بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا

كلية التربية

قسم العلوم _ شعبة الرياضيات

بحث تكميلي لنيل درجة بكلاريوس شرف التربية رياضيات

بعنوان:

إتصال (إستمرار)الدوال وبعض نظرياته وتطبيقات عليها

إعدادالطالبات:

عبير صديق العاقب علي.

عبير محمد حسن محمد.

فاطمة بليل حسن محمد عثمان.

فاطمة زهير أحمد الشريف.

إشراف:

أ. الخنساء محمد ميرغني.

2017م.

بسم الله الرحمن الرحيم

الآية

قَالَ تَعَالَىٰ:

﴿ إِنَّ فِي خَلْقِ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلْأَرْضِ وَٱخْتِلَٰفِ ٱلَّيْلِ وَٱلنَّهَارِ وَٱلْفُلْكِ ٱلَّتِي
تَجْرِي فِي ٱلْبَحْرِ بِمَا يَنفَعُ ٱلنَّاسَ وَمَآ أَنزَلَ ٱللَّهُ مِنَ ٱلسَّمَآءِ مِن مَّآءٍ فَأَحْيَا بِهِ
ٱلْأَرْضَ بَعْدَ مَوْتِهَا وَبَثَّ فِيهَا مِن كُلِّ دَآبَّةٍ وَتَصْرِيفِ ٱلرِّيَٰحِ وَٱلسَّحَابِ
ٱلْمُسَخَّرِ بَيْنَ ٱلسَّمَآءِ وَٱلْأَرْضِ لَأَيَٰتٍ لِّقَوْمٍ يَعْقِلُونَ ١٦٤ ﴾

سورة البقرة: ١٦٤

الإهداء

إلى كل من أضاء بعلمه عقل غيره

أو هدى بالجواب الصحيح حيرة سائليه

فأظهر بسماحته تواضع العلماء

وبرحابته سماحة العارفين.

أهدي هذا العمل المتواضع إلى أبي

الذي لم يبخل عليّ يوماً بشئ

وإلى أمي الحبيبة التي ذودتني

بالحنان والمحبة

من علمتني وعانت الصعاب لأصل الى ما أنا فيه

وعندما تكسوني الهموم أسبح في بحر

حنانها ليخفف من آلامي

شكر وتقدير

الحمد لله الذي وفقنا وأعاننا على إكمال هذا العمل. نود أن نقدم الشكر الجزيل للأستاذة الخنساء محمد ميرغني التي ساعدتنا وساندتنا بنصائحها القيّمة لإكمال هذا المشروع.

الشكر لكل الأساتذة الكرام لمساهمتهم في وصولنا إلى هذه المرحلة، لمجهوداتهم وعملهم

الدائم بكل إخلاص وتفاني.

الشكر لقسم الرياضيات بكلية التربية .

الخلاصة :

يتكون هذا البحث من مفهوم الإتصال (الاستمرار) وخواصه وإتصال الدوال في فترة ما والإتصال المنتظم والإتصال من جهة اليمين واليسار والإتصال المقطعي واستمرارية أحادية الجهة وبعض حالات عدم الإتصال وبعض الحقائق عن الدوال المتصلة وإتصال الدوال الجذرية وقوانين الإتصال وبعض النظريات المهمة في الإتصال والتطبيق بامثلة علي إستخدام تلك النظريات في حل بعض المسائل.

Conclusion:

In This research , The communication and its properties The communication of function in a period , The regular communication , the right and left communication , The partial communication , the continuity of one-party , some non contact cases and some facts about the functions connected and the connection of the root functions communication laws and some important nectar in communication and application in resolving some Issues.

فهرس المحتويات

الفصل الثالث

بعض نظريات الإتصال(الإستمرار)

الفصل الرابع

تطبيقات على بعض نظريات الإتصال(الإستمرار)

الفصل الخامس

الفصل الأول

الإطار العام

1.1المقدمه:

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على سيد المرسلين نبينا محمد وعلى آله و صحبه وسلم .نرجو أن تكون المعلومات التي جمعناها في هذا البحث تساعد الطلاب في التعرف على إتصال الدوال والمفاهيم الأساسية به وأيضاً معرفة بعض التفسيرات الهندسية لنظرية رول والقيمة المتوسطه وبولزانو.

2.1تمهيد:

سوف نعرض في هذا البحث الإتصال (الإستمرار) للدوال بصورة شمولية تعتمد فيها المفاهيم الأساسية وبعض النظريات المهمة في الإتصال بصورة تدريجية تبدأ بالمفاهيم البسيطة ثم الأعمق فالأعمق . نستعين بالأشكال التوضيحية والأمثلة المساعده على إدراك تلك المفاهيم.

3.1 مشكلة البحث:

الإتصال في الدوال يشكل مشكلة بالنسبة لبعض الطلاب الذين يدرسون الرياضيات حيث يواجهون صعوبة في إستيعاب مفهومه وهناك بعض النظريات يصعب عليهم فهمها واستيعابها والكثير من الطلاب لايعرفونها لذلك حاولنا أن نتناول بعض هذه النظريات بشئ من التفصيل.

4.1أهداف البحث:

- التعرف على اتصال (إستمرار)الدوال بصورة واضحة.
- توضيح بعض الحقائق عن الدوال المتصلة (المستمرة)وإتصال الدوال الجذرية.
- إستخدام نظريات الاتصال في حل بعض المسائل.

5.1 أهمية البحث:

تنبع أهمية البحث من أن الإتصال(الإستمرار) وبعض نظرياته يعتبر ذات أهمية كبرى في حل بعض النهايات المعقده حيث يستخدم في مجال التفاضل والتكامل وفي الهندسة التحليليه والتحليل الحقيقي وله دور كبير في التبولوجيا والفضاء المتري.

6.1 منهجية البحث:

في هذا البحث سوف يتم إستخدام المنهج الوصفي.

7.1 مصطلحات البحث:

الإتصال (الإستمرار) المقطعي:

تسمى الدالة دالة مستمرة قطاعية أو مستمرة مقطوعة في الفترة $a \leq x \leq b$ إذا أمكن تقسيم الفترة إلى عدد محدود من الفترات في كلٍ منها تكون الدالة مستمرة ، ولها نهايات محدودة يمنى ويسرى.

بعض حالات عدم الإتصال أو (الإنفصال):

(i)إتصال النقطة المفقودة:

نفرض أن الدالة $f(x)$ غير معرفة عند $x = a$ ‘ ومع ذلك فإن الدالة لها نهاية عند $x = a$ ، وتساوي l أي أن‘ $\lim_{x \to a} f(x) = l$

(ii) إنفصال الفقرات المحدودة:

قد يحدث أن يكون للدالة $f(x)$ عند نقطة معينة $x = a$ نهاية يمنى ونهاية يسرى مختلفة عنها في القيمة. أي أن: $\lim_{x \to a-} f(x) = L_1,$

$$\lim_{x \to a+} f(x) = L_2, L_1 \neq L_2$$

(iii) الإنفصال غير المحدود:

وهو من الأنواع الشائعة الحدوث للدوال ‘وهو الذي تزداد أو تنقص فيه الدالة بدون حدود وذلك عندما تقترب x من قيمة معينة a أي أن :

$$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \quad \text{او} \quad \lim_{x \to a} f(x) = -\infty$$

بعض الحقائق عن الدوال المتصلة(المستمرة):

يقال أحيانا للدالة $f(x)$ أنها متصلة عند $x = a$ إذا أمكن لأي قيمة موجبة ε إيجاد قيمة موجبة δ بحيث أن

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

لجميع قيم ε التي تحقق العلاقة $|x-a| < \delta$

ويقال للدالة $f(x)$ أنها متصلة في الفترة $a \le x \le b$ إذا كانت الدالة متصلة عند أي نقطة $a < x < b$ وكان لها إتصال يمني عند $x = a$ وإتصال يسري عند $x = b$

نظرية القيمة المتوسطة:

نص النظرية:

إذا كانت $f(x)$ متصلة على المجال المغلق $[a,b]$ وقابلة للإشتقاق على المجال المفتوح (a,b) ‘فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي c ينتمي للمجال (a,b) حيث:

$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

وتبعاً لهذه الشروط تكون قيمة الدالة:

$$x \leftrightarrow f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} * (x-a)$$

خطوات حل نظرية القيمة المتوسطة:

- نبحث في إتصال $f(x)$.
- نبحث في قابلية الإشتقاق ل$f(x)$.
- نشتق $f(x)$ ثم نساويها ب$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ لإيجاد قيمة c

نظرية رول:

تنص نظرية رول على أنه إذا كان $f(x)$ متصلاً في $[a,b]$ وقابل للإشتقاق في (a,b) بحيث $f(a) = f(b) \Rightarrow c \in (a,b)$ حيث $f'(c) = 0$

خطوات نظرية رول:

- البحث في الإتصال .
- التأكد أن $f(a) = f(b)$ في الفترة $[a,b]$.

الإشتقاق ثم المساواة بالصفر لإيجاد قيمة c.

نظرية بولزانو:

شروط النظريه:

إذا كانت $f(x)$ متصلة في $[a, b]$ ، $f(a), f(b)$مختلفتين في الإشاره

فإنه يوجد قيمة واحدة على الأقل $g(a, b)$ حيث $f(g) = 0$

الفصل الثاني

الإتصال(الإستمرار)

1.2مقدمة:

الإتصال (الإستمرار)هو علم واسع جداً من علوم الرياضيات المختلفة ويشتمل على مجموعة من القوانين والنظريات والخصائص ويمكن إستخدامه في كثير من العلوم المختلفة ،فهنالك الإتصال في الدوال والإتصال في الفضاء المتري وفي التبولوجيا وفي غيرها من العلوم.

ولقد استخدم الإتصال ونظرياته المختلفة في توضيح وحل بعض االمسائل المعقده والغير قابلة للحل بالطرق العادية.

2.2تعريف الإتصال(الإستمرار):

نقول عن الدالة $f\,(x)$ أنها مستمرة(متصلة)عند$\mathrm{x}=\mathrm{x}_0$ إذا كان:

1. $\mathrm{f(x)}$معرفه.
2. $\lim_{\mathrm{x}\to 0} f(x)$موجوده.
3. $\lim_{\mathrm{x}\to 0} \mathrm{f(x)} = \mathrm{f(x)}$

فمثلاً $\mathrm{f(x)} = \mathrm{x}^2+1$مستمرة عند$\mathrm{x}=2$لأن $\lim_{\mathrm{x}\to 2} \mathrm{f(x)} = 5$ والداله

$\mathrm{f(x)} = \sqrt{4-\mathrm{x}^2}$ ليست مستمرة عند$\mathrm{x}=3$لأن$\mathrm{f(3)}$غيرمعرف.

يقال عن الدالة المستمره عند كل نقطة من نقاط فترتها المفتوحة أو المغلقة أنها مستمرة في تلك الفترة.

ويقال عن الدالة$\mathrm{f(x)}$أنها مستمرة إذا كانت مستمرة عند كل نقطه من حيزالتعريف لها.

وجميع الدوال متعددة الحدود فيx دوال مستمرة والدوال $\sin \mathrm{x}$, $\cos \mathrm{x}$دوال مستمره وأمثلة كثيرة على ذلك.

إذا كان حيزالتعريف لدالة هو فترة مغلغة $a \le x \le b$ فعندئذ لا يحقق الشرط 2من شروط إتصال الدوال (نهاية الدالة غير موجودة)عند نقطتي النهاية a, b وسنقول عن دالة مثل هذه أنها مستمرة إذا كانت مستمرة في الفترة المفتوحة $a < x < b$ وكان $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$ و $\lim_{x\to b} f(x) = f(b)$

ونقول عن الدالة $f(x)$ أنهامتقطعة (غير مستمره) عند $x = x_0$ إذا لم يتحقق شرط أو أكثر من شروط الإستمرار

مثال لدالة غير مستمرة:

الدالة $f(x) = \frac{1}{x+2}$ متقطعةعند $x = 2$ لأن $f(2)$ غيرمعرفة لإنعدام المقام و $\lim_{x\to 2} f(x)$ غيرموجودة(تساوي ∞).

والدالة مستمرة في أي موضع بإستثناء $x = 2$ حيث يقال عنها ذات إنقطاع لا نهائي.

3.2 انواع الإتصال(الإستمرار):

1.3.2 **الإتصال (الإستمرار) يميناً ويساراً:**

إذا كانت الدالة $f(x)$ معرفة فقط عند $x \ge 0$ فالتعريف السابق (تعريف الأتصال) ينطبق عليها وفي مثل هذه الحالة تسمى $f(x)$ مستمرة يميناً عند $x = x_0$ إذا كانت $\lim_{x\to x0} f(x) = f(x_0)$

أي أن $f(x_0) = f(x)$

وبالمثل $f(x)$ تكون مستمرة يساراًعند $x = x_0$ إذا كانت $\lim_{x\to x0} f(x) = f(x_0)$ اي ان

$f(x_0) = f(x)$

2.3.2 **الإتصال(الإستمرار) في فترةٍ ما:**

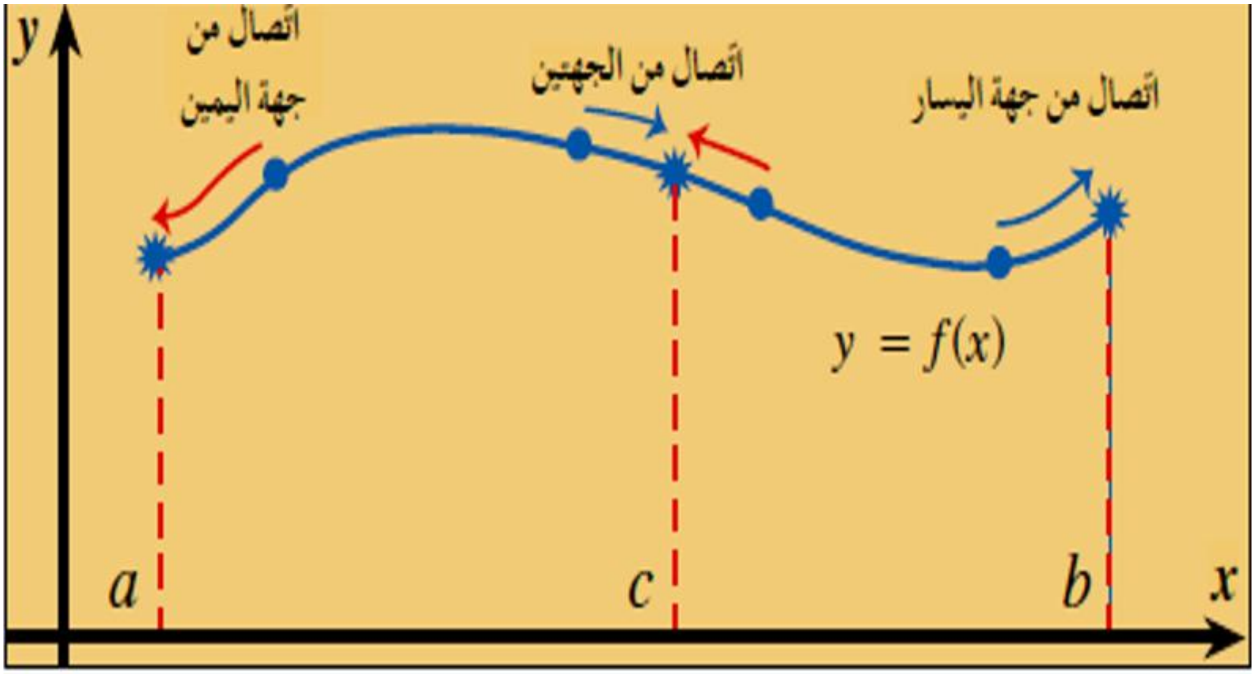
الدالة $f(x)$ تكون مستمرة في فترة ماإذا كانت مستمرة عند جميع نقاط الفترة.

وعلى وجه الخصوص إذا كانت الدالة $y = f(x)$ في الفترة المغلقة $a \le x \le b$ $[a, b]$ او

فحينئذ تكون مستمرة إذا وفقط إذا كان $\lim_{x\to x0} f(x) = f(x_0)$ و

$\lim_{x\to b} f(x) = f(b)$, $a < x_0 < b$

,$\lim_{x\to a+} f(x) = f(a)$;



الاتصال عند النقاط a, b, c للدالة $y = f(x)$ والمتصلة على الفترة $[a, b]$.

شكل(2.1) يوضح الإستمرار من جهة اليمين ومن جهة اليسار والإستمرار في فترة.

ملاحظات:

- ❖ إذا تحقق الشرطان 1و2 من التعريف السابق نقول أن الدالة f متصلة على $[a, b)$.
- ❖ إذا تحقق الشرطان 1و3 من التعريف السابق نقول أن الدالة f متصلة على $(a, b]$
- ❖ إذا كانت الدالة متصلة على فترة ما فإنها متصلة على أي فترة جزئية منها.

مثال(1):

أدرس إتصال كل من الدوال التالية :

a) $f(x) = \frac{x}{x^2+1} \qquad , [-1 ,5]$

b) $f(x) = \frac{x}{x^2-4} \qquad , [0 ,5]$

الحل:

$a)$ $\because$ fدالة حدودية نسبية (كثيرة حدود)

$$\forall x \in R \quad , x^2 + 1 \neq 0$$

$\therefore$متصلة على R

$$[-1 ,5] \in R$$

(b $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$

$$x^2 - 4 = 0 \qquad , \forall x \in \{-2 ,2\}$$

$\because$ fدالة حدودية نسبية متصلة$\forall x \in R - \{-2 ,2\}$

$\because$ fليست متصلة عند $x = 2$ و$2 \in [0 ,5]$

$\therefore$الدالة fمتصلة$\forall x \in [0 ,5] - \{2\}$

أي أنها متصلة على كل من $[0 ,2)$, $(2 ,5]$

مثال(2):

ادرس اتصال الدوال التالية في الفترات الموضحة :

$$1)\ f(x) = \frac{2x+1}{x^2+2} \qquad , [0 ,3]$$

الحل:

$\because$ fدالة حدودية نسبية(كثيرة حدود)

$$\forall x \in R \quad , x^2 + 2 \neq 0$$

$\therefore$ fمتصلة علىR

$$\because [0 ,3] \in R$$

لذلك f متصلة على $[0 ,3]$

$$2) f(x) = \frac{x}{x^2 - 1} \qquad , [0 ,2]$$

الحل:

fدالة حدودية نسبية (كثيرة حدود)

$$x^2 - 1 = 0 \forall x \in \{-1, 1\}$$

$\because$ f متصلة $\forall x \in R - \{-1, 1\}$

$\because$ f ليست متصلة عند $[0, 2]$ $\ni 1,$ $x = 1$

$\therefore$ f متصلة $\forall x \in [0, 2] - \{1\}$

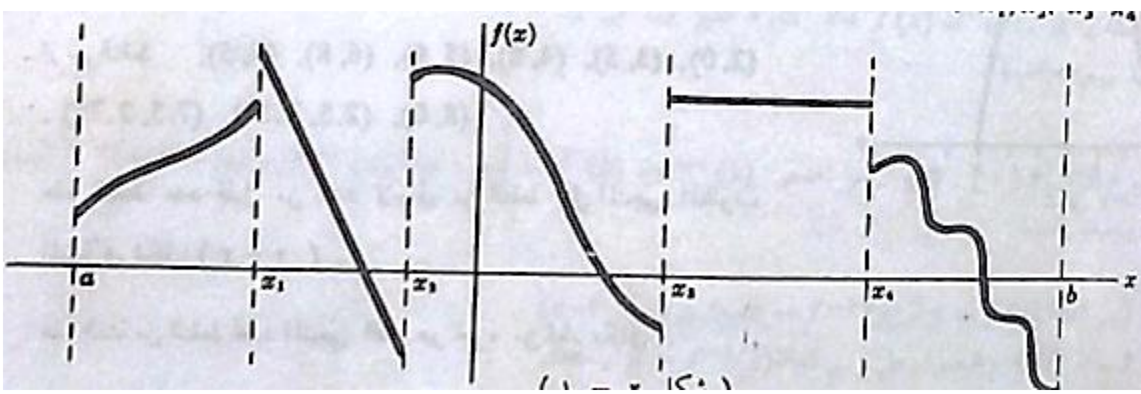
أي أنها متصلة على كل من$[2, 1) \vee (1, 0]$

3.3.2 الإتصال(الإستمرار) المقطعي:

الدالة $f(x)$تسمى دالة مستمرة قطاعية أو مستمرة مقطوعة في الفترة$a \le x \le b$ إذا أمكن تقسيم الفترة إلى عدد محدود من الفترات في كل منها تكون الدالة مستمرة ولها نهايات محدودة يمنى ويسرى .

مثل هذه الدالة لها عدد محدود فقط من عدم الإستمرار .

مثال لهذه الدالة المقطوعة في الفترة $a \le x \le b$ كما في الشكل (1.2)هذه الدالة ليس لها إستمرار عند النقطة x_1, x_2, x_3, x_4.



شكل(2.2)

4.3.2 الإتصال(الإستمرار) المنتظم:

نفرض أن $f(x)$ مستمرة في فترة ما إذن بالتعريف عند كل نقطة x_0في هذه الفترة ولأي

$\varepsilon > 0$ فإنه يمكننا إيجاد δ (غالباً تعتمد علي كلٍ منε والنقطة الخاصةx_0) بحيث:

$|f(x)-f(x_0)| < \varepsilon$ عندما $|x-x_0| < \delta$ يمكننا إيجاد δ لكل ε بحيث تستوعب كل النقاط في الفترة أي أن δ تعتمد فقط على ε ولا تعتمد على x_0 .

وبهذا الدالة $f(x)$ تكون مستمرة بإنتظام في الفترة.

تبادلياً $f(x)$ تكون مستمرة منتظمة في الفترة إذا كان لأي $0 < \varepsilon$ يمكننا إيجاد $0 < \delta$ حيث أن $\varepsilon >$ $|f(x_1)-f(x_2)|$ عندما تكون $|x_1-x_2| < \delta$ حيث x_1, x_2 نقطتين في الفترة.

4.2 خواص الدوال المتصلة (المستمره):

- إذا كانت $f(x)$ و $g(x)$ دالتين مستمرتين عند $x = a$ فإن الدول:

- $f(x)+g(x)$.
- $f(x)-g(x)$.
- $f(x)*g(x)$.
- $f(x)/g(x)$.

دوال مستمره على أن يكون $g(x) \neq 0$ في الداله الأخيره.

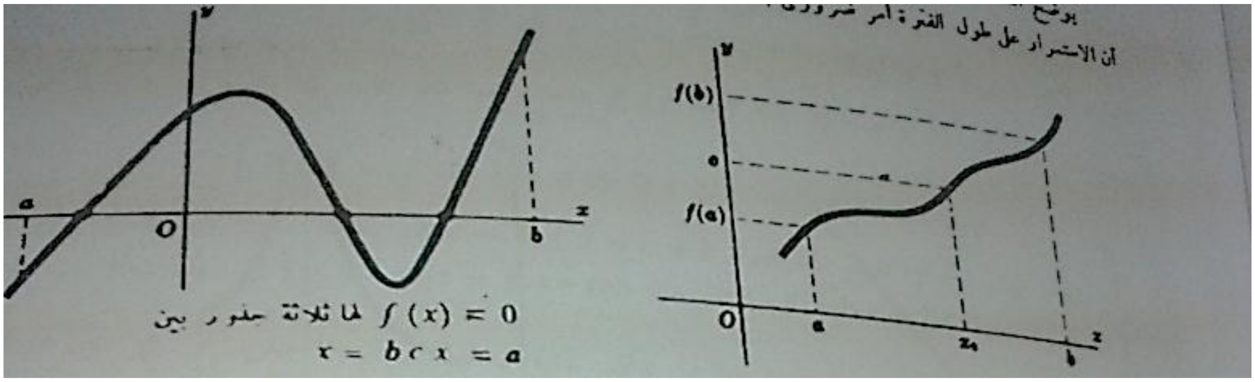
وهكذا نجد أن متعددات الحدود في x مستمرة دوماً في حين تكون الدوال الكسرية في x مستمرة عند كل نقطة بإستثناء النقط التي ينعدم عندها المقام.

ولا بد للقارئ أن يكون قد استخدم بعض الخواص.

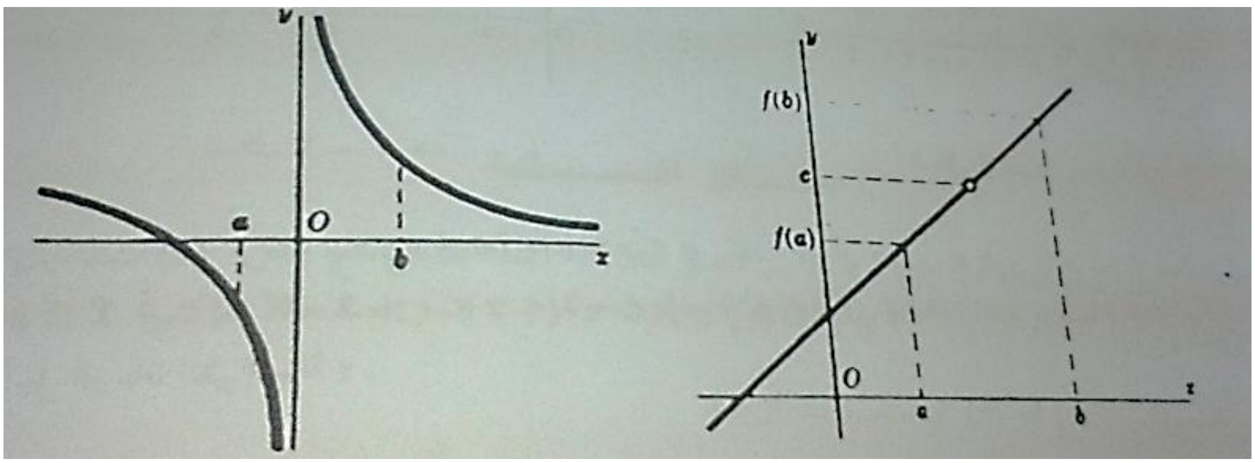
- عند رسم منحنى متعدد الحدود $y = f(x)$ يتم توصيل أي نقطتين $[a, f(a)]$ و $[b, f(b)]$ بقوس متصل الشكل.
- إذا كان $f(a), f(b)$ لهما إشارتان مختلفتان فإن المنحنى $y = f(x)$ يقطع محور السينات في نقطة واحده على الأقل ويكون للمعادله $f(x) = 0$ جذر واحد على الأقل بين $x = a, x = b$ وخاصة الدوال المستمرة هنا هي:

1) إذا كانت $f(x)$ دالة مستمرة في الفترة $a \leq x \leq b$ وكان $f(a) \neq f(b)$ إذن لأي عدد c بين $f(a), f(b)$ توجد على الأقل قيمة واحدة لـ x مثل $x = x_0$ بحيث يكون

$$f(x_0) = c$$



شكل(2.3)



شكل(2.4)

2) إذا كانت $f(x)$ مستمرة في الفترة $a \le x \le b$ فعندئذٍ تأخذ الدالة $f(x)$ في هذه الفترة قيمة صغرى m وقيمة عظمى M.

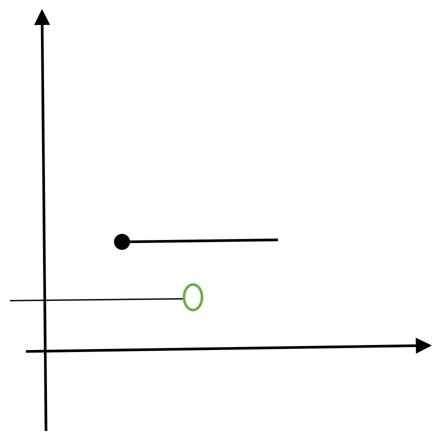
- تركيب الدوال $f(x)$ و $g(x)$ هو دالة مستمرة أي أن الدالة المركبة $(f \circ g)(x) = f(g(x))$ هي دالة مستمرة.
- إذا كانت الدالة $f(x)$ قابلة للمفاضلة في نقطة فهي بالضرورة مستمرة في هذه النقطة ، أما العكس غير صحيح.

فعلى سبيل المثال: الداله $f(x) = |x|$ هي دالة مستمرة في النقطه $x = 0$ ولكنها ليست قابلة للمفاضلة في تلك النقطة.

5.2 استمرارية أحادية الجهة:

قد تكون بعض الدوال مستمرة من جهة واحدة فقط ، أي من جهة اليسار أو من جهة اليمين .وقد تعرف الدالة المستمرة من جهة اليمين بهذا الشكل:

شكل (2.5) يوضح الإستمرار من جهة اليمين:



لكل نقطة في نطاق الدالة إذا إقتربنا من هذه النقطة من جهة اليمين فقط نرى أنها مستمرة. من ناحية تعريف كوشي فإنه يشبه التعريف الأصلي مع تعديلات بسيطة.

تكون الداله $f(x)$ مستمره في النقطه c إذا تحقق الآتي:

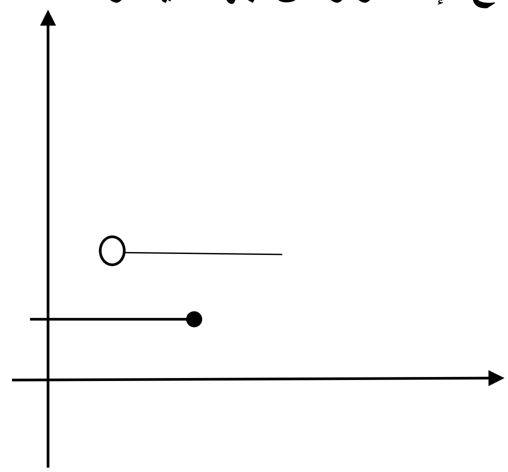
لكل $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta > 0$ بحيث:

$$||< x - c < \delta|| \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

أي أن الشرط يتحقق فقط لجميع النقاط في الجوار الذي يقع إلى يمين النقطهc . وتعرف الإستمرارية من اليسار بطريقة مشابهة مع تعديل الشرط إلى الشرط التالي:

$$-\delta < x - c < 0 \Rightarrow |f(x) - f(c)| < \varepsilon$$

شكل(2.6) يوضح الإستمرار من جهة اليسار:



وتكون الدالة مستمرة فقط إذا كانت مستمرة من جهة اليمين ومن جهة اليسار.

مثال:

ذكرت الدالة التالية :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{if} \quad x \leq 0 \\ 1 & \text{if} \quad x > 0 \end{cases}$$

على أنها دالة غير مستمرة بسبب عدم إستمراريتها في النقطة $x = 0$ مع هذا فإن الدالة هي دالة مستمرة من اليسار لكل نقطة في النطاق فإنه يمكن إختيار جواراً من جهة اليسار لا تلاحظ فيه أي عدم استمرارية عند التقدم نحو النقطة فيه.

أما بالنسبة للإستمرارية من اليمين فهي لا تتحقق لنفس السبب الذي يجعل الدالة غير مستمرة.

"دالة التوزيع التراكمي في نظرية الإحتمالات هي داله مستمره من اليمين دائماً".

6.2 بعض حالات عدم الإتصال أو(الإنفصال) :

(i)إنفصال النقطة المفقودة :

نفرض أن الدالة $f(x)$ غير معرفة عند$x = a$ ،ومع ذلك فإن الدالة لها نهاية عند $x = a$وتساوي Lمثلاً أي أن: $\lim_{x \to a} f(x) = L$

تكون الدالة $f(x)$ غير متصلة عند $x = a$ وذلك لعدم توافر الشرط (1)، هذا مع كون الدالة قد يبدو رسمها البياني متصلاً عند النظر اليه.

وفي مثل هذه الحالة يمكن إستبدال الدالة $f(x)$ الغير متصلة عند $x = a$ بدالة أخرى $u(x)$ تكون متصلة عند $x = a$ ومعرفة على النحو التالي:

$f(x) = u(x)$ عند $x \neq a$

$u(x) = L$ عند $x = a$

مثال:

الدالة $f(x) = \frac{x^3-9x+10}{x-2}$

غير معرفة عند $x = 2$ وذلك لإنعدام كل من البسط والمقام عند $x = 2$ ولكن $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-9x+10}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x-5)}{x-2}$

$=\lim_{x\to 2}(x^2+2x-5) = 3$

حيث أن $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-9x+10}{x-2} = x^2+2x-5$ عند $x \neq 2$ فإن منحنى الدالة يكون هو القطع المكافئ $y = x^2 - 5$ فيما عدا عند نقطة الإنفصال غير المنظورة $x = 2$

(ii)إنفصال الفقرات المحدودة:

قد يحدث أن يكون للدالة $f(x)$ عند نقطة معينة $x = a$ نهاية يمنى ونهاية يسرى مختلفة عنها في القيمة. أي أن، $\lim_{x\to a-} f(x) = L_1$:

$\lim_{x\to a+} f(x) = L_2, L_1 \neq L_2,$

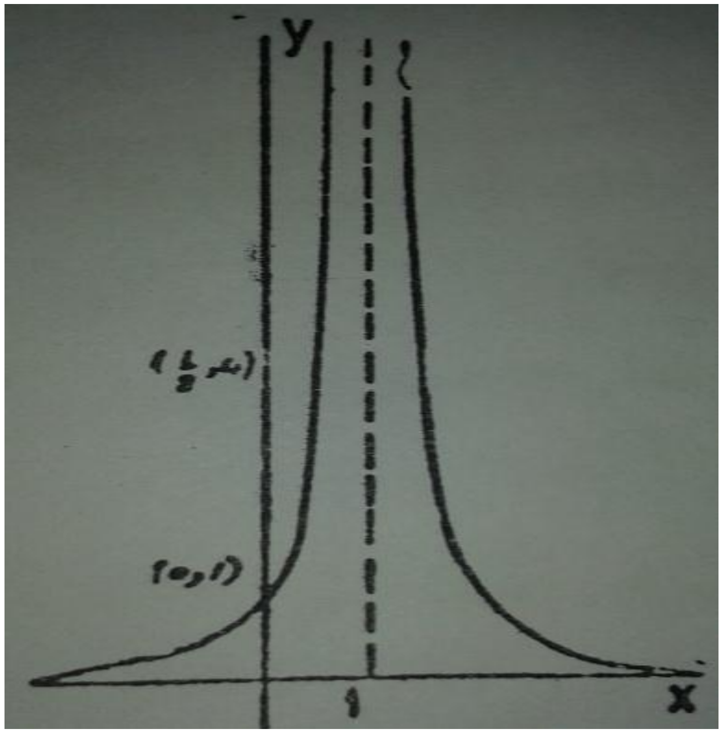
عند مثل هذه النقطة يقال أن الدالة لها فترة محدودة قيمتها تساوي $L_2 - L_1$

(iii) الإنفصال غير المحدود:

وهو من الأنواع الشائعة الحدوث للدوال ،وهو الذي تزداد أو تنقص فيه الدالة بدون حدود وذلك عندما تقترب x من قيمة معينة a أي أن :

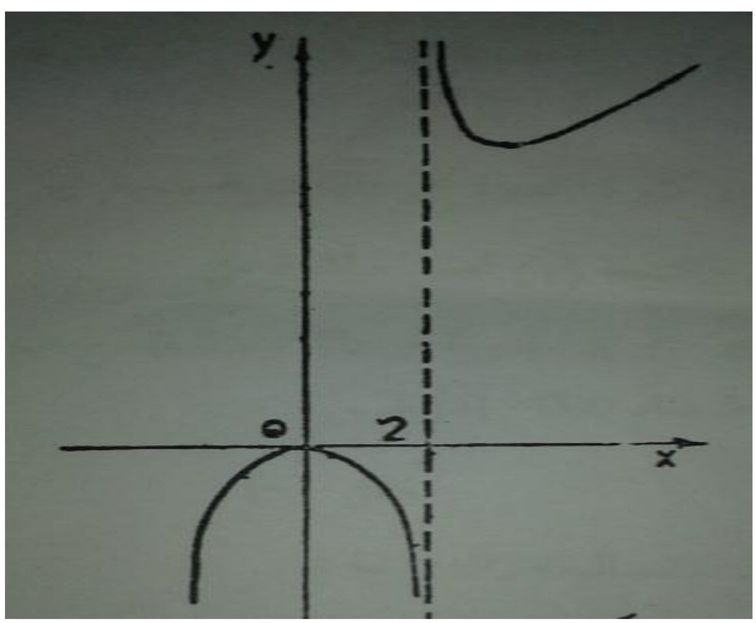
$\lim_{x\to a} f(x) = \infty$ او $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$

وذلك في حالة وجود نهاية للدالة عند $x = a$ وكما في الشكل(2.7):



الشكل(2.7)

وقد يحدث ألا تكون للدالة نهاية عند $x = a$ مع وجود إنفصال غير محدود عند هذه النقطة وذلك كما في الشكل(2.8):



الشكل(2.8)

مثال:

(a) تزداد الدالة :

$y=\frac{1}{(x-1)^2}$ بدون حدود عندما تقترب x من القيمة 1 سواء من ناحية اليمين أو من ناحية اليسار أي أن :

$$\lim_{x\to 1}\frac{1}{(x-1)^2}=\infty$$

(b) تزداد الدالة :

$y=\frac{x^2}{x-2}$ بدون حدود في الإتجاه الموجب عندما تقترب x من القيمة 2 ناحية اليمين ،وتتناقص بدون حد أيضاً ولكن في الإتجاه السالب وذلك عندما تقترب x من القيمة 2 من ناحية اليساركما في الشكل(2.8)

$$\lim_{x\to 2-}\frac{x^2}{x-2}=-\infty\ ,$$

$$\lim_{x\to 2+}\frac{x^2}{x-2}=-\infty$$

7.2بعض الحقائق عن الدوال المتصلة(المستمرة):

يقال أحيانا للدالة $f(x)$ أنها متصلة عند $x=a$ إذا أمكن لأي قيمة موجبة ε إيجاد قيمة موجبة δ بحيث أن

$$|f(x)-f(a)|<\varepsilon$$

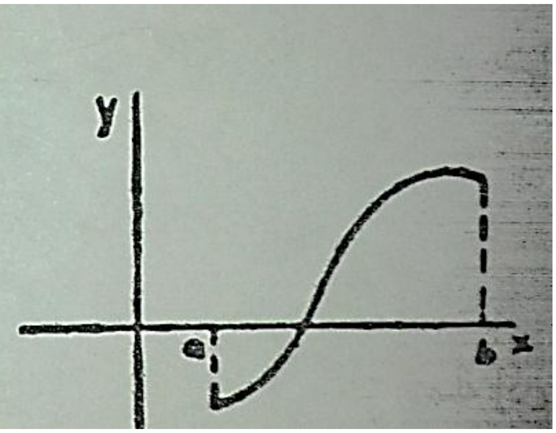
لجميع قيم ε التي تحقق العلاقة $|x-a|<\delta$

ويقال للدالة $f(x)$ أنها متصلة في الفترة $a\le x\le b$ إذا كانت الدالة متصلة عند أي نقطة $a<x<b$ وكان لها إتصال يمني عند $x=a$ وإتصال يسري عند $x=b$

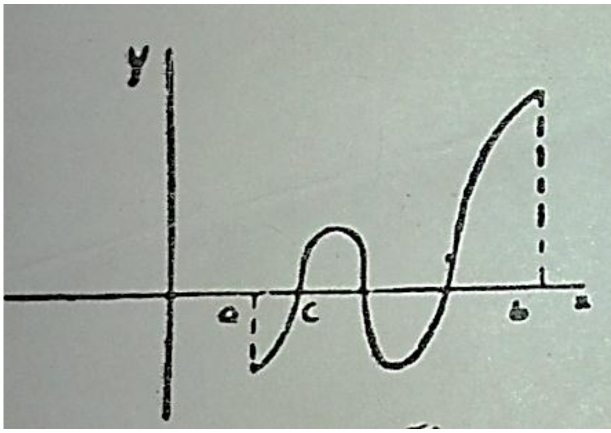
نظرية (1):

إذا كانت الدالة $f(x)$ متصلة في الفترة $a\le x\le b$ وكان $f(a)<0$ ،$f(b)>0$

فإنه يوجد عدد c يحقق $f(c)=0$ وبحيث $a<c<b$ سنحاول هنا تبسيط فكرة النظرية بالرسم فقط .



الشكل(2.9)



الشكل(2.10)

في الشكل نجد أنه عندما تتغير x من aإلى b فإن الدالة $f(x)$ تتغير تغيراً متصلاً من قيمة سالبة إلى قيمة موجبة ، مارة بالنقطة $x = c$ والتي تتقاطع عندها مع المحور السيني،أي أن $f(c) = 0$

اما الشكل فيبين ان منحنى الدالة يمكن أن يتقاطع مع المحور السيني في أكثر من نقطة واحده $x = c$ ،وفي كلا الحالتين فإن منحنى الدالة يتقاطع مع المحور السيني مرة واحده على الاقل وليكن عند النقطة $x = c$ كما هو مذكور في النظرية (1)

نظرية (2):

إذا كانت الدالة وحيدة القيمة $f(x)$ متصلة في الفترة $a \le x \le b$ فإن $f(x)$ تأخذ في هذه الفترة جميع القيم الواقعة بين القيمتين $f(a)$،$f(b)$

البرهان:

إذا كانت $f(a) = f(b)$ فلا يوجد بشئ للبرهنة عليه وتصبح النظرية صحيحة في هذه الحالة.

8.2 إتصال (إستمرار)الدوال الجذرية:

يمكن البرهنة على صحة النظرية الآتية وذلك بواسطة النظرية (1).

نظرية (1):

إذا كانت الدالتان $u(x), v(x)$ متصلتان عند $x = a$ فإن الدالتين:

$$u(x).v(x) \quad , u(x) + v(x)$$

تكونان متصلتان أيضاً عند $x = a$. ولذلك تكون الدالة $\frac{u(x)}{v(x)}$ متصلة أيضاً عند $x = a$ بشرط أن يكون $v(a) \neq 0.$

حيث أن أي مقدارثابت يمكن إعتباره دالة متصلة لجميع قيم x فإننا نحصل من نظرية(1) على النتيجة التالية:

نتيجة (1):

إذا ضربت دالة متصلة عند $x = a$ في أي مقدار ثابت أو أضيف إليها مقدار ثابت فإن الناتج يكون أيضاً دالة متصلة عند $x = a$.

حيث أن الدالة $y = x$ هي دالة متصلة لجميع قيم x فإن الدالة $y = x^2$ أيضاً دالة متصلة لجميع قيم x إذ أن $y = x^2$ يمكن إعتبارها حاصل ضرب الدالتين المتصلتين $v = x, u = x$ وينتج المطلوب من النظرية السابقة (1) .

وبنفس الطريقة تكون الدالة $y = x^n$ حيث n عدد صحيح موجب ،دالة متصلة لجميع قيم x .

ومن النتيجة(1) تكون الدالة ax^n حيث a أي مقدار ثابت ، n عدد صحيح ، دالة متصلة لجميع قيم x ، ومن ذلك نحصل باستخدام نظرية(1) على النتيجة التالية:

نتيجة (2):

كثيرة الحدود هي دالة متصلة لجميع قيم x .

من النظرية (1) والنتيجة (2) نحصل مباشرة على

نتيجة (3):

الدالة الجذرية هي دالة متصلة لجميع قيم x فيما عدا قيم x التي ينعدم عندها مقام الدالة الجذرية

مثال:

أوجد نقط إنفصال الدوال التالية:

(i) $\frac{x^2+3}{x^2-16}$

(ii) $\frac{x^2-3x}{x^8+2x^2+5x}$

(iii) $g(x) = x \sin \frac{1}{x}$

الحل:

(i) من نتيجة (3) نجد أن الدالة $\frac{x^2+3}{x^2-16}$ هي دالة متصلة لجميع قيم x فيما عدا قيم x التي ينعدم عندها المقام . أي عندما $x^2 - 16 = 0$ ، أي عند $x \neq 4$.

(ii) بالمثل كما في (i) نجد أن الدالة $\frac{x^2-3x}{x^8+2x^2+5x}$ متصلة لجميع قيم x ماعدا $x = 0$ وذلك

لأن المعادلة $x^8 + 2x^2 + 5x = 0$ لا يوجد لها سوى جذر حقيقي واحد هو $x = 0$.

(iii) حيث أن الدالتين $u = x$, $v = \sin\frac{1}{x}$ دالتان متصلتان لجميع قيم $x \neq 0$ ‘ ينتج من نظرية (1) أن الدالة $g(x) = x\sin\frac{1}{x}$ هي دالة متصلة لجميع قيم $x \neq 0$. أما عند $x = 0$ فإن الدالة لا يمكن إيجاد قيمتها أي أن $x \neq 0$ غير موجودة وبالتالي فالدالة غير متصلة عند $x = 0$.

مثال:

ناقش إتصال الدوال التالية:

(i) $2^{\frac{1}{x}}$

(ii) $\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$

الحل:

(i) الدالة $f(x) = 2^{\frac{1}{x}}$ دالة متصلة لجميع قيم $x \neq 0$. أما عند $x = 0$ فنلاحظ أن :

$$\lim_{x\to 0+} 2^{\frac{1}{x}} = \infty \qquad , \qquad \lim_{x\to 0-} 2^{\frac{1}{x}} = 0 \ldots\ldots\ldots (1)$$

وحيث أن النهاية اليمنى للدالة لا تساوي النهاية اليسرى لها عند $x = 0$ فلا توجد نهاية للدالة $f(x)$ عند $x = 0$ ولا يتوافر الشرط (2) من شروط إتصال الدوال . ومن ذلك نستنتج أن الدالة غير متصلة عند $x = 0$.

(ii) من **(i)** علمنا أن الدالة $2^{\frac{1}{x}}$ هي دالة متصلة لجميع قيم $x \neq 0$.

ومن نتيجة (1) نستنتج أن الدالة $2^{\frac{1}{x}} + 1$ متصلة لجميع قيم $x \neq 0$.

ومن نظرية (1) نستنتج مباشرة أن الدالة $g(x) = \frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}$ هي دالة متصلة لجميع قيم $x \neq 0$. أما عند $x = 0$ فنلاحظ من العلاقة (1) أن:

$$\lim_{x\to0+}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}=0\ ,\ \lim_{x\to0-}\frac{1}{1+2^{\frac{1}{x}}}=1\ \ldots\ldots\ldots(2)$$

أي أن النهاية اليمنى للدالة تختلف عن النهاية اليسرى لها عند $x = 0$ وبذلك تكون الدالة منفصلة ولها قفزة محدودة عند $x = 0$.

9.2 قوانين الإتصال(الإستمرار):

(i) كثيرات الحدود من الدرجة الصفرية فما فوق متصلة لكل x تنتمي إلى R.

مثال:

أبحث عن إتصال وعدم إتصال كلٍ من الإقترانات التالية:

$$f(x) = 2x^4 - x^3 + 2x + 5f(x)$$

الحل:

الإقتران $f(x)$ كثيرة حدود من الدرجة الرابعة. إذن هو متصل على R

$$f(x) = (x^2 - x + 5)^{17}$$

الحل:

الإقتران $f(x)$ كثيرة حدود من الدرجة 34، إذن هو متصل على R

(ii) الإقترانات النسبية متصلة على {أصفار المقام } -R.

مثال:

أبحث عن إتصال وعدم إتصال الإقترانات التالية:

$$f(x) = \frac{x^3 + 1}{x^2 - 3x + 2}$$

الحل:

الإقتران $f(x)$هو إقتران نسبي إذن متصل على{ أصفار المقام}-R

$$x^2 - 3x + 2 = 0 \Longrightarrow (x-1)(x-2) = 0 \Rightarrow x = 1{,}2$$

إذن $f(x)$ متصل على $R - \{1{,}2\}$

(iii) إتصال وعدم إتصال الإقترانات المعرفة بأكثر من قاعدة:

تعريف:

يقال أن الإقتران $f(x)$ متصل عند $x = a$ إذا وفقط إذا كان :

$$f(a) = \lim_{x\to a} f(x)$$

بشرط أن تكون النهاية موجودة.

مثال:

أبحث عن إتصال وعدم إتصال كلٍ من الإقترانات التالية عند قيم x المبينة في كلٍ منها:

$$f(x)=\begin{cases} 2x^2+3 & ;x\le 4 \\ 7+\dfrac{16}{x} & ;x>4 \end{cases}$$

الحل:

$$f(4)=2(4)+3=11\ldots\ldots\ldots..(1)$$

$$\lim_{x\to+4} f(x)=\lim_{x\to+4}(7+\frac{16}{x})=7+\frac{16}{4}=11\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

$$\lim_{x\to-4} f(x)=\lim_{x\to-4}(2x+3)=2(4)+3=11\ldots..(3)$$

$(1)\text{and}(2)\text{and}(3)\rightarrow f(4)=\lim_{x\to4} f(x)=11$

إذن $f(x)$ متصل عند $x=4$

$\Longleftarrow$ $f(x)$ متصل على R.

الفصل الثالث

بعض نظريات الإتصال(الإستمرار):

1.3نظرية بولزانوا:

برنارد بلاسيدوس يوهان نيبو موك بولزانوا هو عالم رياضيات تشيكي وعالم منطق وفيلسوف وعالم إلاهيات وكهنوت كاثوليكي ومناهض للحل العسكري ,ولد في الخامس من أكتوبر للعام 1782 ,وتوفي في الثامن عشر من ديسمبر للعام 1848 (عمره 67 سنه). موطنه مملكة يوهيميا و لغته الأم هي اللغة الالمانية وكذلك هي لغة مؤلفاته.درس في جامعة تشارلز في براغ (1796-1819).رياضياتي ومنطقي وفيلسوف علوم وكهنوت ومؤرخ وأستاذ جامعي . عمل في التحليل الرياضي وكان متأثراً بجامعة هانوفر.

1.1.3 شروط النظريه:

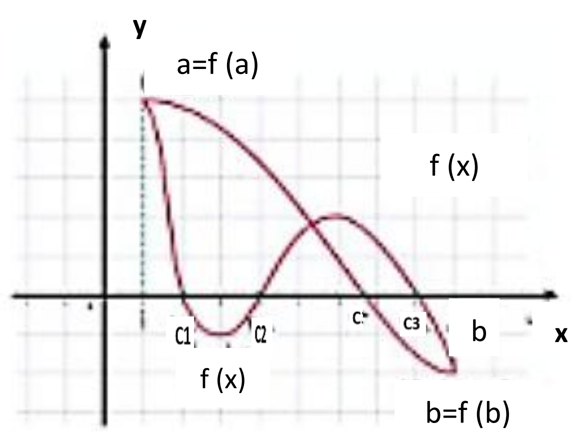
إذا كانت $f(x)$ متصلة في $[a,b]$ ، $f(a), f(b)$مختلفتين في الإشاره

فإنه يوجد قيمة واحدة على الأقل $g(a,b)$ حيث $f(g) = 0$.

2.1.3 توضيح النظريه هندسياً :

إذا تحققت شروط نظرية بلزانوا فإن منحنى الإقتران يقطع محور السينات مرة واحدة على الأقل خلال الفترة(a,b) أي أن للإقتران $f(x)$ صفر واحد على الأقل في (a,b)

شكل(3.1) يوضح نظريه بولزانو



2.3 نظرية القيمة المتوسطة:

1.2.3 نص النظرية:

إذا كانت $f(x)$ متصلة على المجال المغلق $[a, b]$ وقابلة للإشتقاق على المجال المفتوح (a, b) ‘فإنه يوجد على الأقل عدد حقيقي c ينتمي للمجال (a, b) حيث:

$$f'(c) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

وتبعاً لهذه الشروط تكون قيمة الدالة:

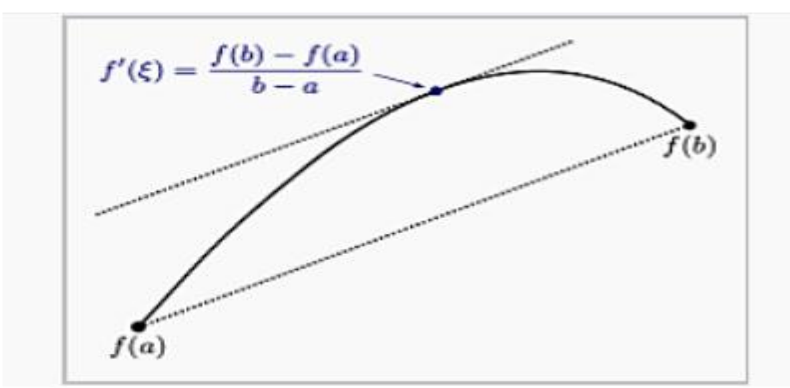
$$f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a} * (x - a)$$

2.2.3 خطوات حل نظرية القيمة المتوسطة:

- نبحث في إتصال $f(x)$.
- نبحث في قابلية الإشتقاق ل$f(x)$.
- نشتق $f(x)$ ثم نساويها ب$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$ لإيجاد قيمة c

3.2.3 تفسير نظرية القيمة المتوسطة بالرسم:

بما أن المنحنى $f(x)$ متصل في الفترة $[a, b]$ وقابل للإشتقاق فإنه يوجد عدد بين الفتره $[a, b]$ ميله يساوي ميل المماس حيث ميل المماس= ميل الوتر⇐ $f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$



شكل(3.2) يوضح نظرية القيمة المتوسطة.

3.3 نظرية رول:

تنص نظرية رول على أنه إذا كان $f(x)$ متصلاً في $[a,b]$ وقابل للإشتقاق في (a,b) بحيث

$f(a) = f(b) \Rightarrow c \in (a,b)$ حيث $f'(c) = 0$

1.3.3 خطوات نظرية رول:

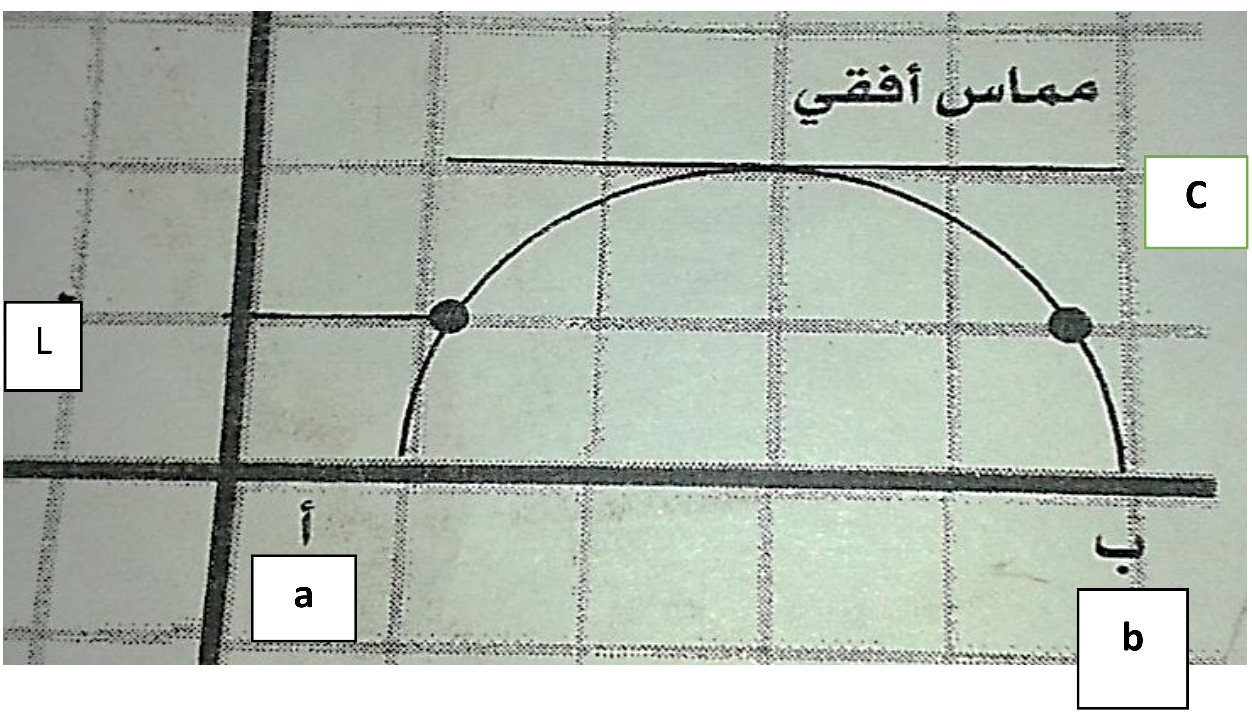
- البحث في الإتصال .
- التأكد أن $f(a) = f(b)$ في الفترة $[a,b]$.
- الإشتقاق ثم المساواة بالصفر لإيجاد قيمة c .

2.3.3 تفسير النظرية بالرسم:

المماس الأفقي ثابت $= f(c)$

$$f'(c) = 0$$

بشرط أن $f(a) = f(b)$ ومن الشكل $f(a) = f(b) = L$



شكل (3.3) : يوضح نظرية رول.

4.3نظريات أخرى على إتصال(إستمرار) الدوال:

نظرية (1):

إذا كان $f(x)$ إقتراناً متصل عند $x = a$ و$g(x)$ إقتراناً متصلاً عند $x = f(a)$ فإن $(g0f)(x)$ إقتران متصل عند $x = a.$

ملاحظة:

عكس النظرية (1) غير صحيح.

مثال:

إذا كان $f(x) = |x|$ و $g(x) = 5 - x^2$ هل $(g0f)(x)$ متصل على R.

الحل:

$$f(x) = |x|$$

إقتران قيمة مطلقة

$\Leftarrow$ $f(x)$ إقتران متصل لكل $a\epsilon R$.

$$g(x) = 5 - x^2$$

كثيرة الحدود من الدرجة الثانية

$\Leftarrow$ $g(x)$ إقتران متصل لكل $a\epsilon R$.

$\Leftarrow$ $(g0f)(x)$ متصل على R.

نظرية (2):

يقال أن الإقتران $f(x)$ متصل على $[a, b]$ إذا وفقط إذا انطبقت الشروط التالية :

1) $f(x)$ متصل على الفترة (a, b).

2) $f(x)$ متصل على يمين a .

3) $f(x)$ متصل على يسار b .

مثال:

إذا كان $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$ أثبت أن $f(x)$ متصل على $[-4, 4]$.

الحل:

*الآن نريد أن نثبت أن الإقتران f(x) متصل على $[-4,4]$.

إشارة $f(x) = \sqrt{16 - x^2}$

------ +++++ -------

-4 +4

نفرض أن $c \in (-4,4)$

$$f(c) = \sqrt{16 - c^2} \quad \dots\dots\dots..(1)$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \sqrt{16 - x^2} = \sqrt{\lim_{x\to 0}(16 - x^2)}$$

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \sqrt{16 - c^2} \quad \dots\dots\dots..(2)$$

(1) And (2) $\Rightarrow f(c) = \lim_{x\to 0} f(x)$

إقتران متصل على $(-4,4)$ .... (A)

*الآن نريد أن نثبت أن f(x) متصل على يمين $x = -4$

$$f(-4) = \sqrt{16 - 16} = \sqrt{0} = 0 \dots\dots\dots\dots (3)$$

$$\lim_{x\to(-4)^+} f(x) = \lim_{x\to(-4)^+} \sqrt{16 - x^2} = \sqrt{\lim_{x\to(-4)^+}(16 - x^2)} = \sqrt{16 - 16} = \sqrt{0}$$

$$\lim_{x\to(-4)^+} f(x) = 0 \dots\dots\dots\dots\dots (4)$$

(3)and (4) $\Rightarrow f(-4) = \lim_{x\to(-4)^+} f(x) = 0$

f(x)متصل عند $x = -4$ .... (B)

*والآن نري أن نثبت أن f(x) متصل على يسار $x = 4$

$$\Rightarrow f(4) = 16 - 16 = 0 \dots\dots\dots\dots..(5)$$

$$\lim_{x\to(4)^-} f(x) = \lim_{x\to(4)^-} \sqrt{16 - x^2} = \sqrt{\lim_{x\to(4)^-}(16 - x^2)}$$

$$= \sqrt{16-16} = \sqrt{0} \quad \lim_{x \to (4)^-} f(x) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (6)$$

(5)and (6) $\Rightarrow f(4) \Rightarrow= \lim_{x\to -4} f(x)$

$\Leftarrow f(x)$ متصل على يسار $x = 4 \ldots\ldots\ldots (c)$

$A, B, C \Leftarrow f(x)$ متصل على $[-4\,, 4]$.

الفصل الرابع

تطبيقات على بعض نظريات الاتصال(الإستمرار)

1.4 تطبيقات على نظرية بولزانو:

مثال (1):

بين أن الإقتران $f(x) = 2x^2 - x - 3\ \ ,x[1\ ,2]$ يحقق شروط نظرية بولزانو . ثم جد قيمة تقريبية ل c التي تعنيها النظرية مقرباً حتى يكون الفرق بين جذرين متتاليين أقل من 0.4

الحل:

الإتصال $f(x)$ متصلاً في [1 ,2] (لأنها كثيرة حدود).

$$f(2) = 8 - 2 - 3 = 3 > 0$$

$$f(1) = 2 - 1 - 3 = -2 < 0$$

$f(2), f(1)$مختلفين في الإشارة.

∴الإقتران يحقق شروط نظرية بولزانو في الفترة[1,2].

التقريب الأول:

يوجد قيمة واحدة على الأقل $c(1\ ,2)$

بحيث $f(c) = 0$

$$c_1 = \frac{1+2}{2} = 1.5$$

$$f(1.5) = 2\left(\frac{3}{2}\right)^2 - \left(\frac{3}{2}\right) - 3$$

$$= \frac{18}{4} - \frac{3}{2} - 3 = 0$$

التقريب الثاني:

يوجد $c_2(1\ ,1.5)$

$$c_2 = \frac{1 + 1.5}{2} = 1.25$$

حيث أن $1.25 - 1.5 = 0.25 < 0.4$

مثال (2):

لأقرب منزلتين إذا كانت $x = \sqrt{13}.$ استخدم نظرية بولزانو في إيجاد قيمة تقريبية ل cعند الفترة [3 ,4].

الحل:

بفرض $x^2 = 13$

$$x^2 - 13 = 0$$

$$f(x) = x^2 - 13 \quad ,x[3\ ,4]$$

فهو متصل في الفترة [4, 3] لأنه كثيرة حدود.

$$f(4) = 16 - 13 = 3$$

$$f(3) = 9 - 13 = -4$$

$f(4), f(3)$مختلفين في الإشارة

∴الإقتران يحقق شروط نظرية بولزانوفي الفترة[3,4] .

التقريب الأول:

يوجد قيمة واحدة على الأقل [4, 3]c بحيث $f(c) = 0$

$$c_1 = \frac{3 + 4}{2} = 3.5$$

$$f(3.5) = \left(\frac{7}{2}\right)^2 - 13$$

$$= \frac{49}{4} - 13 = -$$

التقريب الثاني:

يوجد $c_2(3.5\ ,4)$

$$\mathrm{c}_2 = \frac{3.5 + 4}{2} = 3.75$$

يوجد $c_2(3.5\ ,3.75)$

مثال (3):

ليكن $f(x) = x^4 + x - 4 \in R$ بإستخدام نظرية بولزانو أثبت أنه يوجد صفر واحد على الأقل للإقتران في مجاله.

الحل:

بما مجال الإقتران مجموعة الأعداد الحقيقية نختار فترة ما ولتكن [1,2] يحقق فيها الإقتران شروط نظرية بولزانو .

$$f(1) = 1 + 1 - 4 = -2 < 0$$

$$f(2) = 16 + 2 - 4 = 14 > 0$$

$\therefore\ f(1), f(2)$ مختلفان في الإشارة

$\therefore\ f(x)$ متصل على الفترة [1,2] لأنه كثيرة حدود.

∴يحقق شروط نظرية بولزانوعلى الفترة [1,2]

∴يوجد صفر واحد على الأقل للإقتران في الفترة [1,2]

∴للإقتران $f(x)$ صفر واحد على الأقل في مجاله.

مثال (4):

ليكن

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 3x - 4 & , x \le 2 \\ x^3 - 3x^2 & , x > 2 \end{cases}$$

1)هل الإقتران يحقق شروط نظرية بولزانو على الفترة[−3,4] ثم جد $c \in [-3,4]$ بحيث $f(c) = 0$

2)وهل تتعارض النتيجة مع نظرية بولزانو؟

الحل:

(1 $\lim_{x \to +2} f(x) = \lim_{x \to +2} (x^3 - 3x^2) = -4$

$$\lim_{x \to -2} f(x) = \lim_{x \to -2} (x^2 + 3x - 4) = -6$$

$f(x)$ غير متصل عند $x = -2$ فهولايحقق شروط نظرية بلزانوفي الفترة [−3,4].

$f(c) = 0$

إما

$$c^2+3c-4=0 \qquad ,-3\le c\le 2$$

أو

$$c^3-3c^2=0 \qquad ,2>c\le 4$$

$$c^2+3c-4=0 \implies (c+4)(c-1)=0 \implies c=1$$

ونرفض$c=-4$

$$c^3-3c^2=0 \implies c^2(c-3)=0 \implies c=0,3$$

ونرفض $c=0$

∴توجد قيمتان ل c تنتميان للفترة $[-3,4]$ هما $1,3$ تجعلان $f(c)=0$

لا تتعارض هذه النتيجة مع نظرية بولزانو لأنه إذا لم تتحقق شروط نظرية بولزانو فإنه لا يمكن الجزم بوجود أو عدم وجود c.

ملاحظة:

تستخدم نظرية بولزانو في إيجاد قيم تقريبية لأصفار الإقترانات بالإعتماد على الطريقة المسماة طريقة التنصيف الموضحة في المثال التالي:

مثال (5):

بين أنه يوجد صفر واحد على الأقل للإقتران $f(x)=x^2-x-4$ بين $[2,3]$ ،ثم أوجد قيمة تقريبية ثالثة له بإستخدام طريقة التنصيف.

الحل:

$f(x)=x^2-x-4$متصل على$[2,3]$لأنه كثيرة حدود.

$$f(2)=(2)^2-2-4=-2$$

$$f(3)=(3)^2-3-4=2$$

$f(2)=-2, f(3)=2$مختلفين في الإشارة.

وحسب نظرية بولزانو يوجد $c\in[2,3]$ حيث $f(c)=0$

لإيجاد قيمة تقريبية أولى c_1 نختار الوسط الحسابي

$$c_1 = \frac{2+3}{2} = 2.5$$

لإيجاد قيمة تقريبية ثانية c_2 لصفر الإقتران نحسب:

$$f(2,5) = (2.5)^2 - 2.5 - 4 = -0.25 < 0$$

نلاحظ إشارة $f(2.5)$ تختلف عن إشارة $f(3)$

لذا يمكن تطبيق نظرية بولزانو على الفترة $[2.5,3]$.

.:.صفر الإقتران $[2.5,3] \in$ ونختار$2.75 = \frac{2.5+3}{2} = c_2$

ولإيجاد قيمة تقريبية ثالثة c_3:

نحسب $f(2.75) = (2.75)^2 - 2.75 - 4 = 0.8125 < 0$

نلاحظ أن إشارة $f(2.75)$ تختلف عن إشارة $f(2.5)$

.:.تحقق شروط نظرية بولزانو على الفترة $[2.5,2.75]$

.:.صفر الإقتران $c_3 = \frac{2.5+2.75}{2} = 2.625$

2.4 تطبيقات على نظرية القيمة المتوسطة:

مثال (1):

إذا كان لدينا الفترة $[1,-2]$, بين أن $f(x) = x^3$ تحقق نظرية القيمة المتوسطة ثم جد قيمة c.

الحل:

$f(x)$ متصلة على الفترة $[1,-2]$ لأنها كثير حدود.

$f'(x) = 3x^2$ قابلة للإشتقاق.

حيث: $f'(c) = 3c^2 = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$

$$f(1) = 1 \quad , f(-2) = -8$$

$$\Rightarrow 3c^2 = \frac{1+8}{1+2} \Rightarrow 3c^2 = \frac{9}{3} \Rightarrow 3c^2 = 3$$

$$\Rightarrow c = 1 \qquad , c = -1$$

$$c = 1 \notin [1,-2]$$

$$c = 1 \in [1,-2]$$

$$\therefore = -1$$

ملاحظة:

جميع الإقترانات كثيرة الحدود من الدرجة الثانية تحقق النظرية المتوسطة حيث :

$$c = \frac{a+b}{2}$$

مثال (2):

إذا كان $f(x)$ تربيعي يحقق نظرية القيمة المتوسطة في الفترة $[5, a]$ حيث $c = 2$ جد قيمة a.

الحل:

$$\frac{5+a}{2} = 2 \Rightarrow a + 5 = 4$$

$$a = -1$$

ملاحظة:

جميع الإقترانات كثيرة الحدود من الدرجة الأولى تحقق نظرية القيمة المتوسطة حيث c تنتمي لجميع قيم [a , b].

مثال (3):

إذا كان $f(x) = x^2 + 2$ في الفترة [3,5] بين أنه يحقق نظرية القيمة المتوسطة.

الحل:

$x^2 + 2$ متصلة في الفترة (لأنها كثيرة حدود).

$f'(x) = 2x$ قابلة للإشتقاق (تحقق نظرية القيمة المتوسطة) .

$$f'(c) \Rightarrow 2c = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

حيث:

$$f(5) = 27 \ , f(3) = 11$$

$$\Rightarrow 2c = \frac{27 - 11}{5 - 3} \Rightarrow 2c = \frac{16}{2} \Rightarrow 2c = 8 \Rightarrow c = 4$$

$$\therefore c = \frac{a+b}{2} = \frac{3+5}{2} = \frac{8}{2} = 4$$

مثال (4):

إذا كان $f(x) = -x^2 + 8x - 6$ في الفترة [2,3] بين أنه يحقق نظرية القيمة المتوسطة ثم جد قيمة c.

الحل:

$f(x)$متصلة في الفترة لأنها كثيرة حدود.

$f'(x) = -2x + 8$قابلة للإشتقاق.

تحقق نظرية القيمة المتوسطة.

$$f'(c) = -2c + 8 = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

حيث:

$$f(2) = -2 * 4 - 8 = 4$$

$$f(3) = -2 * 3 + 8 = 2$$

$$-2c + 8 = \frac{2 - 4}{3 - 2} = \frac{-2}{1} = -2$$

$$-2c + 8 = -2$$

$$\therefore\ c = 5 \notin [2,3]$$

مثال (5):

إذا كان $f(x) = x + \frac{1}{x}$ ،في الفترة $\left[2\,,\frac{1}{2}\right]$ بين أنه يحقق نظرية القيمة المتوسطة ثم جد قيمة c.

الحل:

$f(x)$ متصلة في الفترة$\left[2\,,\frac{1}{2}\right]$

$f'(x) = 1 + \frac{-1}{x^2}$ قابلة للإشتقاق.

$\therefore$ تحقق نظرية القيمة المتوسطة.

$$f'(c) = 1 + \frac{-1}{c^2} \Rightarrow -1 = \frac{1}{c^2} = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

حيث:

$$f(2) = 2.5 \ , f\left(\frac{1}{2}\right) = 2.5$$

$$\Rightarrow 1 + \frac{-1}{x^2} = \frac{2.5 - 2.5}{\frac{1}{2} - 2} = 0$$

$$\Rightarrow 1 = \frac{1}{x^2} \ \Rightarrow x^2 = 1$$

$$\therefore x = 1 \ , x = -1$$

$$x = 1 \epsilon \left(2\ ,\frac{1}{2}\right) \qquad , x = -1 \notin \left(2\ ,\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore c = 1$$

مثال (6):

إذا كان:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3-x}{2} & x<1 \\ \frac{1}{x} & x\geq 1 \end{cases}$$

في الفترة $[2 ,0]$

هل $f(x)$ يحقق نظرية القيمة المتوسطة ثم جد c إذا كان يحقق .

الحل:

$f(x)$متصلة عند الفترة $[2 ,0]$ بالرغم أن $\frac{1}{x}$ غير متصلة عند $x = 0$ ولكن عندما $x \geq 1$ إذن صفر ليس في داخل الفترة.

$$f'(1)^- = -\frac{1}{2} \quad , f(1)^+ = \frac{-1}{(1)^2} = -1$$

غير قابلة للإشتقاق .

$\therefore$لاتحقق شروط نظرية القيمة المتوسطة.

ملاحظة:

$f(x)$متصلة عندما$x = 1$ لأن:

$$f(x) = \lim_{x \to -1} f(x) = \frac{3-1}{2} = \frac{2}{2} \quad , \lim_{x \to +1} f(x) = \frac{1}{1} = 1$$

ولكن الإقتران غير قابل للإشتقاق كما بيّنا أعلاه.

مثال (7):

بين أن $f(x) = [x]$ يحقق نظرية القيمة المتوسطة في الفترة $[0, 2]$ أم لا.

حيث$[x]$ يعني إقتران أكبر عدد صحيح.

الحل:

تعريف الإقتران طول الفتره = $\left|\frac{1}{f\text{معامل}}\right| = \left|\frac{1}{1}\right| = 1$

$$f(x) = \begin{cases} 0 & ,0 \le x < 1 \\ 1 & ,1 \le x < 2 \\ 2 & ,x = 2 \end{cases}$$

نبحث في الإتصال عند $x = 1$

$$\lim_{x \to -1} f(x) = 0 \quad , \lim_{x \to +1} f(x) = 1$$

غير متصل لذى لايحقق نظرية القيمة المتوسطة.

3.4تطبيقات على نظرية رول:

مثال(1):

إذا كان لدينا الفترة $[0, 5]$, بين أن $f(x) = x^2 - 5x$ تحقق شروط نظرية رول ثم أوجد قيمة c.

الحل:

أولاً: $f(x)$ متصلة في $[0, 5]$ لأنها كثير الحدود .

ثانياً: $f'(x) = 2x - 5$ قابل للإشتقاق.

$$f(0) = (0)^2 - 5(0) + 7 = 7$$

$$f(5) = (5)^2 - (5 * 5) + 7 = 7$$

$$f(a) = f(b)$$

تحقق شرط رول.

$$f'(c) = f'(c) = 0 \Rightarrow 2c - 5 = 0 \Rightarrow c = 2.5$$

مثال(2):

إذا كان $f(x) = \frac{6}{x-1}$, في الفترة [0, 5] هل تحقق شروط رول ثم جد قيمة c إذا كان تحقق.

الحل:

$$f(0) = \frac{6}{1-0} = \frac{6}{1} = 1$$

$$f(5) = \frac{6}{5-1} = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}$$

لاتحقق شروط رول وأيضاً f(x) غير متصلة على الفترة [0, 5]عندما $x = 1$.

مثال(3):

إذا كان $f(x) = \sin 2x$, في الفترة $\left[\pi, \frac{3}{2}\pi\right]$ هل تحقق شروط رول ثم جد c إن كان تحقق.

الحل:

f(x) متصلة على الفترة $[\pi, \frac{3}{2}\pi]$.

$$f(\pi) = \sin 2\pi = \sin 180 = 0$$

$$f\left(\frac{3}{2}\pi\right) = \sin 2 * \frac{3}{2}\pi = \sin 3\pi = \sin 0 = 0$$

$$\therefore f(a) = f(b) = 0$$

$f'(x) = \cos 2\pi * 2$(قابلة للإشتقاق).

تحقق شروط رول.

$$f'(c) = 0 \Rightarrow 2\cos 2c = 0 \Rightarrow \cos 2c = 0$$

$\cos\theta = 0$ هي $\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{4} \Rightarrow 2c = \frac{\pi}{2} \Rightarrow c = \frac{\pi}{4} = 45 \notin [\pi, \frac{3}{2}\pi]$,

$$2c = \frac{3}{4}\pi \Rightarrow c = \frac{3}{2}\pi \notin [\pi, \frac{3}{2}\pi]$$

$\cos\theta = 0$ هي $(360 + 90) = 450 \Rightarrow 2c = 450 \Rightarrow c = 225$

$$c = \frac{5\pi}{4} \in [\pi, \frac{3\pi}{4}]$$

$$\therefore c = \frac{5\pi}{4}$$

مثال(4):

إذا كان $f(x) = \begin{cases} x^2 & ,0 \le x < 1 \\ 2 - x & ,1 \le x < 2 \end{cases}$

هل يحقق الإقتران $f(x)$ شروط رول في الفترة $[0, 2]$:

الحل:

الصفرمتصل لأنه في فترته ‘ 2متصل لأنه في فترته.

نبحث في إتصال $x = 1$

$$\lim_{x\to -1} f(x) = (1)^2 = 1 \ , \lim_{x\to 0+} f(x) = 2 - 1 = 1 = f(x)$$

$\therefore$ $f(x)$ متصلة على الفترة $[0, 2]$

$$\begin{cases} f(0) = (0)^2 = 0 \\ f(2) = 2 - 2 = 0 \end{cases}$$

$$f(a) = f(b)$$

نجد $f'(x) = f'(x) = \begin{cases} 2x & ,0 < x < 1 \\ -1 & ,1 < x < 2 \end{cases}$

$$f'(1) += -1 = 2 * 1 = 2$$

وهي غير قابلة للإشتقاق .

$\therefore$لا تحقق شروط نظرية رول.

مثال (5):

بين أن الإقتران $f(x) = \sqrt[3]{x^4}$, في الفترة$[-1 , 1]$ يحقق شروط رول ثم جد قيمة c.

الحل:

بما أنه تحت الجذر (زوجي) إذاً $f(x)$ متصلة على الفترة $[-1 , 1]$

$$f(1) = \sqrt[3]{(1)^4} = 1$$

$$f(-1) = \sqrt[3]{(1)^4 = 1}$$

$$\therefore f(a) = f(b)$$

$f'(x) = (x)^{\frac{4}{3}} = \frac{4}{3}\ x^{\frac{1}{3}} = \frac{4}{3}\ \sqrt[3]{x}$ قابلة للإشتقاق.

$$f'(c) = 0 \Rightarrow \frac{4}{3}\ \sqrt[3]{c} = 0 \Rightarrow c = 0$$

مثال(6):

إذا كان $f(x) = \sqrt[5]{(x^2-4)^2}$ في الفترة $[-1\ ,1]$ هل الإقتران يحقق شروط رول ثم جد قيمة c .

الحل:

$f(x)$ متصلة على الفترة $[-1\ ,1]$ لوجود تربيع تحت الجذر

$$f(-1) = \sqrt[5]{(x^2-4)^2} = \sqrt[5]{9} \quad , f(1) = \sqrt[5]{((1)^2-4)^2} = \sqrt[5]{9}$$

$$f(a) = f(b)$$

$f'(x) = \frac{2}{5}\ (x^2-4)^{\frac{3}{5}} * 2x \Rightarrow f'(x) = \frac{4x}{5\sqrt[5]{(x^2-4)^3}}$ قابلة للإشتقاق.

$\therefore f(x)$ تحقق شروط نظرية رول.

$$f'(c) = 0 \Rightarrow \frac{4x}{5\sqrt[5]{(x^2-4)^3}} = 0 \Rightarrow 4c = 0 \Rightarrow c = 0$$

مثال(7):

$f(x) = x\cos x\ , x\epsilon[\frac{\pi}{2}\ ,0]$ بين أنه يحقق شروط رول ثم أثبت أنه يوجد حل على الأقل للمعادلة $\cot anx = x^2$.

الحل:

$f(x)$ متصلة على الفترة $[\frac{\pi}{2}, 0]$

$$f(0) = 0 * \cos 0 = 0\ , f\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} * 0 = 0$$

$$f(a) = f(b)$$

نجد أن:

$$f'(x) = x * -\sin x + \cos x * 1$$

$= -x\sin x + \cos x$ (قابلة للإشتقاق)

$\therefore$ تحقق شروط رول.

$$-\mathrm{xsinx} + \mathrm{cosx} = 0$$

$$\Rightarrow -\mathrm{csin\ c} + \cos \mathrm{c} = 0$$

$$\cos \mathrm{c} = \mathrm{csin\ c} = \frac{\cos \mathrm{x}}{\sin \mathrm{x}}$$

حيث:

$$\frac{\cos \mathrm{x}}{\sin \mathrm{x}} = \ \mathrm{cotan\ x}$$

$$\Rightarrow \mathrm{cotan\ x} = \mathrm{x}$$

أي أن للمعادلة $\mathrm{cotan\ x} = \mathrm{x}$ حل واحد على الأقل في الفترة $[\frac{\pi}{2}, 0]$

مثال(8):

إذا كان $f(x) = x^2 - 4$ في الفترة $[-2,2]$ هل تحقق شروط نظرية رول .ومن ثم جد قيمة c إذا كانت تحقق.

الحل:

$f(x)$متصلة في الفترة لأنها كثيرة حدود.

$f'(x) = 2x$قابلة للإشتقاق.

$$f(-2) = (-2)^2 - 4 = 0$$

$$f(2) = (2)^2 - 4 = 0$$

$$\because f(a) = f(b)$$

$\therefore$تحقق شروط نظرية رول.

$$f'(c) = 0 \Rightarrow c^2 - 4 = 0$$

$$c = \pm 2$$

الفصل الخامس

النتائج:

- تعرفنا على الإتصال بصورة واضحة .
- وضحنا بعض حالات عدم الإتصال (الإنفصال).
- وضحنا بعض الحقائق عن الدوال المتصلة وإتصال الدوال الجذرية.
- تعرفنا على بعض نظريات الإتصال.
- استخدمنا هذه النظريات في حل بعض المسائل.

التوصيات:

- الإهتمام بدراسةإتصال(إستمرار)الدوال بجميع فروعه ونظرياته المختلفة .
- التعرف على إستخدامات الإتصال في العلوم المختلفة.
- تطبيق الإتصال (الإستمرار)في الحياة اليومية.
- تدريس الإتصال (الإستمرار)بصورة أوسع وأشمل لطلاب المرحلة الثانوية والجامعات .
- الإطلاع علي كتب ومراجع مختلفة عن علم الاتصال .

المراجع والمصادر:

- مبادئ الرياضيات الحديثة ، تأليف دكتور:سعد خليل نصر ، الناشر: منشأة المعارف بالإسكندرية ،جلال حزى وشركاه.
- أساسيات التفاضل.الحل الأمثل لتفاضل أسهل ،بدر الدين محمد دشون ، عمان:دار الإعصار العلمي للنشر والتوزيع ،2010،الطبعة العربية الأولى (2011م-1432ه).
- نظرية الدوال، أ.د.عبد الله زين الدين ،أ.د.طارق زين العابدين،د.عبد العزيز إبراهيم عمارة 2009، طباعة ونشر الكتب:مكتبة بستان المعرفة .
- الحسبان الشامل في التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية، الجزء الأول،تأليف الدكتورعبد المجيد نصير ،الدكتور بسام الناشب، ،الناشر: دار الكندي للنشر والتوزيع-اربد
- ويكيبيديا الموسوعة الحرة.https://ar.m>Wikipedia>org>wiki
- Seraj.org.kw>uploads>ILVF3
- Hesab.net>showthread
- أساسيات التفاضل والتكامل،خالد قاسم سمور ،الطبعة الثانية(2004م-1425ه)،دار الفكر للنشر والتوزيع،سوق البتراء (الحجيري).
- ملخصات شوم في التفاضل والتكانل المتقدم ،تأليف: دكنورمواري ر.شبيجل ،الدار الدولية للإستثمارات الثقافية ش.م.م.مصر.
- سلسلة ملخصات شوم نظريات ومسائل في حساب التفاضل والتكامل،تاليف دكتور: فرانك آيزر ،الدار الدولية للإستثمارات الثقافية .