SUST Journal of Natural and Medical Sciences (JNMS) vol. **18** (1) 2017
ISSN (Print): 1858-6805 e-ISSN (Online): 1858-6813

SUST
Journal of Natural and Medical Sciences
Journal homepage:
http://Scientific-journal.sustech.edu/

استخدام اسلوب المحاكاة في تقدير معلمتي المقياس والشكل لتوزيع قاما

مدني محمد مدني أحمد [1*] وأحمد محمد عبد الله حمدي [1] وعفراء هاشم عبد اللطيف [1]
جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا، كلية العلوم- قسم الاحصاء
Email:madany.mhmd47@gmail.com
تاريخ استلام الورقة: ديسمبر 2016 تاريخ القبول: يناير 2017

المستخلص.
هدفت هذه الدراسة الى تقدير معلمة المقياس (α) ومعلمة الشكل (β) لتوزيع قاما باستخدام اسلوب المحاكاة في توليد بيانات العينة باحجام مختلفة (صغيرة n=25، متوسطة n = 50 وكبيرة n = 100) والمقارنة بين طرق التقدير التقليدية (طريقة العزوم ، طريقة الامكان الاعظم وطريقة التباين الأقل) بواسطة مقياس متوسط مربع الأخطاء MSE للحصول علي افضل تقدير. خلصت الدراسة الى ان طريقة التباين الاقل اعطت اقل متوسط مربع اخطاء في جميع العينات وعليه تعتبر هذه الطريقة افضل من سابقتيها في تقدير معلمتي توزيع قاما، وقد اوصت الدراسة باستخدامها كما اوصت الدراسة باجراء مقارنات بين طرق التقدير التقليدية (التباين الاقل، العزوم، الامكان الأعظم .... الخ) مع طرائق بييز المختلفة في تقدير معلمتي توزيع كاما.
الكلمات المفتاحية: طريقة العزوم، طريقة الامكان الاعظم، طريقة التباين الاقل، متوسط مربع الاخطاء.

ABSTRACT
This study aimed to estimate the parameter scale and the shape parameter of the distribution of the Gama using simulation method to generate sample data of different sizes and comparison between traditional methods of estimation methods (Moments Method, Maximum Likelihood Method and Minimum Variance Method). By contrast the average square meter error to get the best estimate. The study concluded that the method of Minimum Variance gave the least mean square errors in all the samples and it is considered a way better than the previous tow in the estimation of parameters Gama distribution. The study also recommended that comparisons between traditional methods of estimation (Moments Method, Maximum Likelihood Method and Minimum Variance Method) with different ways of Bayesian estimation to parameter Gama distribution.

KEYWORDS: Moments Method, Maximum Likelihood Method , Method of Minimum Variance, mean of square error.

مقدمة.

ان لنظرية التقدير اهمية كبيرة في تطبيقات النظرية الاحصائية في الجوانب العملية. ومن وجهة نظر احصائية قسم علم الاحصاء النظرية الاحصائية الى قسمين رئيسين هما الاحصاء الوصفي والاحصاء الاستدلالي الذي يهتم باصول وقواعد حساب افضل تقديرات لمعالم المجتمع من خلال نظرية التقدير وكذلك اختبار الفرضيات الخاصه بتلك المعالم. وبشكل عام يمكن النظر الى نظرية التقدير على انها جزءان متكاملان الأول يهتم بالبحث عن افضل تقدير لمعلمة مجهولة تخص المجتمع وهذا غالباً ما يسمي (التقدير بنقطة)، في حين ان الجزء الثاني يهتم بالبحث عن افضل فترة يمكن ان تحصر قيمة المعلمة المجهولة خلالها وهذا غالباً ما يسمى (التقدير بفترة). على ضوء ما تقدم وباستخدام اسلوب المحاكاة في توليد البيانات للحصول على عينات مختلفة يستخدم في هذه الدراسة تقدير النقطة في حساب قيمة عددية لمعلمتي توزيع قاما وذلك بالاعتماد على اهم طرق التقدير التي تقودنا للحصول على تقديرات جيدة لمعلمتي المجتمع الذي سحبت منه العينه كطريقة العزوم، طريقة الامكان الاعظم وطريقة التباين الاقل والحكم على افضل طريقة تقدير من بين التقديرات.

مشكلة الدراسة.

ان التقدير المتحصل عليه من العينه هو متغير عشوائي بسبب اختلاف قيمته من عينة لأخرى ممكنة السحب من مجتمع معين، وعلى اساس قياسات هذه العينة فإننا نرغب للوصول الى افضل تقدير ممكن لمعلمتي توزيع قاما (معلمة المقياس α ومعلمة الشكل β) من بين جملة

تقديرات. وعليه يمكن صياغة مشكلة الدراسه في السؤال التالي:
هل من الممكن معرفة افضل تقدير لمعلمتي توزيع قاما من خلال المقارنه بين تقديرات طريقة العزوم، طريقة الامكان الاعظم وطريقة التباين الاقل.

اهمية وهدف الدراسة.

تنبع اهمية هذه الدراسة من اهمية استخدام بيانات العينة في تقدير معالم المجتمعات لأنه من غير المعقول وغير العملي وبسبب محدودية الموارد والوقت والامكانات استخدام جميع مفردات المجتمع للحصول على القيمة الفعلية للمعلمة. بينما تهدف الدراسة الى تقدير كل من معلمة المقياس (α) ومعلمة الشكل (β) لتوزيع قاما ذي المعلمتين والمقارنة بين طرائق التقدير التقليدية وهي طريقة العزوم وطريقة الامكان الاعظم وطريقة التباين الاقل. وسوف نعتمد المحاكاة لتحقيق هدف الدراسة.

فرضية الدراسة.

من اجل الوصول الى افضل تقدير لمعلمتي توزيع قاما من خلال المقارنة بين طريقة العزوم، طريقة الامكان الاعظم وطريقة التباين الاقل يمكن صياغة فرضية الدراسة على النحو التالي: من الممكن الوصول الى افضل تقدير لمعلمتي توزيع قاما من خلال المقارنة بين طريقة العزوم، طريقة الامكان الاعظم وطريقة التباين الاقل .

منهجية وإجراءات الدراسة.

سيتبع الباحث المنهج الوصفي التحليلي باعتباره انسب المناهج توافقاً مع طبيعة الدراسة بالاضافة الى استخدام الصيغ الرياضية المتمثلة في توضيح المفاهيم الاساسية لنظرية التقدير، وسيستخدم اسلوب المحاكاة فيما يتعلق بالجانب التطبيقي للدراسة في توليد بيانات عينة الدراسة بواسطة البرنامج الإحصائي Minitab

عينة الدراسة.

عينة الدراسة عبارة عن بيانات مولدة بواسطة البرنامج الإحصائي Minitab لمفردات تتبع توزيع قاما ذو المعلمتين وباحجام مختلفة (صغيرة n=25 ، متوسطة n =50، كبيرة n = 100)

الجانب النظري.

توزيع قاما Distribution gamma

توزيع قاما يمثل مجموعة واسعة من التوزيعات ذات معلمتين تتميز بمرونة وقدرة على توليد توزيعات متعددة حسب قيم المعلمتين. كما ان لهذا التوزيع أيضاً علاقة بالتوزيعات F، t ومربع كاي. ويستخدم توزيع قاما لتمثيل بعض الظواهر مثل توزيع الدخل والادخار تحت شروط معينة[1].

صيغة القانون.

نقول عن متغير عشوائي انه يتبع توزيع قاما اذا كانت دالة كثافته كما يلي

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^{\alpha-1}e^{-x/\beta}}{\beta^{\alpha}\Gamma(\alpha)}, & x>0\\ 0 \quad , & x\le 0\end{cases} \quad ,\alpha>0,\beta>0$$

حيث $\Gamma(\alpha)$ هي الدالة قاما:

$$\Gamma(\alpha)=\int_0^{\infty} t^{\alpha-1}e^{-t}\,dt \qquad \alpha>0$$

ونكتب $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$

خصائص توزيع قاما:

$$M_x(t) = (1-\beta t)^{-\alpha} \qquad \mu = \alpha\beta \qquad \sigma^2 = \alpha\beta^2$$

حيث:

$M_x(t)$: الدالة المولدة لعزوم للتوزيع.

μ : متوسط التوزيع

σ^2 : تباين التوزيع

التقدير

هو عملية استنتاج او تقدير احد معالم المجتمع (مثل الوسط الحسابى او الانحراف المعيارى) بناءً على بيانات عينة مسحوبة من المجتمع . والمقصود بالتقدير هو تقدير معالم المجتمع الاحصائي (او التوزيع الاحتمالي) والتي غالباً ما تكون مجهولة. وهناك نوعان (او اسلوبان) للتقدير[2]:

1. تقدير النقطة (او القيمة الواحدة): التقدير بنقطة يعني ان نحصل على قيمة واحدة من العينة، وتستخدم هذه القيمة الواحدة كتقريب او كتقدير لمعلمة المجتمع المجهولة.

2. تقدير الفترة (أو فترة تشمل المعلم باحتمال معلوم او الثقة) : التقدير بفترة نحصل من خلاله على مدى Range او فترة تتحدد بحدين (حد ادنى وحد اعلى) - نحصل عليهما من العينة.

خواص المقدر الجيد.

من اهم خواص المقدر الجيد:

1. عدم التحيزUnbiasedness: هذه الخاصية تعني ان القيمة المتوقعة للتقدير $\hat{\theta}_n$ تساوي قيمة المعلمة θ، بمعنى آخر ان متوسط قيم التقديرات المستحصل عليها من كافة العينات الممكنة السحب من المجتمع فيما يخص المعلمة θ يجب ان يكون مساوياً للمعلمة θ فإذا كان عدد تلك العينات هو r وأن $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \hat{\theta}_3, ...\hat{\theta}_n$ تمثل تقديرات هذه العينات للمعلمة θ فإن مفهوم صفة عدم التحيز هو أن[3]: $\frac{1}{r}\sum_{i=1}^{r}\hat{\theta}_i = \theta$

2. الإتساقConsistency : المقدر المتسق هو الذي يتناقص فيه مقدار المخاطرة بزيادة حجم العينة n [4] فإذا قدرنا المعلمة θ بالمقدر النقطي $\hat{\theta}_n$ غير المتحيز فإن المخاطرة في عملية التقدير فإن المخاطرة في عملية التقدير $R(\hat{\theta}_n, \theta)$ تعرف كما يلي:

$$R(\hat{\theta}_n, \theta) = E(\hat{\theta}_n, \theta)^2$$

ويقال ان المقدر غير المتحيز $\hat{\theta}_n$ متسق اذ ـــ ب .

$$(\hat{\theta}_n, \theta)^2 = 0 \; R(\hat{\theta}_n, \theta) = \lim_{n\to\infty} E \lim_{n\to\infty}$$

3.الكفاءة النسبية Relative Efficiency : بفرض ان $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2$ تقديران غير متحيزين ومتسقين فإذا كان تباين $\hat{\theta}_1$ اقل من تباين $\hat{\theta}_2$ عندئذ يقال ان $\hat{\theta}_1$ تقدار اكثر كفاءة من $\hat{\theta}_2$ وعلى هذا الاساس يمكن حساب ما يسمي بمعامل الكفاءة الدي يمثل النسبة ما بين تباين التقدير الاكثر كفاءة وتباين تقدير آخر مثل $\hat{\theta}_2$ فإذا رمزنا للكفاءة بالرمز e فإن[3] :

$$e = \frac{v(\hat{\theta}_1)}{v(\hat{\theta}_2)} \qquad (3)$$

ويتضح ان قيمة e اقل ه بسط هذه النسبة اقل من مقامها كذلك فإن كفاءة θ_1 النسبية تزداد بإنخفاض قيمة e.

4. **الكفاية Sufficiency :** يقال ان المؤشر الاحصائي كاف اذا استخدمنا في حسابه جميع البيانات المتاحة من العينة العشوائية التي نختارها من مجتمع الدراسة لغرض تقدير المعلمة غير المعلومة[3]. بمعنى آخر المؤشر t افياً عنه اذا كان f(xIt) لا يعتمد على ن.

طرق التقدير النقطي:

الطرق التالية من اهم طرق التقدير النقطي واكثرها استخداماً:

1. طريقة العزوم The Method Of Moments

2. طريقة الامكان الاكبر Maximum Likelihood Methods
3. طريقة التباين الاقل Method Of Minimum Variance (MVUE).

طرق تقدير معلمتي القياس والشكل لتوزيع قاما.

فيما يلي الاجراءات المتبعة في تقدير معلمتي المقياس والشكل لتوزيع قاما وبواسطة طرق التقدير (طريقة العزوم، طريقة الامكان الاعظم وطريقة الاقل تباين).

3. طريقة العزوم The Method Of Moments

تعتبر من اقدم طرق التقدير وتعزى هذه الطريقة الى كارل بيرسون، وتعتمد هذه الطريقة عند استخراج مقدر المعلمة المجهولة على مساواة عزوم العينة مع عزوم المجتمع وحسب عدد المعلمات الموجودة في الدالة الاحتمالية المدروسة حيث[4]:

$$\mu_r^{/} = E(T^r) \quad \text{عزم المجتمع} \quad (4)$$

$$m_r^{/} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i^{\,r}, r = 1,2,3,... \quad \text{عزم العينة} \quad (5)$$

وللحصول على تقدير معلمة المقياس (α) ومعلمة الشكل (β) لتوزيع قاما فإننا نساوي العزم الاول للعينة ($m_1^{/}$) مع العزم الاول للمجتمع ($\mu_1^{/}$) وكذلك العزم الثاني للعينة ($m_2^{/}$) مع العزم الثاني للمجتمع ($\mu_2^{/}$) كما يلي:

العزم الأول للمجتمع

$$(6) \quad \mu_1^{/} = E(T) = \alpha\beta$$

العزم الأول للعينة

$$(7) \quad m_1^{/} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t_i = \bar{t}$$

العزم الثاني للمجتمع

$$(8) \quad \mu_2^{/} = E(T^2) = \alpha^2\beta(\beta+1)$$

العزم الثاني للعينة

$$(9) \quad m_2^{/} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t^2_{\ i}$$

وبمساواة العزم الاول للعينة بالعزم الاول للمجتمع يكون :

$$(10) \quad \bar{t} = \alpha\beta$$

وبمساواة العزم الثاني للعينة بالعزم الثاني للمجتمع يكون .

$$(11) \quad \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t^2_{\ i} = \alpha^2\beta(\beta+1)$$

SUST Journal of Natural and Medical Sciences (JNMS) vol. **18** (1) 2017
ISSN (Print): 1858-6805 e-ISSN (Online): 1858-6813

وبحل المعادلتين (10) و (11):

من المعادلة (10):

$$\hat{\alpha} = \frac{\bar{t}}{\hat{\beta}}$$

عوض في المعادلة (11):

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t^2{}_i = \hat{\alpha}^2 \frac{\bar{t}}{\hat{\alpha}}\left(\frac{\bar{t}}{\hat{\alpha}}+1\right)$$

$$\therefore \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t^2{}_i = \hat{\alpha}\bar{t}\left(\frac{\bar{t}}{\hat{\alpha}}+1\right)$$

$$\hat{\alpha}\bar{t} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t^2{}_i - \bar{t}^2$$

لكن : $s^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} t^2{}_i - \bar{t}^2$

ومنها : $\therefore \hat{\alpha}\bar{t} = s^2$

$$\therefore \hat{\alpha} = \frac{s^2}{\bar{t}} \qquad (12)$$

$$\hat{\alpha} = \frac{\bar{t}}{\hat{\beta}}$$

وبنفس الطريقة من المعادلة (10) وبالتعويض في المعادلة (11) يكون :

$$\hat{\beta} = \frac{\bar{t}}{s^2} \qquad (13)$$

4. طريقة الامكان الأكبر Maximum Likelihood Methods.

ان مبدأ طريقة الامكان الاكبر يكمن في ايجاد تقدير مثل $\hat{\theta}$ للمعلمة θ الذي يجعل دالة الامكان (L) في نهايتها العظمي، فإذا كانت $x_1, x_2, x_3, \ldots\ldots\ldots, x_n$ تمثل قياسات عينة مسحوبة من مجتمع بدالة كتلة احتمالية $P(x,\theta)$ او دالة كثافة احتمالية $f(x,\theta)$ عندئذ تعرف دالة الامكان الاكبر كالآتي[3]:

$$L = p(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} P(x_i, \theta) \qquad (14)$$

في حالة المتغيرات المتقطعة

$$L = f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \theta) = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta) \qquad (15)$$

ولجعل دالة الامكان الاكبر نهاية عظمي يجب حل المعادلة التفاضلية:

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = O \quad \text{بشرط أن} \quad \frac{\partial^2 L}{\partial \theta^2} < O \qquad (16)$$

وبهدف السهولة في اجراء عمليات التفاضل فإنه غالباً ما يتم التعامل مع Log L . وللحصول على تقدير معلمة المقياس (α) ومعلمة الشكل (β) لتوزيع قاما بطريقة الامكان الاكبر نتبع الخطوات التالية:

نستخرج دالة الامكان الاكبر كالآتي:

$$L = \prod_{i=1}^{n} f(x_i, \theta)$$

$$L = \frac{1}{[\Gamma(\alpha)]^n (\beta^{\alpha n})} \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha-1} e^{-\sum_{i=1}^{n} x_i} \qquad (17)$$

ثم نشتق (**ln*L***) لكل من (α,β) ونساوي المشتقة بالصفر.

اولاً: $\frac{\partial \ln L}{\partial \beta}$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \beta} = \frac{n\bar{x}}{\hat{\beta}^2} - \frac{n\hat{\alpha}}{\hat{\beta}}$$

$$= \frac{n\bar{x}}{\hat{\beta}^2} - \frac{n\hat{\alpha}}{\hat{\beta}} = 0$$

$$\therefore n\bar{x} = n\hat{\alpha}\hat{\beta}$$

$$\hat{\beta} = \frac{\bar{x}}{\hat{\alpha}} \qquad (18)$$

ثانياً: $\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha}$

$$\frac{\partial \ln L}{\partial \alpha} = \frac{-n}{d\alpha}\left[\ln \Gamma(\hat{\alpha})\right] - n \ln \hat{\beta} + \sum_{i=1}^{n} \ln x_i = o$$

وبتعويض $\hat{\beta} = \frac{\bar{x}}{\hat{\alpha}}$ في المعادلة اعلاه:

$$\psi(\hat{\alpha}) - \ln \hat{\alpha} = \ln \left[\frac{(x_1 x_2 x_3 \ldots\ldots x_n)^{\frac{1}{n}}}{\bar{x}} \right]$$

حيث: $\psi(\hat{\alpha}) = \frac{\Gamma' \hat{\alpha}}{\Gamma \hat{\alpha}}$

وهي دالة تعرف بدالة قاما الثنائية Digamma Function بالتالي:

$$\psi(\hat{\alpha}) - \ln\hat{\alpha} = \ln R \qquad (19)$$

حيث ان R يمثل نسبة الوسط الهندسي الى الوسط الحسابي للعينة وقد اعتمد Sinha التقريب التالي لدالة قاما الثنائية:

$$\psi(\hat{\alpha}) = \ln\hat{\alpha} - \frac{1}{2\hat{\alpha}} \qquad (20)$$

وبتعويض تقريب Sinha في المعادلة (19) نحصل على:

$$\ln\hat{\alpha} - \frac{1}{2\hat{\alpha}} - \ln\hat{\alpha} = \ln R$$

$$\frac{-1}{2\hat{\alpha}} = \ln R$$

$$\therefore \hat{\alpha} = \frac{-1}{2\ln R} \qquad (21)$$

3. طريقة التباين الاقل(MVUE)

يتم وفق هذه الطريقة ايجاد تقديرات غير متحيزة ذات اقل تباين والشرط الكافي والضروري لوجود تقدير غير متحيز ذو اقل تباين مثل t هو امكانية صياغة المشتقة الجزئية الاولى لدالة الامكان للتوزيع (الدالة) بالشكل التالي[3]:

ويقال عندئذ أن t هو تقدير غير متحيز ذو اقل تباين للمعلمة θ وأن λ تمثل تباين هذا التقدير. وللحصول على تقدير معلمة المقياس (α) ومعلمة الشكل (β) لتوزيع تالية:

$$\frac{\partial logL}{\partial\theta} = \frac{t-\theta}{\lambda} \qquad (22)$$

عرفنا عند تقدير معلمتي توزيع قاما بطريقة الامكان

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\beta} = \frac{n\bar{x}}{\hat{\beta}^2} - \frac{n\hat{\alpha}}{\hat{\beta}}$$

بتوحيد المقامات والقسمة على $n\hat{\alpha}$:

$$\frac{\partial\ln L}{\partial\beta} = \frac{\frac{\bar{x}}{\hat{\alpha}} - \hat{\beta}}{\frac{\hat{\beta}^2}{n\hat{\alpha}}}$$

وبالمقارنة مع المعادلة (22) يكون:

$$\hat{\beta} = \frac{\bar{x}}{\hat{\alpha}} \qquad (23)$$

ومنها :

$$\hat{\alpha} = \frac{\bar{x}}{\hat{\beta}} \qquad (24)$$

الجانب التجريبي.

استخدام اسلوب المحاكاة لاجراء مقارنة بين طرق التقدير (العزوم، طريقة الامكان الاعظم وطريقة التباين

الاقل) في تقدير معلمة المقياس (α) ومعلمة الشكل (β) لتوزيع قاما، وباحجام مختلفة للعينات (صغيرة، متوسطة، كبيرة) والتعرف على افضل الطرق في تقدير معلمتي التوزيع بواسطة مقياس متوسط مربعات الخطأ MSE.

تقدير معلمتي توزيع قاما من بيانات عينة صغيرة مولدة بحجم 25 مفردة.

والجدول رقم (1) يوضح مفردات العينة ذات الحجم (n = 25) والمتوسط والتباين والوسط الهندسي للعينة وبمعلمات افتراضية (β=3 , α=0.5).

جدول (1): بيانات عينة مولدة بحجم 25 مفردة لقيم افتراضية(β=3 , α=0.5)

1.51095	1.74910	3.63186	0.36047	2.54494	متوسط العينة ($\bar{x}$ =1.5772632)
0.23284	1.64619	0.63765	1.16230	2.10894	تباين العينة(s^2 = 0.9961363991)
2.44936	4.17741	0.97959	0.77838	2.29482	
1.04014	0.33483	2.34059	0.43483	1.66667	**الوسط الهندسي للعينة (G = 1.2485445)**
1.20140	1.91713	1.66963	1.94573	0.61583	

1. مقدر

مقدر مع

بمتوسط مربع خطأ:

$$= \frac{s^2}{\bar{x}} = \frac{0.9961363991}{1.5772632} = 0.6315600333\,\hat{\alpha}$$

$$\text{MSE} = E(\hat{\alpha}-\alpha)^2 = \frac{(0.6315600333-0.5)^2}{25} = 0.000692321$$

مقدر معلمة الث

$$= \frac{\bar{x}^2}{s^2} = \frac{(1.5772632\,)^2}{0.9961363991} = 2.497408191\,\hat{\beta}$$

بمتوسط مربع خطأ:

$$\text{MSE} = E\,(\hat{\beta}-\beta)^2 = \frac{(2.497408191-3)^2}{25} = 0.01010394107$$

2. مقدر الامكان الأ

مقدر معلمة الشكل :

بمتوسط مر

$$= \frac{-1}{-0.4674254407} = 2.139378632 \quad \hat{\beta} = \frac{-1}{2\ln(R)} = \frac{-1}{2\ln(\frac{1.2485445}{.5772632})}$$

$$\text{MSE} = E\,(\hat{\beta}-\beta)^2 = \frac{(2.139378632-3)^2}{25} = 0.02962676555$$

مقدر معلمة المقياس:

$$= \frac{\bar{x}}{\hat{\beta}} = \frac{1.5772632}{2.139378632} = 0.7372529464\,\hat{\alpha}$$

بمتوسط مربع خطأ:

$$\text{MSE} = E(\hat{\alpha}-\alpha)^2 = \frac{(0.7372529464-0.5)^2}{25} = 0.002251558$$

تقدير معلمتي توزيع قاما من بيانات عينه متوسطه موده بحجم 50 مفرده.

والجدول رقم (2) يوضح مفردات العينة ذات الحجم (n = 50) والمتوسط والتباين والوسط الهندسي للعينة وبمعلمات افتراضية (β=3 , α=0.5).

ISSN (Print): 1858-6805 e-ISSN (Online): 1858-6813

جدول (2): بيانات عينة مولدة بحجم 50 مفردة لقيم افتراضية($\beta=3$, $\alpha=0.5$)

3.32523	2.25991	2.12074	0.83704	1.73802	متوسط العينة ($\bar{x}$=1.6324964)
1.09211	2.73202	1.83222	0.92391	0.84981	
1.63907	0.57635	3.46205	1.41301	0.77483	
0.50107	2.26913	1.14086	1.50699	1.80870	تباين العينة (s^2=1.130053786)
1.21695	2.17285	0.58051	2.23897	1.97110	
1.88365	2.71266	0.70744	1.53414	0.76564	
0.60557	2.34924	1.90856	3.54393	0.52804	
0.58107	1.25247	1.79247	4.13354	0.66646	**الوسط الهندسي للعينة (G =1.3216631)**
0.35236	0.35429	1.43762	1.25101	5.50610	
2.22371	1.45573	0.25244	1.98636	0.85687	

1. مقا

مقدر معلمه المقياس:

$$\hat{\alpha} = \frac{s^2}{\bar{x}} = \frac{1.130053786}{1.6324964} = 0.6922243663$$

بمتوسط مربع خطأ:

$$MSE=E(\hat{\alpha}-\alpha)^2 = \frac{(0.6922243663-0.5)^2}{} = 0.0007390041401$$

مقدر معلمة الشكل :

$$\hat{\beta} = \frac{\bar{x}^2}{s^2} = \frac{(1.6324964)^2}{1.130053786} = 2.357324412$$

بمتوسط مربع خطأ:

$$MSE = E(\hat{\beta}-\beta)^2 = \frac{(2.357324412-3)^2}{50} = 0.008260638229$$

2. مقدر الامكان الاعظ

مقدر معلمة الشكل :

$$\hat{\beta} = \frac{-1}{2\ln(R)} = \frac{-1}{2\ln(\frac{1.3216631}{1.6324964})} = \frac{-1}{-0.4224390183} = 2.367205577$$

بمتوسط مرب

$$MSE = E(\hat{\beta}-\beta)^2 = \frac{(2.367205577-3)^2}{50} = 0.0800575639$$

مقدر معلمة ا

$$\hat{\alpha} = \frac{\bar{x}}{\hat{\beta}} = \frac{1.6324964}{2.367205577} = 0.6896301766$$

بمتوسط مربع خطأ:

$$MSE = E(\hat{\alpha}-\alpha)^2 = \frac{(0.6896301766-0.5)^2}{50} = 0.0007191920772$$

3. مقدر التبا

مقدر معلمة المقياس:

$$\hat{\alpha} = \frac{\bar{x}}{\beta} = \frac{1.6324964}{3} = 0.54416546$$

بمتوسط مربع خطأ:

$$MSE = E(\hat{\alpha}-\alpha)^2 = \frac{(0.5441654667-0.5)^2}{} = 0.00003901176892$$

مقدر معلمة الذ

$$\hat{\beta} = \frac{\bar{x}}{\hat{\alpha}} = \frac{1.6324964}{0.5441654667} = 3$$

بمتوسط مربع خطأ:

$$MSE = E(\hat{\beta}-\beta)^2 = \frac{(3-3)^2}{50} = 0.00000$$

SUST Journal of Natural and Medical Sciences (JNMS) vol. **18** (1) 2017
ISSN (Print): 1858-6805 e-ISSN (Online): 1858-6813

تقدير معلمتي توزيع قاما من بيانات عينة كبيرة مولدة بحجم 100 مفردة.

والجدول رقم (3) يوضح مفردات العينة ذات الحجم ($n = 100$) والمتوسط والتباين والوسط الهندسي للعينة وبمعلمات افتراضية ($\alpha=0.5$, $\beta=3$).

جدول (3): بيانات عينة مولدة بحجم 100 مفردة لقيم افتراضية($\alpha=0.5$, $\beta=3$)

1.44912	1.35118	1.88920	0.75247	1.30035	
0.59002	0.52367	2.35752	1.02333	0.76948	متوسط العينة ($\bar{x}$ =1.4868728)
2.06083	2.25888	2.82020	1.03966	0.80699	
0.75851	0.72457	1.66751	1.29808	0.78122	
0.74049	1.74439	2.39381	0.79744	2.15831	
1.92390	1.82186	2.11273	1.08981	1.49266	
4.01414	1.89306	1.69294	0.80004	2.08508	
1.04474	0.62978	1.35192	0.90029	1.38347	
0.58687	1.44113	1.30166	1.09638	2.78945	تباين العينة (s^2 = 0.5302512825)
1.38770	2.95227	0.85197	1.09543	1.10580	
1.21535	0.63579	0.61782	0.61642	1.31008	
0.66753	1.91527	1.61308	0.55545	1.78764	
1.42082	1.26779	1.74648	0.83167	2.55512	
2.02026	2.02195	1.92533	0.68632	2.60695	
1.18073	3.21456	0.56920	2.54479	0.68782	**الوسط الهندسي للعينة (G =**1.3165923**)**
1.82635	2.78043	1.42961	1.57473	0.87190	
2.14340	1.67420	1.15340	1.54507	2.38413	
2.10813	0.97121	0.92935	1.41717	2.17294	
1.31474	1.06638	1.76369	2.02571	0.49848	
2.63169	0.64218	0.52865	2.95959	1.15762	

مقدر العزوم Mo

1. مقدر العزوم $\boldsymbol{Moments}$ (MM).

مقدر معلمة المقياس:

$$\hat{\alpha} = \frac{0.5302512825}{1.4868728} = \frac{s^2}{\bar{x}} = 0.356621819$$

بمتوسط مربع خطأ:

$$\text{MSE} = E(\hat{\alpha}-\alpha)^2 = \frac{(0.356621819-0.5)^2}{100} = 0.000205573028$$

مقدر معلمة الشكل

$$= \frac{\bar{x}^2}{s^2} = \frac{(1.4868728)^2}{0.5302512825} = 4.169326499\,\hat{\beta}$$

بمتوسط مربع خطأ:

$$\text{MSE} = E(\hat{\beta}-\beta)^2 = \frac{(4.169326499-3)^2}{100} = 0.01367324462$$

2. مقدر الامكان الاع

مقدر معلمة الشكل :

بمتوسط مربع خد

$$4.110884878 = \hat{\beta} = \frac{-1}{2\ln(R)} = \frac{-1}{2\ln(\frac{1.3165923}{1.4868728})} = \frac{-1}{-0.2432566296}$$

مقدر معلمة المقياس:

$$1234065211 = \frac{(4.110884878-3)^2}{100} = 0.0\ \text{MSE} = E(\hat{\beta}-\beta)^2$$

$$= 0.3616916659 = \frac{\bar{x}}{\hat{\beta}} = \frac{1.4868728}{4.110884878}\ \hat{\alpha}$$

بمتوسط مربع خطأ:

$$\text{MSE} = E(\hat{\alpha}-\alpha)^2 = \frac{(0.3616916659-0.5)^2}{100} = 0.00019129152$$

3. مقدر التباين الاقل Minimum Variance Unbiased Estimator (MVUE).

مقدر معلمة المقياس:

$$= 0.4956242667 = \frac{\bar{x}}{\ } = \frac{1.4868728}{\ }\ \hat{\alpha}$$

بمتوسط مربع خطأ:

$$= 0.000000191470422\quad \text{MSE} = E(\hat{\alpha}-\alpha)^2 = \frac{(0.4956242667-0.5)^2}{100}$$

مقدر معلمة الشكل

$$= \frac{\bar{x}}{\hat{\alpha}} = \frac{1.4868728}{0.4956242667} = 3\,\hat{\beta}$$

بمتوسط مربع خطأ:

$$\text{MSE} = E(\hat{\beta}-\beta)^2 = \frac{(3-3)^2}{100} = 0.00000$$

مناقشة وتفسير النتائج:

الجداول التالية تبين تقدير معلمة المقياس (α) والشكل (β) لتوزيع قاما باحجام العينات المختلفة (صغيرة n=25، متوسطة n = 50 وكبيرة n = 100) بقيم افتراضية ($\alpha = 0.5, \beta=3$).

جدول (4): تقدير معلمة القياس بقيمة افتراضية($\alpha=0.5$) للعينة ذات الحجم 25 مفردة

طريقة التقدير	التقدير	متوسط مربع الخطأ(MSE)
MM	**0.6315600333**	**0.000692321**
MLE	**0.7372529464**	**0.002251558**
MVUE	**0.526666667**	**0.000028444**

يبين الجدول رقم (4) ان تقدير معلمة المقياس بطريقة الاقل تباين اعطت اقل متوسط مربع اخطاء تليها طريقة العزوم ثم طريقة الامكان الاعظم.

جدول (5): تقدير معلمة القياس بقيمة افتراضية($\alpha=0.5$) للعينة ذات الحجم 50 مفردة

طريقة التقدير	التقدير	متوسط مربع الخطأ(MSE)
MM	**0.6922243663**	**0.0007390041401**
MLE	**0.6896301766**	**0.0007191920772**
MVUE	**0.5441654667**	**0.00003901176892**

يبين الجدول رقم (5) ان تقدير معلمة المقياس بطريقة الاقل تباين اعطت اقل متوسط مربع اخطاء تليها طريقة الامكان الاعظم ثم طريقة العزوم.

جدول (6): تقدير معلمة القياس بقيمة افتراضية($\alpha=0.5$) للعينة ذات الحجم 100 مفردة

طريقة التقدير	التقدير	متوسط مربع الخطأ(MSE)
MM	**0.356621819**	**0.000205573028**
MLE	**0.3616916659**	**0.000191291527**
MVUE	**0.4956242667**	**0.000000191470422**

يبين الجدول رقم (6) ان تقدير معلمة المقياس بطريقة الاقل تباين اعطت اقل متوسط مربع اخطاء تليها طريقة الامكان الاعظم ثم طريقة العزوم.

جدول (7) : تقدير معلمة الشكل بقيمة افتراضية($\beta=3$) للعينة ذات الحجم 25 مفردة

طريقة التقدير	التقدير	متوسط مربع الخطأ(MSE)
MM	**2.497408191**	**0.000692321**
MLE	**2.139378632**	**0.02962676555**
MVUE	**2.994803542**	**0.0000010801**

يبين الجدول رقم (7) ان تقدير معلمة الشكل بطريقة الاقل تباين أعطت اقل متوسط مربع اخطاء تليها طريقة العزوم ثم طريقة الامكان الاعظم.

جدول (8) : تقدير معلمة الشكل بقيمة افتراضية(β =3) للعينة ذات الحجم 50 مفردة

طريقة التقدير	التقدير	متوسط مربع الخطأ(MSE)
MM	**2.357324412**	**0.008260638229**
MLE	**3672055772.**	**08005756390.0**
MVUE	3	**0.00000**

يبين الجدول رقم (8) ان تقدير معلمة الشكل بطريقة الاقل تباين اعطت أقل متوسط مربع اخطاء تليها طريقة الامكان الاعظم ثم طريقة العزوم.

جدول (9) : تقدير معلمة الشكل بقيمة افتراضية(β =3) للعينة ذات الحجم 100 مفردة

طريقة التقدير	التقدير	متوسط مربع الخطأ(MSE)
MM	**4.169326499**	**0.01367324462**
MLE	**4.110884878**	**12340652110.0**
MVUE	3	**0.00000**

يبين الجدول رقم (9) ان تقدير معلمة الشكل بطريقة الاقل تباين اعطت اقل متوسط مربع اخطاء تليها طريقة الامكان الاعظم ثم طريقة العزوم.

النتائج والتوصيات:

من خلال العرض النظري والتطبيق العملي يمكن ان نلخص اهم النتائج والتوصيات فيما يلي:

النتائج:

1. لكافة حجوم العينات كان التقدير الأمثل لمعلمتي المقياس والشكل هو طريقة التباين الأقل.
2. طريقة الامكان الاعظم وطريقة العزوم كانت لهما اقل متوسط مربع اخطاء على الترتيب بعد طريقة التباين الاقل وذلك عند العينتين ذات الحجم 50 والحجم 100.
3. طريقة العزوم وطريقة الامكان الاعظم كانت لهما اقل متوسط مربع اخطاء على الترتيب بعد طريقة التباين الاقل وذلك عند العينة ذات الحجم25.

التوصيات:

1. توسيع الدراسة لتشمل طرائق تقليدية اخرى بخلاف الطرائق المستخدمة في الدراسة كطريقة اقل مربع كاي في تقدير معلمتي المقياس والشكل لتوزيع قاما.
2. تطوير وإشتقاق طرائق اخرى في تقدير توزيع قاما ذو المعلمتين.
3. اجراء مقارنات بين طرق التقدير التقليدية (التباين الاقل، العزوم، الامكان الاعظم .... الخ) مع طرائق بييز في تقدير توزيع قاما.

المراجع:

1. آيفازيان ، مبادئ النمذجة و المعالجة الأولية للبيانات، سلسلة Editions Mir ، Mathématiques: موسكو، 1983، ترجمه من الروسية إلى الفرنسية جيلالي مبارك، 1986. ص158.
2. نبيل جمعة، (2015)، الاحصاء التحليلي، دار الحامد للنشر والتوزيع، الاردن، عمان.
3. امير حنا هرمز، (1990م)، الاحصاء الرياضي، دار جامعة الموصل للنشر، العراق، الموصل.
4. شفيق العتوم، (2008م)، طرق الاحصاء، دار المناهج للنشر والتوزيع، الاردن، عمان.