جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا

كلية التربية

قسم العلوم – شعبة الرياضيات

بحث تكميلي لنيل درجة البكالريوس شرف التربية في الرياضيات

بعنوان :

الأنظمة الخطية و بعض حلولها

The linear systems and some of it's solutions

إعداد :

أيه محمد يحي الحسين

إعتدال علي مضـــــوي

أميمه طه الســـــراج

صفاء علي التجـــاني

إشراف :

أ : أبوذر حسين علي

2018 م

بسم الله الرحمن الرحيم

الآيـــــة

قَالَ تَعَالَىٰ:

﴿ هُوَ ٱلَّذِى جَعَلَ ٱلشَّمْسَ ضِيَآءً وَٱلْقَمَرَ نُورًا وَقَدَّرَهُۥ مَنَازِلَ لِتَعْلَمُوا۟
عَدَدَ ٱلسِّنِينَ وَٱلْحِسَابَ ۚ مَا خَلَقَ ٱللَّهُ ذَٰلِكَ إِلَّا بِٱلْحَقِّ ۚ يُفَصِّلُ ٱلْـَٔايَـٰتِ
لِقَوْمٍ يَعْلَمُونَ ﴿٥﴾ ﴾

صدق الله العظيم

يونس: ٥

الإهداء

الهي لا يطيب لي إلا شكرك ولا يطيب النهار إلي الا بطاعتك ولا تطيب اللحظات إلا بذكرك

إلي من بلغ الرسالة وادي الأمانة ونصح الامة إلي نبي الرحمن ونور العالمين

(سيدنا محمد صلي الله عليه وسلم)

إلي من كلله الله بالهيبة والوقار إلي من علمني العطاء بدون انتظار إلي من احمل أسمه بكل إفتخار

(والدي العزيز)

إلي ملاكي في الحياة إلي معنى الحب والحنان والتفاني إلي بسمة الحياة وسر الوجود

إلي من عرفت معهن معني الحياة

(امي الحبيبة)

إلي رفقاء دربي وتوم روحي وأصحاب القلوب الطيبة والنوايا الصادقة

(إخوتي)

إلي من انسوني في دراستي وشاركوني في هذا البحث

(زميلاتي الطالبات)

الآن تفتح الشرعة وترفع المرساة لتنطلق السفينة في عرض بحر واسع مظلم لا يضيء إلا قنديل ذكريات الاخوة البعيدة إلي من أحببتهم وأحبوني

(اصدقائي)

الي من كسروا حواجز قلمي واليكلمنعلموني حرفافيمسيرتي التعليمية

(المعلمين الاجلاء)

الشكر والتقدير

الحمد لله الذي خلق الكون من عدم وأوجد ما فيه من نعم ، والصلاه علي النبي محمد معلم الأمم وبعد .

نحمد الله أولا حمدا كثيرا علي أن وفقنا وأتم جهد هذا البحث .

للنجاح أناس يقدرون معناه وللإبداع أناس يحصدونه ،لذا نقدر جهودكم المضنية فوجب علينا ثنائكم وشكركم ؛ فكان وراء هذا البحث أناس عملوا بجهد وصدق ومنحونا كل مايستطيعون من علم وكان من الواجب شكرهم وتقديرهم وكان علي رأسهم الأستاذ أبوذرحسين علي حيث كان طيلة فترة البحث يساعدنا ويرشدنا وقدم لنا كل ما بوسعه حتي خرج البحث في صورتة الحالية ونخص بالشكر صديقاتي رفيقات الحياة وفي مقدمتهم زميلاتي في البحث فقد بذلن قصاري جهدهن

كما نشكر جامعة السودان ونحص بالشكر اسرة المكتبة والأساتذة

وأخيرا نشكر كل من ساهم وشارك وأبدى الراي والنصح والمشورة والنقد لنا حتى يخرج في هذه الصورة.

المستخلص

الرياضيات علم متعدد الفروع ، متسع المداخل ، اخترنا منه علم الجبر الخطي وفيه تحدثنا عن أنظمة المعادلات الخطية ، حيث كانت البداية تلم ببعض ما هو متعلق بها من مواضيع ومفاهيم توجد داخل هذه الأنظمة وبعضها تم التعرف عليها بصوره عامة وأخذنا أمثلة عليها .

ثم جاء بعد ذلك توضيح بعض طرق حل الأنظمة بشئ من التفصيل وأخيراً تحدثنا عن المفهوم الهندسي لأنظمة المعادلات الخطية .

Abstract

The mathematics is a science of multiple branches , wide, we chose the linesr algebra , in it was mention the linear system.

When the initiation wes inclining towards it's the belonging of subjects and understandings that wide in sutch a system , and some of them gad been generaly acknowledged , and we toke examples for them.

There after we examples some methods systems of solving inbrief aand the required details , finally we taike about the engineering concept to the linear engineering systems

فهرس الموضوعات

الفصل الأول

مقدمة في الجبر الخطي

(1−1) مقدمة :

الجبر الخطي هو فرع من الرياضيات يهتم بدراسة الفضاءات المتجهية والتحويلات الخطية و النظم الخطية .

تشكل الفضاءات المتجهية موضوعاً مركزياً في الرياضيات الحديثة لذا يستعمل الجبر الخطي كثيراً في كلا من الجبر المجرد والتحليل الدالي. للجبر الخطي أيضا أهمية في الهندسة التحليلية كما إن له تطبيقات شاملة في العلوم الطبيعية والعلوم الإجتماعية. وهذا الأمر الذي جذبنا لاختيار حل الأنظمة الخطية بالطرق العادية التي تعرفنا عليها أثناء الدراسة (طريقة جاوس ، جاوس – جوردان ، كرامر) بالإضافة الى طريقة كراوتتشوتسكي التى تعد من أسهل الطرق وأكثر دقة في حل الأنظمة الخطية.

ماهي المعادلة الخطية؟

هي معادلة جبرية من الدرجة واحد علي سبيل المثال $4x + 5 = 0$ هي معادلة لمتغير واحد

, $x + y + 5z = 0$ هي معادلة من ثلاثه متغيرات وبشكل عام

$$a_n x_0 + a_{n-1} x_1 + \cdots + a_0 x_n = 0$$

حيث $a_n, a_{n-1}, \dots, a_0$ هي ثوابت و $x_n, x_{n-1}, \dots, x_0$ هي متغيرات المعادلة.

ماهي المعادلة الغير خطية؟

هي معادلة جبرية من الدرجة الثانية أو أعلي (وقد ثبت أنه لاتوجد طريقة تحليليه لحل المعادلة غيرخطية من الدرجة خمسة وهذا صحيح من درجة أعلى ايضا)

ماهوالفرق بين المعادلة الخطية والمعادلة غيرالخطية؟

المعادلة الخطية هي معادلة جبرية من الدرجة الأولى ولكن المعادلة غيرالخطية هي معادلة جبرية من الدرجة الثانية أو أعلي.

علي الرغم من أن أي معادلة خطية قابله للحل من الناحية التحليلية فإنة ليس هو الحال في المعادلات غير الخطية.

(2−1) فضاء المتجهات:

تعريف فضاء المتجهات :

نقول ان المجموعه E فضاء متجهات عليRإذا حقق مايلي :

1. خاصية الإغلاق لعملية الجمع اذا كان $u, v \in E$ فان $u + v \in E$.
2. الخاصية التجميعية لعملية الجمع اذا كان $u, v, w \in E$ فان

   $u + (v + w) = (u + v) + w$.
3. خاصية المحايد الجمعي يوجد عنصر $0 \in E$ يسمي المحايد الجمعي بحيث

   $$u + 0 = 0 + u = u \quad , \forall u \in E$$
4. لكل $u \in E$ يوجد عنصر يرمز لة بالرمز $-u$ ويسمي نظير u الجمعي ويحقق

   $$u + (-u) = (-u) + u = 0$$
5. الخاصية الإبدالية للجمع اذا كان $u, v \in E$ فان $u + v = v + u$
6. خاصية الإغلاق لعملية الضرب بعدد اذا كان $u \in E$ و $\propto \in R$ فان $\propto u \in E$.

8. إذا كان $u, v \in E$ و$\propto \in R$ فان $\propto (u + v) = \propto u + \propto v$.
9. إذا كان $\propto, \beta \in R, u \in E$ فان $(\propto + \beta)u = \propto u + \beta u$.
10. إذا كان $u \in E$ و$\beta \in R$ و$\propto$ فان

   $(\propto \beta)u = \propto (\beta u)$
11. إذا كان $u \in E$ فان$I\, u = u$.

أمثلة:

R^n فضاء متجهات

مجموعة كثيرات الحدود $\rho_n = R\ [x]$ هو فضاء متجهات

كذلك مجموعة كثيرات الحدود بدرجة أقل أو يساوي $\rho_n = R_n[x]$

(3_1) الفضاءات الجزئية:

تعريف الفضاءات الجزئية:

ليكن v فضاء متجهات و f مجموعة جزئية من v نقول ان f هي فضاء جزئي من v اذا كان f هو فضاء متجهات وذلك بنفس العمليات علي v

مبرهنه :

ليكن v فضاء متجهات و f مجموعة جزئية من v

F هي فضاء جزئي من v

إذا تحققت الشروط التالية :

$0 \in f$

$u, v \in f$ فان $u + v \in f$

إذا كان $\propto \in R, u \in f$ فان $\propto u \in f$

أمثلة:

ليكن $\left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 2a - b \end{pmatrix} : a, b \in R \right\}$ = F.F هي فضاء جزئي من $v = M_2(R)$

لتكن $A \in M_{m.n}(R^n)$ مصفوفة وليكن $\{ F.F = x \in R^n, Ax = 0\}$ هي فضاء جزئي من $v = R^n$

(F هو مجموعة حلول النظام المتجانس $AX = 0$)

المجموعة$f=\{(x,x+1) : x \in R\}$ ليست فضاءا جزئيا من R^2

(4_1) الإستقلال الخطي:

تعريف الإستقلال الخطي :

ليكن الفضاء الخطي منشأ بواسطة فئة المتجهات $s=[v_1, v_2, v_3, \dots v_r]$

إذا كان كل متجة من Vهو تركيبة خطية من $v_1 \ , v_2, v_3 \ \dots . v_r$

الفئات المنشئة مفيده في بعض النوعيات من المسائل حيث أنة أحيانا يمكن دراسة فضاء خطي Vبدراسة المتجهات في فئة منشئة أولا ، ثم تعميم النتائج إلي بقية V . لذلك من المرغوب فية الإبقاء علي الفئات المنشئة S صغيره قدر إستطاعتنا وتعتمد مسألة إيجاد الفئة المنشئة الأصغر لفضاء خطي علي فكره الاستقلال الخطي وهي :

$$s = [v_1 + v_2 \ldots v_r]$$

فئة من المتجهات فإن معادلة المتجهات

$$k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_rv_r = 0$$

لها علي ألاقل حل واحد

$$k_1 \; = 0 , k_2 = 0 , k_3 = 0$$

إذا كان هذا هو الحل الوحيد الحل الوحيد فإن S تسمي فئة مستقلة خطياواذا كانت هنالك حلول اخري فإن S تسمي فئة غير مستقلة خطيا

مثال:-

فئة المتجهات $S = [v_1, v_2, v_3]$

حيث

$$v_1 = (2 , -1, 0 ,3) , v_2 = (1 , 2 , 5 , -1), v_3 = (7 , -1 , 5, 8)$$

غير مستقلة خطيا ..حيث أن $3v_1 + v_2 - v_3 = 0$

مثال:

كثيرات الحدود

$$p_1 = 1 - x \quad p_2 = 5 + 3x - 2x^2 p_3 = 1 + 3x - x^2$$

الحل:

تكون فئة غير مستقلة خطيا في p_2 حيث أن

$$3p_1 - p_2 + 2p_3 = 0$$

مثال:

إعتبر المتجهات $i = (1,0,0)$ $j = (0,1,0)$ $k = (0,0,1)$

الحل:

من R_3 بدلالة المركبات فإن معادلة المتجهات

$$k_1 i + k_2 j + k_3 w = 0$$

تصبح

$$k_1(1,0,0) + \; k_2(0,1,0) + k_3(0,0,1) = (0,0,0)$$

أوبصورة متكافئة

$$(k_1, K_2, k_3) = (0,0,0)$$

$k_1 = 0 , k_2 = 0, k_3 = 0$ إذن الفئة $s = \{i , j , k\}$ مستقلة خطيا ويمكن إستخدام برهان مماثل لإثبات أن المتجهات

$$e_1 = (1,0,0, \dots .0) \ , e_2 = (0,1,0, \dots 0) \ , e_n = (0,0,0, \dots .1)$$

تكون فئة مستقلة خطيا في R^n

مثال:

أما إذا كانت المتجهات $v_1 = (1,-2,3) v_2 = (5,6,-1) v_3 = (3,2,1)$

هل تكون فئة مستقلة خطيا أم فئة غيرمستقلة خطيا

الحل:

بدلاله المركبات فأن معادلة المتجهات

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 = 0$$

تصبح

$$k_1(1,-2,3) + k_2(5,6,-1) + k_3(3,2,1) = (0,0,0)$$

(5_1) الإرتباط الخطي :

تعريف الإرتباط الخطي :

ليكن v فراغا متجها علي المجال k نقول عن المتجهات$v_n \dots v_m \in v$ إنها مرتبطة خطيا علي k وإختصارا أنها مرتبطة إذا وجدت أعداد $a_1 \dots a_m \in k$ ليست كلها أصفار بحيث

$$(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \cdots + a_m v_m) = 0 \ \rightarrow (*)$$

وألا نقول إن المتجهات خطيا علي k أو إختصارا أنها مستقلة

لاحظ ان العلامة (*) تصح دوما إذا كانت الأعداد a_i أصفارا جميعها وإذا تحققت هذه العلاقة في هذه الحاله فقط أي إذا اقتضت المساواه

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 \dots + a_m v_m = 0$$

أن يكون $a_1 = 0, \dots a_m = 0$

كانت المتجهات مستقلة خطيا وبالمقابل فإذا تحقق العلاقة (*) كذلك عندما يكون واحد من الاعداد a_i مغايرا للصفر فان المتجهات مرتبطة خطيا

لاحظ أنه إذا كان o أحد المتجهات $v_1, \ldots, v_m$ وليكن مثلا $v_1 = 0$ فلا بد أن تكون المتجهات مرتبطة ب(o) وذلك أن

$$lv_1 + ov_2 + \ldots + ov_m$$

معامل v_1 صفرا وبالمقابل فان أي متجة غير صفري v هو مستقل بذاته ذلك أن

$$kv = 0 , r \neq 0$$

يقتضي أن يكون $k = 0$

مثال :

المتجهات

$$u = (1 , -1 , 0), v = (1 , 3 , -1), w = (5,3,-2)$$

مرتبطة لأن $3u + 2v - w = 0$

$$3(1 , -1 , 0) + 2(1 , 3 , -1) - (5 , 3 , -2) = (0 , 0 , 0)$$

مثال :

المتجهات $v = (0 , 5 , -3,1)$ $u = (6 , 2 , 3 , 4)$, $w = (0 , 0 , 7 , 2)$,

تكتب مستقلة $xu + yv + zw = 0$ حيث x, y, z أعداد مجهولة فيكون عندئذ

$$x(6 , 2 , 8 , 4) + y(0 ,5 , -3 , 1) + z(0 , 0 ,7 , -2) = (0,0,0,0)$$
$$= (6x , -2x + 5y , 8x + 3y + 7z , ux + y - 2z)$$

وبالتالي نجد بمساواة المركبات المتناظرة

$$6x = 0 \rightarrow (1)$$
$$2x + 5y = 0 \rightarrow (2)$$
$$3x - 3y - 2z = 0 \rightarrow (3)$$

المعادلة الاولي تعطي:

$x = 0$ بوضع $u = 0$ في المعادل الثانية نحصل علي $y = 0$ وإذا عوضنا في المعادلة في المعادلة الثالثة $y = 0$ نجد $z = 0$ وهكذا فان $xu + xv + zw = 0$ تقتضي

$x = 0 , y = 0 , z = 0$ وبالتالي u , v , w فإن مستقلة

لاحظ أن المتجهات تكون مصفوفة بالشكل المدرج

$$\begin{pmatrix} 6 & 2 & 8 & 1 \\ 0 & 5 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 7 & -2 \end{pmatrix}$$

نظرية:

الصفوف غير الصفرية في المصفوفة المدرجة مستقلة خطيا أي أن مفهوم الإرتباط في حالة أكثر من متجة واحد يمكن أن نجد لة التعريف الكافئ التالي:

تكون المتجهات $v_1 , \ldots v\, m$ مرتبطة خطيا إذا وفقط إذا كان أحدها تركيب خطي للمتجهات الأخري

لاثبات ذلك نفرض أن v_1 مثلا تركيب خطي للمتجهات الأخري

فإذا $v_1 = a_1 v_1 + \cdots + a_{i-1} v_{i-1} + a_{i+1} v_{i+1} + \cdots + a_m v_m$ أضفنا v_1 لطرفي المعادلة وجدنا

$$a_1 v_1 + \cdots + a_{i-1} v_{i-1} - \cdots + a_{i+1} v_{i+1} + \cdots + a_m v_m$$

حيث معامل v_1 ليس صفرا وبالتالي فإن المتجهات مرتبطة خطيا و بالعكس لنفرض أن المتجهات مرتبطة خطيا مثلا

$$b_1 v_1 + \ \ldots + b_j v_j \ + \ b_m v_m = 0$$

حيث $b_j \neq 0$ فيكون عند ئذ .

$$v_1 = -b_{j^{-1}} b_1 v_1 - \cdots - b^{-1} b_{j-1} v_{j-1} - \ b^{-1}{}_j b_{j+1} \ b_{j+1} - \cdots b^{-1}{}_j b_m \ \ v_m$$

وبالتالي فإن vi هو تركيب خطي للمتجهات الأخري سنقدم الأن تعبيرا اقوي من التعبير السابق وهذه نتيجة كثير من النتائج الهامة

فرضية :-

تكون المتجهات غيرالصفرية $v_1, \ldots , v_m$ مرتبطة خطيا إذا كان أحدها وليكن v_i مثلا تركيبا خطيا المتجهات السابقة

$$v_i = k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_{i-1} v_{i-1}$$

***ملاحظات :**

يقال الفئة $[v_1, \dots, v_m]$ إنها مرتبطة إو مستقلة إذا كانت المتجهات $v_1, \dots, v_m$ مرتبطة أو مستقلة علي الترتيب كذلك فأننا نصطلح علي إعتبار الفئه الخاليه $\emptyset$ مستقله

إذا كان إثنان من المتجهات $v_1, \dots, v_m$ متساويين كأن يكون $v_1 = v_2$ فان المتجهات مرتبطة ذلك إن

$$v_1 - v_2 + 0v_3 + \dots + 0\, v_m = 0$$

وإن معامل v_1 ليس صفريا

يكون المتجهات v_1, v_2 مرتبطين إذا وفقط إذا كان أحدهما ضاعف للاخر

كل فئة تحوي فئة جزئية مرتبطة هي نفسها مرتبطة وبالتالي فإن أي فئة جزئية من فئة مستقلة لا بد أن تكون مستقلة

إذا كانت الفئة $[v_1, \dots, v_m]$ مستقلة فإن الفئة الناشئة من تبديل ترتيب العناصر

$[v_{i1}, v_{i2}, \dots v_{im}]$ مستقلة كذلك

يمكن وصف إرتباط المتجهات هندسيا في الفراغ الحقيقي R^3 علي النحو التالي :

يكون أي متجهين u, v مرتبطين إذا وقعا علي مستقيمين واحد مار بنقطه الاصل كما تكون الثلاث متجهات

u, v, w اذا وقعت في مستوي واحد مار بنقطه الاصل

(6_1) الأساس والبعد :

تعريف الاساس:

إذا كان V أي فضاءخطي $s = [v_1, v_2, \dots v_r]$

فئه منهجية من المتجهات في V فان S تسمى باساس الفضاء Vإذاكان

1- مستقلة خطيا

2- تنشئ V

مثال:

إعتبر

$$e_1 = (1,0,0,\dots,0)e_2 = (0,1,0,\dots 0)e_n(0,0,0,\dots,1)$$

أثبت أن

$$s = [e_1, e_2, \dots, e_n]$$

فئة مستقلة خطية في R^n حيث أنأي متجة $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ في R^n

يمكن كتابتة علي الصورة $v = e_1v_1 + e_2v_2 + \cdots + e_nv_n$

فان S تنشئ R^n وكذلك تكون أساسا وتسمي بالاساس المعتاد للفضاء R^n

مثال:-

إذا كان $m_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},\ m_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, m_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, m_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

الفئة$[m_1, m_2, m_3, m_4] = s$ تكون أساسا $m_{2\times2}$للمصفوفات من النوع 2×2 لإثبات أن S

تنشئ m_{22} لاحظ ان المتجة النموذجي $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ يمكن كتابتة علي الصوره

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$
$$= Am_1 + Bm_2 + cm_3 + Dm_4$$

لإثبات إن S مستقلة خطيا نفرض أن

$$am_1 + bm_2 + cm_3 + dm_4 = 0$$

$$a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ومنها $a = b = c = d = 0$

وعلية تكون s مستقلة خطيا.

مثال:

إذا كانت $s = [v_1, v_2, .., v_r]$ مجموعة مستقلة خطيا في فضاء خطي فإن V تكون أساس الفضاء الجزئي $\ln(s)$ فانS تنشئ $\ln(s)$ اي فضاء خطي غير صفري V يسمي فضاء ذا بعد خطي متصل إذا كان يحتوي فئة معينة من المتجهات

التي تكون اساسا إذا لم توجد مثل هذه الفئة فان V يسمي بفضاء ذي بعد لا نهائي بالإضافة إلي ذلك سوف نعتبر الفضاء الخطي الصفري لفضاء منتهي الأبعاد علي الرغم من أنه لايوجد له أي فئه مستقلة خطيا ومن ثم ليس له أي اساس

تعريف البعد :

نقول من فراغ متجة v أنه ذو بعد نهائي أو أنه من البعد n ونكتب $\dim v = n$

إذا وجدت متجهات مستقلة خطيا $e_1, e_2, \dots e_n$

تولد v فنسمي عندئذ المتتابعات $[e_1, e_2, \dots, e_n]$ أساسا v من الممكن تحديد هذا التعريف جيدا من خلال النظرية التالية :

إن بعض النتائج الاساسية المبرهنة في هذا الفصل هي :

إن بعد فراغ متجة معرف تماما

إذا كان بعد v هو n علي k فان v متماثل الشكل لk

يكون لمجموعة المعادلات الخطية حل إذا وفقط إذا كان لمصفوفه المعادلات والمصفوفة المتوسطة الرتبة نفسها.

نظرية :

ليكنv فراغا متجها ذا بعد نهائي عندئذ يكون لكل أساس لv العدد نفسة من العناصر نصطلح علي إعتبار ان الفراغ المتجة $\{0\}$ ذو بعد صفر (هذا يتفق مع التعريف السابق ذلك أنه بالتعريف المتجهات مستغلة وتولد $\{0\}$ وعندما لا يكون الفراغ المتجة ذا بعد نهائي فإننا نقول أنه ذو بعد لا نهائي)

مثال:

أن المتجهات الاربعة في R^4 مستقلة خطيا لأنها تشكل مصفوفة مدرجة وفضلا من ذلك بما أن $\dim x^4 = 4$ فان هذه المتجهات تشكل اساسا R^4

$$(1,1,1,1), (0,1,1,1), (0,0,1,1), (0,0,0,1)$$

مستقلة خطيا لأنها تشكل مصفوفة مدرجة .

بما أن $\dim x^4 = 4$

فإن هذه المتجهات تشكل اساسا لR^4

(7_1)التراكيب الخطية :

تعريف التركيب الخطي :

يدعي المتجة u تركيب خطي من المتجهات $v_1 , v_2, \dots v_r$ إذا كان ممكن كتابتة بالشكل

$$u = k_1v_1 + k_2v_2 + \cdots + k_rv_r$$

حيث k_1, k_2 , k_r: اعداد ثابتة

إذاكان لدينا$v = (1,-2,5)$ متجة فأكتبة علي شكل تركيب خطي للمتجهات

$$e_1(1,1,1) = e_2(1,2,3) = e_3(2,-1,1)$$

الحل:

نود التعبير عن v بالشكل $e = xe_1 + ye_2 + ze_3$ حيث x , y , z اعداد مجهولة حتي الأن

وهكذا فإننا نطلب أن يكون:

$$\begin{aligned}(1,-2,3) &= x(1,1,1) + y(1,2,3) + z(2,-1,1)\\ &= (x,x,x) + (y,2y,3y) + (2z,-z,z)\\ &= (x+y+2z, x+2y-z, x+3y+z)\end{aligned}$$

تكون المجموعة المكافئة من المعادلات بأن نصنع المركبات المتناظره مساوية إحدهما للأخري ومن ثم نختصرها إلي الصيغة المدرجة

$$\begin{array}{ccc} x+y+2z=1 & x+y+2z=1 & x+y+2z=1 \\ x+2y-z=-2 & y-3z=-3 & y-3z=-3 \\ 58=10 & 2y-z=4 & x+3y+8=5 \end{array}$$

لاحظ أن المجموعة السابقة متوائمة ,بالتالي فلها حل وبحلها نجد المجاهيل علي النحوالتالي :

$$v = -6e_1 + 3e_2 + 2e_3$$

$$x = -6, y = 3, z = 2 \therefore$$

مثال :

أكتب المتجة $v = (2, -5, 3)$ من R^3 كتركيب خطي للمتجهات

$$e_1 = (1, -3, 2), e_2 = (2, -4, -1), e_3 = (1, -5, 7)$$

الحل :

لنكتب v علي شكل تركيب خطي للمتجهات e_i باستخدام المجاهيل x, y, z أي $v = xe_1 + ye_2 + ze_3$

$$(2, -5, 3) = x(1, -3, 2) + y(2, -4, -1) + z(1, -5, 7)$$
$$= (x + 2y + z\, , -3x - 4y - 5z\, , 2x - y + 7z)$$

تكون المجموعة المكافئة من المعادلات ثم نختصرها إلي الصيغة المدرجة :

$$x + 2y + z = 2$$
$$2y - 2z = 12$$
$$-5y + 5z = -1$$

أو

$$x + 2y + z = 2$$
$$-3x - 4y - 5z = -5$$
$$2x - y + 7z = 3$$

أو

$$Z + 2y + z = 2$$
$$2y - 2z = 1$$
$$0 = 3$$

ليس لها حل وبالتالي فلأ يمكن كتابة v علي شكل تركيب خطي للمتجهات e_1, e_2, e_3

مثال :-

*ماهي القيمه الواجب إعطائها ل k كي يغدو المتجة($u = (1, -2, k)$, من R^3 تركيبا خطيا للمتجهين :

$$v = (3, 0, -2), w = (2, -1, -5)$$

الحل :

اذا كتبنا$u = xv + yw$ فاننا نجد :

$$(1\ ,-2\ ,k\ ) = x\ (3\ ,0\ ,-2\ ) + y\ (2\ ,-1\ ,-5\ ) =$$
$$(3x + 2y, -2x - 5y)$$

تتكون المجموعة المكافئة من المعادلات :

$$3x + 2y = 1\ ,\qquad -y = -2\ \ ,-2x - 5y = k$$

نجد من المعادلتين الاولتين $x = -1\ ,y = 2$ وبالتعويض في المعادلة الاخيره نجد $k = -8$

*اكتب كثيره الحدود$v = t^2 + 4t - 3$علي R كتركيب خطي لكثيرات الحدود :

$$e_1 = t^2 - 2t + 5\ \ ,\qquad e_2 = 2t^2 - 3t\ ,\qquad e_3 = t + 3$$

الحل :

لنضعv كتركيب خطي ل e_i باستخدام المجاهيل

$$x\ ,y\ ,z$$
$$v = xe_1 + ye_2 + 3e_3$$
$$t^2 + 4t - 3t = x(t^2 - 2t + 5) + y(2t^2 - 3t) + z(t + 3)$$
$$= xt^2 - 2xt + 5x + 2yt^2 - 3yt - 3yt + zt + 38$$
$$= (x + 2y)t^2 + (-2x - 3y + z)t + (5x + 3t)$$

تساوي بين معاملات القوي المتساويه ل t ثم نختصر إلي الصيغة المدرجة

$$x + 2y = 1$$
$$-2x + 3y + 2 = 4$$
$$5x + 38 = -3$$

أو

$$x + 2y = 1$$
$$y + z = 6$$
$$-10y + 3z = -8$$

أو

$$x + 2y = 1$$
$$y + z = 6$$
$$13z = 52$$

نلاحظ أن المجموعة متوائمة وبالتالي فلها حل .

بالنسبة للمجاهيل نحصل علي $x = -3\ ,y = 2\ ,z = 4$ أي ان

$$v - 3e_1 + 2e_2 + 4\ e_3$$

مثال :

*اكتب المصفوفة $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ = e علي شكل تركيب خطي للمصفوفا ت $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$= C ,

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

الحل :

لنكتب Eعلي شكل تركيب خطي ل A,B ,C بإستخدام المجاهيل x ,y ,z

$$E = xA + yB + zC$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + z\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x & x \\ x & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y & y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2z \\ 0 & -z \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} x & x + 2y \\ x + y & y - z \end{pmatrix}$$

تكون المجموعة المكافئة من المعادلات بمساواه العناصر المتناظره :

$$x = 3 , \qquad x + y = 1 , \qquad x + 2z = 1 , y - z = 1$$

لنعوض $x = 3$ في المعادلتين الثانية والثالثة فنحصل علي $x = -2 , z = -1$ وبما أن هذه القيم تحقق أيضا المعادلة الأخيره فإنها تشكل حلا للمجموعة لذا فإنها تشكل حل للمجموعة

لذا فإن $E = 3A - 2A - 2B - C$

لنفترض أن uتركيب خطي للمتجهات $v_1, \dots , v_m$وأن كلا من v_i تركيب خطي للمتجهات

$$v_1, \dots , v_n$$

$$v_i = b_{i1}w_1 + b_{i2}w_2 + \cdots + b_{i3}w_n$$

$u = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_mv_m$ بين ان n هو أيضا تركيب خطي ل w_i وهكذا فإذا كان

$$L(s) = L(t)$$

الحل :

$$u = a_1v_1 + a_2v_2 + \cdots + a_mv_m$$
$$= a_1(b_{11}w_1 + \cdots + b_{1n}w_n) + a_2(b_{21}w_1 + \cdots + b_{2n}w_n)$$
$$+ a_m(b_{m1}w_1 + \cdots + b_{mn}w_n)$$

$$= (a_1b_{11} + a_2b_{21} + \cdots + a_mb_{m1})\, w_1 + \cdots + (a_1b_{1n} + a_2b_{2n} + \cdots + a_mb_{mn})$$

أو ببساطة

$$u = \sum_{i=1}^{m} a_i v_i = \sum_{i=1}^{m} a_i (\sum_{j=1}^{n} b_{ij} w_j) = (\sum_{j=1}^{n} a_i\, b_{ij}) w_j$$

(8_1)التحويلات الخطيه :-

إذا كان v, wفضاين خطيين وكانت f داله بحيث أنه متجها وحيدا من wلكل من vنقول أنf ترسم v إلي w تكتب $f : v \to w,$ علاوه علي هذا إذا كانت f تلازم بالمتجةv فنكتب$w = f(v)$ ونقول أن wهي صوره v تاثر f

تعريف التحويل الخطي :-

إذا كانت $f : v \to w$ داله من الفضاء الخطي vالي الفضاء الخطي w فان fتسمي تحويلا خطيا إذا كان

$f(u + v) = f(u) + f(v) \to (i)$ لكل متجهين u, v من v

$f(ku) = k f(u) \to (ii)$ لكل متجةu من v ولكل عدد قياسي k

للتوضيح

$f = R^2 \to R$هي داله معرفة بواسطه $(s.i)$ إذا كان $u = (x_1, y_1)$ فإن

$u + v = (v_1 + v_2 y_1 + y_2)$وإذن

$$f(u+v) = (x_1 + x_2)(v_1 + v_2) + (v_1 + v_2)(x_1 + x_2)$$
$$- (v_1 + v_2)(v_1 . x_2 + y_1 . x_1 - y_1) + (x_2 . x_2 + y_2 . x_2 - y_2)$$
$$I(u) + f(v)$$

أيضا إذا كان kعدد قياسي فإن $ku = (kx_1, ky_1)$ واذن

$$f(ku) = (kx_1 . kx_2 + ky_1 . kx_1 - ky_1)$$
$$= k(x_1 . x_1 + y_1 . x_1 - y_1)$$
$$= kf(u)$$

إذا كانت $f: v \to w$ تحويلا خطيا فانه لأي v_1, v_2في v ولاي عديين قياسيين k_1, k_2 يكون

$$F\,p(k_1 v_1 + k_2 v_2) = f(k_1 v_1) + f(k_2 v_2)$$
$$= k_1 f(v_1) + k_2 f(v_2)$$

بالمثل إذا كانت $v_1, v_2, \dots, v_m$متجهات في v وكانت $k_1, k_2, \dots, k_m$ اعدادا قياسية فإنه

$$f(k_1 v_1 + k_2 v_2 + \cdots + k_m v_m) = k_1 f(v_1) + k_2 f(v_2) + \dots k_m f(v_m)$$

مثال :-

إعتبر A مصفوفة محدده من النوع $m \times n$ إذا أستعملنا رموز مصفوفات المتجهات في R^n, R^mفيمكننا تعريف دالة : $T: R^n \to R^m$

بواسطه

$$T(x) = A(x)$$

لاحظ أنه إذا كانت x مصفوفة من النوع $n \times 1$ فإن حاصل الضربAxيكون مصفوفة من النوع $m \times 1$لهذافإن t ترسم R^n إلي R^mوعلاوه علي هذا Tتكون خطيه لإثبات هذا نفرض إن v,nمصفوفتان من النوع $n \times 1$وان k عددا قياسيا باستخدام خواص ضرب المصفوفات نحصل علي

$$\Lambda(ku) = k(Au), A\,(u + v) = Au + Av$$

أو بصيغة مكافئة

$$T\,(k\,u) = k(\,T\,u)\,, T\,(u + v) = T(u) + T\,(v)$$

سنسمي التحويل الخطي في هذا المثال بالضرب في A وتسمي التحويلات الخطية من هذا النوع بتحويلات المصفوفات

مثال :-

الحاله خاصة من المثال السابق اعتبره θ زاويه ثابته وإعتبر $t{:}R^2 \to R^2$ ضربا في المصفوفه

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

$$V = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$T\,(v) = Av = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x\cos\theta & -y\sin\theta \\ x\sin\theta & y\cos\theta \end{pmatrix}$$

هندسيا يكون $T(v)$ هو المتجة الذي ينتج إذا دار vبزاوية$\emptyset$ لإثبات هذا نفرض ان $\emptyset$هي الزاوية بين v وبين إتجاه محور x الموجب وإن :

$$V = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

هو المتجة الذي ينتج إذا دارت v بزاوية$\emptyset$نثبت أن $\acute{v} = T(v)$إذا كان يدل علي طول vفإن

$$X = r\cos\emptyset$$

$Y = r\sin\emptyset$ بالمثل حيث أن له نفس الطول مثل v فإن

$$\acute{x} = r\cos(0+\emptyset) \;, \grave{y} = r\sin(0+\emptyset)$$

$$\grave{v} = \begin{pmatrix} \grave{x} \\ \grave{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} r\cos(0+\emptyset) \\ r\sin(0+\emptyset) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} r\cos\theta\cos\emptyset & r\sin\theta\sin\emptyset \\ r\sin\theta\cos\emptyset & r\cos\theta\sin\emptyset \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x\cos\theta & -y\sin\theta \\ x\sin\theta & y\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \; Av = \; t\,(v)$$

يسمي التحويل الخطي في هذا المثال بدوران R^2 بالزاويه .

مثال :-

إعتبر v, wفضائين خطيين فيكون الراسم $t: v\rightarrow w$ بحيث يكون $t(v) = 0$ لكل vمن vتحويلا خطيئا يسمي بالتحويل الصفري لإثبات إن t خطي لاحظ إن $t(u+v) = 0T(u) =$ $0, T(v) = 0 \text{ and } T(ku) = 0$ وإذن

$$T(u+v) = T(u) + t(v) \,, \text{and } t(k\,u) = k\,t\,(u)$$

مثال :-

إعتبر v فضاء ضرب داخلي وأفرض إن w فضاء جزئيا ذا بعد منتهي من v

$S = [\,w1, w2, \dots, wn]$ أساس معياري متعامد إعتبر$T{:}v\rightarrow w$

هي الدالة التي ترسم المتجةvمن vإلي مسقطة العمودي علي wأي أن

W2...$T(v) =< v_1, w_1 > w_1 +< v_1, w_2 > w_2 + \cdots +< v_1, w_r > w_r$

يسمي الراسمTبالاسقاط العمودي للفضاء v, علي w ويتضح إنه خطيا من الخواص الاساسية للضرب الداخلي .

(9_1)المصفوفات :

تعريف المصفوفة :

المصفوفة عباره عن مجموعة من الأعداد الحقيقية أو المركبة عناصرها مرتبة في جدول مستطيل يسمي السطرالأفقي من عناصر المصفوفه صفا (row) ويسمي كل سطر رأسي عمودا (column) يرمز عاده للمصفوفة بأحد أحرف اللغة الإنجليزية الكبيره مثل A ,B,C وغيرها .

إذا كانت a_{ij}حيث $I \leq i \leq m$

و $I \leq j \leq n$عناصر مصفوفةA فإننا عاده نكتب

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

ونقول بأن Aمصفوفة من الدرجة

$(size)m \times n$ حيث mA وn هو عدد أعمدة A

تعريف :-

إذا كانت $A = [a_{ij}]$ و $B = [b_{ij}]$ مصفوفتين من الدرجة نفسها فإننا نقول ان $A = B$ إذا وفقط إذا كان $a_{ij} = b_{ij}$ لكل i , j

($1 - 9 - 1$)منقول المصفوفه :-

لتكن ($A = [a_{ij}]$)مصفوفة من الدرجة $m \times n$ يعرف منقول المصفوفه Aبأنه من الدرجه $m \times n$ التي نحصل عليها من A بحيث تكون صفوفها هي أعمده A وأعمدتها هي صفوف Aعلي التوالي

نرمز لمنقول A بالرمز A^T

أي إن :

$$= A^T = [a_{ij}]$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \Rightarrow A^{\tau} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

لاحظ أنه إذا كان aوbمصفوفتان فإن تحويل المصفوفات إلي مصفوفات منقولة يحقق الخواص التالية :

$$1-(A+B)^T = A^T + B^T$$
$$\mathbf{2}-(\mathbf{A^T})^\mathbf{T} = \mathbf{A}$$
$$3-(kA)^T = kA^T$$
$$4-(AB)^T = A^T B^T = B^T A^T$$

(حيث k عدد ما ثابت)

العمليات الصفية البسيطة :-

سيتم إجراء ثلاثه عمليات علي صفوف المصفوفة تسمي بالعمليات الصفية الأولية وهي :

*تغيير ترتيب أي صفين من المصفوفة

*ضرب أي صف من صفوف المصفوفة بعدد غير صفري

*ضرب أي صف من المصفوفة بعدد وإضافه الناتج إلي صف أخر

تعريف العمليات الصفيه الأولية :-

لتكن AوB مصفوفتين نقول ان A و B صفيا, (row eguialent) ونكتب $A\sim B$إذا حصلنا علي إحدهما من الأخري بإجراء أي عدد منتهي من العمليات الصفية ألأولية

ملحوظات :-

إذا كانت $A\sim B$ من الواضح إن درجةA تساوي درجةB

نستخدم الترميز التالي لتوضيح العمليات الصفية المجراه علي المصفوفة :

** R_{ij}تعني إستبدال الصف i بالصف j

**kR_i تعني ضرب الصف i بالعدد k حيث $k \neq 0$

**kR_{ij} تعني ضرب الصف i بالعدد k وإضافة الناتج الي الصف j

إذا حصلنا علي bمن a باجراء عملية صفية أولية فإنة من الواضح إن نحصل علي a من bبعكس العمليات الصفية الأولية السابقة وهي

$$R_{ij*}$$
$$\frac{1}{k}R_i*$$
$$-kR_{ij}\ *$$

** إذا كانت A مصفوفة فإنه

(من الواضح أنه يمكننا الحصول علي عدد من المصفوفات المكافئة صفيا للمصفوفةA

ولكننا من تعريف)

نقول أن المصفوفةA تكون علي صيغة درجيه صفية إذا تحققت الشروط الاتية :-

**كل صف غير صفري يجب أن يكون اول عنصر غير صفري فية يساوي i (يسمي العنصر المتقدم)

**الصفوف الصفرية (ان وجدت) يجب أن تكون في أسفل المصفوفة

** إذا وجد صفات غير صفر بين فإن العنصر المتقدم i في الصف الأعلي يجب أن يكون علي يسار العنصر iالمتقدم في الصف الأسفل

مثال :

كل من المصفوفتين $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ و $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ علي صيغة درجية صفية

أما المصفوفة$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ فإنها ليست علي صيغة درجية صفية

** أي مصفوفةA يمكن وضعها في صوره مصفوفة ذات صيغة درجية صفية لها . بإتباع إجراءات العمليات الصفية لها

مثال :

ضع المصفوفة$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 4 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ علي صيغة درجية صفية

الحل :-

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 & 4 \\ 7 & 3 & 4 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{2}R_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 4 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{-7R_{12}-6R_{13}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -3 & -10 \\ 0 & -5 & -4 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow{-\frac{1}{4}R_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & \frac{3}{4} & \frac{5}{2} \\ 0 & -5 & -4 & -11 \end{pmatrix} \xrightarrow{5R_{32}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3/4 & 5/2 \\ 0 & 0 & -1/4 & 3/4 \end{pmatrix} \xrightarrow{-4R_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3/4 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

وبالتالي فإن الصيغة الدرجية

الصفية للمصفوفة هي

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3/4 & 5/20 \\ 0 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix}$$

(2_9_1)معكوس المصفوفة :

تعريف معكوس المصفوفة :

لتكن Aمصفوفة مربعة من الدرجه n نقول أن المصفوفةB مصفوفة مربعة من الدرجةn وكان

$$\mathrm{Ab} = \mathrm{ba} = \mathrm{i}$$

في هذه الحاله نقول أن قابله للعكس أو غير شاذه ونرمز لمعكوس المصفوفةa عاده بالرمز a-1

أي أن

$$\mathrm{aa} - 1 = \mathrm{a} - 1\mathrm{a} = \mathrm{i}$$

مثال:

أثبت إن$b = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix}$$

الحل :

بما إن :

$$A\,b = \left(\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

وإن :

$$B\,a = \begin{pmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

فإن :

$$B = A^{-1}$$

وهو المطلوب إثباته

مبرهنه:

إذا كانت Aمصفوفة مربعة وكان كل من BوCمعكوسا للمصفوفةA فإن $B = C$

البرهان:

بما أن كل من B وC معكوس للمصفوفةAفان

$$\mathrm{Ac} = \mathrm{CA} = \mathrm{I} \text{ and } \mathrm{AB} = \mathrm{BA} = 1$$

إذن

$$\mathrm{C} = \mathrm{CI}\,(\mathrm{AB}) = (\mathrm{CA})\mathrm{B} = \mathrm{IB} = \mathrm{B} \; \#$$

(1−10)المصفوفة المثلثية (مصفوفة الوحدة المحايدة):

تعريف المصفوفة المثلثية المحايدة : −

إذا كانت A مصفوفة مربعة وكانت $\mathrm{a_{ij}} = 0$ لقيم لقيم $\mathrm{i} > \mathrm{j}$ فإنها تسمي مصفوفة مثلثية عليا

وإذا كانت $\mathrm{a_{ij}} = 0$ لقيم $\mathrm{i} < \mathrm{j}$ فإنها تدعي مصفوفة مثلثية دنيا وعلي ذلك :

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ مصفوفة مثلثية عليا

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ مصفوفة مثلثية دنيا

المصفوفة $$\mathrm{D} = \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$ والتي هي مثلثيه عليا ومثلثيه دنيا تسمي

مصفوفة قطرية

كثيرا ماتكتب هذه المصفوفة بالشكل

$$\mathrm{D} = \mathrm{diag}(\mathrm{a_{1\,1}}, \mathrm{a_{2\,2}}, \mathrm{a_{3\,3}}, \dots, \mathrm{a_{n\,n}})$$

ملحوظه :

إذا كان في المصفوفة القطرية D، $\mathrm{a_{1\,1}} = \mathrm{a_{2\,2}} = \cdots = \mathrm{a_{n\,n}} = \mathrm{k}$

فإنها تدعي مصفوفة عددية وبالإضافة إلي ذلك إذا كان $\mathrm{k} = 1$ فإن ناتج هذه المصفوفة هو مصفوفة الوحده .

الفصل الثاني

أنظمة المعادلات الخطية

(1-2)مقدمة:

يمكن تمثيل الخط في المستوى x, y جبريا بواسطة معادلة على الصورة التالية

$$a_1x + a_2y = b$$

تسمى أي معادلة من هذا النوع معادلة خطية في المتغيرين x, y وبشكل أعم تعرف

المعادلة الخطية في n متغير

$x_1, x_2, x_3, \dots x_n$

بأنها معادلة يمكن التعبير عنها بالصورة

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

حيث

$a_1, a_2, \dots, a_n, b$ ثوابت حقيقية

مثال:

المعادلات التالية معادلات خطية

$$x + 3y = 7$$
$$x_1 - 2x_2 - 3x_3 + x_4 = 7$$
$$y = \frac{1}{2}x + 3z + 1$$
$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 1$$

لاحظ المعادلةالخطية لا تحمل أي حاصل ضرب أو جذور المتغيرات فتظهر جميع المتغيرات في

الأس الأيمن (القوة الأولى) كدلائل لدوال مثلثية أو لوغاريثميةأو أسية

فلا تصلح المعادلات التالية أن تكون معادلات خطية

$$x + 3y^2 = 7$$
$$y - \sin x = 0$$
$$3x + 2y - z + xz = 1$$
$$\sqrt{x_1} + 2x_2 + x_3 = 1$$

حل المعادلة الخطية

$$a_1x_2 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

هو متتابعة من n من الأعداد$s_1, s_2, \dots, s_n$ تحقق المعادلة عند إجراء

التعويض

$$x_1 = 3, x_2 = 2^3, \dots., x_n = s_n$$

تسمى الفئة المكونة من كل حلول المعادلة بفئة الحل لها

مثال:

اوجد فئة الحل لكل من حلول المعادلة التالية

$$4x - 2y = 1 \rightarrow (1)$$
$$x_1 - 4x_2 + 7x_3 = 5 \rightarrow (2)$$

لإيجاد حلول المعادلة (1) يمكننا أن نعين قيمة اختبارية للمتغير x نحل المعادلة ونحل المعادلة

لإيجاد y او نحتار قيمة اختيارية للمتغير y وتحل بايجاد x إذا اتبعنا الاتجاه الأول

في تعين قيمة اختيارية t للمتغير x نحصل على

$$x = t$$
$$y = 2t - \frac{1}{2}$$

تصف هاتان العبارتان فئة الحل بواسطة دليل اختياري t ويمكن الحصول على

حلول عددية خاصة بالتعويض بقيم معينة للدليل t على سبيل المثال نعطي $t = 3$

الحل:

$$x = 3$$
$$y = \frac{11}{2}$$

نعطي

$$t = -\frac{1}{2}$$
$$x = -\frac{1}{2}$$
$$y = -\frac{3}{2}$$

إذا اتبعنا الاتجاه الثاني وعينا للمتغير على y القيمة الاختيارية t نحصل

$$x = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4}$$
$$y = t$$

رغم اختلاف هذه الصورة عن تلك التي حصلنا عليها في السابق إلأ أنها تعطي نفس فئة الحل بتغير t

على جميع الأعداد الحقيقية على سبيل المثال تعطى العبارتان السابقتان الحل $x = 3$, $y = \frac{11}{2}$

عند

$$t = 3$$

وحين تعطى هذه الصورة نفس الحل عندما

$$t = \frac{11}{2}$$

لإيجاد فئة الحل للمعادلة (2) يمكننا أن نعين قيمة اختياريه لأي متغيرينثم نحل المعادلة لايجاد المتغير الثالث وبصفة خاصة إذا عينا قيما اختيارية t, s للمتغرين x_2 , x_3بالترتيب نحصل علىx_2 ثم اجرينا الحل لإيجاد

$$x_1 = 5 + 4s - 7t$$
$$x_2 = s$$
$$x_3 = t$$

تسمى أي فئة منتهية من معادلات خطية في المتغيرات

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

بنظام المعادلات الخطية وتسمى متتابعة الأعداد

$s_1, s_2, \dots, s_n$ بحل النظام

إذا كان

$$s_1 = x_1 , s_2 = x_n, \dots. , s_n = x_n$$

حلا لكل معادلة في هذا النظام على سبيل المثال نظام المعادلتين في ثلاثة مجاهيل

$$4x_1 - x_2 + 3x_3 = -1$$
$$3x_1 + x_2 + 9x_3 = -4$$

يكون لها الحل

$x_1 = 1, x_2 = 2, x_3 = -1$ خيث أن هذه القيم تحقق كلتا المعادلتين ذلك أن

$x_1 = 1, x_2 = 8, x_3 = 1$ ليست حلا لأن هذه القيم تحقق فقط المعادلة الأولى

معادلتي النظام .

ليس لكل أنظمة المعادلات الخطية حلول على سبيل المثال إذا ضربنا المعادلة التالية للنظام

$$x + y = 4$$

$$2x + 2y = 6$$

يصبح واضحا عدم وجود أي حل حيث أن المعادلتين في النظام الناتج $\frac{1}{2}$ في

$$x + y = 4$$

$$x + y = 3$$

تناقض كل منهما الاخري.

يسمى نظام المعادلات الذي ليس له أي حل نظاما متناقضا (غير متألف) أما إذا وجد حل واحد علي الأقل يسمى النظام نظاما متألفا.

(2-2)النظام الخطي:

المجموعة المنتهية من المعادلات الخطية بدلالة المتغيرات $x_1, x_2, \dots, x_n$ تسمى نظام المعادلات الخطية أو النظام الخطي والمتتالية المتكونة من الأعداد$(z_1, z_2, \dots, z_n)$ تسمى مجموعة الحل للنظام إذا كانت هي حل لكل معادلة بالنظام حيث

$$x_1 = z_1, x_2 = z_2, \dots, x_n = z_n$$

مثال:

في النظام

$$4x_1 - x_2 + 3x_3$$
$$3x_1 - x_2 + 9x_3$$

الحل لهذا النظام هو

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 2$$
$$x_3 = -1$$

حيث قيم x_1, x_2, x_3تحقق جميع معادلات النظام

أما مجموعة الحل

$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 8$$
$$x_3 = 10$$

ليست مجموعة حل للنظام أنها تحقق المعادلة الأولى فقط ليس جميع أنظمة المعادلات لها مجموعة حل مثل النظام

$$x + y = 4$$
$$2x + 2y = 6$$

فلو قسمنا المعادلة الثانية في النظام على 2 نجد أن النظام يصبح

$$x + y = 4$$
$$x + y = 3$$

وهذا يمثل تناقض ومثل هذا النظام من المعادلات يسمى غير واقعي أو غير موجود أما إذا كان النظام له على الأقل حل واحد يسمى نظام واقعي أو موجود.

الشكل العام لنظام المعادلات الخطية المتكون من معادلتين خطيتين بدلالة

x, y هو

$$A_1x_1 + B_1y_1 = g_1 \quad (A_1B_1 \neq 0)$$
$$A_1x_1 + B_1y_1 = g_2 \quad (A_2B_2 \neq 0)$$

حيث مثل هذا النظام موجود لأن لدية مجموعة حل ورسمة كل معادلة في النظام خط مستقيم إحداثيات على المحورين السيني والصادي.

(1-2-2) نظام معادلتين في متغيرين :

هذا النظام يكون على الشكل

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

ومجموعة الحل لهذا النظام هي مجموعة الأزواج المرتبة من الأعداد الحقيقية والتي تحقق المعادلتين .

سوف نستخدم طريقة الحذف والتعويض الخلفي لحل هذا النظام هذه الطريقة تحتوي على إبدال هذا النظام بنظام أبسط منه وذلك بإجراء العمليات الأتية:

1. إبدال معادله حل معادلة أخرى .
2. ضرب المعادله في ثابت غير صفري.
3. تكوين معادلة من جمع مضاعفات إحدى المعادلتين وإضافتها الى الأخرى.

مثال :

حل النظام

$$2x + 3y = 2$$
$$5x + 6y = 11$$

الحل :

ضرب المعادلة الثانية في $-\frac{2}{5}$ والجمع يعطينا

$$2x + 3y = 2$$
$$-2x - \frac{12}{5}y = -\frac{22}{5}$$

بجمع المعادلة

$$\frac{3}{5}y = -\frac{12}{5}$$

هذا يعطينا النظام

$$2x + 3y = 2$$
$$\frac{3}{5}y = -\frac{12}{5}$$

من المعادلة الثانية نجد $y = -4$

بالتعويض الخلفي في المعادلات الأولى نجد ان

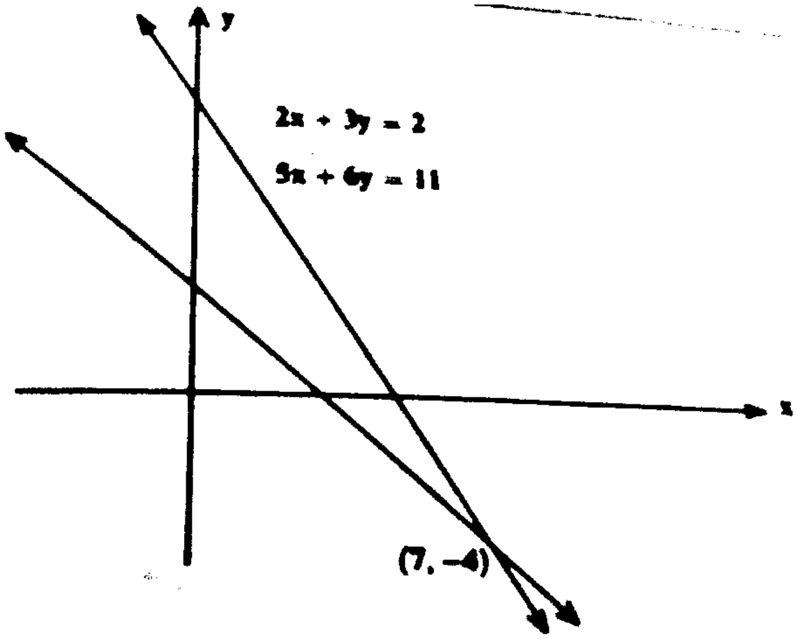
$$2x + 3(-4) = 2$$

أي أن

$$2x - 12 = 2$$

وبذلك يكون

$$2x = 14 \quad \rightarrow \quad x = 7$$



عند التحقق من $(7,-4)$ في المعادلتين نجد أن $(7,-4)$ تحقق المعادلتين

$\therefore$النقطة $(7,-4)$ هي الحل للنظام المعطى.

نلاحظ أن مجموعة الحل في هذه الحالة تتكون من نقطة واحدة وهي نقطة تقاطع المستقيمين

مثال:

حل النظام

$$x - 2y = -1$$
$$2x - 4y = -8$$

الحل :

بضرب المعادلة الثانية في

$$-\frac{1}{2}$$

$$x - 2y = -1$$
$$-x - 2y = 4$$

بجمع المعادلتين

$$0 = 3$$

وهذا يعطينا $0 = 3$وهو أمر غير مقبول

∴ النظام الأصلي ليس له حل (نظام غير متناسق)

مثال :

حل النظام

$$2x + 3y = 12$$
$$4x + 6y = 24$$

الحل:

بضرب المعادلة الثانية في $\frac{1}{2}-$والجمع

وهذا يعطينا أن $0 = 0$ وهي جملة صحيحة

في هذه الحالة نلاحظ أن أحدى المعادلتين هي من مضاعفات المعادله الأخرى وهذا يعني هندسيا أن الخطين المستقيمين متطابقان .

نحتاج في هذه المرة الى وسيط وليكن (اي عدد حقيقي)

إذا كان $y = t,$ فإن $x = 6 - 3/2t$

∴مجموعة الحل

$s = \{(6 - 3/2t, t){:}t$ عدد حقيقي$\}$

ويسمى ذلك بالحل العام .

(2-2-2)أنظمة المعادلات الخطية في ثلاث متغيرات :

المعادلة التي على الشكل

$$ax + by + cz = d$$

تسمى معادلة خطية في ثلاث متغيرات حيث ان a, b, c, d أعداد حقيقية.

نريد استخدام طريقة الحذف مع التعويض لحل أنظمة المعادلات الخطية في ثلاث متغيرات ونبدا بدراسة مثال يقودنا الي بعض الملاحظات

مثال :

حل النظام

$$\begin{aligned} x + 2y - z &= 9 \quad \rightarrow (1) \\ 2x + y + z &= 6 \quad \rightarrow (2) \\ 3x - 2y - 2z &= 2 \quad \rightarrow (3) \end{aligned}$$

الحل :

بضرب المعادلة(2) في $\frac{1}{2}$ وبجمعها مع المعادلة(1)نحصل على

$$\frac{3}{2}y - \frac{3}{2}z = 6$$

وبالضرب في $\frac{2}{3}$ نحصل على

$$y - z = 4 \rightarrow (4)$$

وبضرب المعادلة (3) في $-\frac{1}{3}$وجمعها مع المعادلة(1) نتحصل على

$$\frac{8}{3}y - \frac{1}{3}z = \frac{25}{3}$$

وبالضرب في 3 نجد أن :

$$8y - z = 25 \rightarrow (5)$$

المعادلتين (4) و(5) يشكلان نظاما من معادلتين في متغيرين

$$\begin{aligned} y - z &= 4 \rightarrow (4) \\ 8y - z &= 25 \rightarrow (5) \end{aligned}$$

بضرب المعادلة (5) في $-\frac{1}{8}$ والجمع ينتج أن

$$\frac{7}{8}z = \frac{7}{8} \rightarrow (6)$$

ومن ذلك نجد ان

$$-7z = 7 \ \rightarrow z = -1$$

$\therefore$ نحصل على النظام

$$x + 2y - z = 9$$
$$y - z = 4$$
$$z = -1$$

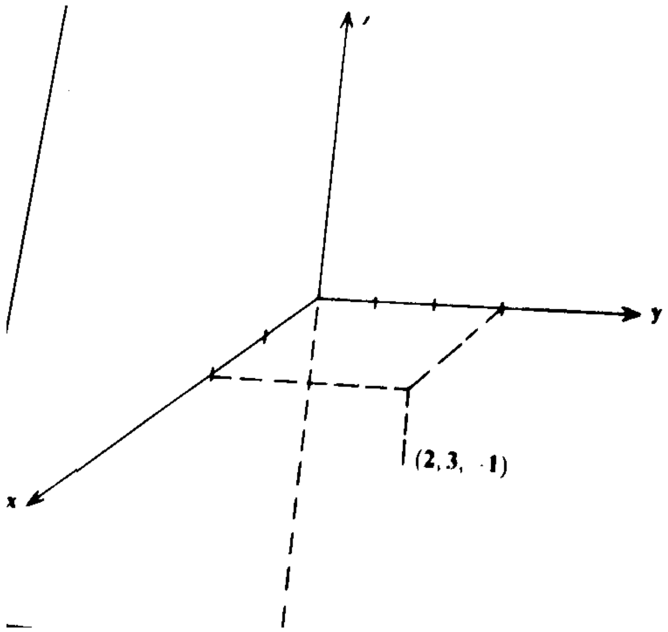
وبالتعويض الخلفي نجد أن

$$y = 3 \, , x = 2$$

$\therefore$الحل هو $(2,3,-1)$

من هذا المثال نلاحظ التعميم التالي :

1. إذا كانت المعادلة الأولى على x فان تغيرها يتم باحدى المعادلتين التي لايكون معامل x فيها صفراً ثم نستخدم المعادلة الأولى في حذف x من باقي المعادلات .
2. يستخدم نظام المعادلتين في متغيرين للتخلص من y .
3. يستخدم التعويض الخلفي للحصول على الحل



مثال:

حل النظام

$$2x + 3y = 12$$
$$4x + 6y = 24$$

الحل:

بضرب المعادلة الثانية في $-\frac{1}{2}$ والجمع

$$2x + 3y = 12$$
$$-2x - 3y = -12$$

نجد أن حاصل الجمع

$$0 + 0 = 0$$

مثال :

حل النظام

$$x + y - z = 9 \rightarrow (1)$$
$$2x + y + z = 6 \rightarrow (2)$$
$$3x - 2y - 2z = 2 \rightarrow (3)$$

الحل:

بضرب المعادلة لى (2) في $\frac{1}{2}$ وجمعها مع المعادلة (1) نحصل علي

$$\frac{3}{2}y - \frac{3}{2}z = 6$$

بالضرب في$\frac{2}{3}$نحصل على

$$y - z = 4 \rightarrow (4)$$

(2–2–3) أنظمة المعادلات الخطية فيn من المتغيرات:

النظام

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_2x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$\vdots$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_2$$

هو نظام يحتوي على m من المعادلات في n من المتغيرات.

حل هذا النظام بطريقة الحذف والتعويض الخلفي يستهلك وقتاً وعددا كبير من المعادلات ولهذا السبب نتعرف على طريقة تسهل علينا هذا العبء وتعتبر طريقة جيدة خصوصا وأن هذه الطريقة متاحة الأن على نطاق واسع في معظم الحسابات الألية .

(3-2) المعنى الهندسي للنظام الخطي:

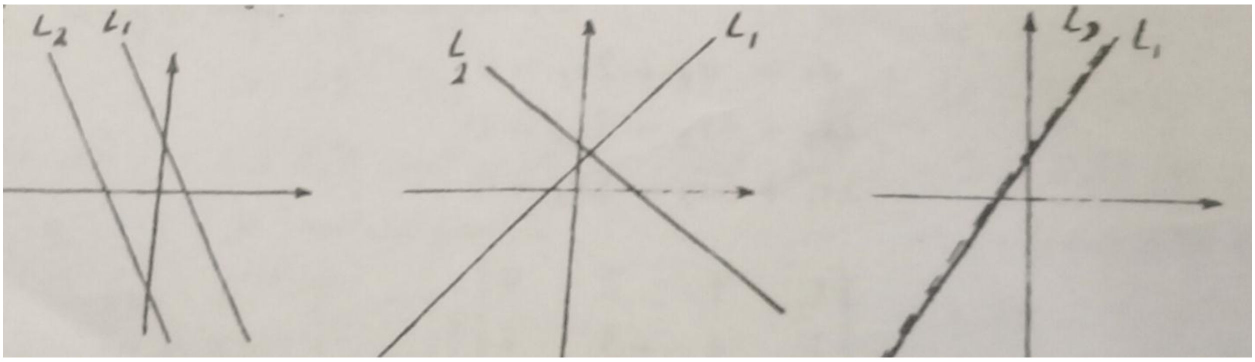
بالصيغة الاتية x, yيمثل النظام الخطي العام المتكون من معادلتين خطيتين بمتغرين

$$a_1x + b_1y = c_1$$
$$a_2x + b_2y = c_2$$

إن الشكل الهندسي لهذه المعادلات هو الخطوط المستقيمةl_1و l_2 كما في الشكل $(1,1)$

ولما كانت النقطة(x, y) تقع على المستقيم إذا وفقط اذا كانت x وyتحقق معادلة المستقيم

فإن حلول النظام الخطي تقابل المستقيمين l_2, l_1 كما موضح في الشكل$(1,1)$



$(1-1)$ $(2-2)$ $(3-3)$

$(1,1)$الشكل

من خلال الشكل$(1,1)$ يتضح أن هناك ثلاث إحتمالات للحلول وهي

اولا: المستقيمان l_2, l_1 متوازيان أي لا يوجد نقطة تقاطع وعليه فليس للنظام الخطي حل

[شكل(1) من $(1,1)$]

ثانيا: المستقيمان l_2, l_1 يتقاطعان بنقطة وهذا يعني أن النظام الخطي له حل واحد فقط

[الشكل (2) من$(1,1)$]

ثالثا: المستقيمان متطابقان إي يوجد عدد غير محدود من الحلول

[الشكل (3) من $(1,1)$]

نستنتج من ذلك أن إي نظام خطي أما ليس له حل أو له حل واحد فقط أو له عدد غير منتهي من الحلول .

تسمى المجموعة المنتهية المتكونة من m من المعادلات الخطية التي تحتوي علىn من المتغيرات x_1, x_2, x_3نظام المعادلات الخطية

وتسمى ايضا بالنظام الخطي أما المتتابعة المتكونة من n من الأعداد الحقيقية

$s_1, s_2, \dots, s_n = x_n$ حلا لكل معادلة من النظام الخطي

ويمكن كتابة النظام الخطي من m من المعادلات التي تحتوي على nمن المتغيرات

بالصيغة :

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1m}x_n &= c_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2m}x_n &= c_2 \\ \vdots \qquad\qquad & \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n &= c_n \end{aligned}$$

$\therefore$ $x_1, x_2, \dots, x_n$ هي متغيرات و $a_1, a_2, \dots, a_n$ ثوابت

حيث$i = 1,2, \dots, m, j = 1,2, \dots, n$

وعل سبيل المثال سوف يكتب أي نظام لثلاث معادلات خطية في اربعة مجاهيل على الصوره

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + a_{14}x_4 &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + a_{24}x_4 &= b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + a_{34}x_4 &= b_3 \end{aligned}$$

يعتبر وضع الدليلين الثنائين لمعادلة المجاهيل وسيلة مقيدة سوف نستخدمها لتحديد موضع

المعامل في النظام يشير الدليل الأيسر للمعامل توجد a_{ij} الى المعادلة التي يقع فيها المعامل ويشير

الدليل الأيمن إلى المجهول المضروب فيه ولهذا فإن a_{n2} في المعادلة الأولى وتضرب

في المجهول x_2 يمكننا أن نوجد النظام لعدد m من المعادلات الخطية من n من المجاهيل

في كتابة ترتيب للإعداد علي شكل مستطيل

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

يسمى هذا الترتيب بالمصفوفة الممتدة للنظام

يستخدم اللفظ مصفوفة في الرياضيات ليدل على ترتيب مستطيلة من ألأعداد وتظهر المصفوفات

في مقامات عديدة لتوضيح أن المصفوفة الممتدة لنظام المعادلات

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + 2x_3 &= 9 \\ x_1 + 4x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 3x_1 + 6x_2 - 5x_3 &= 0 \end{aligned}$$

هي:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

ملحوظة :

عند بناء إي مصفوفة ممتده يجب كتابة المجاهيل بنفس الترتيب في كل معادلة الطريقة الأساسية لحل إي نظام لمعادلات خطية هي بإحلال النظام المعطى بنظام جديد له نفس

الحل ولكن اسهل في الحل .

يتم الحصول بشكل عام على النظام الجديد من سلسلة من الخطوات بواسطة تطبيق الأنواع الثلاثة الأتية من عمليات حذف منتظم من المجاهيل

1. أضرب معادلة بكاملها في ثابت غير صفري
2. أبدل معادلتين
3. أضف مضاعف لصف أخر

تسمى هذه العمليات بعمليات أولية على المصفوفة .

يوضح المثال التالي كيف يمكن استخدام هذه العمليات لحل أنظمة لمعادلات خطية حيث أن الطريقة المنتظمة لإيجاد حلول للأنظمة سوف نشقق في القسم التالي فليس من الضروري الانشغال بكيفية إنتقال الخطوات في هذا المثال يجب أن يخصص الجهد الأساسي لفهم الحسابات وسوف نتطرق ببعض طرق حل أنظمة المعادلات الخطية بالتفصيل لاحقا في الوحدة التالية .

مثال :

في اسفل العمود الأيمن نحل نظاما لمعادلات خطية بواسطة عمليات على المعادلات في النظام وفي العمود الأيسر نحل نفس النظام بواسطة عمليات على صفوف المصفوفة الممتدة

المصفوفة الممتدة يمكن وضع الثوابت في النظام الخطي (1) بالصيغة

$$\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & c_1 \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} & c_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mm} & c_m \end{array}\right)$$

إذ إن a_{ij} هي أعداد حقيقية تمثل معاملات المتغيرات و c_m تمثل الثوابت في الطرف

الأيمن من النظام (1) تسمى الخطوط الأفقية صفوفا أما الخطوط العمودية فتسمى أعمدة ويقال للصيغة السابقة المصفوفة الممتدة

مثال:

حل النظام الخطي

$$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 + 2x_3 &= 13 \\ 3x_1 - 14x_2 + 3x_3 &= 29 \\ 4x_1 - 18x_2 + 3x_3 &= 35 \end{aligned}$$

الحل:

1.المصفوفة الممتدة للنظام هي

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 2 & 13 \\ 3 & -14 & 3 & 29 \\ 4 & -18 & 3 & 35 \end{array}\right)$$

2. نضرب الصف الأول في -3 ونضيفة إلى الصف الثاني كذلك نضرب الصف الأول في -4ونضيفة للصف الأول ولذلك سوف نحصل على المصفوفة الممتدة المكافئة الأتية:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -5 & 2 & 13 \\ 0 & 1 & -3 & -10 \\ 0 & 2 & -5 & -17 \end{array}\right)$$

الصيغة التي حصلنا عليها تسمى الصيغة المدرجة التي تقابل النظام

$$\begin{aligned} x - 5y + 2z &= 13 \\ y - 3z &= -10 \end{aligned}$$

و بالتعويض عن قيمة z

$$z = 3$$

نحصل على الحل

$$\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= 1 \\ z &= 3 \end{aligned}$$

مثال :

أوجد مجموعة حل النظام الخطي التالي

$$\begin{aligned} x + y + 2z &= 9 \\ 2x + 4y - 3z &= 1 \\ 3x + 6y - 5z &= 0 \end{aligned}$$

1. مصفوفة المعادلات

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & 4 & -3 & 1 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

نطبق العمليات الأساسية للمصفوفة نضرب الصف الأول في -2 ونجمعه للصف الثاني

لتصبح المصفوفة

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 3 & 6 & -5 & 0 \end{pmatrix}$$

2. نضرب الصف الأول في (-3) ونجمعه للصف الثالث لتصبح المصفوفة

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 2 & -7 & -17 \\ 0 & 3 & -11 & 27 \end{pmatrix}$$

3.نضرب الصف الثاني في $\left(\frac{1}{2}\right)$ لتصبح

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 3 & -11 & -27 \end{pmatrix}$$

4.نضرب الصف الثاني في (-3) ونجمعه للصف الثالث

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$$

5. نضرب الصف الثالث في (-2)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

6. نضرب الصف الثاني في (-1) ونجمعه للصف الأول

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \frac{11}{2} & \frac{35}{2} \\ 0 & 1 & -\frac{7}{2} & -\frac{17}{2} \\ 0 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

7.نضرب في $-(\frac{11}{2})$ ونجمعه للصف الأول ونضرب في (7) الصف الثالث ونجمعه للصف الثاني لنحصل

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}$$

نظام المعادلة الخطي للمصفوفة النهائية هو

$$x = 1$$
$$y = 2$$
$$z = 3$$

نحصل على الحل

$$x = 3$$
$$y = (3 * 2) - \frac{1}{2}$$
$$6 - \frac{1}{2} = 5.5$$

عند $n = -\frac{1}{2}$ نحصل على

$$x = \frac{1}{2}$$
$$y = -\frac{3}{2}$$

أما إذا اخذنا قيمة y الإفتراضية هي n نحصل على $y = n$

$$n = \frac{1}{2}n + \frac{1}{4}$$

عند $n = 3$ فإننا نحصل $n = 3$

$$y = \frac{11}{2} = 5.5$$

حصلنا على نفس الاجابة على الرغم من إن المعادلات اختلفت

لإيجاد مجموعة الحل (n) لنفرض قيمة x_3 بدلالة المتغير (n)

ول x_2 بدلالة المتغير (z) لتصبح مجموعة الحل

$$x_1 = 5 + 4z - 7n$$
$$x_2 = z$$
$$x_3 = n$$

الفصل الثالث

طرق حل أنظمة المعادلات الخطية

(1-3)مقدمة:

إن من أهم أسباب تطور الرياضيات هو البحث عن طرق تحليل و حل المسائل التطبيقية . و تعتبر محاولات إيجاد طرق حل أنظمة المعادلات الخطية سببا في ظهور و تطور أهم فروع الرياضيات آلا وهو الجبر الخطي .

في هذا الفصل سنتحدث عن طرق حل أنظمة المعادلات الخطية حيث نربطها بمفهوم المصفوفة والتي سنستخدمها لإيجاد حلول هذه الأنظمة .

الصورة العامة لأنظمة المعادلات الخطية و طرق حلها :

لنفرض أن لديناm من المعادلات في n من المجاهيل $(x_1, x_2, \dots, x_n)$.

ولنفرض أن a_{ij} عدد حقيقي يرمز لمعامل x_j في نظام المعادلات التالي . ولتكن $b_1, b_2, \dots, b_m$ أعداداً حقيقية . عندئذ يمكن كتابة نظام المعادلات الخطية على الصيغة :

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1$$
$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2$$
$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m$$

نقول إن النوني المرتب $(s_1, s_2, \dots, s_n)$ حل لهذا النظام اذا تحققت كل معادلة من معادلات النظام وذلك بعد التعويض عن كل x_i ب s_i .

مثال :

من الواضح ان للنظام

$$x_1 = 2$$
$$x_2 = -1$$
$$x_3 = 4$$

حل وحيد وهو الثلاثي $(2, -1, 4)$

مثال :

يسمى النظام

$$2x_1 + x_2 - 2x_3 = 6$$
$$x_2 + 3x_3 = 2$$
$$x_3 = 4$$

نظاماً مثلثيا وله حل وحيد . لايجاد هذا الحل نعوض $x_3 = 4$ في المعادله الثانية لنحصل على $x_2 = -10$ ثم نعوض عن $x_3 = 4$ و $x_2 = -10$في المعادلة الأولى لنجد أن $x_1 = 12$. وعندئذ فان الحل الوحيد للنظام هو $(12,-10,4)$.

مثال :

يمكن إعادة كتابة النظام

$$\begin{aligned} x_1 + 3x_3 &= 5 \\ x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

ليصبح على صورة نظام مثلثي :

$$\begin{aligned} x_1 + 0x_2 + 3x_3 &= 5 \\ x_2 + 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

ولذا نستطيع حله بالتعويض كالآتي :

نفرض ان $x_3 = t$ حيث $t \in R$. ولذا فإن $x_2 = 2 - 2t$ وبالتعويض عن $x_3 = t$ في المعادلة الأولى نجد ايضاً أن $x_1 = 5 - 3t$.إذاً $(5 - 3t, 2 - 2t, t)$ حيث $t \in R$ حل للنظام

لاحظ ان لهذا النظام عددا من الحلول غير منسقه.

في كل من الأمثلة السابقة استطعنا ان نجد حلولا للنظام اما بمجرد النظر اليه او بوضعه على نظام مثلثي والتعويض التراجعي ، ولكن للاسف ليست جميع الانظمه بتلك السهوله ، فمثلا لا نستطيع ايجاد حل للنظام :

$$\begin{aligned} x_1 - 5x_2 + 2x_3 = 4x_3 &= 4 \\ x_1 + 3x_2 - 5x_3 &= 2 \\ 2x_1 + 6x_{2}{}_{-}x_3 &= 1 \end{aligned}$$

بمجرد النظر اليه . ولذا فإنه من الضروري البحث عن نظام ابسط يكون له الحل نفسه .

تعريف:

نقول أن نظامين من المعادلات الخطية متكافئين إذا كان لهما مجموعه حل واحده.

إن التعريف السابق يقدم لنا اول خطوات الطريق إذ يقترح علينا البحث عن نظام من المعادلات يكافئ النظام تحت الدراسه ولكنه ابسط منه ويكون من اليسير ايجاد حل له .

لاحظ اننا لو اجرينا العمليات الصفيه الأوليه على نظام معادلات خطية فإننا نحصل في كل مره على نظام مكافئ .

لاحظ اننا نستطيع استبدال هذا النظام بمعادلة مصفوفية على الصيغه:

$$A * X = B$$

حيث:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

المصفوفة A تسمى مصفوفة المعاملات ، b تسمى مصفوفة الثوابت ، X تسمى مصفوفة المجاهيل

لاحظ أن عدد صفوف A هو عدد معاملات النظام وعدد اعمدتها هو عدد مجاهيل النظام

سنقوم الأن بتوسيع المصفوفة A وذلك باضافه B كعمود جديد لنحصل على مصفوفة جديده نرمز لها بالرمز $[A/B]$ وتسمى المصفوفة الموسعه لنظام المعادلات .

نقدم الأن طريقتين لحل النظام (1) بإستخدام المصفوفة الموسعه $[A/B]$ هما :-

(2-3) طريقة جاوس Gauss method :

لحل النظام بإستخدام طريقة جاوس نقوم بوضع المصفوفة الموسعه $[A/B]$على الصيغه الدرجيه الصفيه . ومن ثم نحصل على نظام جديد من المعادلات يكافئ النظام الأصلي ولكنه أبسط منه (في الحقيقة النظام الجديد هو نظام مثلثي) ولذا فان يكون من السهل الحصول على حل للنظام .

(3-3) طريقة جاوس- جوردان Gauss- Jordan method:

هذه الطريقة مماثلة لطريقه جاوس ولكننا في هذه الحالة نضع المصفوفة $[A/B]$ على الصيغه الدرجيه الصفيه المختزلة بدلا من الصيغه الدرجيه الصفيه .

تعريف :

يكون نظام معادلات خطية متسقا أو متالفاً (consistent) إذا كان له حل ويكون غير متسق إذا كان لايوجد له حل .

مثال :

استخدم طريقة جاوس ثم طريقة جاوس – جوردان لحل النظام :−

$$2x_2 + 4x_3 = 3$$
$$x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 1$$
$$3x_1 - x_2 - x_3 = 1$$

الحل :

اولا : طريقة جاوس :−

المصفوفة الموسعة لهذا النظام هي :

$$[A/B] = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & -3 & 5 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_{12}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{-3R_{13}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -32 & -14 \end{array}\right) \xrightarrow{\frac{1}{2}R_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 8 & -16 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{8R_{32}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & -32 & -14 \end{array}\right)$$

والمصفوفه الموسعة الأخيره على الصيغه الدرجيه الصفيه . وبالتالي فإن النظام المعطى يكافئ النظام :

$$x_1 - 3x_2 + 5x_3 = 1$$
$$x_2 + 2x_3 = \frac{3}{2}$$
$$-32x_3 = -14$$

بحل المعادلة الأخيره نجد ان $x_3 = \frac{1}{16}$. وبالتعويض عن قيمه x_3 في المعادلة التالية نجد أن $x_2 = \frac{5}{8}$ وأخيراً بالتعويض عن قيمتي x_2 و x_3 في المعادلة الأولى نجد ان $x_1 = \frac{11}{16}$. وعلية فإن الحل الوحيد للنظام هو $(\frac{11}{16}, \frac{5}{8}, \frac{7}{17})$

ثانيا : طريقة جاوس – جوردان :

لنضع المصفوفة الموسعه على صيغه المصفوفة درجية مختزله

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 5 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3/2 \\ 0 & 0 & -32 & -14 \end{array}\right) \xrightarrow{3R_{21}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 11 & 11/2 \\ 0 & 1 & 2 & 3/2 \\ 0 & 0 & -32 & -14 \end{array}\right) \xrightarrow{-1/32R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 11 & 11/2 \\ 0 & 1 & 2 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 7/16 \end{array}\right) \xrightarrow{-11R_{31}}, \xrightarrow{-2R_{32}}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 11/16 \\ 0 & 1 & 0 & 5/8 \\ 0 & 0 & 1 & 7/16 \end{array}\right)$$

وهكذا فإن نظام المعادلات المكافئ للنظام المعطى هو :

$$x_1 = \frac{11}{16} \quad , \qquad x_2 = \frac{7}{16} \, , \qquad x_3 = \frac{5}{8}$$

ويكون الحل الوحيد للنظام هو $(\frac{11}{16}, \frac{5}{8}, \frac{7}{16})$ وهذا يتفق مع ما وجدناه في الحل بطريقه جاوس .

مثال :

استخدم طريقه جاوس ثم طريقة جاوس – جوردان لحل النظام :

$$\begin{gathered} x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2 \\ 3x_1 - 9x_2 + 10x_3 + 2x_4 = 9 \\ 2x_1 - 6x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 4 \\ 2x_1 - 6x_2 + 8x_3 + x_4 = 7 \end{gathered}$$

الحل :

1. طريقة جاوس

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & -9 & 16 & 2 & 9 \\ 2 & -6 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & -6 & 8 & 1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{-3R_{12}\ ,-2R_{13}\, ,-2R_{14}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow{1/4R_2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-4R_{24}}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1/4 & 3/4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

نظام المعادلات المكافئ المعطى هو :

$$x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 = 2$$
$$x_3 - \frac{1}{4}x_4 = \frac{3}{4}$$

نلاحظ أن هذا النظام يحتوي على معادلتين واربعه مجاهيل ولحله يلزم اعطاء مجهولين قيمتين إختياريتين وإيجاد المجهولين الآخرين بدلالتهما ، لذلك بوضع $x_4 = t$ و $x_2 = s$ فإننا نجد أن :

$$x_1 = 3s - \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}$$
$$x_3 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4}t$$

وعليه فإن للنظام عدداً غير منته من الحلول ومجموعه الحل هي:

$$s = \left\{\left(3s - \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}\ , s\ , \frac{3}{4} + \frac{1}{4}t\ , t\ \right)\right\}$$

2. طريقة جاوس – جوردان

لتكن لدينا الصيغه الدرجية الصفية المختزلة التي وصلنا لها بالطريقه (1) فإننا نجد ان :

$$\xrightarrow{-2R_{21}}\left(\begin{array}{cccc|c}1 & -3 & 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{4} & \frac{3}{4}\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0\end{array}\right)$$

وهي الصيغة الدرجية المختزلة للمصفوفة الموسعة ، ويكون نظام المعادلات المكافئ هو :

$$x_1 - 3x_2 + \frac{3}{2}x_4 = \frac{1}{2}$$
$$x_3 - \frac{1}{4}x_4$$

لذلك بوضع $x_2 = s, x_4 = t$ وبالتعويض نحصل على مجموعة الحل :

$$s = \left\{\left(3s - \frac{3}{2}t + \frac{1}{2}, s, \frac{3}{4} + \frac{1}{4}t, t,\right)\right\}$$

وهو مايتفق مع ماوجدناه في الحل بالطريقة (1) .

مثال :

استخدم طريقه جاوس ثم جاوس – جوردان لحل النظام :

$$x_1 + x_3 = 1$$
$$x_2 - x_3 = -1$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 2$$

الحل :

1. **طريقة جاوس :**

$$[A/B] = \left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 2 & 1 & 1 & 2\end{array}\right)\xrightarrow{-2R_{13}}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{array}\right)$$
$$\xrightarrow{-1R_{23}}\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 0 & 1 & 1\\ 0 & 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)$$

النظام المكافئ للنظام المعطى هو :

$$x_1 + x_3 = 1$$
$$x_2 - x_3 = -1$$

$$0 = 1$$

وهذا غير ممكن وبالتالي فإنه لايوجد حل لهذا النظام .

2. طريقة جاوس – جوردان :

على المصفوفة الموسعة على الصيغة الدرجية المختزلة نحصل على :

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

نجد أن

$$\begin{gathered} x_1 + x_3 = 1 \\ x_2 - x_3 = -1 \\ 0 = 1 \end{gathered}$$

نكون قد حصلنا على نفس النتيجة التي تحصلنا عليها في الحل بالطريقة (1) .

- ❖ من الأمثلة الثلاثه السابقة وجدنا أن نظام المعادلات قد يكون متسقا او غير متسق (ليس له حل) وإذا كان متسقا فإما أن يكون له حل وحيد او عدد غير منته من الحلول وهذا ليس من قبيل المصادفه ولكنه واقع تؤكده المبرهنة التالية

مبرهنة :

إذا كان نظام المعادلات الخطية $AX = B$ متسقاً فإنه إما أن يكون له حل وحيد أو عدد غير منته من الحلول .

البرهان :

لنفترض أن للنظام أكثر من حل وان x_1, x_2 حلان مختلفان . سنبرهن ان $x_1 + k(x_1 - x_2)$ حل للنظام لكل $k \in R$ وبالتالي فإن له عددا غير منته من الحلول .

$$\begin{aligned} A\big(x_1 + k(x_1 - x_2)\big) &= Ax_1 + k(Ax_1) - k(Ax_2) \\ &= B + kB - kB = B \end{aligned}$$

وعلية فإن $x_1 + k(x_1 - x_2)$ حل للنظام لكل $k \in R$.

- ❖ نلاحظ ان الامثله الثلاثه السابقة كانت لأنظمة معادلات تتكون من عدد من المعاملات مساو لعدد المجاهيل .

المثال التالي مثال لنظام يختلف فيه عدد المعاملات عن عدد المجاهيل .

مثال :

استخدم طريقة جاوس – جوردان لحل النظام :

$$3x_1 - 2x_2 = 4$$
$$5x_1 + x_2 = 1$$
$$9x_1 + 7x_2 = -5$$

الحل :

$$[A/B] = \left(\begin{array}{cc|c} 3 & -2 & 4 \\ 5 & 1 & 1 \\ 9 & 7 & -5 \end{array}\right) \xrightarrow{1/3R_1} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2/3 & 4/3 \\ 5 & 1 & 1 \\ 9 & 7 & -5 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{-5R_{12},-9R_{13}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2/3 & 4/3 \\ 0 & 13/3 & -17/3 \\ 0 & 13 & -17 \end{array}\right) \xrightarrow{3/13R_2}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & -2/3 & 4/3 \\ 0 & 1 & -17/3 \\ 0 & 13 & -17 \end{array}\right) \xrightarrow{-9R_{12},36R_{13}} \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 2/3 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{2/3R_{21},-13R_{13}}$$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 6/13 \\ 0 & 1 & -17/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\therefore$ النظام المكافئ للنظام المعطى هو :

$$x_1 = \frac{6}{13}\ , x_2 = -\frac{17}{13}$$

ولذا فإن للنظام حلاً وحيداً هو $\left(\frac{6}{13}, -\frac{17}{13}\right)$.

مثال (*) :

استخدم طريقة جاوس – جوردان لحل النظام :

$$5x_1 - 2x_2 + 6x_3 = 0$$
$$-2x_1 + x_2 + 3x_3 = 1$$

الحل :

$$[A/B] = \left(\begin{array}{ccc|c} 5 & 2 & 6 & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{1/5R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -\frac{2}{5} & \frac{6}{5} & 0 \\ -2 & 1 & 3 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{2R_{12}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{5} & \frac{6}{5} & 0 \\ 0 & \frac{1}{5} & \frac{27}{5} & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{5R_2} \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{5} & \frac{6}{5} & 0 \\ 0 & 1 & 27 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{2/5R_{21}} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 12 & 2 \\ 0 & 1 & 27 & 5 \end{pmatrix}$$

∴ النظام المكافئ للنظام المعطى هو :

$$x_2 + 27x_3 = 2$$
$$x_1 + 12x_3 = 2$$

بوضع $x_3 = t$ نجد ان مجموعة الحل هي :

$$S = \{(2 - 12t , 5 - 27t , t) : t \in R\}$$

ولذا فإن للنظام عددا غير منتهي من الحلول .

مثال (**) :

استخدم طريقة جاوس – جوردان لحل النظام :

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 3$$
$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 4$$

الحل :

$$[A/B] = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 1 & -2 & 1 & 4 \end{pmatrix} \xrightarrow{-1R_{12}} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

∴النظام المكافئ للنظام المعطى هو :

$$x_1 - 2x_2 + x_3 = 3$$
$$0 = 1$$

ولذا فإنه لايوجد حل للنظام :

ملاحظه :

إذا كان عدد مجاهيل النظام أكبر من عدد معادلاته فإنه إما أن يكون للنظام عدد غير منته من الحلول كما في المثال (*) إما أن النظام غيرمنسق كما في المثال (**) .

(3-4) قاعدة كرامر Cramer's Rule:

في هذا البند نستخدم المبرهنة التي تنص على [إذا كانت A مصفوفة من الدرجة n فإن$(A \operatorname{adj} A) = (\operatorname{adj} A)A = (\det A)I$]لتقديم طريقة أخرى ، تعرف بقاعدة كرامر ، لحل نظام من المعادلات الخطية في الحالة التي يكون فيها عدد المعادلات مساوياً لعدد المجاهيل . تكمن

أهمية هذه الطريقة ليس في تعيين الحل فقط ولكن في دراسة خواص الحل دون اللجوء إلى حل النظام فعلياً .

مبرهنة :

لتكن $A = [a_{ij}]$ مصفوفة من الدرجه n لها معكوس ، وليكن

$$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

عندئذ يكون الحل الوحيد لنظام المعادلات $AX = B$ هو :

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A}, x_2 = \frac{\det A_2}{\det A}, \dots, x_n = \frac{\det A_n}{\det A}$$

حيث A_i هي المصفوفة التي نحصب عليها من المصفوفة A بوضع العمودB بدلاً من العمود j .

البرهان :

بما أن$AX = B$ وحيث ان للمصفوفة A معكوس فإننا نجد ان :

$$X = A^{-1}B = \left(\frac{1}{\det A}\right) * (\mathrm{adj})B$$

$$= \begin{pmatrix} c_{11} & c_{21} & \dots & c_{n1} \\ c_{12} & c_{22} & \dots & c_{n2} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{1i} & c_{2i} & \dots & c_{ni} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ c_{1n} & c_{2n} & \dots & c_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

عندئذ :

$$x_i = \frac{1}{\det A}(b_1c_{1i} + b_2c_{2i} + \dots + b_nc_{ni})$$

$$\forall i = 1,2, \dots, n$$

ولكن إذا حسبنا $\det A_i$ باستخدام العمود i فإننا نجد أن :

$$\det A_i = b_1c_{1i} + b_2c_{2i} + \dots + b_nc_{ni}$$

وبالتالي فإن :

$$\forall i = 1,2,3, \dots, n\,;\ x_i = \det A_i / \det A$$

مثال :

استخدم قاعدة كرامر لحل نظام المعادلات التالي :-

$$x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 6$$
$$2x_1 + x_2 + x_4 = -1$$
$$3x_1 - x_2 - 2x_3 + x_4 = -2$$
$$x_1 + 2x_2 + x_3 - 2x_2 = 5$$

الحل :

النظام يكافئ المعادلة المصفوفيه $AX = B$ حيث ان :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$,B = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 5 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$$

وبحساب محددة A نجد أن$\det A = -32$ كذلك نجد أن :

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \\ 5 & 2 & 1 & -2 \\ -2 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & 5 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 6 & -1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 5 & -2 \\ 3 & -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 2 & 1 & 5 \\ 3 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

وبحساب المحددات نجد أن :

$$\det A_1 = -32 \,, \det A_2 = 32 \,, \det A_3 = -64 \,, \det A_4 = 64$$

وعلية فإن :

$$x_1 = \det A_1 / \det A = 1$$
$$x_2 = \det A_2 / \det A = -1$$
$$x_3 = \det A_3 / \det A = 2$$
$$x_4 = \det A_4 / \det A = -2$$

(3-5) طريقة كراوتتشوتسكي :

لتكن $AX = B$ جملة معادلات خطية ذات n مجهول و n معادلة وبفرض أن مصفوفة الأمثال قابلة للقلب .

تعتمد هذه الطريقة على كتابة المصفوفة A على الشكل جداء مصفوفتين ، الأولىL مثلثية دنيا ، كل عنصر من عناصر قطرها الرئيسي يساوي الواحد ، والثانية U مثلثية عليا .

وبالتالي تصبح جملة المعادلات الخطية : $L \cdot U \cdot X = B$

إذا فرضنا $Y = U \cdot X$ حيث Y مصفوفة عمودية ، عندئذ يمكن أن تكتب :

$$L \cdot Y = B, U \cdot X = Y$$

وفقاً لذلك ، يكون فقاً لذلك ، يكون يجاد مجموعة حلول جملة المعادلات الخطية يتطلب أولاً إيجاد المصفوفة العمودية Y وبعدها إيجاد المصفوفة العمودية X .

مثال :

لتكن جملة المعادلات الخطية المعرفة على حقل الأعداد الحقيقية R .

$$x + 2y = 3z = 1$$
$$2x + y + 3z = 2$$
$$3x + y + z = 1$$

إن الشكل المصفوفي لهذه الجملة : $AX = B$ ، حيث :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix}$$

مصفوفة الأمثال ، و

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$
$$\in M_3(R)$$

تكتب مصفوفة الأمثال A على الشكل جداء مصفوفتين $L \cdot U$ ، حيث L مثلثية دنيا و كل عنصر من عناصر قطرها الرئيسئ يساوي الواحد ، وU مثلثية عليا وفق مايلي :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} = L \cdot U = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a & 1 & 0 \\ b & c & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & e & f \\ 0 & g & n \\ 0 & 0 & m \end{pmatrix} \right)$$

$$= \begin{pmatrix} d & e & f \\ ad & ac + g & af + h \\ bd & bc + cg & by + ch + m \end{pmatrix}$$

بالمطابقة نجد أن :

$$a = 2, c = \frac{5}{3}, e = 3, g = -3$$

$$b = 3, d = 1, f = 3, h = -3$$

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & 5/3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$, U = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\in M_3(R)$$

نعين المصفوفة العمودية

$$Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$$

وذلك بحل جملة المعادلات المصفوفية :

$$L \cdot Y = B$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & \frac{5}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} y_1 = 1 \\ 2y_1 + y_2 = 2 \\ 3y_1 + \frac{5}{3}y_2 + y_3 = 1 \end{bmatrix} \rightarrow y_1 = 1, y_2 = 0, y_3 = -2$$

تعين المصفوفة العمودية

$$X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

بحل جملة المعادلات المصفوفية $U \cdot X = Y$

$$\begin{pmatrix}1 & 3 & 3\\0 & -3 & -3\\0 & 0 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-2\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}x+3y+3z=1\\-3y-3z=0\\-3z=-2\end{pmatrix}\rightarrow x=\frac{1}{3}\ ,y=\frac{2}{3}\ z=-\frac{2}{3}$$

وبالتالي مجموعة حلول النظام هي :

$$S=\left\{\left(\frac{1}{3},\frac{2}{3},-\frac{2}{3}\right)\right\}$$

مثال :

لتكن جملة المعادلات الخطية المعرفة على حقل الأعداد الحقيقية R :

$$x+y+z-t=2$$
$$x-y-z+2t=0$$
$$4x+4y+z+t=11$$
$$2x+y+2z-2t=2$$

نكتب مصفوفة الأمثال على شكل جداء مصفوفتين $L \cdot U$ ، حيث L مثلثية دنيا وعناصر قطرها الرئيسي تساوي الواحد ، و U مثلثية عليا كالآتي :

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & -1\\1 & -1 & -1 & 2\\4 & 4 & 1 & 1\\2 & 1 & 2 & -2\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\1 & 1 & 0 & 0\\4 & 0 & 1 & 0\\2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\0 & -2 & -2 & 3\\0 & 0 & -3 & 5\\0 & 0 & 0 & \frac{1}{6}\end{pmatrix}$$

نعين بعد ذلك المصفوفة :

$$Y=\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}$$

وذلك بحل المعادلة المصفوفية :

$$L \cdot Y = B$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{3} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = 2, y_2 = -2, y_3 = 3, y_4 = 0$$

وبالتالي نحصل على المصفوفة X ، وذلك بحل المعادلة المصفوفية :

$$U \cdot X = Y$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x + y + z - t = 2$$

$$-2y - 2z + 3t = -2$$

$$-3z + 5t = 3$$

$$\frac{1}{6}t = 0$$

ومنه نجد أن للنظام حل وحيد :

$$x = 1 , y = 2 , z = -1 , t = 0$$

وبالتالي تكون مجموعه حل النظام هي :

$$s = \{(1,2,-1,0)\}$$

الفصل الرابع

المفهوم الهندسي لأنظمة المعادلات الخطية

(1-4) مقدمة:

نفرض أن $AX = B$ نظام من n معادلة خطية في m من المجاهيل .

الحل $X = C$ لهذا النظام يمكن النظر إلية على أنه نقطة في فراغ كارتيزي ذو بعد m أي أن $X \in R^m$. الحل $X = C$ هو عبارة عن $m \times 1$. مصفوفة و $\grave{X}$ عبارة عن عدد m من الأعداد الحقيقية المرتبة ، تسمى المجموعة

$\{C \in M_{m\times1}\}$بمجموعة الحل للنظام $AX = B$.

إذن السؤال الهندسي الآن ماطبيعة شكل الحل في R^m؟

بالطبع إذا كان النظام غير متوافق تكون المجموعة خالية ومجموعة الحل تكون فراغ جزئي من $M_{m\times1}$ إذا كان وفقط إذا كان $B = 0$.

(2−4) المحل الهندسي :

المحل الهندسي لمعادلة واحدة من النظام $AX = B$ يسمى المستوى الأعظم Hyper planeفي R^m (إذا كان $m = 2$ فإن المحل الهندسي يكون خط مستقيم إذا كانت $m = 3$ فإن المحل الهندسي يكون مستوى) . ولهذا النظام $AX = B$ يمثل عدد n مستوى أعظم في R^m ليس بالضرورة أن يكونوا كلهم مختلفين ويكون المحل الهندسي للحل هو عبارة عن خط مستقيم أو نقطة أو المحل الهندسي خالي (ليس لها حل).

مثال :

ادرس المحل الهندسي لحل مجموعة المعادلات

$$4x - 2y + 6z = 1,2x + y - 3z = 2,6x - 3y + 9z = 4$$

الحل :

العمليات الأولية على نظام المعادلات الخطية المعطى تؤدي إلى نظام غير متوافق من المعادلات

$$x = 0, y - 3z = 0,0 = 1$$

ولهذا لاتوجد نقطة مشتركة بين المستويات الثلاث .في هذه الحالة مستويين الأول والثالث متوازيين واتجاه العمودي عليهما هو $(2,-1,3)$.

بما أن الثلاث مستويات ليست جميعها متوازي ،المستويين متوازيين (الأول والثالث) يقطعا المستوى الثاني في خطين مستقيميين متوازيين .

إذا كان النظام $AX = B$ متفق ، إذن طبيعة مجموعة الحل تعتمد على عدد البرامترات في الحل . إذا لم توجد بارامترات يكون للنظام حل وحيد والذي يمثل بنقطة في الفراغ R^m . إذا كان لدينا معادلتين في مجهولين لهما حل وحيد ، هذه المعادلات تمثل بخطين مستقيمين غير متوازيين في المستوى ومتقاطعين في نقطة . ولكن في الحالة العامة أي حل من الممكن أن يحتوي على بارامتر أو أكثر .

مثال :

أوجد المحل الهندسي المناظر لمجموعة حل نظام المعادلات

$$x - 2y + z = 5, 3x + y - 4z = 1, x + 5y - 6z = 9$$

الحل :

بإجراء العمليات الأولية على هذا النظام (طريقة الحذف لجاوس) يتحول النظام إلى

$$x - z = 1, y - z = -2$$

وهذا الحل يحتوي على بارامتر واحد t أي أن الحل هو

$$x = 1 + t, y = t - 2, z = t, t \in R$$

المحل الهندسي لمجموعة الحل في الفراغ R^3 يكون على الصورة

$$(x, y, z) = t(1,1,1) + (1, -2,0), t \in R$$

إذن الثلاث مستويات تتقاطع في خط مستقيم اتجاهه $(1,1,1)$ ويمر خلال النقطة $(1, -2,0)$.

في المثال السابق ، بارامتر واحد كان ضروري للتعبير عن كل الحلول والمحل الهندسي للحل كان خط مستقيم .

عدد البارامترات اللازم لوصف المحل هندسيا يسمى عدد درجات الحرية للمحل الهندسي degree of freedom .

إذن الخط المستقيم له حرية واحدة والنقطة ليست لها درجة حرية والفراغ كله له ثلاث درجات حرية.

المستوى $x + 2y - z = 3$ يمكن التعبير عنه (باعتبار حلول معادلة من الدرجة الأولى) في الصورة

$$x = 3 - 2t + s, y = t, z = s, \forall t, s \in R$$

والبارامترات t, s تمثل درجتين من درجات الحرية والحل يمكن التعبير عنه في الصورة

$$(x, y, z) = (3,0,0) + t(-2,1,0) + s(1,0,1) \forall t, s \in R$$

وهذا يمثل مستوى يمر خلال النقطة $(3,0,0)$ ويوازي المستوى الذي يمر خلال نقطة الأصل ومولد بالمتجهات $(1,0,1), (-2,1,0)$. هذه الفكرة يمكن تعميمها للمحل الهندسي لأي معادلة خطية في

$$p = u + tv + sw\ , u, v, w \in R$$

حيث v, w متجهات مستقلة خطيا ، هذا المحل الهندسي يسمى مستوى في R^m .

مثال :

ادرس تقاطع المستويات الفوقية (العظمى) hyper planes في الفراغ R^4 والمعطاة بالعلاقة الخطية

$$x + y + 2z + 5w = 5$$
$$3x + y + 8z + 7w = q$$
$$x - y + 4z - 3w = -1$$

الحل:

بإجراء بعض العمليات الأولية على نظام المعادلات المعطى يتحول النظام إلى

$$x + 3y + w = 2$$
$$y - z + 4w = 3$$

وهذا الحل يعتمد على بارامترين والمحل الهندسي له درجتين حرية ولهذا فهو مستوى .لنرى ذلك نكتب الحل على الصورة

$$(x, y, z, w) = (2,3,0,0) + s(-3,1,1,0) + t(-1, -4,0,1)$$
$$, \forall\ s, t \in R$$

وهذا يمثل مستوى في R^4 يمر خلال النقطة $(2,3,0,0)$ ويوازي المستوى المار بنقطة الأصل ومولد بالمتجهات $(-1, -4,0,1), (-3,1,1,1)$.

مثال :

أوجد أساس للفراغ المولد بالمتجهات

$$(1,0,1,2,1), (1,0,1,2,2), (2,1,0,1,2), (1,1, -1, -1,0)$$

الحل :

الفراغ المولد بهذه المتجهات هو فراغ الصفوف للمصفوفة

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

بإجراء العمليات الأولية على صفوف المصفوفة تأخذ الصورة

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

الصفوفة الغير صفرية (متجهات) هي

$$(1,0,1,2,0), (0,1,-2,-3,6), (0,0,0,0,1)$$

تكون أساس لفراغ الصفوف وبالتالي فهي أساس للفراغ المولد بالمتجهات المعطاة.

مثال :

حدد ما إذا كانت مجموعة المعادلات الآتية لها حل أم لا؟

$$\begin{gathered} 5x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 1 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_3 + 5x_4 = 0 \end{gathered}$$

الحل :

مجموعة المعادلات يكون لها حل إذا كانت مرتبة مصفوفة المعاملات تساوي مرتبة المصفوفة الموسعة

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \\ 2 & 1 & 4 & -2 & 1 \\ 5 & -1 & 2 & 1 & 7 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -3 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & -12 & 1 \\ 0 & 14 & 32 & -24 & 7 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & -6 & 5 & 0 \\ 0 & 7 & 16 & -12 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 5 \end{array}\right)$$

واضح أن المصفوفة الموسعة من المرتبة الثالثة بينما مصفوفة المعاملات من المرتبة الثالثة . أي أن مجموعة المعادلات ليس لها حل .

مثال :

هل مجموعة المعادلات الآتية متفقة ؟

$$\begin{gathered} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 2 \\ x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - x_3 = -2 \end{gathered}$$

$$3x_1 + 4x_2 + 3x_3 = 0$$

الحل :

بإجراء العمليات الأولية على صفوف المصفوفة الموسعة نحصل على

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 4 & 3 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & -1 & -4 & -4 \\ 3 & 4 & 3 & -7 & -8 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & -2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 5 & 3 & 8 \\ 0 & 3 & 2 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

أي أن مجموعة المعادلات السابقة تكافئ مجموعة المعادلات

$$3x_1 + 5x_3 + 3x_4 = 8$$

$$x_2 + 2x_3 - 3x_4 - 3x_4 = -4$$

$$\therefore\ x_1 = \frac{8}{3} - \frac{5}{3}x_2 - x_4$$

$$x_2 = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}x_3 + x_4$$

واضح أمما سبق أن مصفوفة مرتبة مصفوفة المعاملات يساوي 2 وبذلك تكون مجموعة المعادلات المعطاة فراغاً اتجاهياً بعده $4 - 2 = 2$ أي أنه يوجد متجهان مستقلان خطياً يمثلان أساساً لفراغ الحلول .

بوضع $x_4 = \mu, x_3 = \lambda$ يكون

$$x_1 = \frac{8}{3} - \frac{5}{3}\lambda - \mu$$

$$x_2 = -\frac{4}{3} - \frac{2}{3}\lambda + \mu$$

$$x_3 = \lambda$$

$$x_4 = \mu \qquad ,\lambda, \mu \in R$$

وهذا هو حل مجموعة المعادلات المعطاة . ويتضح أنه يوجد عدد لا نهائي من الحلول حيث أن كل قيمة من قيم λ, μ تعطي حلاً لمجموعة المعادلات .

والتفسير الهندسي للحل هو أن كل معادلة من نظام المعادلات (*) المعطى يمثل مستوى أعظم في الفراغ R^4 . وهذه المستويات الأعظم تتقاطع كلها في مستوى يعتمد على بارامترين λ, μ . ومعادلته هي

$$(x_1, x_2, x_3, x_4) = \left(\frac{8}{3}, \frac{4}{3}, 0,0\right) + \lambda\left(-\frac{5}{3}, \frac{2}{3}, 1,0\right) + \mu(-1,1,0,1)$$

وهو عبارة عن مستوى يمر بالنقطة $(\frac{8}{3}, -\frac{4}{3}, 0,0)$ ويوازي الإتجاهين

$$\bar{a} = \left(-\frac{5}{3}, -\frac{2}{3}, 1,0\right), \ \ .\bar{b} = (-1,1,0,1)$$

مثال :

أثبت أن مجموعة المعادلات الآتية ليس لها حل (ليست متفقة)

$$3x + 4y - z + 2t = 1$$
$$x - 2y + 3z + t = 1$$
$$3x - 14y - 11z + t = 0$$

الحل :

المصفوفة الموسعة

$$[A/B] = \left(\begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 3 & 1 & 2 \\ 3 & -14 & -11 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

بإجراء العمليات الأولية على الصفوف يمكن أن نرى

$$\text{rank } A\,, \text{rank } [A/B] = 3$$

أي أن المجموعة غير متفقة .

مثال :

أوجد حل لنظام المعادلات الخطية المتجانس

$$\begin{aligned} x + 3y - 2z &= 0 \\ 2x - y + 4z &= 0 \qquad (*) \\ x - 11y + 14z &= 0 \end{aligned}$$

الحل :

هذا النظام يكافئ المعادلة المصفوفية

$$AX = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 2 & -1 & 4 \\ 1 & -11 & 14 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

باستخدام العمليات الأولية على صفوف المصفوفة A فإن النظام يتحول إلى

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & -7 & 8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

أي أن

$$x + 3y - 2z = 0$$
$$-7y + 8z = 0$$

أي $x = -\frac{10}{7}z$, $y = \frac{8}{7}z$ حيث z يعتبر كبارامتر ، أي لكل قيمة من قيمه من قيم z توجد قيمة للمتغيرات x, z وهذا يوضح معنى أن النظام له عدد لانهائي من الحلول ، مثلاً $z = 1$ يكون $x = -\frac{10}{7}, y = \frac{8}{7}$. والتأويل الهندسي للحل هو أن المستويات الثلاث المناظرة للنظام (*) تتقاطع في خط مستقيم (عدد لانهائي من النقط تناظر عدد لانهائي من الحلول). واضح أن المستويات الثلاث تمر بنقطة الأصل وبالتالي خط التقاطع يمر بنقطة الأصل والخط المستقيم يعطى من

$$(x, y, z) = t\left(-\frac{10}{7}, \frac{8}{7}, 1\right)$$

ويوازي الإتجاه

$$t = (-\frac{10}{7}, \frac{8}{7}, 1)$$

مثال :

أوجد قيم λ, μ التي تجعل نظام المعادلات الخطية الآتية :

$$x + y + z = 6$$
$$x + 2y + 3z = 10$$
$$x + 2y + \lambda z = \mu$$

1. ليس له حل.
2. له حل وحيد.
3. له عدد لانهائي من الحلول .

الحل :

نوضح الحل من خلال المحددات والمصفوفات :

نظام المعادلات يكون له حل وحيد إذا كان وكان فقط محدد مصفوفة المعاملات مختلف عن الصفر (أي مرتبتها تساوي 3(عدد المجاهيل))

أي أن

$$\det\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 3\\ 1 & 2 & 3\end{pmatrix} = \lambda - 3 \neq 0$$

إذا يكون للنظام حل وحيد عندما $\lambda \neq 3$, μ تأخذ أي قيمة .

باستخدام المصفوفة الموسعة والعمليات الأولية على صفوفها يتحول النظام إلى

$$(A/b)\sim\left(\begin{array}{ccc|c}1 & 1 & 1 & 6\\ 0 & 1 & 2 & 4\\ 0 & 0 & \lambda-3 & \mu-10\end{array}\right)$$

وبذلك نرى أنه في حالة $\lambda = 3$, $\mu = 10$ أن

$$r(A) \neq r(A/b)$$

وبذلك النظام ليس له حل .

أما في حالة $\lambda = 3$, $\mu = 10$ تكون $r(A) = r(A/b)$.

وبذلك يوجد عدد لانهائي من الحلول .

أما في حالة $\lambda \neq 3$, μ اختيارية فإن النظام له حل وحيد.

النتائج والتوصيات

أولاً.النتائج:

1. إمكانية حل الأنظمة الخطية بطريقة جاوس ، وجاوس – جوردان ، كرامر ، كراوتتسوتسكي.
2. يمكن تمثيل الأنظمة الخطية في صورة أشكال هندسية ، وكذلك يكون للنظام خطي حل وحيد أو عدد محدود من الحلول أو عدد غير منتهي من الحلول.

ثانياً.التوصيات:

1. إستخدام الطرق العددية لحل الأنظمة الخطية.
2. توسيع طرق حل أنظمة المعادلات الخطية في مقرر الجبر الخطي.
3. ترجمة مراجع الجبر الخطي الى اللغة العربية.

المراجع والمصادر :

1. راوية فوزي الرخ ، مكتبة المجتمع العربي للنشر والتوزيع ، الطبعة الأولى ، 2010.
2. رمضان محمد جهيمة ، الجبر الخطي ، دار الكتاب الجديده المتحدة ، الطبعة الأولى 1998.
3. عبد اللطيف هنانو ،شوقي محمد الراشد ، الجبر الخطي (1) ،منشورات دار جامعة دمشق كلية العلوم ،1435 _1436، 2014 _2015.
4. فرانك آيرز ، المصفوفات ، الطبعة العربية ،1962_1974 ،دار نشر كتب ماكجروهيل
5. فرانك آيرز، المصفوفات ، الدار الدولية الإستثمارات الثقافية ، الطبعة الثامنة 2008 .
6. معروف عبدالحمن سمحان ، د.علي بن عبدالله السحيباني ، د. فوزي بن أحمد الذكير ، الجبر الخطي وتطبيقاتة ،مكتبة العبيكان، الطبعة الأولى ، 1422 ، 2001.
7. المنجي بلال ، فضاءات المتجهات ، 4 أكتوبر 2017 .
8. هوارد انشون ، الجبر الخطي المبسط ، دار جون وايلي وأولاده ، 1982 .