بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا

كلية التربية

قسم العلوم

شعبة رياضيات

بحث تكميلي لنيل درجة البكلاريوس شرف في التربية -رياضيات

نظريتي كوشي التكاملية والباقي وتطبيقاتهما

Cauchy Integral and the Residue Theorems
And their applications

إعداد الطالبات

رزاز جمال الطيب حسن

سناء الطيب عبد الله محمد

منال الصادق عبد الله عبد الرحمن

نور حمدان حامد حماد محمد

إشراف الأستاذ/

عمر خليل عثمان

سبتمبر **1438/ 2017**م

الآية

فَبَدَأَ بِأَوْعِيَتِهِمْ قَبْلَ وِعَاءِ أَخِيهِ ثُمَّ اسْتَخْرَجَهَا مِن
وِعَاءِ أَخِيهِ ۚ كَذَٰلِكَ كِدْنَا لِيُوسُفَ ۖ مَا كَانَ لِيَأْخُذَ أَخَاهُ
فِي دِينِ الْمَلِكِ إِلَّا أَن يَشَاءَ اللَّهُ ۚ نَرْفَعُ دَرَجَاتٍ مَّن نَّشَاءُ ۗ
وَفَوْقَ كُلِّ ذِي عِلْمٍ عَلِيمٌ ﴿٧٦﴾

صدق الله العظيم

سورة يوسف : الآية (76)

الإهداء

إليها..

وهي فوق إهدائي وقافيتي وأشعاري تظل رمزاً للكفاح والصمود...وطنا للدفء والأمان والحنان منارة تهدي تواه السفر.. ودعواها تلهمني طريق النجاح.

(أمي الحنينة)

إليه..

وهو يمارس الصمود في زمن الإنهيار .. شمعاً يهب الضياء للأجيال القادمة . وظل وما زال يعلمني .

(أبي الحبيب)

إليهم..

وهم ينظرون بإشراق للأيام القادمات .. فرحاً يقاوم أحزان الزمان ..وبشرى تحطم أنوار المستحيل.. يظلون دائماً وقودي لتحقيق أي نجاح.

(أخواني وأخواتي)

إليهم..

من علموني مسك القلم وشدوا على يدي في درب العلم ولولاهم لما كان هذا البحث قد تم ولم يرى النور ويخرج للحياة..

(أساتذتي الأجلاء)

الشكر والعرفان

الشكر أولاً وأخيراً لله سبحانه وتعالى الذي وفقنا لإكمال هذا العمل كما نخص بالشكر هذا الصرح العظيم الشامخ **جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا** . .ونخص **بالشكر أسرة كلية التربية قسم العلوم – رياضيات** تلك المصابيح التي تضيء طريق العلم وتكبدت العناء في سبيله. . .

تتسابق الكلمات وتتزاحم العبارات لتنظم عقد شكر لا يستحقه إلا مرشدنا وموجهنا الذي أخذ بيدنا في سبيل إنجاز هذا البحث مشرفنا العظيم الأستاذ. . .

عمر خليل عثمان

والشكر موصول إلي جميع من ساعد ولو بنصيحة لإتمام هذا العمل.

المستخلص

يحتوي هذا البحث على دراسة وافية في نظريتي كوشي اللتكامليةى والباقي وتطبيقاتهما، ويحتوي أيضاً على معظم النتائج الأساسية لنظرية كوشي التكاملية.

تناولنا في الفصل الأول خطة البحث التي تتمثل في أهمية البحث وأهدافه ومشكلته وأسئلته. واشتمل الفصل الثاني على نظرية كوشي التكاملية وبعض النظريات الهامة.

أما الفصل الثالث احتوى على نظرية الباقي وحساب المتبقيات، وأنواع النقاط الشاذة وبعض النظريات الهامة. أيضاً الفصل الرابع يشتمل على تطبيقات نظرية كوشي التكاملية ونظرية الباقي.

وأخيراً في الفصل الخامس وجدنا ان نظرية كوشي ونتائجها حالة خاصة من نظرية الباقي لأن نظرية كوشي تحل النقاط غير الشاذة في المسار أما نظرية الباقي فهي تحل النقاط الشاذة وغير الشاذة. ومن خلال الدراسة المفصلة لنظرية كوشي توصلنا إلى أن هناك تطبيقات لها في العلوم الاخرى الهندسة والفيزياء. أيضاً ايجاد مفكوك تايلور باستخدام نظرية كوشي.

أيضاً نوصي بالاهتمام بنظرية كوشي وذلك بربطها بكل عمليات الرياضيات والعمق فيها. ونقترح أن يكون هناك مقرر التحليل المركب المتقدم لدراسة نظرية كوشي التكاملية بتفصيل أكثر. ومن خلال دراستنا لنظرية الباقي نوصي بأن يكون لها حيز أكبر في مقرر التحليل المركب وذلك لأهميتها وكثرة تطبيقاتها.

Abstract

This research contains a detailed investigation of the Cauchy's integral formula and Remainder theory and their applications. It also includes the most basic results of the Cauchy's integral formula.

Chapter one dealt with the plan of the research which is represented in explaining of the problem, importance, objectives and questions of the research. Chapter two included an explanation of the Cauchy's integral formula and other important theories.

Chapter three contained the Remainder theory, and isolated singular points and some of other important theories. Chapter four dealt with the applications of the Cauchy's integral formula and the Remainder theory.

Finally, chapter five included the findings of the research which are: it was confirmed that the Cauchy's integral formula is a special case of the Remainder theory because the Cauchy's integral formula overcomes the non-isolated singular points while the Remainder theory overcomes both the isolated singular points and non-isolated singular points. The research after detailed investigating of the Cauchy's integral formula arrived at that this formula has applications on other sciences such as geometry and physics. Also the research found the Taylor series by using of the Cauchy's integral formula.

The research recommended the following: great attention should be paid to the Cauchy's integral formula by correlating it with all of mathematical operations and deepen in it. The research suggested that there should be syllabus for the advanced complex analysis to study the Cauchy's integral formula in more details. Basing on investigating of the Remainder theorem the researcher recommended giving it more space in the complex analysis syllabus because of its importance and many applications.

فهرست الموضوعات

الفصل الأول

خطة البحث(الإطار العام)

(1−1) المقدمة :

الأعداد المركبة***(Complex number)***هي نتاج إتحاد الأعداد الحقيقية مع الأعداد التخليلية (i)، التحليل المركب أو التحليل العقدي هو أحد فروع الرياضيات التي تبحث في دوال الأعدادالمركبة .

التحليل المركب من أجدى وأعظم فروع الرياضيات وعلي الرغم من أنها نشأت في جو من الغموض والشك من خلال مصطلح "تخيلي"و"مركب" .ووضع الشكل النهائي علي أساس سليم في القرن التاسع عشر وذلك لجهود كوشي – ريمان – فنرانسراس – جاوس وغيرهم من علماء الرياضيات الأفذاذ[1].

وتؤخذ النظرية علي أنها الجزء الأساسي من المبادئ الرياضية وتصبح موضحة وموحدة عند دراستها في ضوء نظريتي كوشي التكاملية والباقي ومن جهة النظرة التطبقية لها أهمية قصوى في طرق حل المسائل الفيزيائية والهندسية[2].

[1]الدوال المركبة سلسلة شوم ، تأليف مواري شبيجل ،ترجمة أ.د.حسن مصطفى العويضي ،الدار الدولية للنشر والتوزيع ،1998 ،

[2]التحليل المركب "دوال المتغير المركب،إعداد أ.د.حسن مصطفى العويضي ، مكتبة الرشد ،2006 ،ص 1

(1−2)مشكلة البحث:

جاءت مشكلة البحث من خلال دراسة التحليل المركب حيث إستشعر الدارسون الدور الذي تلعبه نظرية كوشي التكاملية والنظريات المتعلقة بها في إيجاد وتبسيط الحلول.لهذا تناول الدارسون في هذا البحث نظرية كوشي التكامليةومايتعلق بها من نظريات لنعرف أكثرخفايا هذه النظرية.

(1−3) أهمية البحث:

تأتي أهمية البحث من خلال أهمية نظرية كوشي التكاملية التي لها عدد كبير من النظريات والنتائج المتعلقة بها ولهذا فإن أهمية البحث تتمثل في دراسة نظرية كوشي التكاملية ونظرية الباقي وتطبيقاتهما .

(1−4) أهداف البحث *:*

- التعرف علي نظريات كوشي في التكامل .
- التعرف علي نظرية الباقي .
- الوصول الي العلاقة بين نظريتي كوشي التكاملية والباقي .
- توضيح تطبيقات نظرية كوشي التكاملية ونظرية الباقي في العلوم الأخري .

(1−5) أسئلة البحث:

- إمكانية التوسع في دراسة نظرية كوشي.
- كيف يتم إستخدام نظريات كوشي في الحياة العملية.
- إمكانية التوسع في دراسة نظرية الباقي.
- هل هنالك علاقة بين نظرية كوشي التكاملية ونظرية الباقي.

(6–1) منهج البحث:

المنهج الوصفي :هوالمنهج الذي يعتمد على دراسة الظواهركماهي في واقعها ،وبعد ذلك يتم وصفها وصفاً دقيقاً ، ويعبرعنها كيفياً وكمياً،وتوضيح مقدار هذه الظواهر ودرجة إرتباطها بالظواهر الأخرى.

(7–1)مصطلحات البحث:

- **الدالة التحليلية(Analytic Function)** :

إذا كانت $f'(z)$ المشتقة معرفة عند كل النقاط zفي منطقة ما $\Re$فإنه يقال أن $f(z)$تحليلية في المنطقة $\Re$ أو تحليلية في $\Re$.تستخدم الإصطلاحات "الدالة المنتظمة (Regular function) " أو"هولومورفيه (Holomorphic)" . كبديل لمصطلح " الدالة التحليلية " [1].

- **النطاق بسيط الترابط (Simply Connected)** :

يقال لنطاق D أنه بسيط الترابط إذا كان كل منحنى مغلق بسط داخل D لا يحتوي داخله إلا نقاط من D ."و هو النطاق الداخلي ،أى جميع النقاط الداخلية "[2] .

- **الدالة حافظة الزوايا (Conformal Mapping Function)** :

تسمى الدالة التي تحفظ قيمة الزاوية وإتجاه دورانها "بحافظة الزوايا" [3].

- **التكامل المعتل (Improper Integral)**:

هو تكامل يكون على الصورة [4]:

$$\lim_{b\to\infty}\int_a^b f(x)dx = \mathrm{e}$$

أى أن النهاية موجودة أى e عدد محدود فإن هذه النهاية تسمى تكامل $\mathrm{f(x)dx}$ من a إلى ∞ ويرمز لها بالرمز $\int_{\mathrm{a}}^{\infty}\mathrm{f(x)dx}$ ويقال في هذه الحالة أن التكامل متقارب وبخلاف ذلك متباعد .

[1] الدوال المركبة (مرجع سابق) ص102
[2] المتغيرات المركبة وتطبيقات ،تشرشل ،براون ،فيرهي ،ترجمة :بديع توفيق ،إسماعيل امين ، الدار الدولية للنشر والتوزيع ،2005 ،ص
[3] التحليل المركب وتطبيقاته ،تأليف وليم ر.دريك ، ترجمة د: سعدون إبراهيم عثمان إبراهيم و د. أبو بكر الصديق بيومي ،جامعة الملك سعود ، النشر العلمي والمطابع ص235
[4] التفاضل والتكامل حساب التكامل ، الجزء الثاني إعداد الأستاذ الدكتور حسن مصطفى العويضي،مكتبة الرشد الطبعة الأولى 2006 ص323

$$\int_{-\infty}^{b} f(x)dx = \lim_{a\to\infty} \int_{a}^{b} f(x)dx$$

ويسمى التكامل في الطرف الأيسر متقارب أو متباعد تبعا لوجود أو عدم وجود نهاية للطرف الأيمن .

ويمكن تعريف :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to\infty} \int_{a}^{c} f(x)dx + \lim_{b\to\infty} \int_{c}^{b} f(x)dx \quad , \quad \int_{-\infty}^{c} f(x)dx + \int_{c}^{\infty} f(x)dx$$

الفصل الثاني

نظرية كوشي التكاملية

Cauchy Integral Theorem

(2−1) مقدمة:

في هذا الفصل من البحث سنتناول صيغة كوشي للتكامل ونتائجها التي ساهمت في حل كثير من المسائل التحليلالمركب ، ومخترع هذه الصيغة هو عالم الرياضيات الفرنسي أوغستين لويس كوشي Louis (Augustin. Cauchy)

يعتبر كوشي سيد التحليل المركب بلا منافس ، ومن أعماله نظرية التوابع القابلة للإشتقاق وحساب التكاملات المحددة ، وله قاعدة كوشي وصيغة تكامل كوشي ومسائل كوشي ، وبذلك يكون قد عمل في الرياضيات البحتة والرياضيات التطبيقية وفي كل مجال من مجالات الرياضيات[1].

(2−2) نظرية كوشي التكاملية Cauchy Integral Theorem :

إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية على المنحنى البسيط المغلق C ، وداخله a اي نقطة داخل C فإن:

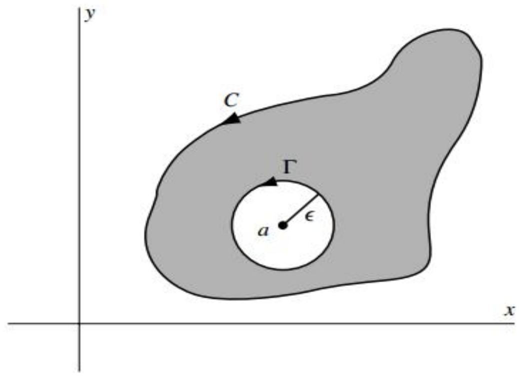
$$\boldsymbol{f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{c}\frac{f(z)}{z-a}dz}$$

حيث C في الإتجاه الموجب (عكس عقارب الساعة) .

البرهان:

الدالة $\frac{f(z)}{z-a}$ دالة تحليلية على المنحنى C وداخله ما عدا $z=a$ يمكن أن نختار دائرة ما (s) نصف قطرها r ومركزها a كما في الشكل:

[1] Google .com



وبالتالي فإن معادلة (s) هي :

$$z - a = \epsilon e^{i\theta} \text{ أو } |z - a| = \epsilon$$

حيث $0 \le \theta \le 2\pi$ بالتعويض:

$$z = a + \epsilon e^{i\theta} \rightarrow \quad dz = i\epsilon e^{i\theta}$$

وبما أن C و s عبارة عن منحنيين بسيطين مقفلين حيث s يقع داخل C فإن :

$$\oint_c f(z)dz = \oint_s f(z)dz$$

يتحول التكامل :

$$\oint_c \frac{f(z)}{z-a}dz = \oint_s \frac{f(z)}{z-a}dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(a+\in e^{i\theta}) i \in e^{i\theta}}{\in e^{i\theta}} d\theta$$

$$\oint_s \frac{f(z)}{z-a}dz = i\int_0^{2\pi} f(a+\in e^{i\theta})\, d\theta$$

بأخذ النهاية للطرفين مع إعتبار أن $f(z)$ متصلة عندما $\in \rightarrow 0$ فإن :

$$\oint_c \frac{f(z)}{z-a}dz = \lim_{\in\rightarrow 0} i\int_0^{2\pi} f(a+\in e^{i\theta})d\theta$$

إذن:

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{c}\ \frac{f(z)}{z-a}\ dz$$

وكذلك المشتقة النونية للدالة $z=a$ عند $f(z)$هي :

$$f^{n}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{c}\ \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz$$

حيث:

$$n=1,2,3,4,\ldots\ldots\ldots$$ [1]

ولصيغة كوشي بعض النتائج المهمة وهي :

(1-2-2) نظرية موريرا (Morera's Theorem)[2]:

إذا كانت$f(z)$ دالة متصلة في منطقة ما و$\int f(z)d=0$حول المنحنى المغلق البسيط C في$\mathbb{R}$فإن $f(z)$ تكون تحليلية $\mathbb{R}$.

البرهان:

$$\oint_{c}\ f(z)dz=\oint_{c}\ (u+iv)(dx+idy)$$

من نظرية جرين :

$$\left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+i\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

فإن:

$$\oint_{c}\ f(z)dz=\oint_{c}\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)+i\oint_{c}\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)$$

وبتطبيق نظرية قرين على التكاملين في الطرف الأيمن يصبح:

$$\iint_{R}\left(\frac{-\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)\ dxdy+i\iint_{R}\ \left(\frac{\partial u}{\partial x}-\frac{\partial v}{\partial y}\right)dxdy=0$$

---

[1] الدوال المركبة (مرجع سابق) ص184

[2] الدوال المركبة (مرجع سابق) ص192

وهذا لا يتحقق إلا إذا كانت :

$$\frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}}=\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{y}} \quad \text{and} \quad \frac{\partial \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}}=-\frac{\partial \mathrm{v}}{\partial \mathrm{x}}$$

وهذه معادلتا كوشي – ريمان وبما أن$f(z)$ تحقق كوشي– ريمان إذن الدالة $f(z)$تحليلية

وتسمى نظرية موريرا بمعكوس نظرية كوشي .

(2-2-2) متباينة كوشي (Cauchy's Inequality)[1]:

لتكن$f(z)$دالة تحليلية في نطاق بسيط الترابط D يحتوي الدائرة $C: |z-z_0|$ والتي نصف قطرهاrوإذا كانت$f(z) \leq M$ لجميع النقاط$z \in C$ فإن :

$$|f^{n}(z_0)| \leq \frac{Mn!}{R^{n}} \qquad\qquad n=1,2,3 \ldots \ldots$$

حيثM ثابت ما.

البرهان:

ليكن التمثيل البارامتري للدائرة C هو :

$$C: Z(\theta)=z_0+Re^{i\theta} \quad \Longrightarrow \quad dz = iR\, e^{i\theta} d\theta \qquad , \quad 0<\theta<2\pi$$

من صيغة كوشي التكاملية نحصل علي المشتقة النونية:

$$f^{(n)}(z_0)=\frac{n!}{2\pi i}\int_{c} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\, d\theta$$

$$=\frac{n!}{2\pi i}\int_0^{2\pi} \frac{\left(z_0+Re^{i\theta}\right) iRe^{i\theta}}{R^{n+1}(n+1)\theta}\, d\theta$$

$$\left|f^{(n)}(z_0)\right| \leq \frac{n!}{2\pi R^{n}}\int_0^{2\pi}\left|f\left(z_0+Re^{i\theta}\right)\right| d\theta$$

$$\leq \frac{n!}{2\pi R^{n}}\int_0^{2\pi} M d\theta=\frac{n!}{2\pi R^{n}} M 2\pi=\frac{n!}{R^{n}}\, M$$

[1]التحليل المركب (مرجع سابق) ص172

(3-2-2) نظرية ليوفيل (Liouvill's Theorem)[1]:

أي دالة شاملة ومحدودة لجميع نقاط المستوى المركب لابد وأن تكون دالة ثابتة .

البرهان:

من متباينة كوشي السابقة وبوضع $n = 1$ وإحلال z_0 بدلاً من a فإن:

$$|f'(\mathrm{z})| \leq \frac{M}{r}$$

بجعل $\mathrm{r} \to \infty$ نستنتج أن $|\mathrm{f}'(\mathrm{z})| = 0$

وبالتالي $f'(z) = 0$ إذن $f(z)$ تكون ثابتة.

(4–2–2) النظرية الأساسية في الجبر (Fundamental Theorem of Algebra)[2]:

أي كثيرة حدود :

$$P(Z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \cdots + a_n\ z^n$$

حيث $(a_n \neq 0)$ $\mathrm{n} \geq 1$ لها جذر واحد علي الاقل .اي أنه توجد نقطة واحدة

على الأقل z_0 $p = (z_0)$

البرهان :

من النظرية الأساسية للجبر $p(z)$ لها علي جذر واحد نرمز لرمز الجذربالرمز a إذا $p(z) = 0$

وبالتالي :

$$P(z) = a_o + a_1 z + a_2 z^2 \dots\dots\dots\dots\ a_n z^n$$

$$P(a) = a_o + a_1 a + a_2 a^2 + \ \dots\dots\dots\dots\ a_n a^n$$

$$p(z) - p(a)$$

$$= (a_o + a_1 z + a_2 z^2 \dots\ a_n z^n\ ) - (a_o + a_1 a + a_2 a^2 + \ \dots\ a_n a^n)$$

$$= a_1(z - a) + a_1(z^2 - a^2) + \ \dots\dots.. + a_n(z^2 - a^2)$$

$$= (z - a)Q(z)$$

حيث $Q(z)$ هي كثيرة الحدود من الدرجة $n - 1$

[1] المتغيرات المركبة وتطبيقات (مرجع سابق) ص156

[2] الدوال المركبة (مرجع سابق) ص193

بتطبيق نظرية الأساسية للجبر مرة أخري نري أن $Q(z)$ لها علي الأقل صفر واحد والذي يرمز له بالرمز B الذي يمكن أن يكون مساوياً للجذر a بالتالي :

$$p(z) = (z-a)(z-B)\,R(z)$$

بالإستمرار بهذه الطريقة نجد أن $p(z)$ لها بالضبط n من الجذور .

(5−2−2) نظرية جاوس للقيمة المتوسطة[1] (Gauss' Mean Value Theorem):

إذا كانت $f(z)$ تحليلية داخل وعلى الدائرة C التي مركزها a فإن $f(a)$ هي متوسط قيم الدالة $f(z)$ على C أي:

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(a + re^{i\theta}\right)d\theta$$

البرهان:

من صيغة كوشي للتكامل :

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{z-a}\,dz \qquad (1)$$

إذا كان نصف القطر C هو r فإن معادلة C هي :

$$z = a + re^{i\theta} \text{ أو } |z-a| = r$$

بالتالي تصبح المعادلة (1):

$$f(a) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f\left(a + re^{i\theta}\right)d\theta$$

[1] الدوال المركبة (مرجع سابق) ص194

(6−2−2) نظرية أكبر مقياس[1](Maximum Modulus Theorem):

إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية على منحنى بسيط مقفل c وداخله ,فإن القيمة العظمى للدالة$|f(z)|$ توجد على c إلا إذا كانت $f(z)$ثابت .

البرهان:

من نظرية جاوس للقيمة المتوسطة نجد أن :

$$|f(a)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(a+re^{i\theta}\right)d\theta\right|$$

نفرض أن :

$|f(a)|$هي القيمة العظمى بحيث أن :

$$\left|f\left(a+re^{i\theta}\right)\right| < |f(a)|$$

إذا كانت :

لقيمة واحدة للزاويةθ يجبأن تتحقق لمنحنى محدود ولتكون$\theta_2 < \theta < \theta_2$ولكن في هذه الحالة القيمة المتوسطة ل $\left|f\left(a+re^{i\theta}\right)\right|$ تكون أقل من $|f(a)|$ والتي تتناقض مع المعادلة من صيغة تكامل كوشي نجد أن لكل δ>0حيث $|z-a|$يجب أن تكون $f(z)$ثابتة إذا لم تكون $f(a)$ ثابتة فإن أكبر قيمة للدالة $|f(z)|$يجب أن توجد على c.

(7−2−2)نظرية أصغر مقياس [2](Minimum Modulus Theorem):

إذا كانت $f(z)$ تحليلية على المنحنى المقفل c وداخله و $f(z) \neq 0$ داخل c فإن $f(z)$ تأخذ أصغر قيمة على c.

البرهان:

بما أن تحليلية $f(z)$على المنحنى c وداخلة و$f(z) \neq 0$ داخل c فيلي أن $\frac{1}{f(z)}$تحليلية داخل c ومن نظرية أكبر مقياس ينتج أن $\frac{1}{f(z)}$لا يمكن أن تأخذ قيمتها العظمى c وبالتالي $|f(z)|$لايمكن أن

[1] الدوال المركبة (مرجع سابق) ص196
[2] الدوال المركبة (مرجع سابق) ص196

تأخذ قيمتها الصغرى داخل c وبالتالي $|f(z)|$ بما أن لها قيمة صغرى فإن هذة القيمة الصغرى يجب أن نصل إليها على المنحنى c.

(8−2−2) نظرية المدلول (The Argument Theorem) [1]:

لتكن $f(z)$ تحليلية على المنحنى المقفل c وداخلة ماعدا بعض الأقطاب المحدودة داخل c فإن :

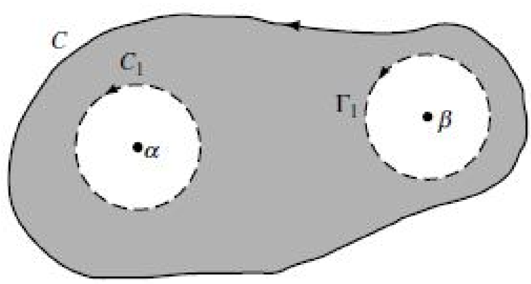
$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{c}\frac{\grave{f}(z)}{f(z)}dz=n-p$$

البرهان:

الدالة $f(z)$ تحليلية ماعدا عند $z=a$ حيث a قطب من الرتبة p داخل c، أفرض أن الدالة $f(z)$ لها صفر واحد $z=\beta$ من الرتبة n داخل c وليس لها أصفار على c

نبرهن أن :

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{c}\frac{\grave{f}(z)}{f(z)}dz\ =n-p$$



ليكن c_1، c_2 دائرتين غير متداخلتين وتقعان داخل c ويحيطان $z=a$، $z=\beta$ على الترتيب فإن:

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{c}\frac{\grave{f}(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_1}\frac{\grave{f}(z)}{f(z)}dz+\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_2}\frac{\grave{f}(z)}{f(z)}dz\qquad(1)$$

[1] الدوال المركبة (مرجع سابق) 197

بما أن $f(z)$ لها قطب من الرتبة p عند $z = a$ فإن :

$$f(z) = \frac{F(z)}{(z-a)^p} \qquad (2)$$

حيث $F(z)$ تحليلية وتختلف عن الصفر على المنحنى c_1 وداخلة بأخذ اللوغريثمات في (2) بالتفاضل نجد أن:

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \frac{f''(z)}{f(z)} - \frac{p}{z-a}$$

وبالتالي :

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_1} \frac{\grave{f}(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_1} \frac{\grave{F}(z)}{f(z)} dz - \frac{P}{2\pi i}\oint_{c_1} \frac{dz}{z-a} = 0 - p = -p$$

بما أن $f(z)$ لها صفر من رتبة n عند $z = \beta$ فإن :

$$f(z) = (z-\beta)^n G(z)$$

حيث $G(z)$ تحليلية وتختلف عن الصفر على المنحنى c_2 وداخله وبأخذ اللوغريثم والتفاضل نجد أن :

$$\frac{f\acute{}(z)}{f(z)} = \frac{n}{z-\beta} + \frac{G\acute{}(z)}{G(z)}$$

وبالتالي :

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_2} \frac{\grave{f}(z)}{f(z)} dz = \frac{n}{2\pi i}\oint_{c_2} \frac{dz}{z-\beta} + \frac{1}{2\pi i}\oint \frac{G\acute{}(z)}{G(z)} dz = n$$

وعلية نجد أن :

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{c} \frac{\grave{f}(z)}{f(z)} dz = \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_1} \frac{\grave{f}(z)}{f(z)} dz + \frac{1}{2\pi i}\oint_{c_2} \frac{\grave{f}(z)}{f(z)} dz = n - p$$

(9−2−2) نظرية روشيه(Rouche´'s Theorem) [1]:

إذا كانت $f(z)$ و$g(z)$تحليليتين علي المنحنى المقفل c وداخلة وإذاكان :

$|f(z)| > |g(z)|$على c فإن $f(z) + g(z)$ و$f(z)$لها نفس عدد الأصفار داخل c.

البرهان:

لتكن $F(z) = \frac{g(z)}{f(z)}$أي $g = fF$

إذا كان N_1وN_2هما عدد الأصفار داخل Cالدالتين $f + g$ وfعلي الترتيب:

$$N_1 = \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{\acute{f} + \acute{g}}{f + g}\,dz$$

$$N_2 = \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{\acute{f}}{f}\,dz$$

$$N_1 - N_2 = \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f' + f'\acute{F} + fF'}{f + Ff}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{\acute{f}}{f}\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f'(1 + \acute{F}) + fF'}{f(1 + F)}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{\acute{f}}{f}\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_c \left[\frac{f'}{f} + \frac{F'}{1 + F}\right]dz - \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{\acute{f}}{f}\,dz$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{F'}{1 + F}\,dz - \frac{1}{2\pi i}\oint_c F'(1 - F + F^2 - F^3 + \cdots)\,dz = 0$$

بإستخدام الحقيقة المعطاة وهي$|F| < 1$ على Cومنها ينتج أن المتسلسلة منتظمة التقارب على C.

وبالتكامل حداً حداً ينتج أن القيمة صفر ، وبالتالي $N_1 = N_2$.

[1] الدوال المركبة (مرجع سابق) ص198

الفـــــــــــصل الثالث

نظرية الباقي

The Residue Theorem

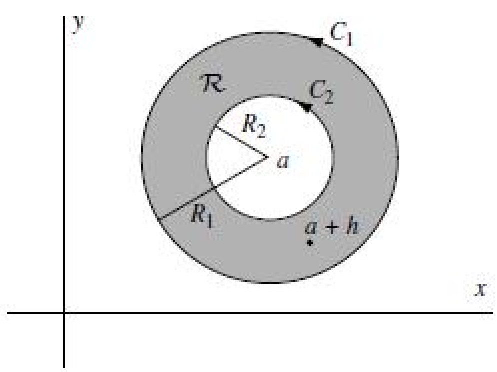
(1-3) المقدمة:

في هذا الفصل من البحث سنتناول نظرية الباقي التي لها إسهاماتها في التكامل المركب .
علمنا كيف نجد قيمة تكامل دالة حول مسار مغلق وبسيط C، إذا وجد لهذة الدالة نقطة منفردة في المنطقة الداخلية لهذا المسار وذلك بإستخدام نظرية كوشي ونتائجها ، ولكن كيف يمكن إيجاد قيمة ذلك التكامل إذا وجدت للدالة أكثر من قيمة منفردة واحدة في المنطقة الداخلية للمنحنى C، هذا ما تجيب علية نظرية الباقي بحيث تعتبر نظرية كوشي وصيغ كوشي حالتان خاصتان لهذة النظرية[1].

سنقوم بتوضيح نظرية الباقي وكيفية حساب البواقي ونظرية لورانت التي تساعد في إثبات نظرية الباقيوالنقاط الشاذة التي تساعد في تحديد البواقي .

(2-3)نظرية لورانت[2](Laurent's Theorem) :

لتكن $C_{1,}$ و C_2 دائرتين متحدتي المركز ونصف قطريهما R_1 و R_2 على الترتيب ومركزهما عند a الشكل التالي يوضح ذلك ، نفرض أن $f(z)$ دالة وحيدة القيمة وتحليلية على C_1 و C_2 وفي المنطقة التي على شكل حلقة (وتسمى ايضا طوق أو منطقة حلقية) بين C_1 و C_2 المظللة في الشكل أدناه لتكن $a+h$أي نقطة في R فيكون :



[1]مبادئ التحليل المركب تأليف الدكتور محمود كتكت ، دار الشروق للنشر والتوزيع والطباعة ،ص331
[2]الدوال المركبة (مرجع سابق) ص218

$$f(a+h)=a_0+a_1+a_2+\cdots+\frac{a_{-1}}{h}+\frac{a_{-2}}{h}+\frac{a_{-3}}{h}+\cdots (1)$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_1}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz \qquad : n=0,1,2,3,4,\dots.$$

$$a_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_2}(z-a)^{n-1}f(z)dz \quad ; n=1,2,3,\dots \quad (2)$$

C_1 و C_2 يعبران في الإتجاه الموجب بالنسبة إلى داخلهما يمكن كتابة ما سبق بالتعبير المناسب للرموز على الصورة :

$$f(z)=a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\cdots+\frac{a_{-1}}{z-a}+\frac{a_{-2}}{(z-a)^2}+\cdots \quad (3)$$

حيث:

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{c}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz \qquad : n=0,\pm1,\pm2,\pm3,\dots \quad (4)$$

تسمى هذة الصيغة بنظرية لورانت و(1) او(3) مع المعاملات (2)و(4) تسمى بمتسلسلة لورانت أو مفكوك لورانت .

(3-3) النقاط الشاذة[1]:

تسمى النقطة z_0نقطة شاذة (singular point)للدالة ذات المتغير المركب fإذاكانت f ليست تحليلية عندها.

(3−3−1)أنواع النقاط الشاذة:

(i)النقطة الشاذة المعزولة:

تسمى النقطة z_0نقطة شاذة معزولة (Isolated) للدالة fإذا كانت f ليست تحليلية عند z_0 ولكن كل جوار للنقطة z_0يحتوي على الأقل نقطة واحدة تكون f عندها تحليلية فمثلاً الدالة$f(z)=\frac{1}{1-z}$ تحليلية لكل $z\neq 1$ ولكنها غير تحليلية عند $z=1$ وعلى ذلك فان $z=1$ النقطة هي نقطة شاذة معزولة للدالة f .بمعنى آخر أنه يمكن إيجاد$0<\delta$ بحيث أن الدائرة $0<|z-z_0|$ لا تحتوي على نقاط شاذة غير z_0.

(ii)النقطة الشاذة القابلة للإزالة:

لتكن الدالة f نقطة شاذة عند z_0 ولها تمثيل عند متسلسلة لورانت:

[1]التحليل المركب (مرجع سابق) ص209

$$f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n(z-z_0)^n \quad ,0<|z-z_0|<R \;\; (5)$$

وكانت $n=-1,-2,-3,\dots$

فإنه يكون للدالة fنقطة شاذة قابلة للإزالة (removable) عند z_0 بإستخدام النظرية التالية يمكن إثبات ذلك :

نظرية نصف قطر التقارب لمتسلسلة القوى :

$$a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+\cdots=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,(z-z_0)$$

يوجد عدد حقيقي R بحيث $0\le R\le+\infty$ فإنه يكون نصف قطر التقارب المتسلسلة بحيث $S(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\,(z-z_0)$ تتقارب لكل $|z-z_0|>R$وأن المتسلسلة تتباعد عندما $|z-z_0|<R$ وقيمة R تعطى من المعادلة $(\infty=\frac{1}{+0})$ $R=\frac{1}{L}$حيث Lيمكن الحصول عليه من:

إختبار النسبة حيث :

$$L=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|}$$

أو

إختبار الجذر النوني (كوشي):

$$L=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{|a_n|}$$

أو

إختبار "كوشي–هادامارد":

$$L=\lim_{n\to\infty}sup\sqrt[n]{|a_n|}$$

بإستخدام النظرية فان متسلسلة القوى في (5) تعرف دالة تحليلية في القرص $|z-z_0|<R$ وإذا إستخدمنا هذه المتسلسلة لتعريف $f(z_0)=a_0$ فان f تكون تحليلية عند z_0وأن النقطة الشاذة قد أزيلت ،فمثلا الدالة $f(z)=\frac{sinz}{z}$ لها نقطة شاذة عند z_oويكون للدالة متسلسلة لورانت على الصورة:

$$f(z)=\frac{sinz}{z}=\frac{1}{z}\left(z-\frac{z^3}{3!}+\frac{z^5}{5!}-\cdots\right)$$

$$f(z)=1-\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}-\cdots$$

فإذا عرفنا $f(0)=1$ فإن f تكون تحليلية عند $z_0=0$ وبذلك تمت إزالة النقطة الشاذة $z=0$ وتكون الدالة تحليلية لجميع قيم z.

(iii) النقطة الشاذة الاساسية:

إذا كان $a_n \neq 0$ لعدد لا نهائي من الأعداد الصحيحة السالبة فانة يكون للدالة f نقطة شاذة أساسية (Essential) عند z_0، بمعنى آخر إذا كانت $f(z)$ وحيدة القيمة فتسمى أي نقطة شاذة وليست قطباًأو نقطة شاذة قابلة للرفع بنقطة أساسية إذا كانت نقطة شاذة للدالة فإن الجذر الرئيسي لمتسلسلة لورانت يكون عدد لا نهائي من الحدود .

(iv) الاقطاب:

إذا كانت $f(z)$ لها الصورة (3)والتي فيها الجزء الرئيسي له فقط عدد محدود من الحدود ويعطى بالاتي:

$$\frac{a_{-1}}{z-a}+\frac{a_{-2}}{(z-a)^2}+\cdots+\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}$$

حيث $a_{-n} \neq 0$ فإن $z=a$ يسمى قطباً من الرتبة n وإذا كان $n=1$ فإنه يسمى قطباً بسيطاً.

(2–3–3) تعريف:

تسمى الدالة التحليلية في المنطقة G بإستثناء اقطابها بالدالة الميرومورفية إذا كان كل من $f(z)$ و $g(z)$ تحليلية في لا يساوي الصفر ، فإن النقاط الشاذة للكسر $\frac{f(z)}{g(z)}$ هي نفسها أصفار $g(z)$ وتكون اقطاباً عندما تكون $f(z)$ لا تساوي الصفر أو رتبة أصفارها أقل من رتبة أصفار الدالة $g(z)$. وإلا فإنها تكون نقاطاً شاذة قابلة للإزالة .

بإيجاد مفكوك $\frac{f(z)}{g(z)}$ ،بإستخدام الإتصال عند النقاط الشاذة القابلة للإزالة ،نحصل على دالة ميرومورفية في G.

(4-3)نظرية الباقي[1]:

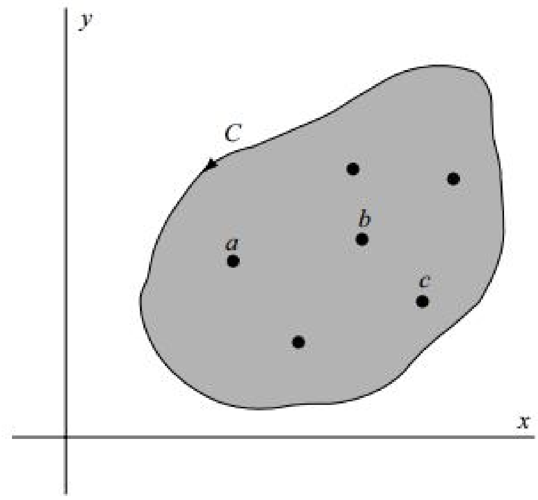
إذا كانت الدالة $f(z)$ دالة تحليليةفي كل مكان داخل وعلى المنحنى C مقفل وبسيط ما عدا عند النقطة $z=a$ الذى هو قطب من الرتبة n النظرية التالية هي الصياغة الدقيقة لحقيقة أن قيمة تكامل الدالة F حول C يساوي $2\pi i$ مضروباً في مجموع البواقي المناظرة لمجموع هذه النقط الشاذة .

رياضيا :

$$\int_C f(z)dz = 2\pi i(a_{-1}+b_{-1}+c_{-1}+\cdots)$$

[1] الدوال المركبة (مرجع سابق) ص265

حيث أن تكامل $f(z)$حول المنحنى C يكون مساوياً$2\pi i$ من المرات لمجموع المتبقيات $f(z)$ عند النقاط الشاذة التي يحيطها المنحنى C .



الإثبات[1]:

نفرض أن a نقطة منفردة للدالة $f(z)$ واقعة في المنطقة الداخلية للمنحنى المغلق البسيط C فإنه يوجد متسلسلة لورانت حول a تمثل الدالة f بحيث:

$$f(z)=\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}+\frac{a_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}}+\cdots+a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+..$$

حيث: $a_{-n}\neq 0$

وبإيجاد قيمة التكامل:

$$\oint_c f(z)dz=\oint_c \frac{na_{-}}{(z-a)^n}dz$$
$$+\oint_c \frac{a_{-n+1}}{(z-a)^{n-1}}dz+\cdots+\oint_c a_0+a_1(z-z_0)+a_2(z-z_0)^2+..$$

بما أن القوى موجبة بجعل الدالة تحليلية على المسار C فإنه من نظرية كوشي جورسات فإن قيمة التكامل تساوي صفر لكل القوى الموجبة وكذلك القوى السالبة فإنه (من نتائج كوشي التكاملية) أن التكامل يساوي صفر ويصبح:

$$\int_c f(z)dz=\int_c \frac{a_{-1}}{z-a}dz$$

[1] التفاضل والتكامل المتقدم ،سلسلة شوم ، تأليف مواري شبيجل ترجمة دكتور محمد السمري ، الدار الدولية ،الطبعة الثامنة 2008 ، ص 460

وبتطبيق كوشي التكاملية :

$$\int_c f(z)dz = 2\pi i(a_{-1})$$

المعامل a_{-1} هو الباقي الوحيد في كل المتسلسلة لذلك سميت بنطرية الباقي ، وفي حالة وجود قطب من الرتبة n عند $z = a$

$$a_{-1} = \frac{1}{(n-1)!} \quad \lim_{z \to a} \frac{d^{n-1}}{dz^{n-1}}[(z-a)^n f(z)]$$

وبصورة عامة

إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية على وداخل المسار C بإستثناء عددمحدود من النقاط الشاذة وليكن a, b, cوالتي لها البواقي c_{-1} و b_{-1} و a_{-1} على الترتيب فإن :

$$\int_c f(z)dz = 2\pi i(a_{-1} + b_{-1} + c_{-1})$$

(5-3) حساب المتبقيات:

يكون حساب مفكوك متسلسلة لورانت هي عملية مضنية وحيث أن المتبقي عند a_{-1} يحتوي على معامل في مفكوك لورانت فإننا نبحث طريقة لحساب المتبقي من بعض المعلومات حول طبيعة المتبقي عند z_0.[1]

لكي نحصل على متبقي الدالة $f(z)$ عند $z = a$ فإنه يجب أن نحصل على مفكوك لورانت للدالة حول $z = a$ في حالة $z = a$ قطباً من الرتبة kتوجد صيغة بسيطة للعامل a_{-1} تعطى ب[2]:

$$a_{-1} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}[(z-a)^k f(z)] \qquad (6)$$

لبرهان أن متبقي الدالة عند يعطى (6) :

إذا كان للدالة $f(z)$قطب من الرتبة m فان متسلسلة لورانت للدالة $f(z)$ تكون

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \frac{a_{-n+1}}{(z-a)^{m-1}} + \cdots + a_0 + a_1(z-z_0) + a_2(z-z_0)^2 + .. (7)$$

بضرب طرفي المعادلة (7) في $(z-a)^m$ ينتج:

$$(z-a)^m f(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{m-1} + a_0(z-a)^m + \cdots \qquad (8)$$

[1] التحليل المركب (مرجع سابق) ص227

[2] الدوال المركبة (مرجع سابق) ص270

بتفاضل طرفي المعادلة (8) $m-1$ من المرات بالنسبة الى z فنحصل على :

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}[(z-a)^m f(z)]$$

$$(m-1)!\,a_{-1}+m(m-1)\dots 2.1.\,a_0(z-a)+\cdots$$

وعلى ذلك فبجعل $z\to a$ ينتج:

$$\lim_{z\to a}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}[(z-a)^k f(z)]=(m-1)!\,a_{-1}$$

(3-6) بعض النظريات المهمة:

(3-6-1) نظرية(1)[1]:

إذا كانت z_0 قطباً بسيطاً للدالة f فإن:

$$Res(f,z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

البرهان :

بما أن z_0 قطب بسيط فإن متسلسلة لورانت التي تمثل الدالة f حول z_0 هي:

$$f(z)=\sum_{a=-1^n}^{\infty}\propto(z-z_0)^n$$

وبضرب الطرفين بالمقدار $(z-z_0)$ نجد أن :

$$(z-z_0)f(z)=\sum_{a=-1^n}^{\infty}\propto(z-z_0)^{n+1}$$

وبإيجاد النهاية للطرفين عندما تقترب z من z_0 ينتج أن :

$$\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)=\alpha_{-1}$$

وحسب التعريف فإن :

$$Res(f,z_0)=\lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z)$$

[1] مبادئ التحليل المركب (مرجع سابق) ص333

(2-6-3) نظرية(2):

فايرستراس – كاسورتي[1] (Weierstrass -Casorati theorem) :

تقترب دالة تحليلية من أي قيمة معطاة قرباً كافياً في داخل أي جوار δ–لنقطة شاذة فعلية .

البرهان :

إذا كانت النظرية غير صحيحة فبالإمكان إيجاد عدد مركب A ,$\delta > 0$ حيث :

$|f(z) - A| > \delta$ في كل جوار $0 < |z - z_0| < \epsilon$ للنقطة الشاذة الفعلية z_0 . وبالتالي فإن :

$$\left|\frac{f(z) - A}{z - z_0}\right| > \frac{\delta}{|z - z_0|} \to \infty$$

عندما $z \to z_0$

يؤدي هذا الي أن :

$$g(z) = \left|\frac{f(z) - A}{z - z_0}\right|$$

لها قطب عند z_0 . وبالتالي فإن $g(z)$ ميروفورفية في $|z - z_0| < \epsilon$ كما تكون أيضاً:

$$f(z) = A + (z - z_0)g(z)$$

ميروفورفية وهذا يعارض الفرض من أن z_0 نقطة شاذة فعلية .

[1] التحليل المركب وتطبيقاته (مرجع سابق) ص 180

الفصل الرابع

تطبيقات نظريتي كوشي التكاملية والباقي

(4–1) المقدمة:

نتناول في هذا الفصل أنواعاً مختلفة من التطبيقات علي نظريتي كوشي التكاملية والباقي سيكون دراستنا وصفية وليست تحليلية لكثرة التطبيقات وتماشياً مع الهدف الذي وضع من أجله البحث وهو كونه بحثاً رياضياً. لذلك سنذكر نوع التطبيق ومثالاً عليه موضحاً بالرسم ما أمكن [1].

نتعرض أيضاً في هذا الفصل للمتسلسلات التي تكون حدودها من أعداد مركبة وخصوصاً المتسلسلات التي تُبرهن بواسطة نظرية كوشي مثل (متسلسلة تايلور_ومايكلورين_لورانت) وبعض التطبيقات عليها للتوضيح .

وبعدها نتحدث عن (سريان الحرارة _ مجال الكهرباء الساكنة) التي فرضت بانها ذات بعدين وغير دورانية داخل المنطقةG ولا تحتوي علي منبع أو مصب . نعالج في هذا البند هذه المسائلالتي تحتوي علي منابعودوامات في المنطقةG.

واخيراً نقوم بعرض بعض تطبيقات الباقي مثل (التكاملات المعتله الكسرية _التكاملات المثلثية) .

(4–2) المتسلسلات [2](series):-

وهي تستخدم لدراسة تمثيل الدوال التحليلية علي صورة متسلسلات لتوضيح بعض النظريات التي تبين لنا وجود مثل هذا التمثيل .

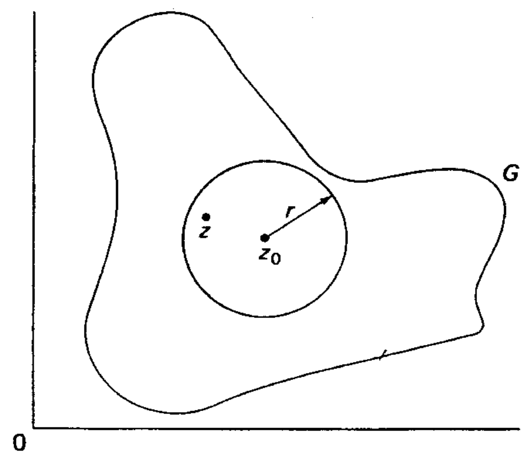
[1]إبراهيم عثمان البراهيم و د: أبوبكر الصديق بيومي ،دار النشر العلمي ،التحليل المركب وتطبيقاته ، تأليف : وليام ر.دريك ، ترجمة د: سعدون

[2]التحليل المركب وتطبيقاته (مرجع سابق)ص168

(1−2−4) متسلسلة تايلور(*Taylor Series*):

لتكن f دالة تحليلية لجميع نقاط داخلية الدائره c_0 مركزها z_0 ونصف قطرها r_0 عند أي نقطة z في داخلية c_0 فإن :

$$f(z) = f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + \frac{f''(z_0)}{2!}(z - z_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!} + \cdots$$



البرهان:

لبرهان هذه النظرية نعتبر اي نقطة ثابتة z في داخلية الدائره c_0 . إذا كان $|z - z_0| = r$ فإن:

$r < r_0$ إذا كانت sأي نقطة على الدائرةc_1 مركزها z_0 ونصف قطر r_1حيث :

$r < r_1 < r_0$ فإن $|(z - z_0)| = r$ حيث أن z نقطة في داخلية c_1 و أن f تحليلية لجميع نقاط الدائرةc_1 وداخليتها فإن يمكننا إستخدام صيغة تكامل كوشي :

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)dz}{s - z}$$

حيث c_1 في الإتجاه الموجب

$$\frac{1}{s-z}=\frac{1}{(s-z_0)-(z-z_0)}=\left(\frac{1}{z-z_0}\right)\frac{-1}{\left(1-\frac{s-z_0}{z-z_0}\right)}$$

$$\frac{1}{s-z}=\left(\frac{1}{z-z_0}\right)\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{s-z_0}{z-z_0}\right)^n$$

ومنها نحصل على :

$$\frac{1}{s-z}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(s-z_0)^n}{(z-z_0)^{n+1}}$$

وعليه فإنه :

$$\frac{f(s)}{s-z}=\frac{f(s)}{s-z_0}+\frac{f(s)}{(s-z_0)^2}(z-z_0)+\ \ldots\ldots\ldots\ldots.+$$

$$\frac{f(s)}{(z-z_0)^n}(z-sz_0)^{n-1}+(z-z_0)^n\,(\frac{f(s)}{(z-z)(z-z_0)^n}$$

نكامل كل حد من هذه الحدود حول c_1 موجها في الإتجاه المضاد لعقارب الساعة ،ونقسم كل المعادلة علي $2\pi i$بعد التكامل ينتج :

$$\frac{1}{2\pi i}\int\frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}}ds=\frac{1}{n!}f^n(z_0)(n=1,2,3,\ldots\ldots..)$$

$$\mathrm{f(z)}=\mathrm{f}(z_0)+f'(z_0)(z-z_0)+\cdots+\frac{f^{(n-1)}}{(n-1)!}(z-z_0)^{n-1}+R_n(z)$$

حيث أن :

$$R_n(z)=\frac{(z-z_0)^n}{2\pi!}\int_c\ \frac{f(s)ds}{(s-z)(s-z_0)^n}$$

حيث :

$$|s-z| = r_1 \qquad , \qquad |z-z_o| = r$$

$$|s-z| \geq |z-z_o| - |z-z_0| = r_1 r$$

وإذا أخذنا M لتكون القيمة العظمى للدالة f(z) علي C فإن الصيغة:

$$|R_n(z)| \leq \frac{r^n}{2\pi}\frac{M2\pi r_1}{(r_1-r)} = \frac{Mr}{(r_1-r)}\left(\frac{r}{r_1}\right)^n$$

وبمعني هذا أنه إذا كانت f تحليلية في داخلية دائرة مركزها z_o ونصف قطرها r_0 فإن $f(z)$ يمكن تمثيلها بمتسلسلة تايلور على الصورة:

$$\boxed{f(z) = f(\mathrm{z}_0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^n(\mathrm{z}_0)}{n!}(z-\mathrm{z}_0)^n}$$

توجد حالة خاصة لمتسلسلة تايلور فيها فنحصل علي متسلسلة ماكلورين(Maclurin):

$$\boxed{F(z) = f(0) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^n(0)}{n!}z^n}$$

تطبيق 1 :

أثبت أن :

$$\frac{1}{1+z} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^n$$

عندما $|z| < 1$

بوضع z^2 بدلاً من z في هذاالمفكوك فنحصل على

$$\frac{1}{1+z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n}$$

$$\frac{1}{1-c} = 1 + c + c^2 + \cdots + c^n + \cdots$$

عندما $z \neq 0$ $\qquad f(z) = z^{-1}$

فنحصل على :

$$f^n(z) = (-1)^n n!\, z^{-n-1}$$

نجد أن :

$$f^n(z) = (-1)^n n!$$

ومنها نوجد المتسلسة

تطبيق 2 :

جد مفكوك الدالة :

$$f(z) = \frac{1+2z}{z^2+z^3} = \frac{1}{z^2}\left(2 - \frac{1}{1+z}\right)$$

$$\frac{1+2z}{z^2+z^3} = \frac{1}{z^2}(2 - 1 + z - z^2 + z^3 - \cdots)$$

$$= \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} - 1 + z - z^2 + z^3 - \cdots$$

(2‒2‒4)متسلسلة لورانت(Laurent-series) :

إذا كانت fدالة تحليلية على كلc_1, c_2وعند كل نقطة من النقاط داخلية المنطقة الحلقية بين هاتين الدائرتين فإن الدالة $f(z)$يكون لها عند كل نقطة zمن نقاط هذة المنطقة تمثل على صورة المفكوك الاتي

$$\boxed{f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{{(z - z_0)}^n}}$$

حيث:

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_1} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}}\,ds \quad n = (0,1,2,3,\dots)$$

$$b_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{c_2} \frac{f(s)}{(s-z_0)^{n+1}}\,ds \qquad n = (0,1,2,3,\dots)$$

التكاملين يتجهان عكس عقارب الساعة

تطبيق 3 :

جد متسلسلة لورانت للدالة $f(z)$لجميع نقاط النطاق$2 < |z|$ في هذا النطاق$1 > \left|\frac{1}{z}\right|$و$> \left|\frac{2}{z}\right|$ 1وعلية يكون:

$$f(z) = \frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{1}{z}} - \frac{1}{1-\frac{2}{z}}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1-2^n}{z^{2n+1}}$$

تطبيق 4 :

اوجد الحدود الأولى من متسلسلة لورانت :

$$h(z) = \frac{1}{z^2 sinhz} = \frac{1}{z^3}\left(\frac{1}{1+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots.}\right)$$

لجميع نقاط النطاق $0 < |z| < \pi$

لاحظ أن مقام الكسر الأخير هنا هو متسلسلة قوى تقاربية مجموعها $z^{-1}sinhz$ عندما والوحدة عندما . ومن ثم فإن مجموع هذة المتسلسلة لا يساوي صفراًاي عند أي نقطة من نقاط هذا النطاق وتكونمتسلسلة القوى الممثلة لهذا الكسر و التي يمكن الحصول عليها بالقسمة على الصورة

$$\frac{1}{1+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\cdots} = \frac{1}{3!}z^2 + \left[\frac{1}{(3!)^2} - \frac{1}{5!}\right]z^4 + \cdots$$

$$|z| < \pi$$

وبالتالي فإن الحدود الأولى من المتسلسلة يمكن الحصول عليها مباشرة

$$\frac{1}{z^3 sinhz} = \frac{1}{z^3} - \left(\frac{1}{6z}\right)\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{7}{360}z + \cdots$$

(3-4)نظرية شفارتز –كريستوفل(*Schwartz-Christoffel Formula*)[1]:

كل الدوال التي تصور نصف المستوى العلوي تصويراً حافظاً للزوايا الى مضلع(polygon)في ذي الزوايا الخارجية $k = 1,2,3, \dots n$ لها الصورة .

$$f(z) = A + B\int_0^z (x-x_1)^{a_1}(x-x_2)^{a_2} \dots (x-x_n)^{a_n} dz$$

حيث النقاط$x_1 < x_2 < x_3 < \cdots < x_n$ حقيقية A, B ثابتان مركبان .

تسمى الدالة المعطى بوساطة المعادلة التكاملية في هذه النظرية "بصيغة شفارتز–كريستوفل" للمضلع المعطى .

"الزوايا الخارجية" عند الرأس $w_k = f(z)$للمضلع هي πa_kوهي المطلوبة التي تجعل إتجاه المتجه من w_k إلى w_{k+1} ينطبق مع إتجاه المتجه من w_{k-1} إلى w_kوبالنظر إلى الشكل ،نرى أن الزاوية الخارجية قد قيست بالدوران من المضلع التالي للمضلع إلى الخط المستقيم امداد الضلع السابق للمضلع . لا حظ عموماً أن $1 < a_k < 1$ ، حيث $a_k > 0$ عندما يكون الدوران عكس عقارب الساعة و $a_k < 0$ عندما يكون الدوران بإتجاه عقارب الساعة . أكثر من ذلك ، إذا ما صنعنا دائرة عكس باتجاه عقارب الساعة حول المضلع فسوف نلف دورة كاملة حاصلين على :

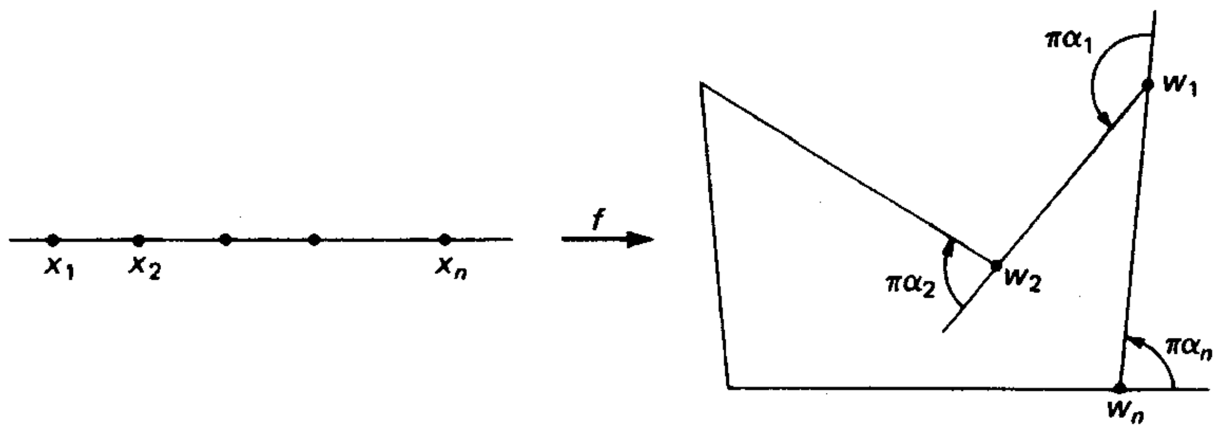
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = -2\pi \qquad \text{أو} \sum_{k=1}^{n} a_k = -2$$

ويكون التحكم بالثابتين Bو A بوساطة الإنسحاب ، والتكبير ، ودوران المضلع ، والمقياس (scale) وإتجاه المضلع في المستوى w – ، والنقاط x_k التي تصورإلى الرؤوس w_k للمضلع . يسمح لنا التحويل الكسري الخطي لنصف المستوى العلوي إلى نفسه بتصوير ثلاث من النقاط x_k . معتمدين على المضلع ، ويفيدنا الإختيار المناسب لمواضع هذه النقاط في الحصول على صورة كاملة لحل التكامل

[1]التحليل المركب وتطبيقاته (مرجع سابق) ص272

. ومواضع النقاط المتبقية x_k يعتمد على شكل المضلع ، ومن الصعوبة بمكان تكوينه إلا في الحالات التي عندها يكون كثير الأضلاع منتظماً .

وفي العادة ، يفضل إختيار النقط $x_n = \infty$ ، فهذا الإختيار يحذف الحدود المحتوية على صيغة شفارتز– كيستوفيل .



تطبيق 5 :

صور نصف المستوى العلوي تصوراً حافظاً للزوايا الى الشريحة $y > 0, |x| < 1$

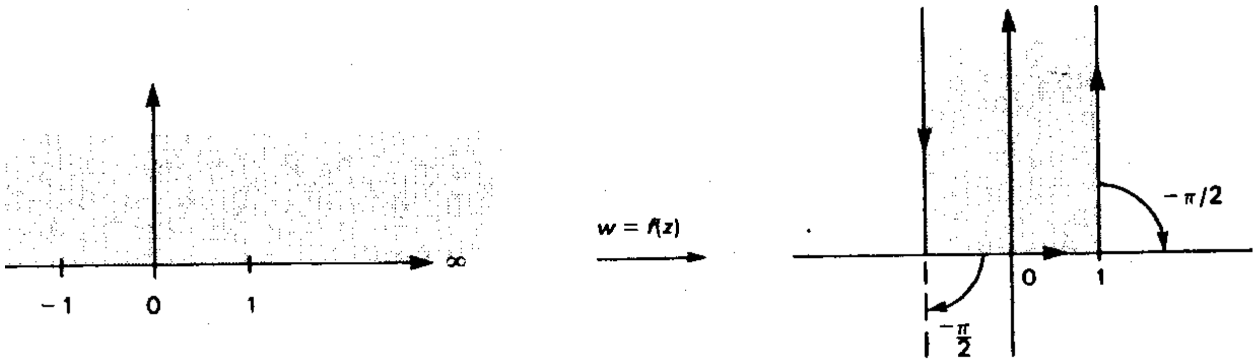
أختر $-1, 1, \infty$لتكون النقاط التي تصور الى الرؤوس $-1, 1, \infty$ للشريحة المرسومة في m

بوساطة صيغة شفارتز –كريستوفل نحصل على :

$$w = A + B\int_0^z (z+1)^{\frac{-1}{2}}(z-1)^{\frac{-1}{2}}dz$$

$$w = A + B\int_0^z \frac{dz}{\sqrt{z^2-1}}$$

$$w = A + \frac{B}{i}\int \quad \frac{dz}{\sqrt{z^2}-1} A + \frac{B}{i}\sin^{-1} z$$



و بما أن $w(\pm 1) = \pm 1$ فإننا نحصل على :

$$A - \frac{iB\pi}{2} = 1 \qquad , A + \frac{iB\pi}{2} = -1$$

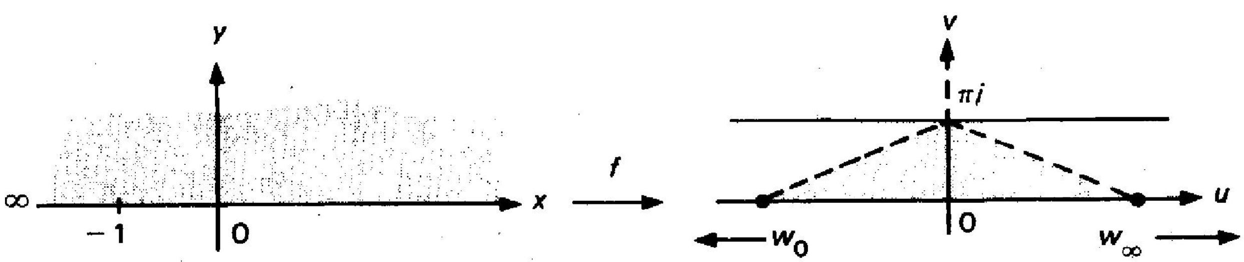
إذن :

وهكذا تصبح $w = \left(\frac{2}{\pi}\right) \sin^{-1} z$

تطبيق 6 :

صور نصف المستوى العلوي إلى الشريحة اللانهائية $0 < r < \pi$

إعتبر المثلث المظل بالشكل ادناه إفترض أن النقاط $0, -1, \infty$ من المستوى z صورته إلى النقاط $w_0\ , \pi i\ , w_\infty$ المستوى $w-$.وإذه جعلنا تقترب من ∞ خلال القيم الحقيقية الموجبة فإننا نحصل في النهاية على الشريحة اللانهائية $0 < r < \pi$



المستوى - z المستوى - w

تؤول الزوايا الخارجية عند $w_0\ , \pi i\ , w_\infty$ إلى $\pi, 0, \pi-$ فتصبح صيغة شفارتز – كرستوفل في الحالة النهائية هي :

$$w = A + B\int_0^Z \frac{dz}{z} = A + B\log z$$

ونختار $z = 1$ كنهاية دنيا للتكامل $\log 0 = \infty,$ نجد أن

$$\pi i = w(-1) = A + Blog\,(-1) = A + B\pi i$$

وهكذا بوضع $A = 0$ و $B = 1$ فنحصل على التحويل المنشود

$$w = \log z$$

تطبيق 7:

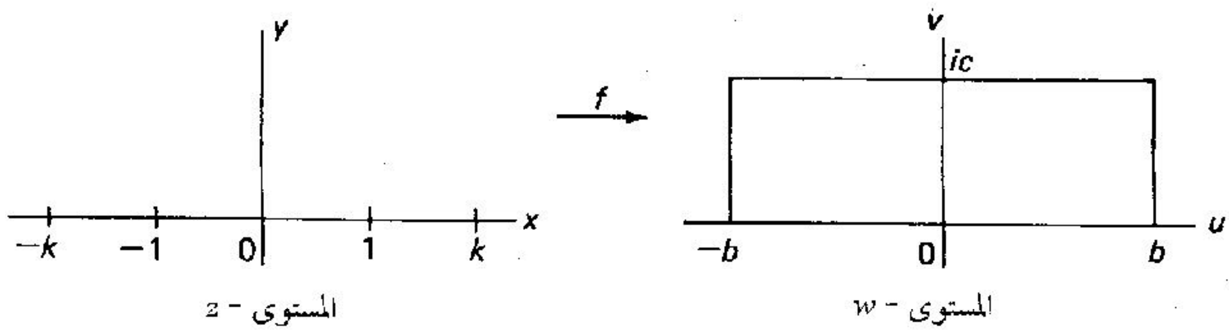
صور نصف المستوى العلوي إلى داخل مستطيل

هذا التحويل الخطي يعطى بوساطة

$$f(z) = \int_0^z \frac{dz}{\sqrt{(1-z^2)(k^2-z^2)}}$$

ويتضح من هذه الصيغة أن رؤوس المستطيل متماثلة بالنسبة الى المحور التخيلي

$$b = \frac{1}{k}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(k'-k^{-2}x)}} = \frac{1}{k}f\left(\frac{\pi}{2}, \frac{1}{k}\right)$$



تكامل ناقص من النوع الأول

$$ic = \int_1^k \frac{dx}{\sqrt{(1-x^2)(k^2-x^2)}} = \frac{i}{k}\int_1^k \frac{dx}{\sqrt{(x^2-1)(1-k^2x^2)}}$$

(4-4) تطبيقات فيزيائية في الإنسياب الحراري والكهربية الساكنة[1]:

(Physical Application in Heat Flow and Electrostatics)

نطور في هذه البند النظرية الأساسية للإنسيابات الحرارية في بعدين في حالة الإتزان ، وكذلك الحقول الكهربائية الساكنة .

(1-4-4) الإنسياب الحراري(Heat flow) :

اذا كان الانسياب في الجسم الصلب ذا بعدين ، وكان الإنسياب الحراري في حالة إتزان. إفترض أنه لا توجد مصادر حرارية أو تصاريف في منطقة بسيطة الترابط G . بما أن نقطتيين يمكن أن يكون لهما درجات حرارة مختلفة , فإنه يوجد إنسياب للحرارة ،ومن الأجزاء الأكثر سخونة إلى الأكثر برودة .ومتجه الإنسياب الحراري $Q = Q(Z)$ يمكن أن يكتب كدالة مركبة متصلة . وتدفق الحرارى من داخل منحنى مغلق Y أملس جزئياً موجودة في G إلى الخارج يجب أن يحقق:

$$\oint_{y} Q_n ds = 0$$

وإلا على النقيض سوف تتغير درجة الحرارى الداخلية . وبما أن الحرارى تنساب من الأجزاء الساخنة الى الأجزاء الباردة ،فهي غير دورانية ، ولذا نحصل على :

$$\oint_{y} Q_n dz = 0$$

وهكذا ، بوساطة نظرية "موريرا" نرى أن $\bar{Q}$ دالة تحليلة في G .

إذن:

$$Q(z) = -k\overline{w(z)}$$

حيث k معامل الإتصال الحراري (thermal condutivity) وأن $w = u + iv$ هو الجهد المركب (complex potential) للحقل الحراري . ومن معادلتي كوشي – ريمان نجد أن $\overline{w'(z)} = u_x + iu_y = grad\, u(z)$ ، التدرج في u ، ولذا فإن $Q = -k\, grad\, u$ (قانون فوري) يؤدي إلي أن يكون الإنسياب الحراري عموديا على المنحنيات $u(z) =$

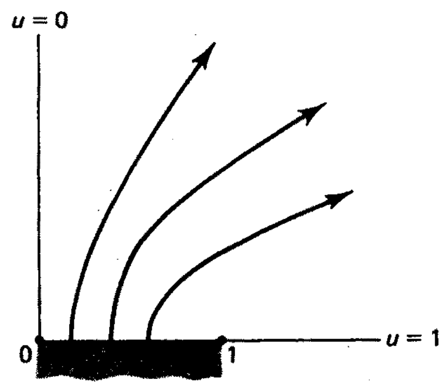
[1] التحليل المركب وتطبيقاته (مرجع سابق) ص281

وعليه تكون النقاط على هذه الخطوط المستقيمة لها حينئذ درجات حرارة متساوية.$constant$

،وعليه فإن المنحنيات $v(z) = constant$هي منحنبات تساوي الحرارى (isothermal) و $u(z) = constant$ هي درجة الحرارى .وتسمى المنحنيات $v(z) = constant$خطوط الإنسياب الحراري (stream lines) وهي عمودية على خطوط تساوي الحرارة والمشكلة المتكررة في الإنسياب الحراري في حالة الإتزان هي إنشاء منحنيات تساوي الحرارى في منطقة لها G درجات حرارة حدودية معطاه

تطبيق 8 :

أوجد منحنيات تساوي الحرارة الدقيقة G المكونة والمعزولة على إمتداد القطعة المستقيمة التي تربط $\alpha = 0$ بالنقطة $B = 1$,بدرجة حرارة -1° على الشعاع الواصل من α إلى Y و -1°على الشعاع الواصل من B إلى Y .



بماأن الزويتين الخارجيتين عند $1, 0$ هما $-\frac{\pi}{2}$ و $\frac{\pi}{2}$ على الترتيب فإن تحويل شفارتز –كويستوفل

$$z = 1 + \frac{i}{\pi}\int_{1}^{\varepsilon}\sqrt{\frac{\varepsilon+1}{\varepsilon-1}}\,d\varepsilon = 1 + \frac{i}{\pi}\left[\sqrt{\varepsilon^2} + cosh^{-1}\right]$$

وبصورة نصف المستوي العلوي فوق G مع تصوير $-1, 1, \infty \rightarrow \alpha, B, Y$.

ولكن $\varepsilon = \sin\frac{\pi w}{2}$ تصور الشريحة إلى نصف المستوى العلوي لذا فإن

$$z = 1 + \pi^{-1}\left[icosh^{-1}\left(\sin\frac{\pi w}{2}\right) - \cos\frac{\pi w}{2}\right]$$

تصور الشريحة العلوية الى G .اذن معكوسها $w = w(z)$ هو الجهد المركب .فإن منحنيات تساوي الحرارى سوف تصبح صورة الدالة $z = z(w)$ للخطوط الرأسية u حيث $u = constant$. وبتبسيط الحد الأول في القوس نجد أن

$$z = \frac{w+1}{2} - \frac{1}{\pi}\cos\frac{\pi w}{2}$$

ويؤدي إلى أن خطوط تساوي الحرارة قطوع زائدة .

(2-4-4) الكهربية الساكنة (Electrostatics) :

اعتبر حقل مستوى كهربية ساكنة $\boldsymbol{E(z)}$ ينشأ من التجاذب أو التنافر لنظام إختياري من الشحنات (ينابيع ومصاب) في المستوى . في منطقة بسيطة الترابط $\boldsymbol{G}$ مكملة لهذه الشحنات ,فإنه لا توجد شحنات داخل منحنى مغلق أملس جزئيا في $\boldsymbol{G}$, لذا فإن

$$\int_{Y} E_n ds = 0$$

بوساطة قانون جاوس ***(Gauss Low)*** . نعرف إلتفاف الحقل ***(The circulation)*** بأنه الشغل المبذول بوساطة الحقل عندما تؤخذ بالكامل وحدة الشحنة الموجبة حول المنحنى $\boldsymbol{Y}$.ولعدم وجود مطلب لإنفاق الطاقة لإبقاء حقل كهربية ساكنة نحصل على :

$$\int_{\boldsymbol{y}} \boldsymbol{E_n\, ds = 0}$$

إذن $\boldsymbol{E}$ تسمى جهد الحقل ***(Potential field)*** ، $\frac{\bar{E}}{i}$ تحليلية ، والدالة الأصلية لها هي $\boldsymbol{iw} = \boldsymbol{-v + iu}$ وتسمى الجهد المركب للحقل ***(complex potential)*** ، $\boldsymbol{-v}$ هي دالة القوى ***(force function)*** ، $\boldsymbol{u}$ دالة الجهد ***(potential field)*** . من معادلتي كوشي – ريمان نجد أن

$$\boldsymbol{E = -\overline{w'(z)} = -\left(u_x + v_y\right) = -gradu}$$

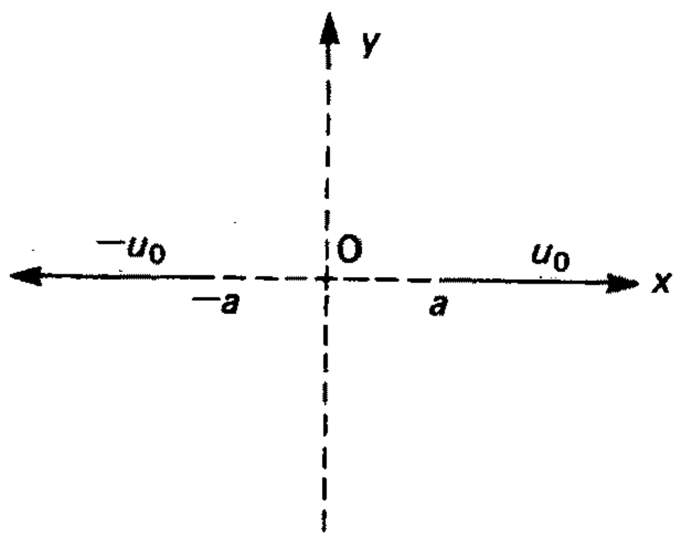
المنحنيات $\boldsymbol{v(z) = constant}$ هي القوى $\boldsymbol{u(z) = constant}$ هي خطوط تساوي الجهد $\boldsymbol{equipotialunes}$.

جدول المتشابهات في إنسياب الموائع ،والإنسياب الحراري ، والحقول الكهربية الساكنة :

	إنسياب الموائع	الإنسياب الحراري	الكهربية الساكنة
الجهد المركب	$w(z) = u + iv$	$w(z) = u + iv$	$iw(z) = -v + iu$
الحقل المتجه	$V = \overline{w'(z)}$ $= grad\, u$	$Q = -k\overline{w'(z)}$ $= -kgrad\, u$	$E = \overline{w'(z)}$ $= -grad\, u$
u	دالة الجهد	درجة الحرارة	دالة الجهد
$u(z) = constant$	خطوط تساوي الجهد	خطوط تساوي الحرارة	خطوط تساوي الجهد
v	دالة الإنسياب	دالة الإنسياب	v تمثل دالة القوة
$v(z) = constant$	خطوط الإنسياب	خطوط الإنسياب	خطوط القوة

تطبيق 9 :

يتألف مكثف من لوحين لهما صورتا أنصاف مستويات واقعة في مستوى واحد، وله حواف متوازية متباعدة بمسافة $2a$ وفرق جهد $2u_0$. وأي مقطع عمودي على المستويات يعطى حقل مستوى له قطعان كما في الشكل . أوجد خطوط تساوي الجهد لهذا الحقل :



تصور النطاق فوق الشريحة . وعليه تكون خطوط تساوي الجهد هي القطوع الزائدية

(4-5) تطبيقات على نظرية الباقي [1]:

(4-5-1) التكاملات المعتلة للدوال الكسرية :

لنظرية المتبقيات أهمية خاصة في تقدير بعض التكاملات المعتلة .لتكون $f(x)$دالة متصلة لمتغير حقيقي x على الفترة $0 \leq x < \infty$ ومن حساب التفاضل يعرف التكامل المعتل للدالة fعلى$[0,\infty]$ بأنه :

$$\int_{0}^{\infty} f(x)dx = \lim_{b\to\infty}\int_{0}^{b} f(x)dx \quad \to (1)$$

شريطة وجود النهاية ، إذا كانت f معرفة لجميع قيم x فإن تكامل الدالة f على $(-\infty\,,\infty)$ يعرف بالأتي :

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{a\to\infty}\int_{a}^{0} f(x)dx + \lim_{b\to\infty} f(x)dx \quad \to (2)$$

شريطة وجود النهايتين ، وإذا كان التكامل في (2) موجوداً فإنه يمكن الحصول على قيمته بنهاية واحدة كما يلي:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)dx \; (3)$$

حيث أنه في بعض الأحيان يكون التكامل في (3) موجود بالرغم من عدم وجود التعريف (2) فمثلاً :

$$\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} xdx = \lim_{R\to\infty}\left[\frac{R^2}{2} - \frac{(-R)^2}{2}\right] = 0$$

ولكن تكامل الدالة $f(x) = x$ على $(-\infty,\infty)$ غير موجود , وعلى ذلك فإنه يمكن إستخدام المعادلة(3)لإمداد تعريف التكامل المعتل الى التعريف التالي :

[1] التحليل المركب (مرجع سابق) ص231

لتكن $f(x)$ دالة متصلة ذات متغير حقيقي x،فإن قيمة كوشي الأساسية (Cauchy Principal Value) تكتب اختصار $P.V.$ للتكامل (2) تكون معرفة كالأتي :

شريطة وجود النهاية وعلى ذلك فإن :

$$P.V.\int_{-\infty}^{\infty} x dx = 0$$

نظرية1 :

لتكن $f(z) = \frac{P(Z)}{Q(Z)}$ حيث Q, P كثيرتا حدود من الدرجة n, m على الترتيب ،إذا كانت $p(x) \neq 0$ لكل قيم x، $n \geq m + 2$ فإن :

$$P.V.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{P(x)}{Q(x)} dx = 2\pi i \sum_{j=1}^{k} Res\left[\frac{P}{Q}, z_j\right] \quad \rightarrow (5)$$

حيث $z_1, z_2, \dots z_{k-1}, z_k$هي أقطاب الدالة$\frac{P}{Q}$التي تقع في نصف المستوى العلوي

تطبيق 10:

أثبت أن

$$P.V.\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)} = \frac{\pi}{6}$$

يمكن كتابة الدالة المكاملة على الصورة :

$$f(z) = \frac{1}{(z+i)(z-i)(z+2i)(z-2i)}$$

ومن ذلك نرى أن الدالة f لها اقطاب بسيطة عند $z_2 = 2i, \quad z_1 = i$ في نصف المستوى العلوي ، وبحسب المتبقيات نحصل على :

$$Res[f, i] = -\frac{i}{b} \quad , \qquad Res[f, 2i] = \frac{i}{12}$$

ومن نظرية السابقة نجد أن :

$$P.V.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{(x^2+1)(x^2+4)}=2\pi i\left[\frac{-i}{6}+\frac{i}{12}\right]=\frac{\pi}{6}$$

(2-5-4) تكامل الدوال المثلثية (Trigonometric Integrals):

يمكن حساب تكاملات الدوال المثلثية بإستخدام نظيرة المتبقي ، وهنا سوف نتعرض لدراسة تكاملات على الصورة :

$$\int_0^{2\pi} f(\cos\theta\,,\sin\theta)d\theta$$

حيث سنأخذ الكنتور C هو دائرة الوحدة $c: |z|=1$ اي أن

$$|f(z)|\le\frac{M}{R^k}$$

ونستخدم التمثيل البارامتيري :

$$C: z=\cos\theta+i\sin\theta\quad ,\qquad dz=-\sin\theta+i\cos\theta\, d\theta\,,\qquad 0\le\theta\le 2\pi$$

وبإستخدام $\frac{1}{z}=\cos\theta-i\sin\theta$ فنحصل على :

$$\cos\theta=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\qquad ,\ \sin\theta=\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\qquad ,\qquad d\theta=\frac{dz}{iz}$$

وعلى ذلك فيكون :

$$\int_0^{2\pi} f(\cos\theta,\ \sin\theta)\mathrm{d}\theta>\int_c f(z)dz$$

حيث :

$$f(z)=\frac{F\left[\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\ ,\frac{1}{2i}\left(z-\frac{1}{z}\right)\right]}{iz}$$

وبإفتراض أن f تحليلية على $|z|\le 1$ ما عدا النقاط $z_1,z_2,z_3,\dots z_n$ التي تقع داخل Cفإنه من نظرية المتبقي نجد أن :

$$\int_0^{2\pi} F(\cos\theta\ ,\sin\theta)d\theta=2\pi i\sum_{k=1}^{n} Res\,[f,z_k]$$

تطبيق 11:

اثبت أن :

$$f(z) = \frac{1}{z^6 + 1}$$

تكون الصورة المركبة للدالة f هي

$$f(z) = \frac{1}{iz[1 + \frac{3}{4}(z + z^{-1})^2]} = \frac{-i4z}{3z^4 + 10z^2 + 3}$$

وتكون النقاط الشاذة للدالة f هي أقطاب وهي اصفار المقام أى أن :

$$z^2 = -10 \pm \frac{\sqrt{100 - 36}}{6} = \frac{(-5 \pm 4)}{3}$$

وبالتالي النقاط الشاذة التي تقع داخل القيمة المطلقة $|z| = 1$ هي اقطاب بسيطة عند $z_1 = \frac{i}{\sqrt{3}}$, $z_2 = \frac{-i}{\sqrt{3}}$ وبإستخدام قاعدة لوبيتاليمكن حساب المتبقي عند كل منهما نجد أن :

$$Res[f, z_k] = \lim_{z \to z_k} \frac{-i4z(2z - z_k)}{12z^4 + 10z^2 + 3} = \frac{0}{0}$$

$$= \lim_{z \to z_k} \frac{-i4(2z - z_k)}{12z^3 + 20z}$$

$$\int_0^{2\pi} \frac{\cos 2\theta}{5 + 3\cos\theta} = \frac{\pi}{18}$$

حيث أن :

$${z_k}^2 = \frac{-1}{3}\ , \qquad \int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{3\cos\theta + 5} = \frac{\pi}{2}$$

$$Res[f, z_k] = \frac{-i}{3[\left(\frac{-1}{3}\right) + 5]} = -\frac{i}{4}$$

وعلى ذلك فإن :

$$P.V.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{x^4dx}{x^6+1}$$

(3–5–4) التكاملات المعتلة المحتوية على دوال مثلثية :

ليكن كل من P وQكثيرة حدود من درجة mوnعلى الترتيب $n \geq m+1$.فإذا كان $Q(x) \neq 0$لكل قيم xفإن :

$$P.V.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = \cos(x)\,dx \quad , \qquad P.V.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = \sin(x)\,dx$$

هما تكاملان معتلين تقاربين ،سوف نستخدم المتطابقتين :

$$\cos(\alpha x) = Re\ exP(i\alpha x) \text{ و} \sin(\alpha x) = Im\exp(i\alpha x) \qquad (1)$$

حيث αعدد حقيقي موجب .

نظرية2 :

ليكن كل P وQمن كثيرة حدود من درجة m وn على الترتيب$n \geq m+1$, $Q(x) \neq 0$ لجميع قيم x. إذا كان $\alpha > 0$

$$f(z) = \frac{\exp(i\alpha z)\,P(z)}{Q(x)} \qquad (1)$$

فإن :

$$P.V.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = \cos(\alpha x)\,dx = -2\pi\sum_{j=1}^{k} Im\ Res\left[f, z_j\right] (2)$$

$$P.V.\int_{-\infty}^{\infty}\frac{P(x)}{Q(x)} = s\,in(\alpha x)\,dx = 2\pi\sum_{j=1}^{k} Re\ Res\left[f, z_j\right] (3)$$

حيث $z_1, z_2, \dots, z_k$ هي أقطاب الدالة f والتي تقع في نصف المستوى العلوي $Re\ Res\left[f, z_j\right]$, $Im\ Res\left[f, z_j\right]$ هما الأجزاء الحقيقية والتخيلية للمتبقي $Res\left[f, z_j\right]$ على الترتيب .

نظرية 3 :

ليكن كل من Q , P كثيرة حدود من الدرجة n , m على الترتيب $n \geq m+2$. إذا كان $Q(x) \neq 0\ , x > 0$ وأن Q لها صفر من الرتبة الأولى على الاكثر عند نقطة الأصل وأن :

$$f(z) = \frac{z^{\alpha}\ P(x)}{Q(x)} \quad ; \quad 0 < \alpha < 1 \qquad (4)$$

فإن :

$$P.V. \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{p} P(x)}{Q(x)}\ dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2i\alpha\pi}} \sum_{j=1}^{k} Res\left[f, z_j\right]$$

حيث $z_1, z_2, \dots z_{k-1}, z_k$ هي أقطاب غير صفرية للكسر $\frac{P}{Q}$.

تطبيق 12 :

أثبت أن :

$$P.V \int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{x(x+1)} dx = \frac{\pi}{\sin\,(\alpha\pi)} \qquad 0 < \alpha < 1$$

الدالة $f(z) = \frac{z^{\alpha}}{z(z+1)}$ لها قطب غير صفري عند $z_j = -1$

وعلى ذلك باستخدام (4) نحصل على :

$$\int_{0}^{\infty} \frac{x^{\alpha}}{x(x+1)} dx = \frac{2\pi i}{1 - e^{2i\alpha\pi}} Res[f, -1]$$

$$= \frac{2\pi i}{1 - e^{2i\alpha\pi}} * \frac{e^{i\alpha\pi}}{-1} = \frac{2\pi i}{e^{i\alpha\pi} - e^{-i\alpha\pi}} = \frac{\pi}{\sin(\alpha\pi)}$$

تطبيق 13 :

أثبت أن:

$$P.V.\int_0^{\infty}\frac{lnx}{x^2+a^2}dx \;=\frac{\pi lna}{2a}\quad a>0$$

لدينا الدالة $f(z)=\frac{lnz}{z^2+a^2}$

ومسار التكامل Cيتكون من كل من القطعة المستقيمة$[-R,-r]$و $[r,R]$على المحور xمع أنصاف الدوائر العلوية $c_r: z=re^{i\theta},\qquad 0<\theta\le\pi$

من نظرية المتبقي يمكن ان نكتب :

$$\int_c f(z)dz \;=2\pi iRes[f,a_i]=\frac{\pi\ln a}{a}+i\frac{\pi^2}{2a}$$

حيث ان المتباينة :

$$|\int_0^{\pi}\frac{\ln a+i\theta}{R^2e^{2i\theta}+a^2}iRe^{i\theta}d\theta|\;\le\frac{R(\ln a+\pi)\pi}{R^2-a^2}$$

ويمكن اثبات باستخدام قاعدة اللوبيتال أن :

$$\lim_{R\to\infty}\int_{C_R} f(z)dz \;=0$$

وبالمثل :

$$\lim_{r\to 0}\int_{C_r} f(z)dz \;=0$$

ومن ذلك نرى أن:

$$P.V.[\int_{-\infty}^{0}\frac{\ln|x|+i\pi}{x^2+a^2}dx+\int_0^{\infty}\frac{\ln x}{x^2+a^2}dx]=\frac{\pi\ln a}{a}+i\frac{\pi^2}{2a}$$

وبمساواة الاجزاء الحقيقية في الطرفين نجد أن:

$$P.V.\int_0^{\infty}\frac{2\ln x}{x^2+a^2}\;=\frac{\pi\ln a}{a}$$

الفصل الخامس

النتائج والتوصيات

(5–1)النتائج :

من خلال البحثتوصل الدارسون إلي نتائج تتلخص في الآتي:

- يمكن القول ان نظرية كوشي ونتائجها حل خاص من نظرية الباقي لان نظرية كوشي تحل النقط غير الشاذة في المسار اما نظرية الباقي فهي تحل النقط الشاذة وغير الشاذة .
- من خلال الدراسة المفصلة لنظرية كوشي توصلنا الى ان هناك تطبيقات لها في العلوم الاخرى الهندسة والفيزياء .
- إيجاد مفكوك تايلور بإستخدام نظرية كوشي التكاملية .

(5–2)التوصيات:

من خلال البحث يوصي الدارسون بالآتي :

- الاهتمام بنظرية كوشي التكاملية وذلك بربطها بكل عمليات الرياضيات والتعمق فيها .
- نقترح ان يكون هناك مقررالتحليل المركب المتقدم يقوم بدراسة نظرية كوشي بتفصيل اكثر .
- من خلال دراستنا لنظرية الباقي نوصي بان يكون لها حيز اكبر في مقرر التحليل المركب وذلك لاهميتها وكثرة تطبيقاتها .

المصادر والمراجع

1. الدوال المركبة سلسلة شوم ، تأليف مواري شبيجل ،ترجمة أ.د.حسن مصطفى العويضي ،الدار الدولية للنشر والتوزيع ،1998 ،
2. التحليل المركب "دوال المتغير المركب،إعداد أ.د.حسن مصطفى العويضي ، مكتبة الرشد ،2006 .
3. المتغيرات المركبة وتطبيقات ،تشرشل ،براون ،فيرهي ،ترجمة :بديع توفيق ،إسماعيل امين ، الدار الدولية للنشر والتوزيع ،2005 .
4. التحليل المركب وتطبيقاته ،تأليف وليم ر.دريك ، ترجمة د: سعدون إبراهيم عثمان إبراهيم و د. أبو بكر الصديق بيومي ،جامعة الملك سعود ، النشر العلمي والمطابع.
5. التفاضل والتكامل حساب التكامل ، الجزء الثاني إعداد الأستاذ الدكتور حسن مصطفى العويضي،مكتبة الرشد الطبعة الأولى 2006.
6. مبادئ التحليل المركب تأليف الدكتور محمود كتكت ، دار الشروق للنشر والتوزيع والطباعة.
7. التفاضل والتكامل المتقدم ،سلسلة شوم ، تأليف مواري شبيجل ترجمة دكتور محمد السمري ، الدار الدولية ،الطبعة الثامنة 2008 .