Sudan University for Science and Technology

Faculty of Education

Department of Science

Mathematics Section

A thesis submitted for partial fulfillment of the requirements of B.Sc in Mathematics

Completion and approximation of Functions

Submitted By:

OmranNoman Ali

Namarig Al-AmeenAlawad

ArwaSiddigMosab

Hadi Abdullah Ali

Supervised By:

Osama Said-Ahmed Abdullah

بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا

كلية التربية

قسم العلوم

شعبة الرياضيات

بحث تكميلي لنيل درجة شرف البكلاريوس في الرياضيات

بعنوان:

الإستكمال وتقريب الدوال

إعداد الطلاب:

- عمران نعمان علي
- نمارق الامين العوض
- أروى صديق مصعب
- هدى عبد الله علي

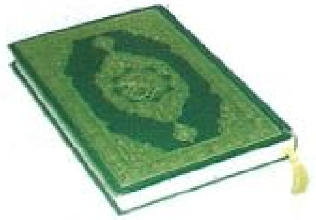
إشراف الاستاذ:

أسامة سيد احمد عبد الله

سبتمبر 2015م

بسم الله الرحمن الرحيم

الآية



قال الله تعالى في محكم تنزيله:

(أَفَمَنْ يَعْلَمُ أَنَّمَا أُنْزِلَ إِلَيْكَ مِنْ رَبِّكَ
الْحَقُّ كَمَنْ هُوَ أَعْمَىٰ ۚ إِنَّمَا يَتَذَكَّرُ أُولُو
الْأَلْبَابِ)

صدق الله العظيم

سورة الرعد الاية (19)

الإهداء

الي يا من أحمل اسمك بكل فخر

إلى من جرع الكأس فارغاً ليسقيني قطرة حب

إلى من كلّت أنامله ليقدم لنا لحظة سعادة

إلى من حصد الأشواك عن دربي ليمهد لي طريق العلم

إلى القلب الكبير

والدي العزيز

إلى من أرضعتني الحب والحنان

إلى رمز الحب وبلسم الشفاء

إلى القلب الناصع بالبياض

والدتي العزيزة

إلى القلوب الطاهرة الرقيقة والنفوس البريئة إلى رياحين حياتي

إخــوتي

الي من تذوقت معهم أجمل اللحظات

إلى من سأفتقدهم ...... وأتمنى أن يفتقدوني

إلى من جعلهم الله أخوتي بالله ...... و من أحببتهم بالله

طلاب قسم الرياضيات

الشكر والعرفان

أولا وأخيراً الشكر لله عز وجل

لابد لنا ونحن نخطو خطواتنا الأخيرة في الحياة الجامعية من وقفة نعود إلى أعوام قضيناها في رحاب **جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا- كلية التربية - قسم الرياضيات** مع أستاذتنا الكرام الذين قدموا لنا الكثير باذلين بذلك جهوداً كبيرة في بناء جيل الغد لنبعث الأمة من جديد.

والشكر كل الشكر لمن لم يبخل لنا بوقته الثمين ولا بعلمه الرائع الاستاذ/ **أسامة سيد احمد عبد الله** الذي أشرف على هذا البحث

والشكر ايضاً لمكتبتي كلية التربية وكلية العلوم لتعاونهم معنا لاخراج هذا البحث.

وجزيل الشكر لكل من ساعدنا في اكمال هذا البحث.

المقدمة :

يهيأ موضوع التحليل العددي طرائق حسابية لدراسة حل المسائل الرياضية ، وله تطبيقات واسعه في الرياضيات والفيزياء وشتى المجالات الهندسية التي تهم الفيزيائيين والمهندسين . كما يساعد في حل التكامل والتفاضل بصورة أسهل ويأخذ هذا البحث الذي هو جزء من الإستكمال وتقريب الدوال والذي يحتوي على أربعه فصول ، الفصل الأول جاء بعنوان الدوال وفيه : (تعريفها ، أنواعها ، خواصها ، أشكالها ...) ،الفصل الثاني جاء بعنوان التحليل العددي ويحتوي على (معرفة أنواع الأخطاء ، صيغ نيوتن الأمامية والخلفية ، صيغة نيوتن رافسون ، صيغة التنصيف ، الفروق) ، الفصل الثالث جاء بعنون الإستكمال وفيه (تعريفه ، طرق الإستكمال ، إستكمال لاجرانج بشكل مبسط وذلك بغرض إستمرار الأفضل ، لقد تطرقنا أيضاً في هذا الفصل لكثيرات حدود تايلور وطريقة جاوس_ جاكوبي ، وطريقة جاوس_ جوردن والفروق المنتهية والفروق المقسومة ، الفصل الرابع جاء بعنوان التطبيقات ويحتوي على تطبيقات الإستكمال وطرق تقريب الدوال .

المستخلـــص

إستخلص البحث على إيجاد صيغ الإستكمال ومعرفة الدوال بصورة مختصرة تختصر الوقت والجهد . ثم إيجاد البراهين لبعض الصيغ الإستكمالية مثل صيغة (نيوتن – رافسون) ، وصيغ نيوتن (الأمامية – الخلفية) ، وصيغة لاجرانج ، وبذلك يتمكن الدارس من إيجاد القيم عن طريق إستخدامها بكل سهولة ويسر وإن لم يكن بدراية تامة بالصيغ من هذا النوع .

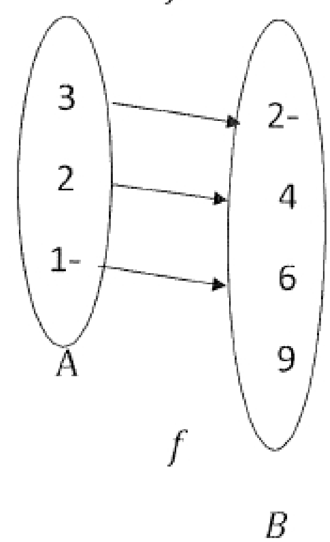
الفصل الأول

الدوال

الدوال

(2_1) تعريف الدالة :- لتكن $A.B$ مجموعتين غير خالتين إذا وفق كل عنصر من المجموعة الأولى A عنصراً وحيداً من المجوعة الثانية B . عند ذلك نقول أننا عرفنا دالة f من المجموعة A إلى المجموعة B ونكتب ذلك على الشكل :

$$f : A \rightarrow B$$



شكل $(1-1)$

تعريف (1 _ 2_1) :- الدالة f هي إقتران بين عناصر مجموعتين غير خاليتين A و B حيث يوافق كل عنصر من المجموعة A عنصراً وحيداً من المجموعة B .

تسمى المجموعة A مجال الدالة كما نسمي المجموعة B بالمجال المقابل للدالة . لاحظ أن العنصر (3) من المجال قد إقترن بالعنصر (-2) من المجال المقابل أو العنصر (3) يوافق العنصر (-2) وأيضاً نقول أن صورة العنصر (3) هو العنصر (2-) وإذا كانت عناصر المجموعة A و B أعداد حقيقية فإننا نقول أن قيمة الدالة f عند (3) يساوي (-2) ونسمي الدالة f بالدالة الحقيقية .

بشكل عام فإن قيمة f عند العنصر x المنتمي إلى مجال الدالة هي $f(x)$ أو أن قيمة الدالة f عند x (أو وفقاً للدالة f) هي $f(x)$ ، عادة تحديد هذه القيمة وفقاً لقاعدة محددة مفروضة ومعطاه ففي الدالة f المحددة بالقاعدة .

(1-1) : $f = x \rightarrow f(x) = 2x + 1$ نجد أن

(2-1) : $f(1) = 3$. $f(2) = 5$ تسمى مجموعة صور عناصر مجال الدالة بمدى الدالة ففي الشكل $(1 - 1)$ مجال الدالة هو

$A = \{3 ، 2 ، - 1\}$ ومجالها المقابل $B = \{-2 ، 4 ، 3، 6 ، 9\}$ ومجالها

$\{-2, 4 , 3 \}$

إذا أعطيت قاعدة دالة حقيقية f ولتكن مثلاً $f(x) = x^2 + x + 1$ ولم نذكر مجالها فبلإتفاق يكون المجال هو مجموعة كل العناصر التي من أجلها تكون الدالة معرفة وهنا الدالة f دالة كثيرة حدود ومجالها هو مجموعة كل الأعداد الحقيقية أما مداها فهو مجموعة صور مجال الدالة . لاحظ أن :

(3-1) $\rightarrow$ $f(x) = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}$ مداها هو $\left\{\frac{3}{4} ، \infty \right\}$.

(3-1) أنواع الدوال :-

(1-3-1) دالة كثيرة الحدود :- على الصورة

$$f(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \cdots + a_{n-1}x + a_n \quad \rightarrow (4-1)$$

حيث $a_0 , \dots , a_2$ ثوابت ، n عدد صحيح موجب ويسمى درجة كثيرة الحدود إذا كانت $a_0 \neq 0$. النظرية الأساسية في الجبر المجرد تقرر أن كل دالة كثيرة الحدود $f(x) = 0$ لها على الأقل جذر واحد ومن هذا يمكن أن نوضح إذا كانت n هي درجة الدالة فإن الدالة لها n من الجذور المضبوطة .

(1−3−2) **الدوال الجبرية** :− هي دوال $y = f(x)$ تحقق معادلة على الصورة

$$p_0\,(x)y^{\mathrm{n}} + \mathrm{p}_1(x)y^{\mathrm{n}-1} + \cdots \mathrm{p}_{\mathrm{n}-1}(x)\mathrm{y} + \mathrm{p}_{\mathrm{n}}(x) = 0 \to (5-1)$$

حيث $p_0(x)\ldots,p_n(x)$ كثيرة الحدود في x

إذا كانت الدالة يمكن التعبير عنها على صورة خارج قسمة لدالتين كثيرتي الحدود أي أن $Q(x)$ و $P(x)$ حيث $Q(x)$ و $P(x)$ كثيرتا الحدود فإنها تسمى دالة جبرية قياسية وإلا فهي دالة جبرية غير قياسية .

(1−3−3) **الدوال المتسامية** :− هي الدوال التي ليست جبرية وتسمى الدوال الأتية أحياناً بالمتسامية البسيطة :−

(1−3−4) **الدوال الأسية** .

(1−3−5) **الدالة اللوغريثمية** :−

هذه الدوال (الأسية واللوغريثمية) دالتان عكسيتان . إذا كان $a = e = 2.71828$ فإنه يسمى الأساس الطبيعي للوغرثيم . إذا كتبنا $f(x) = \log \quad e^x = \ln x$ فيسمى اللوغرثيم الطبيعي للمقدار x .

(1−4) **الخواص** :−

(1−4−1) :− **الأسس والجذور** :−

حاصل ضرب $a.a.a$ لعدد حقيقي a في نفسة p من المرات يعبر عنه بــ a^p حيث p تسمى الأس ، a تسمى الأساس .

القواعد الأتية سليمة :-

$$a^{p}.a^{q} = a^{p+q} \quad (6-1)$$

$$\frac{a^{p}}{a^{q}} = a^{p-q} \quad (7-1)$$

$$(a^{p})^{r} = a^{pr} \quad (8-1)$$

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{p} = \frac{a^{p}}{b^{p}} \quad (9-1)$$

وكل القواعد السابقة يمكن تطبيقها على الأعداد الحقيقية طالما استبعدنا الصفر في في المعادلة (7−1) نصل إلى التعريف التالي $p = 0$ ، $q = \overline{p}$ القسمة بوضع

$$a^{0} = 1 \;\Rightarrow\; a^{-q} = \frac{1}{a^{q}}$$

إذا كان $a^{p} = N$ حيث p عدد صحيح موجب فإننا نسمي q الجذر الذي رتبته p للمقدار N ويكتب $\sqrt[p]{N}$ وقد يوجد أكثر من جذر حقيقي رتبته P للمقدار N .

إذا كان $p\,,q$ عددين صحيحين موجبين فإن $a^{p}/q = \sqrt[q]{a^{p}}$

(2−4−1) الدوال المثلية :- $\sin x\,, \cos x\,, \tan x$

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} \quad , \quad c\sec\frac{1}{\sin x} \quad , \sec = \frac{1}{\cos x}$$

$$\cot(x)\,, \frac{1}{\tan(x)} = \frac{\cos(x)}{\sin x}$$

المتغير x عادة يعبر عنه بالزوايا النصف قطرية $(\pi radians = 180^{0})$ والقيم الحقيقية للمقدار $\cos x$, $\sin x$, x يقع ضمنياً بين 1 و −1. وفيما يلي خواص هذه الدوال :-

$$\sin^{2}(x) + \cos^{2}(x) = 1 \rightarrow (2-3), 1 + \tan^{2}(x) = \sec^{2}(x) \rightarrow (10-1)$$

$$1+\cot^2(x)=\sec^2(x) \Rightarrow (11-1)$$

$$\cos(-x)=-\cos x \Rightarrow (12-1)$$

$$\sin(x\pm y)=\sin x\cos y \pm \cos x \sin y \Rightarrow (13-1)$$

$$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y \mp \sin x \sin y \Rightarrow (14-1)$$

$$\tan(x\pm y)=\frac{\tan x \pm \tan y}{1 \mp \tan x \tan y} \Rightarrow (15-1)$$

(1-4-3) الدوال العكسية والقيم الاساسية :-

إذا كانت y دالة للمقدار x أي $y=f(x)$ فإن x دالة للمقدار y وتكتب

$x = f^{-1}(y)$ وتسمى دالة عكسية .

إذا وضع y و x مكان الأخرى تعطينا الدالة $y = f^{-1}(x)$.

إذا كانت $f(x)$ وحيدة القيمة ، $f^{-1}(x)$ ربما تكون كثيرة القيم التي يمكن إعتبارها كمجموعة من دوال وحيدة القيم وكل منها يسمى فرع ومن الأنسب عادة إختيار واحد من هذه الفروع يسمى الفرع الأساسي ويرمز له بالرمز $f^{-1}(x)$ في هذه الحالة قيمة الدالة العكسية تسمى القيمة الأساسية .

(1-4-4) الدوال الأحادية :-

يقال للدالة التي نطاقها D ومداها R أنها أحادية إذا كان كل عنصر من عناصر المجموعة D يقابله عنصر في المجموعة R .

والدالة التي نطاقها D ومداها R تكون أحادية إذا تحقق أحد الشروط المكافئة التالية :

1- إذا كان $f(u)=f(v)$ في المدي R فإن $u=v$ في النطاق D

2- إذا كان $u \neq v$ في النطاق D فإن $f(u) \neq f(v)$ في المدى R .

(1-4-5) الدوال الكسرية :-

تعرف بالصورة $g(\mathrm{x}) \neq 0$ $\quad \ln(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ حيث $f\,,g$ كثيرتا حدود من الدرجتين $n\,,m$.

(1-4-6) الدوال المثلثية العكسية :-

فيما يلي قائمة بالدوال المثلثية العكسية وقيمها الأساسية :-

أ/ $y = \sin^{-1} x\,,\left(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right)$ و $y = \csc^{-1} x = \sin^{-1}\frac{1}{x},\left(-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right)$

ب/ $y = \cos^{-1} x\left(0 \leq y \leq \frac{\pi}{2}\right)$ و $y = \sec^{-1}(x) = \cos^{-1}\frac{1}{x},(0 \leq y \leq \pi)$

ج/ $y = \tan^{-1} x\left(-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}\right)$ و $y = \cot^{-1}(x) = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x\,(0 < y < \pi)$

(1-4-7) الدوال الزائدية :-

فيما يلي تعريف الدوال الزائدية بدلالة الدوال الأسية :-

$$\sin hx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad \cos hx = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tan hx = \frac{\sin hx}{\cos hx} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$csec\, hx = \frac{-1}{\sin hx} = \frac{2}{\mathrm{e}^{\mathrm{x}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}}$$

$$\sec hx = \frac{1}{\cos hx} = \frac{2}{\mathrm{e}^{\mathrm{x}} + \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}}$$

$$\cot hx = \frac{\cos hx}{\sin hx} = \frac{e^x + \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}}{\mathrm{e}^{\mathrm{x}} - \mathrm{e}^{-\mathrm{x}}}$$

(1-4-8) أيضاً فيما يلي بعض الخواص لهذه الدوال :-

$$\cos h^2x - \sin h^2x = 1 \qquad 1 - \tan h^2x = \sec h^2x$$

$$\cot h^2x - 1 = \csc h^2 x$$

$$\sin h(x \pm y) = \sin hx \cos hy \pm \cos hx \sin hy$$

$$\cos h(x \pm y = \cos hx \cos hy \mp \sin hx \sin hy$$

$$\tan h(x \pm y) = \frac{\tan hx \pm \tan hy}{1 \pm \tan hx \tan hy}$$

$$\sin h(-x) = -\sin hx \quad \cos h(-x) = -\cosh x$$

$$\tan h(-x) = -\tan hx$$

(1-4-9) الدوال الزائدية العكسية :-

إذا كان $x = \sin hy$ فإن $y = \sin^{-1} hx$ هي دالة الجيب الزائدية العكسية للمقدار x. القائمة الأتية تعطي القيم الأساسية للدالة الزائدية العكسية بدلالة اللوغرثيم الطبيعي والنطاق التي تكون فيه حقيقية .

1-$\csc h^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{x^2+1}}{|x|}\right) x \neq 0$

2- $\sin^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right) \forall x$

3- $\cos h^{-1}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right) x \geq 1$

4- $\tan h^{-1}(x) = ½ \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right) |x| < 1$

5- $\sec h^{-1}(x) = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right) 0 < x \leq 1$

6- $\cot h^{-1}(x) = ½ \ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right) |x| > 1$

(1-4-10) الدوال الرتيبة :-

تسمى الدالة رتيبة تزايدية في فترة ما إذا كان لأي نقطتين x_2,x_1 في الفترة بحيث أن $x_2 < x_1$ فإن $f(x_1) \leq f(x_2)$ إذا كانت $f(x_1) < f(x_2)$ فإن الدالة تسمى بتدقيق تزايدية .

بالمثل إذا كانت $f(x_1) \geq f(x_2)$. عندما $x_1 < x_2$ فإن $f(x)$ تسمى رتيبة تنازلية بينما إذا كان $f(x_1) > f(x_2)$ فإن الدالة تسمى بتدقيق متناقصة .

(1-4-11) بعض الخواص الهامة للدوال :-

(1-4-11-1) الدوال الزوجية والفردية :-

(1-4-11-1-1) تعريف :- يقال أن المجموعة الجزئية A من مجموعة الأعداد الحقيقية R متماثلة حول نقطة الأصل إذا تحقق :-

$$\forall x: x \epsilon A \Longrightarrow -x \in A$$

(1-4-11-1-2) تعريف :- يقال أن الدالة $f: A \rightarrow B$ دالة زوجية إذا كان نطاقها متماثل حول نقطة الأصل وتحقق :

$$f(-x) = -f(x) \ , \ \ \forall x \epsilon A$$

ونلاحظ أن منحنى الدالة الزوجية يكون متماثلاً حول محور الصادرات ويقال أن الدالة $f: A \rightarrow B$ دالة فردية إذا كان نطاقها متماثل حول نقطة الأصل وتحقق :-

$$f(-x) = -f(x) \quad , \qquad \forall x \epsilon A$$

وعليه فإن منحنى الدالة الفردية يكون متماثلاً حول نقطة الأصل .

(1-4-11-2) الدوال التزايدية والتناقصية :-

(1-4-11-2-1) تعريف :- يقال للدالة $f: A \to B$ أنها تزايدية إذا حققت :-

$$\forall x_1, x_2 \epsilon A: x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

ويقال للدالة $f: A \to B$ أنها تزايدية فعلاً أو مطردة الزيادة إذا حققت :-

$$\forall x_1, x_2 \epsilon A: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

ويقال للدالة $f: A \to B$ أنها تناقصية فعلاً أو مطردة النقصان إذا حققت :

$$\forall x_1, x_2 \epsilon A: x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

(1-4-11-3) الدوال المحدودة وغير المحدودة :-

تعريفها يكون عن طريق المجموعات الجزئية المحدودة وغير المحدودة من مجموعة الأعداد الحقيقة B .

(1-4-11-3-1) تعريف :- نفرض S مجموعة جزئية من R . يقال أن العدد الحقيقي L حد علوى للمجموعة S إذا تحقق :- $x \leq L; \forall x \epsilon S$

ويقال أن العدد ℓ حد سفلى للمجموعة S إذا تحقق : $x \geq \ell \; ; \forall x \epsilon S$

وعليه فإن :-

$$L_0 = \sup f = \sup R_f; \ell_0 = \inf f = \inf R_f \; ;$$

$$M = \max f = \max R_f \;\; ; m = \min f = \min R_f$$

(1-4-11-4) دالة القوى :-

هذه الدالة تأخذ الصورة $y = x^r$ حيث r عدد قياسي .

إذا كانت r عدد طبيعي فإن هذه الدالة تكون معرفة لجميع قيم x الحقيقية . وإذا كانت r=2n حيث $n\epsilon N$ فإن $2n$ يصبح عدد زوجي موجب وتكون الدالة زوجية ومنحنى الدالة يكون متماثلاً حول محور الصادات ، أما إذا كانت $r = 2n + 1$ حيث $n\epsilon N$ فإن $2n + 1$ تصبح عدد فردي موجب وتكون الدالة فردية ويكون منحنى الدالة متمثلاً حول نقطة الأصل وفي كلتا الحالتين السابقتين يلاحظ أنه بزيادة r يقترب منحنى الدالة من محور الصادات .

الدالة $y = x^{2n}$ (حيث n عدد طبيعي) دالة زوجية . أما الدالة $y = x^{2n+1}$ دالة فردية .

(1-4-12) العمليات على الدوال :-

العمليات على الدوال تأخذ عدة أشكال كالجمع والضرب والقسمة وتكون على الشكل التالي :

تعرف مجموع دالتين f, g وحاصل ضربهما وحاصل قسمتهما على الشكل التالي :-

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(f - g)(x) = f(x) - g(x)$$

$$\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)}\ , g(x) \neq 0$$

و من الملاحظ أن مجال المجموع والضرب والقسمة هو دوماً تقاطع المجالين إلا في حالة القسمة فيستثنى أصفار المقام .

(1-4-12-1) **تعريف** :- نقول أن المنحنى c المعرف بالمعادلة :-

$$y = f(x)$$

(1) متناظر بالنسبة للمحور x فيما إذا كانت النقطة $(x ، -y)$ تحقق معادلة المنحنى وذلك لكل $(x ،y) \epsilon c$.

(2) متناظر بالنسبة للمحور y ، فيما إذا كانت النقطة $(-x ،y)$ تحقق معادلة المنحنى وذلك لكل $(x ،y) \epsilon c$.

(3) متناظر بالنسبة لنقطة الأصل ، فيما إذا كانت النقطة $(-x , -y)$ تحقق معادلة المنحنى وذلك لكل $(x ،y) \epsilon c$.

(4) متناظر بالنسبة لمنصف الربع الأول ، فيما إذا كانت النقطة (y , x) تحقق معادلة المنحى وذلك لكل $(x ،y) \epsilon c$.

(5) متناظر بالنسبة لمنصف الربع الثاني فيما إذا كانت النقطة $(-y , -x)$ تحقق معادلة المنحنى وذاك لكل $(x ،y) \epsilon c$.

ينتج مما سبق أن كل دالة زوجية هي دالة متناظرة بالنسبة للمحور y .

وان كل دالة فردية هي دالة متناظرة بالنسبة لنقطة الأصل .

وأن كل دالة متناظرة بالنسبة للمحورين الإحداثيين متناظرة بالنسبة لنقطة الأصل .

(13-4-1) أشكال الدوال :-

تأخذ الدوال عدة أشكال . كما موضح أدناه :-

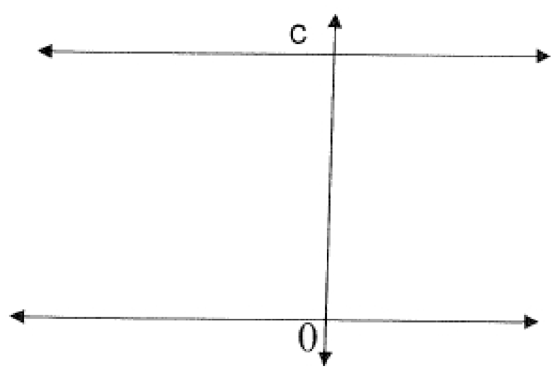
(1) الدالة الثابتة (الدرجة صفر)

$A = f(x)$ حيث

A عدد حقيقي نطاق هذه الدوال كل الأعداد الحقيقية ومدى الدالة

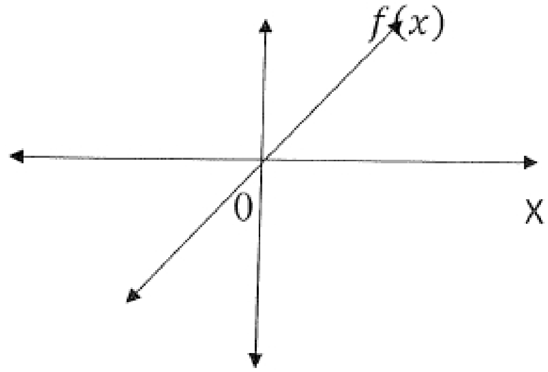
$$\{A\} = f$$

والدوال الثابتة قد تكون دوال زوجية أو فردية أولاً .



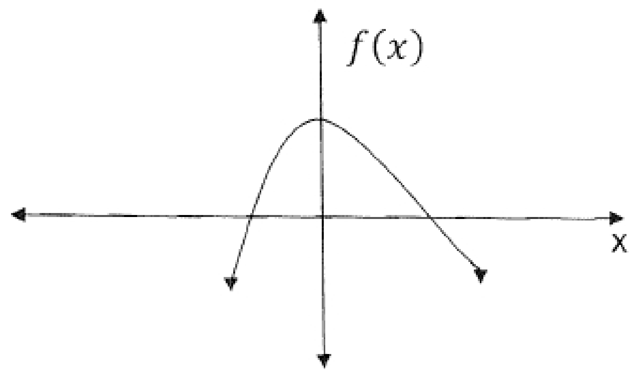
شكل (1-2)

(2) الدالة الخطية (الدرجة واحد)



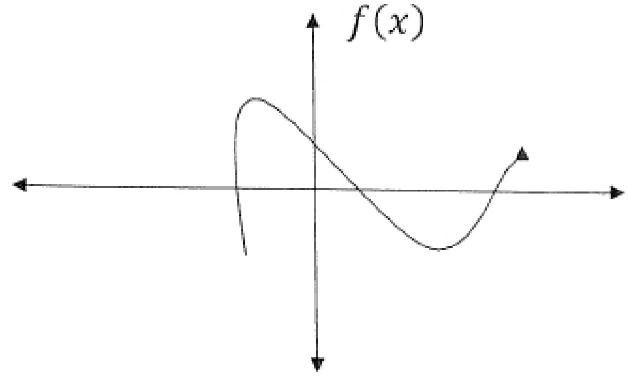
شكل (1-3)

(3) الدالة التربيعية (الدرجة (2))



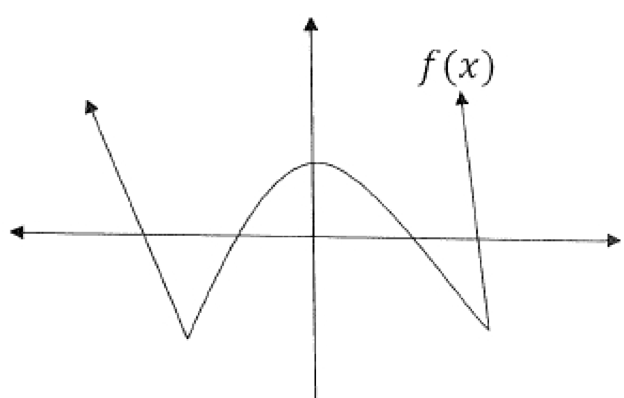
شكل (1−4)

(4) الدالة التكعيبة (الدرجة (3) :−



شكل (1−5)

(5) الدالة من الدرجة الربعة :−



شكل (1−6)

تعريف (2-3-11-4-1) :- يقال للمجموعة $S \subseteq R$ أنها محدودة من أعلى إذا كان لها حد علوي أ ويقال أنها محدودة من أسفل إذا كان لها حد سفلي ويقال للمجموعة S أنها محدودة إذا كانت محدودة من أعلى ومن أسفل .

- يقال أن العدد الحقيقي L_0 أصغر حد علوي للمجموعة $S \subseteq R$ إذا كان تحقق :-

(i) L_0 حد علوي للمجموعة S .

(ii) لا يوجد للمجموعة S حد علوي أصغر من L_0 . أي أنه إذا كان L حد علوي للمجموعة S فإن $L_0 \leq L$.

ويرمز لأصغر حد علوي للمجموعة S بالرمز $L_0 = sup\ S$.

- ويقال أن العدد الحقيقي L_0 أكبر حد سفلي للمجموعة $S \subseteq R$ إذا تحقق :-

(i) L_0 حد سفلي للمجموعة S .

ونرمز لأكبر حد سفلي للمجموعة S بالرمز $L_0 = \inf S$

- يقال أن العدد الحقيقي M قيمة عظمى للمجموعة $S \subseteq R$ وتكتب $(M \equiv \max S)$ أذا تحقق :

(i) M حد علوي للمجموعة S

(ii) $M \epsilon S$

ويقال أن العدد الحقيقي m قيمة صغرى للمجموعة $S \leq R$ و تكتب $(M = \min S)$ إذا تحقق :-

(i) m حد سفلي للمجموعة S (ii) $m \epsilon S$

ومن ذلك :-

يقال أن العدد الحقيقي L حد علوي للدالة $f: A \to B$ إذا كان L حد علوي لمدى الدالة R_f . ويقال أن ℓ حد سفلي للدالة f إذا كان ℓ حد سفلي لمدى الدالة R_f. إذا كان للدالة حد علوي فإننا نقول أن الدالة محدودة من أعلى ، وإذا كان للدالة حد سفلي فإننا نقول أن الدالة محدودة من أسفل . الدالة f تكون محدودة إذا كانت محدودة من أعلى ومن أسفل . أي أن الدالة f تكون محدودة إذا وجد العددين الحقيقين L, ℓ بحيث أن :-

$$\ell \leq y \leq L; \forall y \epsilon R_f$$

تعريف :- يقال أن العدد الحقيقي L_0 أصغر حد علوي للدالة $f: A \to B$ إذا كان L_0 أصغر حد علوي لمدى الدالة . ويقال أن ℓ_0 أكبر حد سفلي للدالة f إذا كان ℓ_0 أكبر حد سفلي لمدى الدالة .

ويمكن تعريف القيمة العظمى والقيمة الصغرى للدالة بالمثل .

الفصل الثاني

التحليل العددي

التحليل العددي

(2-1) تمهيد :

أن التحليل العددي يتضمن دراسة وتقييم طرق حساب نتائج عددية مطلوبة من بيانات عددية معطاة فتعتبر البيانات المعطاة تمثل المدخلات والنتائج المطلوبة هي المخرجات وطريقة الحساب تمثل النظام الحسابي ، كما أن التحليل العددي يتعلق بإشتقاق ووصف وتحليل طرق الحصول على حلول عددية لمسائل رياضية يصعب عادة حلها بالطرق التحليلية الجبرية الإعتيادية .

نادراً ماتكون البيانات المدخلة صحيحة لأنها عادة تأتي من أجهزة قياس من نوع أو آخر ، لذلك فالمعلومات الخارجة تشتمل على أخطاء أيضاً كما أن هناك أخطاء أخرى تأتي من الطريقة الحسابية وفيما يأتي أنواع هذه الأخطاء .

(2-2) أنواع الأخطاء :-

(2-2-1) تعريف :

نفترض أن x_0 : عدد مضبوط

x : قيمة تقريبية للعد x_0

فإن الخطأ المطلق يعرف بأنه :-

$$\in = \pm(x_0 - x)$$

والخطأ النسبي يعرف بالعلاقة :-

$$\epsilon_r = \left|\frac{\epsilon}{x_0}\right| = \left|1 - \frac{x}{x_0}\right|$$

(2-2-2) أخطاء التقريب

التقريب Rounding :-

يقرب عدد ما إلى عدد (n) من الأرقام المعنوية بجعل جميع الأرقام يمين الموضع رقم n صفراً ، أما الرقم في الموضع رقم n فإنه إما أن يترك كما هو دون تغيير أو أن يزاد بوحدة واحدة حسب ما إذا كان الجزء المقتطع أقل أو أكبر من نصف وحدة في الموضع n. وإذا كان هذا الجزء المقتطع مساوياً بالضبط لنصف وحدة فإن الرقم في الموضع n يمكن أن يزاد بوحدة واحدة أو أن يترك دون تغيير (وعادة يزاد) .

وبالنسبة للتقريب لعدد n من الأرقام العشرية فإن الأرقام بعد الموضع رقم n والتي تجعل كلها أصفاراً – تحذف ببساطة .

(2-2-2-1)تعريف :-

نفرض أن x_0 : عدد مضبوط

x : قيمة تقريبية له

ϵ : الخطأ المطلق

يقال إن العدد x صحيح لـــ n رقم عشري (أو قيمة n رقم عشري صحيح)

إذا كان : $|\epsilon| \leq 0.5 \times 10^{-n}$

(2-2-2-2) **تعريف :-**

نفرض أن x عدد صحيح لـــ n رقم عشري

أرقام العدد x التي تحتل المواضع حيث الوحدة أكبر من 10^{-n} تسمى أرقاماً معنوية (مع ملاحظة أن الأصفار الإبتدائية لا تعد) .

عدد الأرقام العشرية الصحيحة يعطي فكرة عن قيمة أو صحيح الخطأ المطلق بينما عدد الأرقام المعنوية يعطي فكرة عن قيمة الخطأ النسبي .

(2-2-3) **حدود أخطأ التقريب للعمليات البسيطة :**

نفرض أننا نقرب الأعداد لـــ n رقم وأنه يسمح فقط بالأعداد x

التي تحقق الشرط : $-1 \leq x \leq 1$

ونفرض أن كلاً من a , b عدد مكون من n رقم حاصل الضرب ab يحتوي عموماً على $2n$ رقم وخارج القسمة a/b يحتوي عموماً على عدد غير محدود فإذا قربنا كلاً من نتيجتي الضرب والقسمة الى n رقم ، ورمزنا لهما كما يلي :

النتيجة المقربة لعملية الضرب : $a \times b$

النتيجة المقربة لعملية القسمة : $a \div b$

فإن :

$$|a \times b - ab| \leq 0.5 \times 10^{-n}$$
$$|a \div b - a/b| \leq 0.5 \times 10^{-n}$$

(2-2-4) أخطاء حسابية نتيجة التقريب :-

من المعلوم رياضياً أننا إذا ضربنا قيمة معينة في عدد ما ثم قسمنا على نفس العدد ، نتجت القيمة الأصلية ، ولكن مع إجراء التقريب في كل عملية لا تنتج عندنا القيمة الأصلية .

(2-2-5) التقريب وترتيب العمليات الحسابية :

قد يؤثر ترتيب العمليات الحسابية مع التقريب الى تغير في النتيجة النهائية ، ولكن مع التقريب قد لا يتساوي الطرفان .

(2-2-6) أكبر خطأ نسبي في دالة في عدة متغيرات :

نفرض أن f دالة في n متغير = $x_1, x_2, \dots, x_n$

أي أن :

$$f = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

ونفرض أن الأخطاء في هذه المتغيرات هي على الترتيب

$$\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n$$

فيكون الخطأ الكلي في الدالة f – مع إهمال حدود الرتبة الثانية ومافوقها – هو :

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \ .\Delta x_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \ .\Delta x_2 + \ \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n} \ .\Delta x_n \quad \longrightarrow \quad (1-2)$$

$$\therefore |\Delta f|_{max} = \left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| . |\Delta x_1| . + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| . |\Delta x_2| . + \dots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| . |\Delta x_2| \longrightarrow (2-2)$$

وبالتالي يكون أقصى خطأ نسبي هو

$$\frac{|\Delta f|_{max}}{|f|} . = \frac{\partial f}{|f|} \left[\left|\frac{\partial f}{\partial x_1}\right| . |\Delta x_1| + \left|\frac{\partial f}{\partial x_2}\right| . |\Delta x_2| + \cdots + \left|\frac{\partial f}{\partial x_n}\right| . |\Delta x_n|\right] \quad \longrightarrow \quad (3-2)$$

(3-2) أخطاء الإقتطاع

خطأ الإقتطاع هو الخطأ الناشئ عن إستبدال عملية منتهية بعملية لا نهائية ، كمكاملة معادلة تفاضلية بإستخدام معادلة فروق وحساب تكامل محدود بتقريبية بمجموع (كمجموع مساحات أشباه منحرفات يساوي تقريباً المساحة التي يمثلها التكامل المحدود)

(4-2)الأخطاء الإبتدائية :

وهذه هي الأخطأ في البيانات الإبتدائية كالبيانات التي نحصل عليها مثلاً من قراءات بعض الأجهزة في تجربة معملية .

(1-4-2) إنتشار أو توالد الأخطاء :

عادة تتم العملية الحسابية العددية في عدة خطوات :

نفرض أن خطوة من هذه الخطوات هي عملية القسمة

$$z = x/y$$

ونفرض ان x', y' هما تقريبان للعددين المضبوطين x , y على الترتيب ، بحيث أن :

$$x' = x + \delta$$

$$y' = y + \eta$$

فبدلاً من القيمة المضبوطة Z نحسب قيمة تقريبية Z' حيث :

$$Z' = (x'/y') = \frac{(x+\delta)}{(y+\eta)} + \in$$

$$(\in = round - offerror)$$

$$= \frac{x\left(1+\frac{\delta}{x}\right)}{y\left(1+\frac{\eta}{y}\right)} + \in = \frac{x}{y}\left(1+\frac{\delta}{x}\right)\left(1+\frac{\eta}{y}\right)^{-1} + \in$$

$$= \frac{x}{y}\left(1+\frac{\delta}{x}\right)\left(1-\frac{\eta}{y}+\frac{\eta^2}{y^2}-\cdots\right) + \epsilon$$

$$= \frac{x}{y} + \delta \,.\left(\frac{1}{y}\right) + \eta \,.\left(\frac{-x}{y^2}\right) + \epsilon$$

$$= Z + \delta.\frac{1}{y} + \mu.\left(\frac{-x}{y^2}\right) + \epsilon \rightarrow (4-2)$$

أي أن الخطأ في z' مكون من أخطاء متوالدة من $x\,,y$ ومن خطأ جديد نتيجة التقريب

(2-4-1-1) تعريف :

إذا أدت تغيرات بسيطة في البيانات الإبتدائية إلى تغيرات كبيرة في النتائج النهائية ، فيقال إن المسألة عليلة الشروط .

(2-4-1-2) تعريف :

نفرض أننا نريد حساب قيمة الدالة $f(x)$ حيث :

x : عدد حقيقي

f : دالة حقيقية

نفرض أن x' عدد نسبي هو تقريب للعدد x حيث أنه لا يوجد حاسب يستطيع تخزين أعداد بعدد لا نهائي من الأرقام العشرية . أي أن $x' - x$: هو الخطأ الإبتدائي في قيمة x .

وبالتالي يكون الخطأ الإبتدائي المقابل في قيمة الدالة f (وهو الخطأ المتوالد الناتج عن الخطأ الإبتدائي في قيمة x) :

$$\epsilon_1 = f(x') - f(x) \rightarrow (5\text{–}2)$$

نفرض أن f_1 : هي دالة أبسط من الدالة f بحيث أنها تقرب f أي تعطي قيمة تقريبية لقيمة f (عادة تكون f_1 متسلسلة قوى مقتطعة من مفكوك الدالة f) .

وبالتالي يكون خطأ الإقتطاع المقابل

$$\epsilon_2 = f_1(x') - f(x') \rightarrow (6\text{–}2)$$

نفرض ان $f_2(x')$: هي القيمة المحسوبة بالحاسب (أي بإجراء تقريبات في العمليات الحسابية) .

وبالتالي يكون خطأ التقريب (وهو الخطأ المتوالد من التقريبات) :

$$\epsilon_3 = f_2(x') - f_1(x') \rightarrow (7\text{–}2)$$

ويمكننا تلخيص ماسبق فيما يلي :

$$x \rightarrow x' \rightarrow \epsilon_1 = f(x') - f(x) \rightarrow (8\text{–}2)$$

$$f(x') \rightarrow f_1(x') \rightarrow \epsilon_2 = f_1(x') - f(x') \rightarrow (9\text{–}2)$$

$$f_1(x') \rightarrow f_2(x') \rightarrow \epsilon_3 = f_2(x') - f_1(x') \rightarrow (10\text{–}2)$$

وبالتالي يكون الخطأ الكلي :

$$\epsilon = f_2(x') - f(x) = \epsilon_1 + \epsilon_2 + \epsilon_3 \rightarrow (11\text{–}2)$$

(2-4-2) خطأ التدوير :-

عندما يكون التعامل مع أعداد محددة الحجم كما في الحاسبة فأنه من المتوقع حدوث أخطأ التدوير في معظم العمليات الحسابية مستخدمين الرمز لإعداد النقطة السائبة في البند ليكن

$$Z = \sigma \times (a_1 a_2 \dots a_n a_{n+1} \dots)_B \times B^e \rightarrow (12\text{–}2)$$

$$,\sigma = \pm\,, a_1 \neq 0$$

وبإمكاننا الأفتراض أن B زوجية بدون ضياع عمومتها فإن قيمة Z التي تدورها الحاسبة هي :

$$f(Z) = \begin{cases} \sigma(.a_1 a_2 \dots a_n)_B \times B^e\,, 0 \le a_{n+1} < \dfrac{B}{2} \\ \sigma[(.a_1 \dots a_n)_B + (00 \dots 01)_B] \times B^e\,, \dfrac{B}{2} \le a_{n+1} < B \end{cases}$$

حيث أن $(01\dots.0.)_B$ نعني B^{-n}، هذا هو تعريف رسمي لخوارزمية بسيطة تقوم بالتدوير للاعلى إذا كان الرقم في الموقع$(n+1)$ أكبر أو مساوياً الى $\frac{1}{2}B$ ، ويكون التدوير للأسفل إذا كان أقل من $\frac{1}{2}B$

لحساب الخطأ في $f(Z)$ ، إفترض أولاً أن $0 \le a_{n+1} < B/2$

$$Z - f(Z) = \sigma(.00 \dots 0 a_{n+1} a_{n+2} \dots)_B \times B^e$$

$$= \sigma(.a_{n+1} a_{n+2} \dots) \times B^{e-n}$$

$$|Z - f(Z)| \le \frac{1}{2} B^{e-n} \rightarrow (13-2)$$

وبحجة مماثلة فإن النتيجة نفسها صحيحة عندما

$$B/_2 \leq a_{n+1} < B$$

لحساب الخطأ النسبي في $f(\mathrm{Z})$

$$|Z - f(Z)| \leq \frac{1}{2} B^{e-n} \frac{|Z|}{|Z|} = \frac{1}{2} \frac{|Z|B^{-n}}{|Z|B^{-e}}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot \frac{|\boldsymbol{Z}|B^{-n}}{(a_1, a_2, \dots)_B} \leq \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2}} \cdot \frac{|\boldsymbol{Z}|B^{-\boldsymbol{n}}}{(.\boldsymbol{100} \dots)_B} = \frac{1}{2} \frac{|Z|B^{-n}}{B^{-1}} \rightarrow \quad (14\text{-}2)$$

(1-2-4-2) تعريف :

لحاسبة ثنائية حيث عدد الأرقام في الجزء الكسري هو n

$$\frac{|Z - f(Z)|}{|Z|} \leq 2^{-n}$$

ولحاسبه عشرية :

$$\frac{|Z - f(Z)|}{|Z|} \leq 5 \times 10^{-1}$$

للحصول على صيغة أخرى أفضل ، لتكن ε معرفة بالأتي :

$$\frac{Z - f(x)}{(Z)} = -\varepsilon$$

لقيمة معينة من ε فإن :

$$f(Z) = (1 - \varepsilon)Z \qquad |\varepsilon| \leq \tfrac{1}{2} B^{-n+1} \rightarrow \quad (15\text{-}2)$$

هذه الصيغة تستخدم كثيراً لتحليل إنتشار خطأ التدوير وأن تثبيت هذه الصيغة و تطبيقها بالأساس كان قد قام به ولكنسون .

كثير من الحاسبات الإلكترونية لا تستخدم التدوير إنها تقطع الأعداد بإستخدام الجزء الأول من التعريف بغض النظر عن حجم المتبقي ... $0 \ldots 0a_{n+1}a_{n+2}$.

في هذه الحالة يجب أن تتغير النتيجة إلى

$$|Z - f(Z)| \leq B^{e-n}$$

(5-2) كثيرة حدود تيلور :-

كثيرة حدود تيلور هي النهائية في اللثام ، لدليل واحد x_y قيم كثيرة الحدود ومشتقاتها الأولى التي عددها n يجب أن تتفق مع نظيراتها للدالة المعطاة $y(x)$ إن

$$i = 0,1,\ldots,n \quad \text{عند} \quad p^{(i)}(x_0) = y^{(i)}(x_0) \quad \rightarrow \quad (16-2)$$

صيغة تيلور تقدر الوجود مباشرة يعرض كثيرة الحدود هذه في الصورة :

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} \frac{y^{(i)}}{i} (x - x_0)^i \rightarrow \qquad (17\text{–}2)$$

(1-5-2) الخطأ في كثيرة حدود تيلور :-

عند إعتبارها تقريباً للدالة $y(x)$ يمكن التعبير عنه بصيغة التكامل :

$$y(x) - p(x) = \frac{1}{n!}\int_{x_0}^{x} y^{(n+1)}(x_0)(x - x_0)^n \, dx_0 \quad \rightarrow \quad (18\text{–}2)$$

(2-5-2) صيغة الخطأ في طريقة لاجرانج :-

يمكن إستنتاجها بتطبيق إحدى صور نظرية القيمة المتوسطة على صيغة التكامل وهي

$$y(x) - p(x) = \frac{y^{(n+1)}(\varepsilon)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1} \rightarrow \qquad (19\text{–}2)$$

البرهان :-

نستخدم إحدى صور نظرية القيمة المتوسطة للتكامل التي تنص على أنه إذا كانت $f(x)$ متصلة وكانت $w(x)$ لا تتغير إشارتها في الفترة $(a\,,b)$ فإن

$$\int_a^b f(x)w(x)dx = f(\varepsilon)\int_a^b w(x)dx \;\rightarrow \qquad (20-2)$$

حيث ε تقع بين $(b\,,a)$ بإختيار $w(x) = (x - x_0)$ نحصل على :

$$R(x\,,x_0) = \frac{1}{(n+1)!}y^{n+1}(\varepsilon)(x - x_0)^{n+1} \;\rightarrow \qquad (21-2)$$

إذا كانت مشتقات $y(x)$ محدودة وغير مقسومة على n فإن كلا من صيغتي الخطأ تستخدم لتقييم الدرجة المطلوبة n لتختزل $|y(x) - p(x)|$ إلى قيمة أقل من تعاون محدد لفترة معطاة للأدلة x .

(6-2) طريقة التنصيف :-

نتناول في هذا الجزء إحدى أهم مسائل التقريب العددي وهي مسألة إيجاد الجذور والتي تحوي إيجاد x ، جذر معادلة من الصورة $f(x) = 0$ يسمى x بصفر الدالة f وهذه الوسيلة تعتمد على نظرية القيمة المتوسطة ، طريقة التنصيف أو طريقة التقصى الثنائي

نفرض أن f دالة متصلة ومعرفة على الفترة $[a\,,b]$ حيث $f(b)$ و $f(\mathrm{a})$ من إشارتين مختلفتين وإستناداً لنظرية القيمة المتوسطة يوجد عدد p في الفترة (a, b) يحقق $f(\mathrm{p}) = 0$ رغم أن هذا الإجراء صالح للعمل في الحالة f(b) و $f(\mathrm{a})$ من إشارتين مختلفتين قد يوجد أكثر من جذر واحد في الفترة (a, b) فإننا نفرض الجذر الواقع في هذه الفترة وحيد .

نقضي هذه الطريقة تكرار التنصيف للفترات الجزئية للفترة $[a\,,b]$ وإتخاذ النصف الحاوي على p فترة جديدة .

من أجل البدء نفرض $a_1 = a$ و $\mathrm{b}_1 = b$ ولتكن p منتصف $[a\,,b]$ أي

$$p_1 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1) \ \rightarrow \ (22-2)$$

إذا كان $f(p_1) = 0$ فإن $p = p$ وإذا كان خلاف ذلك فإن إشارة $f(p_1)$ من إشارة $f(a_1)$ أو إشارة $f(b_1)$. إذا كان $f(b_1)$ و $f(a_1)$ من الإشارة نفسها فإن $p\epsilon(p_1\,,b_1)$ ونفرض $a_2 = p_1$ و $b_2 = b_1$ أما إذا كان $f(b_1)$ و $f(a_1)$ من إشارتين مختلفتين فإن $p\epsilon(a_1\ \,,b_1)$ ونفرض $a_2 = a_1$ و $b_2 = p_1$ عندئذ نعيد تطبيق الطريقة على الفترة $[a_2, \mathrm{b}_2]$.

لإنطلاق بطريقة التنصيف ، يجب إيجاد فترة $[a\,,b]$ بحيث يكون $f(a).f(b) < 0$

في كل خطوة يقصر طول الفترة التي تحوي صفر لـــ f لذا يفضل إختيار الفترة الأولية $[a\,,b]$ قصيرة بقدر ما يمكن .

مثلاً :

إذا كانت

$$f(x) = 2x^3 - x^2 + x - 1\text{،}f(0).f(1) < 0 \text{ و } f(-4).f(4) < 0 \ (23\text{–}2)$$

أي يمكن لخوارزمية التنصيف أن تختار أي واحدة من الفترتين $[0\,,1]$، $[-4\,,4]$ بإختيار إنطلاق خوازمية التنصيف بالفترة $\left[0\text{ ، }1\right]$ عوضاً عن $[-4\,,4]$ يختصر ثلاث عدد تكرارات مطلوبة لتحقيق دقة معينة .

نظرية :-

ليكن $f\epsilon\, c[a\,,b]$ ولنفرض أن $f(a).f(b) < 0$ تولد طريقة التنصيف متتالية $[p_{\mathrm{n}}]$

تقترب من p وتتمتع بالخاصية :

$$|\mathrm{p_n}-\mathrm{p}| \leq \frac{\mathrm{b}-\mathrm{a}}{2^{\mathrm{n}}}\,, n \geq 1$$

البرهان :-

نجد لكل$n \geq 1$ $p\epsilon(a_n, b_n)$ و $(24-2)$ $\quad \rightarrow \quad \mathrm{b_n}-\mathrm{a_n} = \frac{1}{2^{\mathrm{n}+1}}(\mathrm{b}-\mathrm{a})$

كان $(25-2)$ $\quad \rightarrow \quad p_n = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$ لكل $n \geq 1$ فإنه ينتج عن ذلك

$$|\mathrm{p_n}-p| \leq \frac{1}{2}(\mathrm{b_n}-\mathrm{a_n}) = \frac{\mathrm{b}}{2^2} \quad \rightarrow \quad (26\text{–}2)$$

$\therefore$ المتراجحة $\{\mathrm{p_n}\}_{n=1}^{\infty}$ متقاربة إلى p بمعدل تقارب (2^{-n})

$$\frac{|p_n - p|}{2^{-n}} \leq b - a$$

من المهم أن ندرك أن النظريات من هذا النوع تعطى فقط حدود للخطأ في التقريب .

(2–7) طريقة نيوتن – رافسن :-

واحدة من أكثر الطرائق العددية المعروفة جيد لحل مسالة إيجاد جذر المعادلة $f(x) = 0$. وهناك أشكال متعددة لتقديم طريقة نيوتن أكثرها شيوعاً هو تقديم الأسلوب بصورة بيانية ، كما يمكن أن نستنتج كمجرد أسلوب لإيجاد تقارب مقدم بنماذج أخرى للتكرار الدالي ، وأيضاً هناك وسيلة أخرى لتقديم طريقة نيوتن وهي قائمة على كثيرة حدود تيلور .

نفرض أن $f\epsilon c^2[a\,,b]$ وليكن $\bar{x}\epsilon[a\,,b]$ تقريباً لـــ p بحيث يكون $f'(\bar{\mathrm{x}}) \neq 0$

و $|\bar{x}-p|$ صغير ، لننظر في كثيرة حدود تيلور الأولى لـــ $f(x)$ المنشورة حول $\bar{x}$

$$f(x)=f(\bar{x})+(x-\bar{x})f'(\bar{x})+\frac{(x-\bar{x})^2}{2}f'\big(\xi(p)\big) \quad \rightarrow \ (2-27)$$

حيث $\xi(x)$ تقع بين x و $\bar{x}$ لما كان $f(p)=0$ ويجعل $x=p$

$$0=f(\bar{x})+(p-\bar{x})f'(\bar{x})+\frac{(p-\bar{x})^2}{2}f''\big(\xi(p)\big) \quad \rightarrow \quad (28-2)$$

بإعتبار أن $(p-\bar{x})^2$ مهملاً وذلك لأنه صغير نستنتج أن

$$0 \simeq f(\bar{x})+(p-\bar{x})f'(\bar{x}) \rightarrow \qquad (29\text{-}2)$$

بحل هذه المعادلة بالنسبة لـــ p نجد :

$$p \simeq \bar{x}-\frac{f(\bar{x})}{f'(x)} \rightarrow (30-2)$$

يحد ذلك مظهر طريقة نيوتن رافسون التي تنطلق بتقريب أولى p_0 وتولد متتالية $\{p_n\}$

معرفة كما يلي :

$$p_n=p_{n-1}-\frac{f(p_{n-1})}{f'(p_n-1)} \qquad n \geq 1 \quad \rightarrow(31\text{-}2)$$

(8–2) صيغة نيوتن :

كثيرة الحدود المطابقة يمكن التعبير عنها بدلالة فروق منتهية وكثيرات حدود المضروب

نثبت أولاً صيغة الجمع (2–32) $\quad \rightarrow \quad y_k=\sum_{i=0}^{k}(i^k)\Delta^i y_0$

وهذه تقودنا مباشرة إلى صيغة نيوتن كثيرة الحدود المطابقة التي يمكن كتابتها على

الصورة : (2–33) $\quad \rightarrow \quad p_k=\sum_{i=0}^{n}(i^k)\Delta^i y_0$

وصورة أخرى لصيغة نيوتن بدلالة الدليل x_k يمكن الحصول عليها بإستخدام

$x_k = x_0 + kh$ وهي :

$$p(x_k) = y_0 + (\Delta y_0/h)(xk - x_0) + (\Delta^2 y_0/2!\,h^2)(x_k - x_0)(x_k - x_1) + \cdots$$

$$+(\Delta^n y_0/n!\,h^n)(x_k - x_0)\ldots(x_k - x_{n-1}) \rightarrow (34\text{–}2)$$

نقط التطابق هي $x_0, \ldots x_n$ عند هذه النقط (الأدلة) كثيرة الحدود هذه تأخذ للقيم المحددة

$$y_0, \ldots, y_n$$

مثال :-

أثبت أن

$$y_1 = y_0 + \Delta y_0, y_2 = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0$$

$$y_3 = y_0 + 3\Delta y_0 + 3\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0 \rightarrow (35\text{–}2)$$

و إستنتج نتائج مشابهة مثل $\Delta y_2 = \Delta y_0 + 2\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0 \rightarrow (36\text{–}2)$

$$\Delta^2 y_2 = \Delta^2 y_0 + 2\Delta^3 y_0 + \Delta^4 y_0 \rightarrow (37 - 2)$$

النتيجة الاولى واضحة والثانية تتضح من الجدول (6–1)

x_0	y_0	Δy_0			
x_1	y_1	Δy_1	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$	$\Delta^3 y_0$
x_2	y_2	Δy_2	$\Delta^2 y_1$	$\Delta^3 y_1$	
x_3	y_3	Δy_3	$\Delta^2 y_2$		
x_4	y_4				

الجدول (6–1)

فترى أن $y_2 = y_1 + \Delta y_1 = (y_o + \Delta y_0) + (\Delta y_0 \Delta^2 y_0) \rightarrow (38\text{–}2)$

وهذه تعطينا النتيجة المطلوبة . لاحظ أن هذا يعبر عن y_2 بدلالة التدوينات في القطر الاعلى من الجدول .

لاحظ أيضاً أن الحسابات المطابقة تعطينا

$$\Delta y_2 = \Delta y_o + 2\Delta^2 y_0 + \Delta^3 y_0 \qquad \rightarrow \quad (\ 39\text{-}2\ )$$

$$\Delta^2 y_2 = \Delta^2 y_0 + 2\Delta^3 y_0 + \Delta^4 y_0 \quad \rightarrow \quad (\ 40\text{-}2\ )$$

معبرة عن التدوينات على القطر (y_2) بدلالة تلك التي على القطر الأعلى . أخيراً

$$y_3 = y_2 + \Delta y_2 = (y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0) + (\Delta y_0 + 2\Delta^2 y_0 \Delta^3 y_0)$$

وهذه تؤدي بسرعة إلى النتيجة الثالثة المطلوبة .

نظرية :-

أثبت أن كثيرة الحدود من درجة n

$$p_r = y_0 + k\Delta y_0 + \frac{1}{2!}k^{(2)}\Delta^2 y_0 + \cdots + \frac{1}{n!}k^{(n)}\Delta^n y_0$$

$$= \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i!} k^{(i)} \Delta^i y_0 = \sum_{i=0}^{n} (i^k)\, \Delta^i y_0$$

تأخذ القيم $p_k = y_k$ عند k=0 , 1 ,… ,n

لاحظ أولاً أنه عند $k = 0$ فقط الحد y_0 على اليمين يسهم اما الحدود الأخرى تساوي صفراً عندما $k = 1$ الحدان الاولان على اليمين يسهمان والبقية تساوي صفراً وهكذا إذن وبإستخدام المثال السابق يكون :

$$p_0 = y_0, p = y_0 + \Delta y_0 = y_1, p_2 = y_0 + 2\Delta y_0 + \Delta^2 y_0 = y_2 \rightarrow (41\text{-}2\ )$$

إذا كانت k عدد صحيح موجب من صفر الى n فإن $k^{(i)}$ ستكون صفر عند $i > k$

حاصل الجمع يختصر الى $p_k = \sum_{i=0}^{k} \frac{1}{i!} k^{(i)} \Delta^{(i)} y_0 \rightarrow (42-2)$ وهذا يختزل إلى

y_k وتأخذ كل القيم الصحيحة $k = 0, \dots, n$

بدلالة الدليل x_k حيث $x_k = x_0 + kh$ لاحظ أولاً أن

$$k = \frac{x_k - x_0}{h} \quad , k - 1 = \frac{x_{k-1} - x_0}{h} = \frac{x_k - x_1}{h} \ , k - 2 = \frac{x_{k-} x_0}{h} = \frac{x_k - x_2}{h} \ \rightarrow (43\text{-}2)$$

بوضع $p(x_k)$ بدلاً من p_k نجد أن

$$p(x_k) = y_0 + \frac{\Delta y_0}{h}(x_k - x_0) + \frac{\Delta^2 y_0}{2!\,h^2}(x_k - x_0)(x_k - x_1) + \cdots$$
$$+ \frac{\Delta^n y_0}{n!\,h^n}(x_k - x_0) \dots (x_k - x_{n-1}) \quad \rightarrow \quad (44-2)$$

والتي هي صيغة نيوتن في صورة أخرى

(2−9) الفروق المجزأة :-

في كثير من نصوص التحليل العددي القديمة معالجات واسعة لطرائق الفرق المجزأ .

نفرض أن p_n كثيرة حدود لاجرانج من الدرجة n ملائمة للدالة f عند النقاط المختلفة $x_0 , x_1 , \dots , x_n$ ينتج الفرق المجزأ المتعلق بـــ f بالنسبة للأعداد $x_0, x_1 , \dots x_n$

بأن نعبر عن p_n بالصورة التالية :

$$p_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \cdots$$
$$+ a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \quad \rightarrow \quad (45-2)$$

وذلك من أجل ثوابت ملائمة $a_0, a_1, \dots a_n$ لتعيين a_0 من هذه الثوابت نلاحظ أن $p_n(x)$ على شكل المعادلة (2−45) لذا فإن تقويم p_n عند x_0 يبقى الحد الثابت a_0 فقط أي :

$$a_0 = p_n(x_0) = f(x_0)$$

بصورة مشابهة عندما تحسب قيمة p_n عند x_1 فإن الحدود غير الصفرية التي تظهر في تقويم $p_n(x_1)$ هما العدد الثابت و الحدود الخطية

$$f(x_0) + a_1(x_1 - x_0) = p_n(x_1) = f(x_1)$$

لذا
$$a_1 = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0} \rightarrow (46 - 2)$$

تحتاج الأن لإدخال رمز الفرق الذي يذكر برمز Δ^2 أيتكن . الفرق المجزأ الصفري $f(x_i)$ للدالة f بالنسبة لـــ x_i ماهو إلا قيمة f عند x_i :

$$f[x_i] = f(x_i)$$

تعرف بقيمة الفروق المجزأة بالإستقراء : يرمز للفرق الأول الجزئي بالنسبة لـــ

x_i و x_{i+1} بالشكل $f[x_i \ , x_{i+1}]$ ويعرف بما يلي :

$$f[x_i \, , x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$$

بعد إيجاد الفرقين الجزئيين من الترتيب $(k - 1)$

$$f[x_i \, , x_{i+1} \, , x_{i+2} \dots , x_{i+k-1}] \quad و \quad f[x_{i+1} \, , x_{i+2} \, , \dots , x_{i+k-1} \, , x_{i+k}]$$

يعطي الفرق الجزئي k بالنسبة إلى $x_{i+1}, x_{i+2}, \dots , x_{i+k}$ بما يلي :-

$$f[x_i, x_{i+1}, \dots , x_{i+k-1}, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, x_{i+2}, \dots , x_{i+k}] - f[x_i, x_{i+1}, \dots , x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

بهذه الرموز يمكن التعبير عن المعادلة $(46 - 2)$ بالصورة $a_1 = f[x_0, x_1]$ وتأخذ كثيرة حدود الإستكمال المبينة في المعادلة $(45 - 2)$ الصورة :-

$$p_n(x) = f[x_0] + f[x_0, x_1](x - x_0) + a_2(x - x_0)(x - x_1) + \dots + a_n(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1}) \rightarrow (47 - 2)$$

كما يمكن توقعه من تقدير a_0 و a_0 تكون الثوابت الطلوبة هي :

$$a_k = f[x_0, x_1, x_2, \dots x_k]$$

لذا لكل $k = 0,1 \dots, n$ يمكن كتابة p_n من جديد بالصورة

$$p_n(x) = f[x_0] + \sum_{k=1}^{n} f[x_0, x_1, \dots, x_k](x - x_0) \dots (x - x_{k-1}) \;\rightarrow\; (48-2)$$

تعرف هذه المعادلة بإسم قانون نيوتن للفرق المجزأ للإستكمال .

(10-2) طريقة القاطع :-

التعريف من $$f'(p_{n-1}) = \lim_{x \to p_{n-1}} \frac{f(x) - f(p_{n-1})}{x - p_{n-1}} \;\rightarrow\; (49-2)$$

بفرض ان $x = p_{n-2}$ فنجد :-

$$f'_{(p_{n-1})} = \frac{f(p_{n-2}) - f(p_{n-1})}{p_{n-2} - p_{n-1}} = \frac{f(p_{n-1}) - f(p_{n-2})}{p_{n-1} - p_{n-2}} \;\rightarrow\; (50-2)$$

يعطينا استخدام هذا التقريب للمشتقة $(p_{n-1})= \acute{f}$ في قانون نيوتن

$$p_n = p_{n-1} - \frac{f(p_{n-1})(p_{n-1} - p_{n-2})}{f(p_{n-1}) - (p_{n-2})} \rightarrow (51\text{-}2)$$

يدعى الاسلوب الذي يستخدم هذا القانون طريقة القاطع بالانطلاق بهذين التقريبين الاولين p_0 و p_1 يكون تقريب p_2 هو تقاطع المستقيم الواصل بين النقطتين $f(p_0)$. p_0 و $f(p_1)$. p_1 مع محور x . تقريب p_3 هو تقاطع المستقيم الواصل بين $f(p_1)$. p_1 و $f(p_2)$. p_2 مع محور x وهكذا .

كثيرا ما نستخدم طريقة القاطع او طريقة نيوتن ، من اجل تهذيب جواب حصلنا عليه بتقنية اخرى مثل طريقة التنصيف .

(2-11) طريقة الوضع الخاطئ :-

تولد طريقة الوضع الخاطئ تقريبات باسلوب طريقة القاطع نفسها الا انها مزودة بمعيار يؤكد وقوع الجذر بين كل تكراريين متتاليين . نختار اولاً تقريب اوليين p_0 و p_1 يحققان $f(p_0).f(p_1) < 0$ نختار التقريب p_2 باسلوب طريقة القاطع نفسها ، اي تقاطع المستقيم المار من النقطتين $(p_0\ f(p_0)$ ، و $(p_1 f(p_1))$ مع محور x. لكي نقرر اي مستقيم قاطع نستخدمه لحساب p_3 نفحص الجداء $f(p_2).\ f(p_1)$. اذا كانت هذه القيمة سالبة ، فان p_2 ، p_1 تحصران جذرا ونختار عندئذ p_3 تقاطع المستقيم الواصل بين $(p_2\ f(p_2)$ و $(p_1\ f(p_1)$ مع محور x قيمة ل p_3 . اذا لم يكن كذلك ، نختار p_3 تقاطع المستقيم الواصل بين $(p_0\ f(p_0)$ و $(p_2 f(p_2)$ ومحور x ، ثم نبادل بين الدليلين في p_0 و p_1 . باسلوب مشابه ، اذا ما وجدنا p_3 ، فان اشارة $f(p_2)$ و $f(p_3)$ تعين ما اذا كنا سنستخدم p_2 ،p_3 او p_3 ، p_1 ،لحساب p_4 . في الحالة الاخيرة يجري ترقيم جديد ل p_2 و p_1 . يكفل تغيير الترقيم ان يكون الجذر محصورا بين تكراريين متتاليين .

(2-12) التقارب المتسارع :-

من النادر الحصول على التقارب التربيعي المتميز . سنظر في اسلوب طريقة Δ^2 ايتكن يمكن استخدامه لتسريع تقارب متتالية ذات تقارب خطي ، دون النظر في اصلها او تطبيقها .

لنفرض ان $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ متتالية ذات تقارب خطي نهايتها p وذات خطأ مقارب ثابت يصفر الواحد .لتكوين متتالية معدلة $\{\tilde{p}_n\}$ تتقارب بسرعة اكبر من سرعة تقارب $\{p_n\}$ نحو p . نفرض اولاً ان اشارة كل من $p_n - p$ ، $p_{n+1} - p$ ، $p_{n+2} - p$ واحدة وانه اذا كان n كبيراً بقدر كاف يتحقق:

$$\frac{p_{n+1}-p}{p_n-p} \approx \frac{p_{n+2}-p}{p_{n+1}-p}$$

لذا $(p_{n+1}-p)^2 \approx (p_{n+2}-p)(p_n-p)$

لذا $p_{n+1}{}^2-2p_{n+1}p+p^2 \approx p_{n+2}p_n-(p_n+p_{n+2})p+p^2$

و $(p_{n+2}+p_n-2p_{n+1})p \approx p_{n+2}p_n-p_{n+1}^2$ نجد بالحل بالنسبة لـــp

$$p=\frac{p_{n+2}p_n-p_{n+1}^2}{p_{n+2}-2p_{n+1}+p_n}$$

$$=\frac{p_n^2+p_np_{n+2}+2p_np_{n+1}-2p_np_{n+1}-p_n^2-p_{n+1}^2}{p_n-2p_{n+1}+p_n}$$

$$=\frac{(p_n^2+p_np_{n+2}-2p_np_{n+1})-(p_n^2-2p_np_{n+1}^2)}{p_{n+2}-2p_{n+1}+p_n}=p_n-\frac{(p_{n+1}-p_n)^2}{p_{n+2}-2p_{n+1}+p_n} \rightarrow (53\text{-}2)$$

تقوم طريقة Δ^2 ايتكن على فرض كون المتتالية $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ المعرفة بالعلاقة

$$p_n^n=p_n-\frac{(p_{n+1}-p_n)^2}{p_{n+2}-2p_{n+1}+p_n} \rightarrow (54-2)$$

متقاربة بسرعة اكبر من سرعة تقارب المتتالية الاصلية $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ نحو p .

نظرية :-

إذا كانت المتتالية $\{p_n\}$ متقاربة خطياً نحو النهاية p بثابت تقارب يصفر الواحد وكان $p_n-p\neq 0$ لكل $n\geq 0$ ، فان المتتالية $\{p_n^n\}_{n=0}^{\infty}$ تتقارب نحو p بصورة اسرع من تقارب $\{p_n\}_{n=0}^{\infty}$ بمعنى ان :-

$\lim_{n\to\infty}\frac{p_n^n-p}{p_n-p}=0$ يمكننا بتطبيق طريقة معدلة لـــ Δ^2 ايتكن على متتالية متقاربة خطياً ،نتجت عن تكرار نقطة ثابتة ، تسريع التقارب حتى التقارب التربيعي . يدعى هذا

الاجراء طريقة ستيفنس وهو مختلف عن تطبيق طريقة Δ^2 ايتكن مباشرة على متتالية تكرار نقطة ثابتة متقاربة خطياً .

ينشأ الاجراء المباشر بالتتابع :-

$$p_0, p_1 = g(p_0), p_2 = g(p_1), p_0^n = \{\Delta^2\}(p_0), p_3 = g(p_2)$$
$$, p_1^n = \{\Delta^2\}(p_1)\ldots \rightarrow \text{(55-2)}$$

حيث يستخدم الرمز $\{\Delta^2\}$ للدلالة على انه قد استخدم اسلوب Δ^2 ايتكن .

(2-13) طريقة ستيفنسن :-

تنشئ طريقة ستيفنسن الحدود الاربعة الاوائل p_0^n, p_2, p_1, p_0 ذاتها . مع ذلك يفرض في هذه الخطوة ان p_0^n تقريب ل p_1 افضل من p_2 ويطبق طريقة النقطة الثابتة على p_0^n عوضاً عن p_2 وباستخدام الرموز في خوارزمية طريقة استيفنسن نجد ان المتتالية المولدة هي :-

$$p_0^{(0)}, p_1^{(0)} = g\left(p_0^{(0)}\right), p_2^{(0)} = g\left(p_1^{(0)}\right), p_0^{(1)} = \{\Delta^2\}\left(p_0^{(0)}\right)$$
$$, p_1^{(1)} = g\left(p_0^{(1)}\right), \ldots \rightarrow \text{(56-2)}$$

يتولد كل ثالث حد باستخدام اسلوب Δ^2 ، وتستخدم الحدود الاخرى تكرار نقطة ثابتة على حد سابق.

ونجد ان طريقة ستيفنسن تعطي تقارباً تربيعياً دون ضرورة لحساب مشتقة .

(2-14) اصفار كثيرات الحدود وطريقة مولر :-

يقال عن دالة من الصورة $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$

وتسمى $a_i's$ معاملات p ، وهي ثوابت و $a_n \neq 0$ ، كثيرة حدود من الدرجة n .

تعتبر الدالة الصفرية $p(x) = 0$ لكل قيمة (x) كثيرة حدود الا انها لا تحدد لها درجة .

نتيجة (1):-

اذا كانت $p(x)$ كثيرة حدود من الدرجة $n \geq 1$ فانه توجد مجموعة ثوابت وحيدة $x_1, x_2, \dots, x_k$ من الممكن ان تكون مركبة ، واعداداً صحيحة موجبة .

$m_1, m_2, \dots, m_k$ تحقق $\sum_{i=1}^{k} m_{i=n}$ بحيث يكون :-

$$p(x) = a_n(x - x_1)^{m1}(x - x_2)^{m2}, \dots, (x - x_k)^{mk} \rightarrow (57 - 2)$$

تقرر هذه النتيجة ان مجموعة اصفار كثيرة حدود وحيدة ، وانه اذا عد اي صفر x_i عدداً من المرات يساوي تضعيف m_i ، فان لكثيرة حدود من الدرجة n عدداً من لاصفار يساوي تماماً n .

نتيجة (2) :-

لنفرض ان p و Q كثيرة حدود من الدرجة n على الاكثر اذا كانت الاعداد $x_1, x_2, \dots x_k > n$ اعداداً متباينة وتحقق $p(x_i) = Q(x_i)$ لكل $i = 1,2, \dots, k$ فان $p(x) = \varphi(x)$ لكل قيمة لـــ x .

نحتاج من اجل اجراء نيوتن رافسون لتعيين قيم تقريبية لاصفار كثيرة حدود p الي ايجاد قيم p ومشتقاتها عند قيمة محددة لما كانت كل من p ومشتقاتها كثيرة حدود فان فعالية الحساب الالي تتطلب اجراء تقويم هذه الدوال بطريقة التعشيش . تندمج طريقة التعشيش في طريقة هورنر .

ونتيجة لهذا يتطلب ذلك n ضرباً و n جمعاً فقط وذلك لتقويم كثيرة حدود من الدرجة n .

(15-2) طريقة هورنر :-

لتكن $b_n = a_n$ و $\mathrm{p_n(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0}$

إذا كان $b_k = a_k + b_k + x_0$

لكل $k = n-1\,, n-2, \ldots, 1{,}0$ فان $b_0 = p(x)$ بالاضافة الي ذلك اذا كان

$$Q(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \cdots + b_2 x + b_1 \rightarrow (58-2)$$

فإن $p(x) = (x - x_0)Q(x) + b_0$

البرهان :-

نجد استناداً الي تعريف $Q(x)$:

$$\begin{aligned}(x - x_0)Q(x) + b_0 &= (x - x_0)(b_n x^{n-1} + \cdots + b_2 x + b_1) + b_0 \\ &= (b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots . + b_2 x^2 + b_1 x) \\ &- (b_n x_0 x^{n-1} + \cdots + b_2 x_0 x + b_1 x_0) + b_0 \\ &= b_n x^n + (b_{n-1} - b_n x_0) x^{n-1} + \cdots + (b_1 - b_2 x_0) x \\ &+ (b_0 - b_1 x_0)\end{aligned}$$

ونجد إستناداً الى فرضيات النظرية وهي $b_k - b_{k+1} x_0 = a_k, b_n = a_n$

أن $(x - x_0)Q(x) + b_0 = p(x)\,, \quad b_0 = p(x_0)$

هناك ميزة لطريقة هورنر فعندما نستخدمها يدوياً نكون اولاً جدولاً يتطلب (القسمة التحليلية) وهو اسم يعطي عادة لهذا الاسلوب ذاته .

ولها ميزة اضافية وهي مايلي : لما كان $p(x) = (x - x_0)Q(x) + b_0$

حيث $Q(x) = b_n x^{n-1} + b_{n-1} x^{n-2} + \cdots + b_2 x + b_1$

يعطي الإشتقاق بالنسبة لـــ x

$$p'(x) = Q(x) + (x - x_0)Q'(x),\ p'(x_0) = Q(x_0) \quad \rightarrow \ (59 - 2)$$

عندما نستخدم طريقة نيوتن – رافسون لايجاد تقريب جذر لكثيرة حدود p فانه يمكن تقويم كل من p و p' بالصورة ذاتها .

الإستكمال

(3-1) مقدمة : -

يعتبر الإستكمال الرياضي الموضوع الأبرز في التحليل العددي إذ يشكل قلب ونواة التحليل العددي الكلاسيكي وذلك لسببين رئيسيين :-

السبب الأول :-

يعود لحاجتنا المستمرة في البحث عن قيمة لدالة من بيانات مجدولة أثناء معظم المسائل الحسابية أما في تلك المسائل والنقاشات الغير مجدولة فلكي نجد قيمة للدالة عند واحدة أو أكثر من النقاط الغير مدرجة في جدول البيانات فلابد لنا من أن نستكمل تلك الدالة ونستخدم طرق الإستكمال والأكثر من ذلك أن الحاجة للإستكمال تكمن في كون أن البيانات المجدولة التي تعطي إلينا في معظم المسائل تكون لها من الدقة العالية الشئ الكثير ، حتى وإن كانت بيانات محدودة ، لذلك قدم التحليل العددي الكلاسيكي مجموعة متطورة جداً من الطرق المختلفة للإستكمال الرياضي .

السبب الثاني :-

لأهمية الأستكمال الرياضي فيعود لكون أن معظم الطرق العددية الكلاسيكية في شتى القطاعات قد تم إستنتاجها وإشتقاقها من طرق الإستكمال ، فتلك الطرق العددية المستخدمة في الإشتقاقات ، تكاملات المعادلات التفاضلية العادية ، المعادلات التربيعية ، وغيرها من قطاعات التحليل العددي الكلاسيكي قد طورت وأشتقت مباشرة إنطلاقاً من طرق الأستكمال الرياضي بالرغم من أن الطرق المستخدمة في التحليل العددي الحديث لا تعتمد ذلك الإعتماد الكبير على طرق الإستكمال لوجود طرق أخرى اشتقت منها إلا أن هذا لا يتعارض مع الدور الكبير والفائدة الجمة للإستكمال وطرق الإستكمال

(3-2) طرق الإستكمال :-

1- الإستكمال بطريقة لا جرانج
2- الإستكمال بطريقة لا جرانج على الفترات المتساوية .
3- الإستكمال بالفروق المنتهية .
4- الإستكمال بطريقة نيوتن الأمامية والخلفية .
5- الإستكمال بطريقة جاوس الأمامية والخلفية
6- الإستكمال بطريقة بيسل

ومن أهم الطرق طريقة نيوتن الأمامية والخلفية .

(3-3) تقديم رياضي للإستكمال :-

نفترض أن لدينا دالة $f(x)$ معرفة وقابلة للإشتقاق ولها قيم معينة عند مجموعة محدودة من النقاط ، حيث أن هذه المجموعة من النقاط تسمى بالنقاط المجدولة التي يتم الإعتماد عليها كثيراً أثناء الإستكمال الأن .

(3-4) الهدف من الأستكمال :-

يكمن في الحصول على قيمة تقريبية للدالة عند واحدة أو أكثر من النقاط الأخرى الغير مدرجة في الجدول ، بحيث أن هذا التقريب سيحد من الخطأ الناتج بين القيمة الفعلية والصحيحة للدالة عند النقطة والقيمة التقريبية لها بعد الإستكمال ، وصلتنا الرياضية التالية هي الحصول على تقريب للدالة $f(x)$ من خلال إعتبار أن النقاط والقيم المجدولة المعطاة تمثل الدالة $y(x)$ التي تعطي قيماً متساوية مع قيم الدالة $f(x)$ وكذلك بالنسبة لقيم مشتقاتها إن وجدت .

الدالة المستكملة تعطي بالعلاقة :-

$$L_j\ (x)f\left(a_j\right) +\ E(x) =\ y(x) +\ E(x) \quad \rightarrow \quad (1-3)$$

والعلاقة العامة أكثر للإستكمال هي :-

$$f\ (x) =\ \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=0}^{mj} A_{ij}\ (x)F^{(i)}\left(a_j\right) +\ E(x) \rightarrow (2\text{-}3)$$

الهدف هو تحديد $L_j(x)$ بحيث أن $j\ =\ 1, \ldots., n$ $\qquad E\left(a_j\right) = 0$

تكون مستقلة عن الدالة $f(x)$ وبصورة لأي نقطة غير محدودة$0 \neq$ $E(x)$ نحن نسمو بطرق الإستكمال إلى تحديد $L_j(x)$ حيث أن (3 -1) تتحقق . ولإيجاد تمثيل لـــ $E(n)$ حيث يمكننا تقدير الخطأ أو على الأقل حده للقيم $x \neq aj\ \ , j = 1\ , \ldots\ , n$

(3–5) الإستكمال بطريقة نيوتن :-

(3–5–1) صيغة نيوتن الأمامية :-

تعطى بالعلاقة التالية :-

$$m_1 \Delta^1 f_1 + \cdots . + m_n\ \Delta^n\ f_0\ = \sum_{j=0}^{n} (m) j \Delta^j\ f_0 \quad *$$

حيث أن هذه الصيغة تم توليدها كغيرها من الصيغ بإستخدام مايعرف بمخطط لوزبينغ حيث عمليات التوليد هذه من المخطط تؤكد أن أي صيغة للفروق تحوي n من الحدود هي مكافئة جبرياً لصيغة لاجرانج على الفئات المتساوية ونقدم برهاناً يوضح كيف أن صيغة نيوتن الأمامية تحقق هذه النتيجة . كما أن برهان النتيجة السابقة يتطلب توضيح أن :-

1- على الأقل واحدة من صيغ الفروق المنتهية للإستكمال لها هذه الخاصية وتعنى بإثبات تحقق ذلك على صيغة نيوتن الأمامية في الفقرة التالية .

2- جميع الصيغ التي تنتهي بنفس الفروق تكون متكافئة جبرياً ، بغض النظر عن المسارات التي تم المرور عليها أثناء العمل على مخطط لوزبينغ .

البرهان :-

نريد أن نثبت أن العلاقة له لا تكافئي جبرياً صيغة لاجرانج . لاجراء الإستكمال على الفترات المتساوية للنقاط $a_0 , a_1 , \dots , a_n$ من كون $(m)_n$ كثيرة حدود من الدرجة n في m فيكفي إثبات أن $y(i)$ في العلاقة (*) تساوي $fi\,,\ i = 0 \dots n$ ومن ثم فإن y(m) تكون كثيرة حدود بإستخدام (*) والعلاقة

$$\Delta^i f(x) = \sum_{k=1}^{i} (-1)^{j-k} (k^j) f(x+kh) \quad \rightarrow \quad (3-3)$$

نجد أن $(i)_j \Delta^j f_0 = \sum_{j=0}^{n} \sum_{k=0}^{j} (-1)^{j-k} (i)_j (k^j) f_k$

$$\sum_{j=k}^{n} (-1)^{j-k} (i)_j (k^j) f_k \qquad i = 0, \dots, n \quad **$$

عوامل f_r في $y(i)$ تعطى بالعلاقة

$$\sum_{j=r}^{i} (-1)^{j-r} (i)_j (r^j) \ ***$$

لكن $r > i$ فإن هذا المعامل مساوي للصفر ، من كون $(i)_j = 0$ عندما $i < j$ عندما $r = i$ فإن الحد الغير صفري الوحيد في (***) لكل $j = r$ يساوي 1 . وعندما $r < i$ فإن العلاقة (***) يمكن كتابتها على الشكل

$$\sum_{\mathrm{j=r}}^{i} (-1)^{\mathrm{j-r}} \ (\mathrm{j^i}) \ \binom{j}{r}$$

ومن ثم نجد أن الطرف الأيمن من العلاقة (**) ماهو إلا f_i وبذلك يتم البرهان .

بإستخدام مخطط لوزينغ يمكن توليد العديد من صيغ الإستكمال ومنها نيوتن الخلفية .

(3-5-2) صيغة نيوتن الخلفية :

في مخطط لوزبينغ بالإبتداء من f_0 والتحرك على طول المستقيمات سالبة الميل وبالإتجاه اليمين . نتوصل إلى أن

$$\Delta^2 f_2 + \cdots + (m+n-1)_n \Delta^n f - n \quad ****$$

حيث هذه العلاقة تكافئ صيغة لاجرانج وبإستخدام النقاط

$$a_0, a_{-1}, \dots a_{-n}$$

(3-6) كثيرة الحدود المطابقة :-

(3-6-1)التقريب بكثيرات الحدود :-

التقريب بكثيرات الحدود من أقدم الأفكار في التحليل العددي ، ومازال من الأفكار التي هي أكثر إستخداماً ، تستخدم كثيرة الحدود $p(x)$ بديلاً للدالة $y(x)$ ، لسبب أو آخر . ربما كان أهم الأسباب ، هو سهولة حساب كثيرات الحدود ، لإحتوائها فقط على قوى صحيحة بسيطة ، كما أن مشتقاتها وتكاملاتها يمكن إيجادها دون جهد يذكر وهي أيضاً كثيرات حدود . وجذور معادلات كثيرات الحدود تبدو ملامحها ببحث يقل عما عليه للدوال الأخرى .

(3-6-2) معيار التقريب :-الفرق $y(x) - p(x)$ هو خطأ التقريب والفكرة الأساسية هي بالطبع الإحتفاظ بهذا الخطأ صغير صغراً معقولاً . سهولة كثيرات الحدود تسمح بأن نقترب من هذا الهدف بطرق مختلفة نأخذ منها :-

1- التطابق 2- اللثام 3- المربعات الصغرى 4- أصغر – أكبر

(3-7) كثيرة الحدود المطابقة :-

كثيرة الحدود المطابقة هي تطابق (تتفق مع) $y(x)$ عند نقط معينة محددة عدد من خواص كثيرات الحدود بوجه عام .

(3-7-1) نظرية الوجود والوجودية :-

تنص على أنه توجد مطابقة واحدة من الدرجة n للأدلة $x_0, \ldots, x_n$ أي أن $y(x) = p(x)$ لهذه الأدلة

(3-7-2) نظام القسمة :-

أي كثيرة حدود $p(x)$ يمكن التعبير عنها في الصورة $p(x) = (x - r)q(x) + R$

حيث r أي عدد ، $q(x)$ كثيرة حدود من الدرجة $n - 1$ ، R مقدار ثابت .

(3-7-3) نظرية الباقي :- تنص على أن $p(r) = R$

(3-7-4) نظرية العامل :-

تنص على أنه إذا كانت $p(r) = 0$ فإن $x - r$ عامل لـ $p(x)$

(3-7-5) حصر الأصفار :

كثيرة الحدود من درجة n يكون لها على الأكثر n من الأصفار بمعنى أن المعادلة $p(x) = 0$ يكون لها على الأكثر n من الجذور .

(3-7-6) القسمة التركيبية :-

هي عملية اقتصادية (أو نظام) تعطينا $R\ ,q(x)$ اللتين في نظاما لقسمة هي غالباً ما تستخدم للحصول على الباقي R، الذي من نظرية الباقي يساوي $P(r)$ هذه الطريقة إلى $P(r)$ قد يكون مفضلاً عن الحساب المباشر لقيمة كثيرة الحدود هذه .

(3-7-7) حاصل ضرب :-

$\pi(x) = (x - x_1)\dots(x\text{-}x_n)$ يلعب دوراً رئيسياً في نظرية التطابق . لاحظ أنه ينعدم عند الأدلة $x_0, x_1, \dots x_n$ وهي دالة التطابق سيتبين أن الخطأ في كثيرة الحدود المطابقة هو $y(x).\,p(x) = y(n+1)(\varepsilon)\pi\,(x)/(n+1)!$

حيث ε تعتمد على x وتكون في مكان مابين النقتطين النهائيتين للتطابق ، بغرض وجود x بينهما . لاحظ أن هذه الصيغة تختصر للتطابق ، بغرض وجود x بينهما .
لاحظ أن هذه الصيغة تختصر إلى صفر عند $x_0, x_1, \dots x_n$ أي أن $p(x)$ تطابق $y(x)$ عند هذه الأدلة . عند غير هذه النقط تعتبر أن $p(x)$ تقريب الدالة $y(x)$

وكثيرة الحدود المطابقة يمكن التعبير عنها الأن بعدد من الصور البديلة جميعها تكافئ صيغة نيوتن ، وكل منها يناسب ظروف مختلفة .

(3-8) صيغة جاوس إلى الأمام :-

التي يمكن الحصول عليها بدراسة العلاقة بين E و δ وتقرأ

$$p_k = y_0 + \sum_{i=1}^{n}\left[(2i - 1^{k+i-1})\delta^{2i-1}y_{\frac{1}{2}} + (2i^{k+i-1})\delta^{2i}y_0\right] \rightarrow (4-3)$$

إذا كانت كثيرة الحدود من درجة زوجية $2n$ وكان التطابق عند

$$k = \quad -n\,, \quad \dots\ , \quad n$$

وهي تصبح :

$$p_k = y_0 + \sum_{i=1}^{n} \left[\left(2i - 1^{k+i-1}\right) \delta^{2i-1} y_{\frac{1}{2}} + \left(2i^{k+i}\right) \delta^{2i} y_0 \right] \rightarrow \text{(5-3)}$$

حيث التطابق عند $k = \;\; -n \, , \;\; \dots \;\; , \;\; n$ احدى الإستعمالات الأساسية لصيغتي جاوس هي إستنتاج .

(9–3) صيغة جاوس إلى الخلف :–

يمكن إستخلاصها بطريقة مماثلة للدرجة الزوجية حيث أنها تأخذ الصورة :–

$$p_k = y_0 + \sum_{i=0}^{n} \left[\left(2i - 1^{k+i-1}\right) \delta^{2i-1} y_{½} + \left(2i^{k+i}\right) \delta^{2i} y_0 \right] \rightarrow (6-3)$$

(10–3) صيغة سترلنج :– التي هي إحدى الصور الأكثر تطبيقاً لكثيرات الحدود المطابقة وهي تقرأ :

$$p_k = y_0 + (1^k) \delta^k y_0 + \left({}^{k}/_{2} \right) (1^k) \delta^2 y_0 + (3^{k+1}) \delta^3 \, y_0 \;\; \rightarrow \;\; (7-3)$$

وهي صيغة شائعة جداً . لا حاجة لأن تذكر أن التطابق يكون عند

$$k = \;\; -n \, , \;\; \dots \; , \;\; n.$$

(11–3) صيغة أفيرت :– والتي تأخذ الصورة :–

$$p_k = (1^k) y_1 + (3^{k+1}) \delta^2 y_1 + (5^{k+2}) \delta^4 y_1 + \dots + (2n + 1^{k+n}) \delta^{2n} y_1 - (1^{k-1}) y_0 - (3^k) \delta^2 y_0 - (5^{k+1}) \delta^4 y_0 - \dots - (2n - 1^{k+n-1}) \delta^{2n} y_1 \;\; \rightarrow \;\; (8-3)$$

ويمكن الحصول عليها بإعادة ترتيب مكونات صيغة جاوس إلى الأمام من درجة فردية . التطابق هو عند $k = \;\; -n \, , \;\; \dots \;\; , \;\; n+1$ لاحظ أن الفروق الزوجية فقط هي التي تظهر .

(3−12) صيغة بسل :− هي ترتيب آخر لصيغة أفيرت ويمكن كتابتها كما يلي :−

$$\begin{aligned} p_k = \mu y_{½} + (k - ½)\delta y_{½} + (2^k)\mu\delta^2 y_{½} + \left(\frac{1}{3}\right)(k - ½)(2^k)\delta^2 y_{½} \\ + \cdots + (2n^{k+n-1})\mu\delta^{2n} y_{½} \\ + (1/[2n+1])(k - ½)(2n^{k+n-1})\delta^{2n+1} y_{½} \rightarrow \quad (9-3) \end{aligned}$$

(3−13) قاعدة الخط المتعرج :−

هي حيلة لإستنباط عدد كبير من الصيغ الأخرى من جداول الفروق المعتادة . إلا إنه في الظروف غير العادية فقط تكون الصيغ القياسية التي سبق ذكرها غير مناسبة .

(3−14) الفروق المنتهية :−

لقد فتنت الفروق المنتهية الرياضيين لقرون . كان نيوتن من مستخدميها الأوائل وقد تطورت على يديه .

نفرض دالة متقطعة . أي فئة محددة من أدلة x_k كل له قرين y_k . وبفرض أن الأدلة على أبعاد متساوية حيث

$$x_{k+1} - x_k = h$$

فإن الفروق للقيم y_k ترمز $\Delta y_h = y_{k+1} - y_k$

(3−14−1) جدول الفروق :−

هو شكل البيان المعياري لعرض الفروق المنتهية . يهيئ التكوين القطري للجدول لكل مدخل من مدخلاته بإستثناء x_k ,y_k أن يكون مساوياً الفرق بين أقرب جارين إلى يساره

الفصل الثالث

الإستكمال

x_0	y_0				
x_1	y_1	$y(x_0,x_1)$			
x_2	y_2	$y(x_1,x_2)$	$y(x_0,x_1,x_2)$		
x_3	y_3	$y(x_2,x_3)$	$y(x_1,x_2,x_3)$	$y(x_0,x_1,x_2,x_3)$	
x_4	y_4	$y(x_3,x_4)$	$y(x_2,x_3,x_4)$	$y(x_1,x_2,x_3,x_4)$	$y(x_0,x_1,x_2,x_3,x_4)$

جدول (3-1)

(3-14-2) صيغ الفروق :-

توازي إلى حد ما صيغ حساب التفاضل

1- **فروق الدالة الثابتة أصفار** بالرموز $\Delta c = 0$ حيث: $const \equiv c$

الإثبات :-

نفرض أن $y_k = c$ لكل قيم k دالة ثابتة يكون لدينا من أجل كل قيم k

$$y_{k+1} - y_k = c - c = 0$$

2- الفرق لمضاعف ثابت الدالة يكون لدينا $\Delta(cy_k) = c\Delta y_k$

$$\Delta(cy_k) = cy_{k+1} - cy_k = c\Delta y_k \rightarrow (10-3)$$

تشتمل على دالتين معرفتين لنفس الأدلة x_k والتي تأخذ القيم y_k والأخرى تأخذ

القيم $z_k = cy_k$

$$\Delta z_k = c\Delta y_k$$

3- **الفرق لحاصل جمع دالتين :-**

هو حاصل جمع فرقيهما

$$\Delta(U_k + V_k) = \Delta U_k + \Delta V_k$$

4- الخاصية الخطية :- وهي تعمم النتيجتين السابقتين .

$$\Delta(c_1 U_k + c_2 V_k) = c_1 \Delta U_k + c_2 \Delta V_k$$

حيث c_2 , c_1 مقدارين ثابتين

البرهان :-

نعتبر دالتين معرفتين لنفس الأدلة x_k هما U_k, V_k حيث :

$$W_k = c_1 U_k + c_2 V_k \Rightarrow \Delta W_k = c_1 \Delta U_k + c_2 \Delta V_k$$

من التعريف نجد أن

$$\begin{aligned} \Delta W_k = W_{k+1} - W_k &= (c_1 U_{k+1} + c_2 V_{k+1}) - (c_1 U_k + c_2 V_k) \\ &= c_1(U_{k+1} - U_k) + c_2(V_{k+1} - V_k) = c_1 \Delta U_k + c_2 \Delta V_K \end{aligned}$$

5- الفروق لحاصل الضرب :- تعطى بالصيغة

$$\Delta(U_k V_k) = U_k \Delta V_k + V_{k+1} \Delta U_k$$

لاحظ الدليل $k+1$

الأثبات :-

نفرض أن $Z_k = U_k V_k$ ونحاول إثبات أن :

$$\Delta Z_k = U_k \Delta V_k + V_{k+1} \Delta U_k$$

$$\Delta Z_k = U_{k+1} V_{k+1} - U_k V_k = U_{k+1} V_{k+1} - U_k V_{k+1} + U_k V_{k+1} - U_k V_k$$

$$U_{k+1}(U_{k+1} - U_k) + U_k(V_{k+1} - V_k) = U_k \Delta V_k + U_{k+1}$$

6/ الفروق لخارج القسمة تعطى بالصيغة :

$$\Delta(U_k/V_k) = (V_k\Delta U_k - U_k\Delta V_k)/(V_{k+1}V_k)$$

$$\Delta\frac{U_k}{V_k} = \frac{U_{k+1}}{V_{k+1}} - \frac{U_k}{V_k} = \frac{V_kU_{k+1} - U_kV_k - U_kV_{k+1}}{V_{k+1}V_k} = \frac{V_k\Delta U_k - U_k\Delta V_k}{V_{k+1}V_k}$$

7/ الفروق لدالة القوة :- تعطى بالصيغة

$\Delta_{\mathrm{e}}^{k} =_{e}^{k} (c-1)$ الحالة الخاصة $c = 2$ تعطى $\Delta y_{\mathrm{k}} = y_k$

$$\Delta e^k = e^{k+1} - e^k = e^k(e-1)^k$$

8- الفروق لدالة الجيب ودالة جيب التمام

$$\Delta(\sin k) = 2\sin(½)\cos(k + ½) \quad \rightarrow (11-3)$$

$$\Delta(\cos k) = 2\sin(½)\sin(k + ½) \quad \rightarrow (12-3)$$

9- الفروق للدالة اللوغريثمية يأخذ $x_k = \mathrm{x}_0 + \mathrm{kh}$

$$\Delta(\log x_k) = \log(1 + h/x_k)$$

عندما تكون : h/x_k صغيرة جداً هذا يجعل $\Delta(\log x_k)$ بالتقريب h/x_k

البرهان :-

$$\Delta\log(x_k) = \log(x_{k+1}) - \log(x_k) = \log(x_k + h) - \log(x_k) = \log(1 + h/x_k) \rightarrow (13-3)$$

(3–15) الفروق المقسومة :-

الفرق المقسوم الأول بين x_0 , x_1 يعرف بأنه :-

$$\mathrm{y}(x_0, \mathrm{x}_1) = \frac{\mathrm{y}_1 - \mathrm{y}_0}{\mathrm{x}_1 - \mathrm{x}_0} \rightarrow (14-3)$$

والفروق المقسومة الأعلى تعرف بدلالة الفروق المقسومة من رتبة أقل فمثلاً

$$y(x_0, x_1, x_2) = \frac{y(x_1,x_2) - y(x_0,x_1)}{x_2 - x_0} \rightarrow (15-3)$$

هو فرق ثان بينما

$$y(x_0, x_1, \dots, x_n) = \frac{y(x_1,\dots,x_n) - y(x_0,\dots,x_{n-1})}{x_n - x_0} \rightarrow (16-3)$$

هو فرق نوني من وجوه عديدة تلعب هذه الفروق دوراً مكافئاً للدور الذي تلعبه الفروق البسيطة التي استخدمناها من قبل .

(3-16) نظرية التمثيل :-

$$y(x_0, x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^{n} y_i / F_i^n\,(x)$$

حيث $F_i^n(x)$ هي الدالة $F_i(x)$ ، توضح كيف يمكن تمثيل كل فرق مقسوم كحاصل جمع مضاعفات للقيم x_k .

(3-16-1) خاصية التمثيل :-

الفروق المقسومة تنص على أن هذه الفروق تبقى ثابتة تحت أي تبديل للأدلة x_k بشرط أن القيم y_k تبدل بنفس الكيفية .

هذه النتيجة المفيدة جداً هي نتيجة مباشرة لنظرية التمثيل .

الفروق المقسومة والمشتقات ترتبط بالعلاقة .

$$y(x_1, x_0, \dots, x_n) = y^{(n+1)}\,(\varepsilon)/(n+1)\,! \rightarrow (17-3)$$

(3-17) الفروق المنتهية العادية :-

في حالة الأدلة على أبعاد متساوية تختزل الفروق المقسومة إلى الفروق المنتهية العادية على وجه التخصيص .

$$y(x_0, x_1, \dots, x_n) = \Delta^n\, y_0 / n!\, h^n$$

يمكن بهذه الكيفية الحصول على خاصية مفيدة للفروق المنتهية العادية

هذه الخاصية هي $\Delta^n y_0 = y^{(n)}(\varepsilon) h^n$ للدالة $y(x)$

ذات المشتقات المحدودة ، تكون $y^n(x)$ محدودة بعدد لا يعتمد على n ، وينتج أنه لجميع قيم h الصغيرة $lim \Delta^n\ y_{0=0}$عندما تتزايد n بدون حد . وهذا يعمم النتيجة التي حصلنا عليها سابقاً لكثيرات الحدود و يوضح لماذا الفروق الأعلى بجدول الفروق كثيراً مانجد أنها تقترب إلى الصفر .

(3-18) نيوتن للفروق المقسومة :-

يمكن إيجاد كثيرة الحدود المطابقة بدلالة الفروق المقسومة النتيجة التقليدية هي صيغة نيوتن للفروق المقسومة .

$$\begin{aligned} p(x) = y_0 + (x - x_0)y(x_0, x_1) + (x - x_0)(x - x_1)y(x_0, x_1, x_2) + \\ \dots + (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})y(x_0, \dots, x_n) \ \rightarrow \ (18 - 3) \end{aligned}$$

حيث ليس من المطلوب أن تكون الأدلة x_{k} على أبعاد متساوية . وهذه الصيغة تعمم صيغة نيوتن ، وفي حالة الأبعاد المتساوية تختزل إليها .

(3–19) كثيرات الحدود اللاثمة :-

لا تتفق فقط في القيمة مع دالة معطاة عند أدلة معينة ، التي هي فكرة التطابق ، بل أيضاً مشتقاتها إلى رتبة ماتطابق مشتقات الدالة المعطاه ، عادة عند نفس الأدلة ، ففي أبسط حالات اللثام تتطلب أن يكون :

$$p(x_k) = y(x_k), p'(x_k) = y'(x_k) \quad \text{عند} \quad k = 0,1, \dots, n$$

بلغة الهندسة :- هذا يجعل المنحنيين الممثلين لدالتين يمسان أحدهما الأخر عند هذه النقطة التي عددها $n + 1$.

اللثام من رتبة أعلى يتطلب أيضاً أن $p''(x_k) = y''(x_k)$

وهكذا المنحنيان المناظران يكون لهما عندئذ مايسمى تماساً من رتبة أعلى .

طريقة المعاملات غير المعينة :-

يمكن استخدامها للحصول على كثيرات حدود لها لثام من رتبة أعلى .

الطرائق التكرارية وغير التكرارية :-

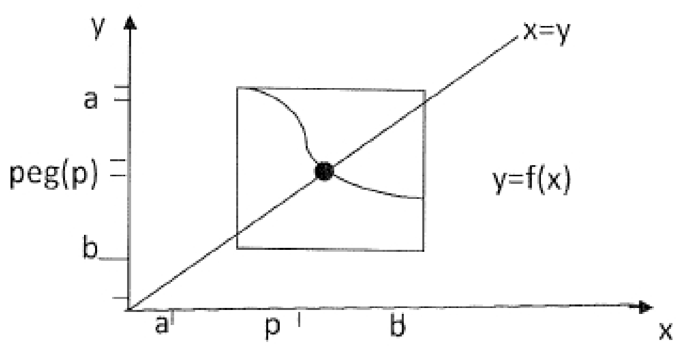
(3–20) الطريقة التكرارية للنقطة الثابتة:-

النقطة الثابتة لدالة معلومة g هي عدد p يحقق $g(p) = p$.مسائل ايجاد الجذور ومسائل النقطة الثابتة صنفان متكافئان ضمن المعنى الذي نقدمه بما يلي اذا أعطينا مسألة ايجاد جذوره $f(p)=0$ فانه يمكننا ان نعرف دالة g ذات نقطة ثابتة p بطرق متعددة مثلاً $g(x) = x - f(x)$ او $g(x) = x + 3f(x)$ على النقيض من ذلك اذا كانت الدالة g ذات نقطة ثابتة p ، فان الدالة المعروفة بالصورة $f(x) = x - g(x)$ جذرا عند p .

رغم ان المسائل التي نريد حلها هي من نمط ايجاد جذرا فان شكل النقطة الثابتة اكثر سهولة في التحليل ، كما ان بعض اختبارات النقطة الثابتة تؤدي الي وسائل فعالة لايجاد الجذور .

نظرية :-

اذا كانت $g\epsilon c[a,b]$, $g(x) \;\; \epsilon\, [a,b],$ لكل $x\epsilon[a,b\,]$ فان g نقطة ثابتة في $[a,b\,]$ اذا فرضنا بالإضافة الي ذلك ، فان $g'(x)$ موجودة علي (a,b) وانه يوجد ثابت موجب $k<1$ يحقق $|g'(x)| \le k < 1$ لكل $x\epsilon(a,b)$ فان النقطة الثابتة الواقعة على $[a,b]$ وحيدة .



شكل (4−1)

البرهان :-

اذا كان $f(a)=a$ ،أو $f(b)=b$ فان وجود نقطة ثابتة واضح .لذا يجب ان يكون $g(b)<b$ ، $g(a)>a$ اذا فرضنا $h(x)=g(x)-x$ فان h متصلة على $[a,b]$ وتحقق $h(b)-g(b)-b<0$, $h(a)=g(a)-a>0$

تقضي نظرية القيمة المتوسطة وجود عدد $p\epsilon(a,b)$ يحقق $h(p)=0$ لذا

$g(p)-p=0$ و p هي نقطة ثابتة لـــg

لنفرض بالاضافة الي ما تقدم ان المتراجحة $h(x)=g(x)-x$ صحيحة وان

كلا من p وq نقطتان ثابتتان في $[a,b]$ فان $p\neq q$ استنادا الي نظرية

القيمة المتوسطة ، يوجد عدد ε واقع بين q وp اي واقع في $[a,b]$ يحقق :

$$\frac{g(p)-g(q)}{p-q}=g'(\varepsilon)$$

لذا $|p-q|=|g(p)-g(q)|=|g'(\varepsilon)||p-q|\leq k|p-q|<|p-q|$

وهذا تناقض نتج عن فرضنا كون $p\neq q$ لذا لابد ان يكون $p=q$ وان النقطة الثابتة

في $[a,b]$وحيدة .

(3−21) طريقة جاوس للحذف :-

هذا هو الإسم الرسمي لطريقة حل الأنظمة للمعادلات الخطية بحذف المجاهيل بصورة متتالية وإنقاص رتبة الأنظمة .

لحل النظام $A_x=b$ سوف نقلصه الي النظام $u_x=g$ ، حيث ان u هي مصفوفة مثلثية عليا ويمكن حل هذا النظام بسهولة بعملية التعويض الخلفي ، نرمز للنظام الخطي الاصلي $A_x^{(1)}=b^{(1)}$

$$A^{(1)}=\left[a_{ij}^{(1)}\right],b^{(1)}=\left[b_1^{(1)},\dots,b_n^{(1)}\right]^T \quad ,1\leq i\,,j\leq n$$

حيث ان n هي رتبة النظام نقلص النظام الي الصورة المثلثية $u_x=g$ باضافة مضاعفات معادلة واحدة الي المعادلة الاخري وبحذف بعض المجاهيل من المعادلة الثابتة .

(3-21-1) خوارزمية جاوس للحذف :-

الخطوة 1 :- افرض $a_{11}^{(1)} \neq 0$ عرف مضاعفات الصف كالاتي :-

$$m_{i1} = a_{i1}^{(1)}/a_{11} \qquad i = 2,3,\ldots\ldots\ldots,n$$

وتستخدم هذه لحذف المجهول x_1 من المعادلة 2الي n . عرف

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - m_{i1}a_{ij}^{(1)} \quad i,j = 2,\ldots\ldots\ldots,n$$

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - m_{i1}b_1^{(1)} \quad i = 2,\ldots\ldots\ldots,n$$

وتترك الصفوف الاولى في A و b بدون تغيير . اما العمود الاول في $A^{(1)}$ اسفل القطر فيوضع صفر ويصبح النظام $A_X^{(2)} = b^{(2)}$ كما يلي :-

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{1n}^{(1)} \\ \begin{smallmatrix}0\\ \vdots\end{smallmatrix} & a_{22}^{(2)} & a_{2n}^{(2)} \\ & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n2}^{(2)} & a_{nn}^{(2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ b_2^{(2)} \\ \vdots \\ b_n^{(2)} \end{bmatrix}$$

ونستمر في حذف المجاهيل بالإنتقال إلي الأعمدة 3,2 وهكذا وسنوضح ذلك فيما يلي :-

الخطوة k:- افرض $1 \leq k \leq n-1$. افرض ان$A_X^{(k)} = b^{(k)}$ قد شكل بحيث تحذف $x_1,\ldots\ldots\ldots,x_{k-1}$ في خطوات متتالية ، وسيكون ل $A^{(k)}$ الشكل الاتي :

$$A^{(k)} = \begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} \dots & a_{1n}^{(1)} \\ 0 & a_{22}^{(2)} & a_{2n}^{(2)} \\ \overset{0}{\vdots} & a_{kk}^{(k)} & a_{kn}^{(k)} \\ & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{nk}^{(k)} & a_{nn}^{k} \end{bmatrix}$$

إفترض ان $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ عرف المضاعفات

$$m_{ik} = a_{ik}^{(k)} / a_{kk}^{(k)} \qquad i = k+1, \dots\dots, n$$

واستخدامها لازالة المجاهيل x_k من المعادلات $k+1$ الي n

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - m_{ik} a_{kj}^{(k)}$$

$$b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - m_{ik} b_k^{(k)} \quad i, j = k+1, \dots, n$$

سوف لا نغير الصفوف المبكرة 1اليk. ونضيف اصفاراً في العمود kاسفل الصفر القطري . وبالاستمرار وبعد $n-1$ من الخطوات نحصل على $A_X^{(n)}$ $=b^{(n)}$

$$\begin{bmatrix} a_{11}^{(1)} \dots & a_{1n}^{(1)} \\ \vdots & \vdots \\ 0 \cdots & a_{nn}^{(n)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1^{(1)} \\ \vdots \\ b_n^{(n)} \end{bmatrix}$$

ولسهولة الترميز ، لتكن $U = A^{(n)}$ و $g = b^{(n)}$. النظام $U_x = g$ مثلث علوي

ومن السهولة حله اولاً . $x_n = g_n / U_{nn}$

ثم :

$$x_k = \frac{1}{U_{kk}} \left[g_k - \sum_{j=k+1}^{n} U_{kj} x_j \right] ; k = n-1, n-2, \dots, 1$$

وبهذا تكتمل خوارزمية جاوس للحذف

(3-22) طريقة جاوس جوردن : -

تشبه هذه الطريقة على الاكثر الحذف الاعتيادي مشتملا على الاستخدام الممكن للارتكاز والموازنة وتختلف في حذف المجاهيل من المعادلات التي تقع فوق القطر كما في الاسفل ايضاً في الخطوة k من الحذف .

أختار عنصر الإرتكاز عندئذ $\quad j = k, \dots, n \qquad a_{kj}^{(k+1)} = a_{kj}^{(k)} / a_{kk}^{(k)}$

$$b_k^{(k+1)} = b_k^{(k)} / a_{kk}^{(k)}$$

احذف المتغير x_k في المعادلات أعلى وأسفل المعادلة k .

$$a_{ij}^{(k+1)} = a_{ij}^{(k)} - a_{jk}^{(k)} a_{kj}^{k+1} \rightarrow \ (19-3)$$

لقيم $\quad j = k, \dots n \ \ i = 1, \dots, n \ \ i \neq k \qquad b_i^{(k+1)} = b_i^{(k)} - a_{ik}^{(k)} b_k^{(k+1)}$

هذه العملية تحول $[A/b]$ الي $\left[I/b^{(n)}\right]$ حيث ان عند نهاية الحذف $x = b^{(n)}$

لحل $A_x = b$ بهذه الوسيلة تحتاج الي $\frac{n(n+1)^2}{2} \approx \frac{n^3}{2}$ من عمليات الضرب والقسمة هذه 50% اكثر من طريقة الحذف وبالنتيجة فيجب عدم استخدام طريقة جاوس جوردن لكل الانظمة الخطية .

(3-23) طريقة جاوس – جاكوبي :- (الازاحات الاتية)

اعد كتابة $A_x = b$ كما يلي

$$x_i = \frac{1}{a_{ii}} \left[b_i - \sum_{\substack{j=i \\ j \neq i}}^{n} a_{ij} . x_j \right] \qquad i = 1, \dots, n$$

بإفتراض أن جميع $a_{ij} \neq 0$. عرف العملية التكرارية كالاتي :-

$$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j^{(m)}\right] \qquad i = 1, \dots, n \quad n \geq 0$$

أفترض التخمينات الأولية $i = 1, \dots, n$, $x_i^{(0)}$ معطاة . وهناك صور أخرى للطريقة

(24-3) طريقة جاوس – سيدل (الازاحات المتتالية):-

$$x_i^{(m+1)} = \frac{1}{a_{ii}}\left[b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij}x_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} a_{ij}x_j^{(m)}\right]$$

$$i = 1, \dots, n \quad (20-3)$$

يستخدم كل عنصر حالاً في حساب العنصر القادم . وهذا مناسب لحسابات الحاسبة لان القيمة الجديدة يمكن ان تخزن في الموقع الذي يحتوي القيمة القديمة . وهذا يقلص من عدد مواقع الخزن الضرورية . اماكن الخزن اللازمة ل x في طريقة جاوس – سيدل (هي نصف عدد الاماكن في طريقة جاوس – جاكوبي).

$$e_i^{(m+1)} = -\sum_{j=1}^{i-1} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} e_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^{n} \frac{a_{ij}}{a_{ii}} e_j^{(m)} \quad i = 1,2, \dots, n$$

عرف $a_i = \sum_1^{i-1} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| \quad ,B = \sum_{j=i+1}^{n} \left|\frac{a_{ij}}{a_{ii}}\right| \quad i = 1, \dots, n$

بحيث $a_1 = B_n = 0$ وبإستخدام نفس قيم μ . في طريقة جاكوبي نحصل على :

$$\mu = \max_{1 \leq i \leq n} (a_i + B_i)$$

سوف نفرض أن $\mu < 1$ وبعدها نعرف

$$\mu = \max_{1 \leq i \leq n} \frac{B_i}{1 - a_i}$$

ومن ينتج :-

$$\left|e_i^{(m+1)}\right| \le a_i \parallel e^{(m+1)} \parallel_\infty + B_i \parallel e^{(m)} \parallel_\infty \qquad {}_{i=1,\ldots,n}$$

لتكن k الدليل بحيث أن :

$$\parallel e^{(m+1)} \parallel_\infty = \left|\mathrm{e}_\mathrm{k}^{(\mathrm{m}+1)}\right|$$

عند وضع $i = k$ فإن :

$$\parallel e^{(m+1)} \parallel_\infty \mathrm{a_k} \parallel \mathrm{e}^{(\mathrm{m}+1)} \parallel_\infty + \mathrm{B_k} \parallel \mathrm{e}^{(\mathrm{m})} \parallel_\infty$$

$$\parallel e^{(m+1)} \parallel_\infty \le \frac{\mathrm{B_k}}{1-\mathrm{a_k}} \parallel \mathrm{e}^{(\mathrm{m})} \parallel_\infty$$

ولذلك فإن :

$$\parallel e^{(m+1)} \parallel_\infty < \mu \parallel \mathrm{e}^{(\mathrm{m})} \parallel_\infty$$

ولأن كل i

$$(a_i + B_i) - \frac{B_i}{1-a_i} = \frac{a_i[1-(a_i+B_i)]}{1-a_i} \ge \frac{a_i}{1-a_i}(1-\mu) \ge 0$$

فإن :

$$\mu \le m < 1$$

وبالدمج يوضح التقارب $0 \rightarrow \mathrm{e}^{(\mathrm{m})}$ عندما $\infty \rightarrow \mathrm{m}$.

الفصل الرابع

التطبيقات

التطبيقات

مثال (4-1) :

إذا علمت ان جذر المعادلة المعطاة يجب ان يكون x_0 =1.55 بينما باتباع طريقة عددية معين حصلت على قيمة تقريبية $x = 1.49$ فما هو الخطأ المطلق E والخطأ النسبي E_r؟

الحل :

$$E = |x - x_0| = |1.49 - 1.55| = |-0.06| = 0.06$$

$$E_r = \left|\frac{x_0 - x}{x_0}\right| = \left|1 - \frac{x}{x_0}\right| = \left|1 - \frac{1.49}{1.55}\right| = 0.039$$

مثال(4-2) :

احسب قيمة تقريبية ل e وذلك باستخدام المتسلسلة

$$e^{x} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots \to \infty$$

الحل:

يمكننا من خلال المتسلسلة تكوين الجدول التالي

القيمة التقريبية ل e	متسلسلة $e^x\ (x=1)$	عدد الحدود
1.000000	$e^x = 1$	1
2.000000	$e^x = 1 + x$	2
2.500000	$e^x = 1 + x - \frac{x^2}{2}$	3
2.666.667	$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$	4
2.708.336	$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$	5
2.716.667	$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}$	6

جدول (4-1)

لاحظ ان خطأ الاقتطاع يقل كلما اخذنا حدود جديدة (قيمة e لتسعة منازل عشرية هي $e \approx 2.718.281.828$) وعند الاكتفاء بستة حدود يوجد اتفاق في منزلتين عشريتين اي ان $e = 2.71$ والعدد الكافي من الحدود يعطينا عددا مرغوبا فيه من المنازل يبين باستعمال الصيغة التالية :

تعريف (4-1):-

اذا كان $|x_{n+1} - x_n| < 0.5 \times 10^{-k}$ فانه يقال ان x_n, x_{n+1} كتقريبين متتاليين لقيمة x متفقان في عدد k من المنازل العشرية فمثلاً اذا كانت $x_0 = 1.549271$ وكانت $x_{n+1} = 1.553427$ فهنالك اتفاق في المنزلة العشرية الاولى (اي ان $k = 1$) وباستخدام الصيغة السابقة نجد ان :

$$|x_{n+1} - x_n| = 0.004156 = 0.4156 \times (10)^{-2} < 0.5 \times (10)^{-2} \rightarrow k = 2$$

مثال (3-4) :

احسب اقصى خطأ مطلق ونسبي للدالة $f(x,y,z)=\frac{xy}{z}$ علما بان :

$$x = 1 \pm 0.01, \qquad y = 2 \pm 0.03\,, \qquad z = 3 \pm 0.04$$

الحل:

$$f(x,y,z)=\frac{xy}{z} \to f_{(1,2,3)}=\frac{(1)(2)}{3}=\frac{2}{3} \to |f|=\frac{2}{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}=\frac{y}{z} \to \frac{\partial f}{\partial x_{(1,2,3)}}=\frac{2}{3} \to \left|\frac{\partial f}{\partial x}\right|=\frac{2}{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{x}{y} \to \frac{\partial f}{\partial y_{(1,2,3)}}=\frac{1}{3} \to \left|\frac{\partial f}{\partial y}\right|=\frac{1}{3}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=-\frac{xy}{z^2} \to \frac{\partial f}{\partial z_{(1,2,3)}}=\frac{-2}{9}=\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right|=\frac{2}{9}$$

في حين أن $|\Delta x| = 0.01\,, |\Delta y| = 0.03\,, |\Delta z| = 0.04\,,$

ومن ثم يكون اقصى خطأ مطلق هو

$$|\Delta f|_{max}=\left|\frac{\partial f}{\partial x}\right||\Delta x|+\left|\frac{\partial f}{\partial y}\right||\Delta y|+\left|\frac{\partial f}{\partial z}\right||\Delta z|=$$

$$\left(\frac{2}{3}\right)\left(\frac{1}{100}\right)+\frac{1}{3}\times\left(\frac{3}{100}\right)+\frac{2}{9}\left(\frac{4}{100}\right)=\frac{23}{900}$$

في حين يكون اقصى خطأ نسبي هو

$$\left|\frac{\Delta f}{f}\right|_{max}=\left|\frac{\Delta f}{f}\right|=\frac{23}{900}\times\frac{3}{2}=\frac{23}{600}$$

مثال (4-5):

إذا كان :

$$x_1 - x_2 = 2 \quad , 2x_1 - 3x_2 = 10$$

فإنه من الممكن ضرب المعادلة الاولى في (-2)

$$-2x_1 + 2x_2 = -4$$

$$2x_1 - 3x_2 = 10$$

وبالجمع $-x_2 = 6 \quad , \quad x_2 = -6$

تكون المعادلتان الناتجتين

$$-2x_1 + 2x_2 = -4$$

$$-x_2 = 6$$

اي أن

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 10 \end{bmatrix} , \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \end{bmatrix}$$

لاحظ أننا وصلنا الي المصفوفة المثلثية العليا التي يمكن إستخدامها الآن في الحل بإسلوب يسمى بالرجوع Back ward كالأتي :

- بإستعمال المعادلة الأخيرة نجد ان $x_2 = -6$
- ثم بالتعويض في المعادلة التي قبلها (الاولى هنا) نجد أن :

$$-2x_1 - 12 = -4 \quad , \quad x_1 = -4$$

وبالتالي يكون عمود الحل هو

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix}$$

مثال (4−6):

حل المعادلات $x + 2y + 3z = 2 \quad , \; y + 5z = 3 \, , \quad x + 3z = 6$

باسلوب الرجوع مستخدما جاوس

الحل :

يتم إعداد جدول يختصر المعادلات وذلك بتحويل علامة (=) الي خط رأسي يفصل بين جهتين يمنى ويسرى توضع المعادلات في الجهة اليسرى وتوضع الثوابت في الجهة اليمنى ثم نستعمل عمود يسمى عمود الاختبار ويستعان به في الكشف على دقة العمليات اثناء اجراء عمليات الصف البسيط

	x	y	z		عمود الإختبار
صف الإرتكاز وعنص الإرتكاز	1	2	3	2	4
	0	1	5	3	3
	1	0	3	6	-2
ينزل صف الإرتكاز كما هو	1	2	3	2	4
	0	1	5	3	3
	0	-2	0	4	-6
صف الإرتكاز (الصف الثالث +x2الصف الثاني)	1	2	3	2	4
	0	1	5	3	3
	0	0	10	10	0

جدول رقم (4−2)

الصورة النهائية :-

$$x + 2y + 3z = 2$$
$$y + 5z = 3$$
$$10z = 10$$

بالرجوع

$$Z = 1\,, y = 3 - 5 = -2, \;\; x = 2 - 2(-2) - 3(1) = 2 + 4 - 3 = 3$$

ويكون عمود الحل هو $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$

فوائد جانبية للجدول :-

يمكن إيجاد المعكوس من الجدول وذلك بتعديل بسيط في الجدول حيث نأخذ في الجهة اليسرى عناصر A وفي اليمنى نضع عناصر المصفوفة المحايدة (مصفوفة الوحدة) التي لها نفس ابعاد A.

ثم نكون المصفوفة الموسعة (A:I) ونأخذ عمود للاختبار كما هو معتاد ونجري عمليات الصف البسيط حتى نصل للصورة المكافئة لصورة المصفوفة الموسعة ($I : A^{-1}$) والتي منها يمكن معرفة المعكوس A^{-1} كما يتضح من المثال التالي:

مثال (4−7):

اوجد معكوس المصفوفة $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$

$\begin{matrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 4 \\ 8 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 1 & 3/2 \\ 4 & 5 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1/2 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 \\ 8 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 1 & 3/2 \\ 0 & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1/2 & 0 \\ -2 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 1 & 3/2 \\ 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 1/2 & 0 \\ 2 & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix}$
$\begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{matrix}$	$\begin{matrix} 2 \\ 0 \end{matrix}$

جدول (4-3)

ويكون $A^{-1} = \begin{bmatrix} -5/2 & 3/2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

الطرق غيرالمباشرة :−

مثال (4−8):

حل المعادلات الأتية بطريقة جاكوبي :

$$x - 4y + z = -2\,, \qquad 5x + 2y = 7\,, \qquad y + 2z = 3$$

أخذاً $x_0 = \begin{bmatrix} 12 \\ 1.8 \\ 1.2 \end{bmatrix}$ كحل تقريبي

مثال (4−9):

حل نظام المعادلات :

$$5x + 2y = 7\ ,\ \ x - 4y + z = -2\ ,\qquad y + 2z = 3$$

اخذاً $x_0 = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0.8 \\ 1.2 \end{bmatrix}$

الحل:

$$x_1 = x\ \ ,x_2 = y\ \ ,\ \ x_3 = z$$

إذن تأخذ المعادلات الصورة

$$5x_1 + 2x_2 = 7$$

$$x_1 - 4x_2 + x_3 = -2$$

$$x_2 + 2x_3 = 3$$

وتكون المعادلة التكرارية

$$x_1^{(1)} = \frac{1}{5}\left(7 - 2x_2^{(0)}\right)$$

$$x_2^{(1)} = \frac{1}{-4}\left(2 - x_1^{(1)} - x_3^{(0)}\right)$$

$$x_3^{(1)} = \frac{1}{2}\left(3 - x_2^{(1)}\right)$$

ويأخذ

$$x^{(0)} = \begin{bmatrix} 1.2 \\ 0.8 \\ 1.2 \end{bmatrix}$$

الخطوة	$x = x_1$	$y = x_2$	$z = x_3$
0	1.2000	0.8000	1.2000
1	1.0800	1.0700	0.9550
2	0.9770	0.9843	1.0079
8	1.0000	1.0000	1.0000

جدول (4-5)

مثال (4- 10):

حل المعادلة $x = \sin x = 0$ بطريقة التكرار لسبع خطوات تكرارية

الحل:

$$x - \sin x = 0 \rightarrow x = \sin x$$

أي أن

$$\emptyset(x) = \sin x \rightarrow \emptyset'(x) = \cos x \quad |\emptyset'(x)| = |\cos x| \leq 1$$

وجود إحتمال مساواة لا يتفق مع شرط التقارب ولكننا إذا كنا قريبين من الصفر فهنالك إحتمال لعدم التقارب والسبع خطوات هي مع اخذ $x_0 = 0.1$

جدول (4-6)

n	x_n
0	0.10000
1	0.09983
2	0.09967
3	0.09967
4	0.09933
5	0.09917
6	0.09901
7	0.09885

وبالتالي $x = 0.09885$ لسبع خطوات تكرارية

مثال (4- 11):

حل المعادلة $x^3 - 3 = 0$ بطريقة نيوتن – رافسون لأربعة منازل عشرية

الحل:

x	0	1	2
$f(x)$	(−)	(−)	(+)

من الجدول نأخذ

$$x_0 = 1.8$$

$$x_i = x_{i-1} = \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})} \;\; , i \geq 1$$

حيث :

$$f(x_i) = x_i^3 - 3 \rightarrow f'(x_i) = 3x_i^2$$

بالتالي

$$x_i = x_{i-1} - \frac{x_{i-1}^3 - 3}{3x_{i-1}^2}$$

والجدول التالي يوضح نتائج التعويض

n	x_n
0	1.8000
1	1.50864
2	1.44513
3	1.44226
4	1.44225

جدول (4-7)

لاحظ أن

$$|x_4 - x_3| = 0.00001 = 0.1 \times 10^{-4} < 0.5 \times 10^{-4}$$

أي أن $k = 4$ أي أن الجزر لأربعة منازل عشرية هو $x = 1.4422$

مثال(4-12):

إستخدم طريقة التنصيف المتكرر لحل المعادلة $x + \ln x = 0$ لمنزلتين عشريتين

الحل :

اولاً : تحديد الفترة $(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b})$:

x	0.1	0.5	0.6
$f(x) = x + \ln x$	(−)	(−)	(+)

وبالتالي تكون الفترة هي $(0.5,0.6)$ وهذا يعني ان $a = 0.5, b = 0.6$

ثانياً : تقدير عدد الخطوات n

$$n \approx \frac{\log(b-a)+k}{\log 2} = \frac{\log(0.1)+2}{\log 2} \to n = 3$$

n	a_n	b_n	$x_n = \frac{a_n + b_n}{2}$	اشارة $f(x)$
0	0.5000	0.6000	0.55000	(−)
1	0.5500	0.6000	0.57500	(−)
2	0.5500	0.5750	0.56250	(−)
3	0.5625	0.5750	0.56875	(−)

جدول (4−8)

إذن $x = 0.56$ بمنزليتين عشريتين

مثال (4−13):

كون حدودية الإستكمال بإستعمال طريقة لاجرانج للنقاط اللآتية :

x	−1	2	4
y	3	7	5

الحل :

نكون جدول الفروق

	$(x+1)$	$(x-2)$	$(x-4)$
$x_0 = -1$	$x+1$	-3	-5
$x_1 = 2$	3	$x-2$	-2
$x_2 = 4$	5	2	$x-4$

وبالتالي :

$$L_2^{(0)}(x) = \frac{(x-2)(x-1)}{(-3)(-5)} = \frac{1}{15}(x-2)(x-4)$$

$$L_2^{(1)}(x) = \frac{(x+1)(x-4)}{(3)(-2)} = \frac{-1}{6}(x+1)(x-4)$$

$$L_2^{(2)}(x) = \frac{(x+1)(x-2)}{(5)(2)} = \frac{1}{10}(x+1)(x-2)$$

وتكون حدودية الإستكمال :

$$y = (3)\left(\frac{1}{15}\right)(x-2)(x-4) + (7)\left(-\frac{1}{6}\right)(x+1)(x-4) + (5)\left(\frac{1}{10}\right)(x+1)(x-2)$$

وبضرب الأقواس وتجميع الحدود المتناظمة نحصل على

$$y = \frac{-7}{15}x^2 + \frac{9}{5} + \frac{79}{15}$$

مثال(4-14):

أوجد قيمة y عند $x = 0$ إذا كان

x	−1	1	3	5
y	3	2	5	-7

الحل :

نلاحظ تساوي الفروق $(h = 2)$

x	y	Δy_0	$\Delta^2 y_0$	$\Delta^3 y_0$
-1				
	3	-1		
1				
	2	3	4	-19
3				
	5	-12	-15	
5				
	-7			

جدول (4-9)

$$\propto = \frac{x - x_0}{h} = \frac{x+1}{2}$$

$: \ p_1(x) \quad (i)$

$$p_1(x) = y_0 + \propto (\Delta y_0) = 3 = \frac{x+1}{2}(-1)$$

وعند $x = 0$

$$y = p_1(0) = 2.5$$

$: \ p_2(x) \qquad (ii)$

$$p_2(x) = p_1(x) + \frac{\propto (\propto - 1)}{2}(\Delta^2 y_0)$$

$$= \left[3 + \frac{x+1}{2}(-1)\right] + \frac{\left(\frac{x+1}{2}\right)\left(\frac{x+1}{2} - 1\right)}{2}(4)$$

وعند $: x = 0$

$$y = p_2(0) = p_1(0) + \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)}{2}(4) = 2$$

$p_3(x) \quad (iii)$

$$p_3(x) = p_2(x) + \frac{a(a-1)(a-2)}{6}(\Delta^3 y_0)$$

$$= p_2(x)\frac{\left(\frac{x-1}{2}\right)\left(\frac{x+1}{2}-1\right)\left(\frac{x+1}{2}-2\right)}{6}(-19)$$

وعند $x = 0$

$$y = p_3(0) = p_2(0) + \frac{\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{-3}{2}\right)\left(\frac{-5}{2}\right)}{6}(-19) = 0.8125$$

وواضح من تتبع قيم $y\ ,\ x$ في الجدول أن النتيجة الأخيرة هي أفضل قيمة لهذا الإستكمال .

مثال(4-15):

أوجد قيمة y عند $x = 7$ من الجدول التالي :

x	2	4	6	8
y	−1	2	3	0

الحل :

نلاحظ تساوي الفروق $(h = 2)$

x	y	∇y	$\nabla^2 y$	$\nabla^3 y$
2	−1			
4	2	3	−2	
6	3	1	−4	−2
8	0	0		

جدول (4-10)

$$\beta = \frac{x - x_3}{h} = \frac{x - 8}{2}$$

$:p_1(x) \quad (i)$

$$y = p_1(x) = y_3 + \beta(\nabla y_3) = 0 + \left(\frac{x}{2} - 4\right)(-3)$$

و عند $x = 7$:

$$y = p_1(7) = \left(\frac{7}{2} - 4\right)(-3) = 1.5$$

$:p_2(x) \qquad (ii)$

$$y = p_2(x) = p_1(x) + \frac{\beta(\beta + 1)}{2}(\nabla^2 y_3)$$
$$= p_1(x) + \frac{\left(\frac{x}{2} - 4\right)\left(\frac{x}{x} - 3\right)}{2}(-4)$$
$$= p_1(x) - 2\left(\frac{x}{2} - 4\right)\left(\frac{x}{2} - 3\right)$$

و عند $x = 7$:

$$y = p_2(7) = p_1(7) - 2\left(\frac{7}{2} - 4\right)\left(\frac{7}{2} - 3\right) = 1.5 - 2\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right) = 2$$

$:p_3(x) \quad (iii)$

$$y = p_3(x) = p_2(x) + \frac{\beta(\beta + 1)(\beta + 2)}{6}(\nabla^3 y_3)$$
$$= P_2(x) + \frac{1}{6}\left(\frac{x}{2} - 4\right)\left(\frac{x}{2} - 3\right)\left(\frac{x}{2} - 2\right)(-2)$$

و عند $x = 7$:

$$y = p_3(7) = p_2(7) + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{3}{2}\right)(-2) = 2 + \frac{1}{8} = 2.125$$

دراسات مستقبلية مقترحة

1/ التفاضل العددي .

2/ التكامل العددي .

3/ إستكمال الدوال المعقدة .

4/ الإستكمال بالحاسوب.

5/ دقة الصيغ الهندسية.

6/ دقة الإحكام.

المراجـــــــع

1- استاذ دكتور/ اميل شكر الله ،التحليل العددي التطبيقي _ النظرية والتقنيات والطرق التقريبية.

2- فرانسيس شيد،الأستاذ الدكتور/ راجي حليم مقار، رئيس قسم الرياضيات البحتة ،كلية العلوم جامعة عين شمس، جمهورية مصر العربية، ملخصات شوم نظريات ومسائل في التحليل العددي.

3- دكتور/ محمد ابراهيم عزوز_ مراجعه د/ بروين علي حمادي_ د/ حسن جياد سواري، التحليل العددي الجزء الثاني.

4- د/ فرانك ايرز_ ترجمه نخبة من الاساتذة المتخصصين _ مراجعه د/ محمود ابو زيد،سلسلة ملخصات شوم ومسائل في حساب التحليل العددي.

5- دوجلاس فيريز _ ترجمه استاذ د/ محمد عادل سودان _ د/ حسن محي الدين حميدة_ د/ عمر محمد حامد، قسم الرياضيات - كلية العلوم- جامعة الملك سعود، النشر العلمي والمطابع _ جامعة الملك سعود ، ص ب 68953- الرياض 11573- المملكة العربية السعودية .