تغير الزاوية بين الغمودي علي السطح والعمودي الاساسي علي المنحنى

تطبيق(5):

أثبت أن الخطوط الجيوديسية في المستوي هي الخطوط المستقيمة

الحل:

علي المستوي كما راينا سابقا فإن رموز كريستوفر $\Gamma^{\gamma}_{\alpha\beta} = 0$ تطابقيا عند جميع نقاط المستوي

وبالتالي فإن المعادلات التفاضلية (25,4) تؤول الي

وبتكامل مرتين بالنسبة sنحصل علي

بمعنى

$u^1 = a^1 s + b^1 \quad , u^2 = a^2 s + b^2$ وبالتعويض في معادلة المستوى

$X(u^1, u^2) =$

نحصل على

$X(s) =$

حيث $\ell_3(s), \ell_2(s), \ell_1(s)$ دوال خطية في S إذا $X(s)$ تمثل خط مستقيم واقع على المستوى .

الفصل الخامس

النتائج والتوصيات

(1_5)النتائج:

1. الخطوط الجيوديسية على السطح المنتظم تتحد من حلول نظام المعادلات التفاضلية .
2. الخطوط الجيوديسية في المستوى هى الخطوط المستقيمة .
3. الإنحناء الجيوديسي للخط المستقيم على السطح يساوى صفر.

(2_5)التوصيات :

1. توفير الكتب اللازمه المحتوية للإنحناء الجيوديسي .
2. ترجمة الكتب التى تتحدث عن الإنحناء الجيوديسي .
3. تعميم ودراسة المساحات الشاسعة على سطح الأرض ودراسة الخرائط .
4. دراسة الإنحناء الجيوديسي لطلاب المعاهد العليا والجامعات .

(3_5)المصادر والمراجع:

1. د/ محمد فريد يوسف ، 1938م ،الجيوديسيا الهندسية ،كلية الهندسة –جامعة الإسكندرية.
2. د/ عبد الشافي فهمى عباده ، د/ حسن مصطفى العويضي ، د/حمد طلعت عبد الناصر ، 1421هـ _2001م ،أسس علم الرياضيات (التفاضل والتكامل) ،الطبعة الأولى .
3. د/ إبراهيم ديب سرمينى ،حسلب التفاضل والهندسة التحليلية ،رقم الايداع 22/2652.
4. د/ نصار حسن عبدالعال السلمي ،1429هـ_2008م ،الهندسة التفاضلية ، مكتبة الرشد .
5. د/ عاصم ضيف ،حساب التفاضل والتكامل ،الطبعة الخامسة ، رقم الإيداع 2001/7264.
6. د/ على شكرى ،المساحة الجيوديسية ،رقم التصنيف 526.3.