بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة السودان للعلوم و التكنولوجيا

كلية التربية – قسم الرياضيات

بحث تكميلي لنيل درجة البكالوريوس

بعنـــــوان:

النهايات العظمى و الصغرى للدوال في متغير واحد و بعض تطبيقاتها

The maximum and minimum limits of functions in one variable and some of its applications

إعداد الطلاب:

سفانة حسن محمد عبدالوهاب
صفاء فتح الرحمن
عبدالقادر نور الدائم محمد نور الدائم
معتصم الطيب السبتي عبدالمجيد
يعقوب محمد سليمان عبدالله

إشراف الدكتور:

عبد القادر البشرى الضي

سبتمبر 2017 م

بسم الله الرحمن الرحيم

الآيـــــــة

قَالَ تَعَالَىٰ:

﴿ٱللَّهُ لَآ إِلَٰهَ إِلَّا هُوَ ٱلۡحَيُّ ٱلۡقَيُّومُۚ لَا تَأۡخُذُهُۥ سِنَةٞ وَلَا نَوۡمٞۚ لَّهُۥ مَا فِي ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَمَا فِي
ٱلۡأَرۡضِۗ مَن ذَا ٱلَّذِي يَشۡفَعُ عِندَهُۥٓ إِلَّا بِإِذۡنِهِۦۚ يَعۡلَمُ مَا بَيۡنَ أَيۡدِيهِمۡ وَمَا خَلۡفَهُمۡۖ وَلَا يُحِيطُونَ
بِشَيۡءٖ مِّنۡ عِلۡمِهِۦٓ إِلَّا بِمَا شَآءَۚ وَسِعَ كُرۡسِيُّهُ ٱلسَّمَٰوَٰتِ وَٱلۡأَرۡضَۖ وَلَا يَـُٔودُهُۥ حِفۡظُهُمَاۚ وَهُوَ ٱلۡعَلِيُّ
ٱلۡعَظِيمُ ٢٥٥ لَآ إِكۡرَاهَ فِي ٱلدِّينِۖ قَد تَّبَيَّنَ ٱلرُّشۡدُ مِنَ ٱلۡغَيِّۚ فَمَن يَكۡفُرۡ بِٱلطَّٰغُوتِ وَيُؤۡمِنۢ بِٱللَّهِ
فَقَدِ ٱسۡتَمۡسَكَ بِٱلۡعُرۡوَةِ ٱلۡوُثۡقَىٰ لَا ٱنفِصَامَ لَهَاۗ وَٱللَّهُ سَمِيعٌ عَلِيمٌ ٢٥٦﴾

صدق الله العظيم

سورة البقرة: ٢٥٥ ـ ٢٥٦

.

الإهـــــــداء

إلى الصنيع الذاخر الفياض والمعطاء

أبي

إلتي رأني قلبها قبل عينيها وحضنتني أحشائها قبل يديها

أمي

إلى رسول العلم والمعرفة في كل زمان ومكان

أساتذتي الأجلاء

وإلى رفقاء دربي

أصدقائي وزملائي

إليهم جميعاً أهدي ثمار جهدي

إلى الذين علمونا أن نعطي بلا حدود

الشكر والتقدير

بعد شكرنا وحمدنا لله الذي وفقنا لإتمام هذا البحث نتقدم بوافي شكرنا وإمتناننا وتقديرنا لجامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا وإلى كلية التربية.

والشكر أجزله وكل التقدير والود للدكتور / **عبد القادر البشرى الضي** المشرف على هذا البحث لما قدمه لنا من رعاية علمية صادقة وإرشادات مفيدة. والتي كانت عوناً لنا وسنداً حتى يرى هذا البحث النور فكان المعلم والأب ، نتمنى له دوام الصحة والعافية.

والشكر كل الشكر لموظفي مكتبة كلية التربية لتعاونهم معنا.

المستخلص

تناول هذا البحث النايات العظمى والصغرى للدوال في متغير واحد وبعض تطبيقاتها في العلوم الأخرى وتناول الفصل الأول خطة البحث التي تتمثل في أهمية البحث وأهدافه ومشكلاته وإشتمل الفصل الثاني على بعض المفاهيم الأساسية كالدوال والنهايات والإتصال والإشتقاق ، أما الفصل الثالث احتوى النهايات العظمى والصغرى للدالة ويتضمن أيضاً اختبار المشتقة الأولى واختبار المشتقة الثانية الذين بواسطتهما يتم حساب القيم العظمى والصغرى للدالة.

وأخيراً الفصل الرابع الذي اشتمل على بعض التطبيقات في النهايات العظمى والصغرى للدوال في متغير واحد وكذلك النتائج والتوصيات ومصادر البحث.

Abstract

This research takes the maximum and minimum limits of functions in one variable and some of its applications in other sciences. The first chapter takes research plan which consists the importance of research, its purposes and its problems. The second chapter contains some basic concepts as functions, limits, continuity and derivation. The third chapter consists maximum and minimum limits of functions and also contains the first and second derivation test which used for calculating of maximum and minimum values of functions, and finally the fourth chapter which consists some applications in maximum and minimum limits of functions in one variable and also the outcomes and recommendations and references.

فهرست المحتويات

الفصل الأول

(1 -1) المقدمة:

الرياضيات من العلوم التي لها تطبيقات كثيرة في معظم العلوم النظرية والتطبيقية إذ يمكن الإستفادة من قواعدها ونظرياتها في أغلب المجالات فضلاً عن دورها المهم في توسيع مدارك الفرد وتنمية قدراته على التحليل التفكير المنطقي والإستنتاج السليم.

يعتبر الحسبان أو التفاضل والتكامل أحد الفروع المهمة في علم الرياضيات وتمثل الدالة المفهوم الأساسي في علم التفاضل والتكامل وذلك لأنها توفر علاقات بين مجموعة من المتغيرات وتساعد في فهم التغيرات المصاحبة من خلال رسمها هندسياً أو حلها رياضياً تؤدي علاقات المتغيرات في الدالة لإستنتاج بعض المفاهيم مثل مجال الدالة و المجال المقابل ، نهاية الدالة ، إتصال الدالة ، مشتقة الدالة و غيرها.

أن دراسة القيم العظمى و الصغرى و معرفة التزايد و التناقص أهمية كبيرة في معرفة سلوك و مسار الدالة التي نحتاج إليها خاصة عند الرسم البياني للدالة كما ان لها تطبيقات واسعة في بعض مجالات العلوم المختلفة.

في هذا البحث سيتناول الدارسون مفهوم النهايات العظمى و الصغرى للدالة في متغير واحد و تطبيقاتها في بعض العلوم.

(1-2) أهمية البحث :

تتلخص أهمية الدراسة في الآتي :

a) إيجاد النهايات العظمى والصغرى للدوال في متغير واحد.
b) يساعد في حل بعض المسائل الاقتصادية و الهندسية و الفيزيائية و غيرها.

(1-3) مشكلة البحث :

النهايات العظمى و الصغرى للدوال في متغير واحد من الموضوعات الرئيسية في الحسبان و هي مهملة من حيث البحث و لا توجد بحوث تطبيقية كثيرة أجريت من قبل طلاب البكالريوس .

(1-4) أهداف البحث :

تهدف هذه الدراسة إلى ايجاد النهايات العظمى و الصغرى للدوال في متغير واحد و ذلك من خلال التعرف على :

a) التعرف على النهايات العظمى و الصغرى للدوال في متغير واحد.
b) التعرف على إختبار المشتقة الأولى و الثانية لنهايات الدوال.
c) تطبيق مفهوم النهايات العظمى و الصغرى على الدوال.
d) تطبيق إختبار المشتقة الأولى أو الثانية على بعض مجالات العلوم.

(1-5) منهج البحث :

إستخدام المنهج الوصفي التحليلي.

(1-6) مصطلحات البحث :

وردت في هذه الدراسة بعض المصطلحات التي أكثر منها الدارسون و يمكن تحديدها في الاتي:

a) النهايات: يقال أن الدالة f(x) نهاية تساوي A عندما تقترب x من العدد a أي أن $\lim_{x\to a} f(x) = A$ إذا كان لكل عدد صغير موجب $\varepsilon > 0$ يمكن إيجاد عدد آخر صغير موجب $\delta > 0$.
b) الدالة : هي علاقة F من مجموعة X الى مجموعة Y بحيث يكون لكل عنصر x ينتمي الى X صورة وحيدة y .
c) المشتقة : هي ميل المماس لمنحنى الدالة .

d) الاتصال : نقول ان الدالة F المعرفة على الفترة (a,b) متصلة عند النقطة $c \in (a, b)$ اذا كانت النهايتان اليمنى واليسرى لهذه الدالة عندما $x \to c$ موجودتان ، متساويتان و تساويان قيمة الدالة .

(7-1) أسئلة البحث :

a) ما هو مفهوم النهايات العظمى و الصغرى للدوال في متغير واحد .

b) كيف يمكن ايجاد المشتقة عن طريق النهايات .

c) ما هي تطبيقات النهايات العظمى و الصغرى .

d) كيف يمكن الاستفادة من النهايات العظمى و الصغرى في حل بعض المسائل الفيزيائية و الهندسية و غيرها .

الفصل الثاني

الدوال

(1-2) تعريف الدالة :

هي -علاقه F من مجموعه غير خاليه X الي مجموعه غير خاليه Y ، بحيث يكون لكل عنصر $x \in X$ صورة وحيدة $y \in Y$ اي ان F داله من X الي Y ، اذا كانت $F \leq X \times Y$ ولكل $x \in X$ يوجد عنصر وحيد $y \in Y$ بحيث $Y = F(x)$ وتسمى ال $F(x)$ قيمة الدالة عند x ، كما يمكن التعبير عن الدالة بإحدى الطرق الاتية :

$$F = \{ (x, y) : y = F(x) \}$$

$$F : X \rightarrow Y$$

وتسمى المجموعة X نطاق (مجال) الدالة F ويرمز لها بالرمز D_f اما المجموعة

$y = F(x)$ فتسمى (المجال المقابل) للدالة ويرمز لها بالرمز R_f .

واذا اعطيت الدالة بالمعادلة $y = F(x)$ فان x تسمى المتغير المستقل للدالة F و y تسمى المتغير التابع للدالة F .

ويمكن ان يقال عن الدالة بصورة مبسطة بانها القاعدة التي تربط مقدار متغير مع مقدار متغير اخر .

مثال لذلك :

ارتباط مساحة الدائرة A بنصف قطرها r حسب القاعدة :

فنقول ان هذه القاعدة تصف A كدالة ل r وتسمى المقادير A , r متغيرات ، اذا حددنا قيمة معينة للمتغير r فالقاعدة تعطينا قيمة واحدة للمتغير A .

مثال (1) :

اذا كانت $X = \{a, b, c, d\}$ و $Y = \{2, 3, 5, 7, 11\}$ فان مجموعة الازواج المرتبة :

$$F = \{(a, 2), (b, 3), (c, 7), (d, 11)\}$$

تمثل دالة نطاقها (مجالها) X ومداها المجموعة $\{2, 3, 7, 11\}$ وهي مجموعه جزئية من المجموعة Y .

(2-2) تقسيمات الدوال :

1 - **الدوال المتزايدة :** لجميعقيم X في فترة ما وعند ما تتزايد x ، فان قيمة $F(x)$ تزداد ومن ثم يرتفع منحنى الدالة من اليسار الى اليمين فان الدالة F تسمى دالة تزايديه.

2 - **الدوال المتناقصة** : إذا كان لجميع قيم Xفي فترة ، وكلما ازدادت X تناقصت $F(x)$ ومن ثم ينخفض منحني الدالة من اليسار الي اليمين فإن F تسمي دالة متناقصة في الفترة.

3 - **الدوال الثابتة:** إذا كانت قيمة الدالة لم تتغير في فترة ويكون منحني الدالة خط أفقي فإن الدالة تسمي دالة ثابتة.

4 - **الدوال الزوجية:** يقال للدالة F انها زوجية إذا تحقق:

لجميع قيم X الواقعة في نطاق الدالة F

مثال (3):

دالة زوجية تحقق $F(-X) = F(X)$

5 - **الدوال الفردية:** يقال للدالة F أنها داله فردية إذا تحقق $F(-X) = -F(X)$ لجميع قيم X الواقعة في نطاق الدالة F.

مثال (4)

دالة فردية تحقق $F(-X) = -F(X)$

(3-2) أنواع الدوال:

1. **دالة كثيره الحدود: الدالة كثيره الحدود هي الدالة التي تكون علي الصورة :**

$f(x) =$

حيث:

$a_0, a_1, \ldots \ldots \ldots . a_{n0}$ثوابت

Nعددطبيعيموجب

وتسمى n درجة كثيرة الحدود.

مثال (5):

دالة كثيرة حدود

2. **الدوال الجبرية:** وهي دوال $y = F(X)$تحقق معادلة علي الصورة :

$P_0(x)y^n$

حيث

$P_0(x) \ldots P_x(x)$كثيرة حدود في المتغيرX

3- الدوال المتسامية:

هي دوال ليست دوال جبرية أي لا تحقق المعادلة (1) وهي:

i) الدوال الأسية: وهي التي تكون علي الصورة :

مثال(7):

(**e** تساوي تقريباً 2.72)

ii) الدوال اللوغاريثمية: وهي الدوال التي تكون علي الصورة :

$$f(x) = \log_a x \qquad \rightarrow \qquad a \neq 0{,}1$$

وهذه الدالة والدالة الأسية دالتان عكسيتان ، إذا كانت **a=e=2.7183** فإنه يسمي الأساس الطبيعي للوغريثم وتكتب:

$$f(x) = \log_a x = \ln x$$

مثال (8):

$$f = \{(x,y): y = \log_5 x\}$$

وهي داله لوغاريثمية

iii) الدوال المثلثية: وهي الدوال التي تكون علي الصورة:

$$f(x) = \sin x\,, f(x) = \cos x\ , f(x) = \tan x$$

$$f(x) = \operatorname{cosec} x\,, f(x) = \operatorname{cotan} x\ , f(x) = \operatorname{se} x$$

مثال(9):

$$f(x) = \tan 3x\,, \qquad f(x) = \sec {}^{1}\!/_{x}$$

وهي دوال مثلثية.

4- الدوال المثلثية العكسية:

في ما يلي بعض الدوال المثلثية العكسية:

$f(x) = c$

$f(x) = s$

$f(x) = cot$

5 ـ الدوال الزائرية:

فيما يلي تعريف للدوال الزائدية بدلالة الدوال الأسية:

هذه الدوال مرتبطة ارتباط وثيق بالدالة الاسية ، ولهذه الدوال تطبيقات واسعة في حلول المعادلات التفاضلية ومن ثم في مجال الرياضيات التطبيقية والهندسة التحليلية وتتشابه هذا النوع مع الدول المثلثية فلذا اتخذت اسماء مثلثية :

$$\text{sech}\, x = \frac{1}{\cosh x}$$

$$\text{cosech}\, x = \frac{1}{\text{cinh}}$$

$$\text{cotanh}\, x = \frac{1}{\text{tanh}}$$

3. الدوال الزائدة العكسية:

إذا كانت $x = \sinh y$ ،فإن $y = \sin^{-1} x$

إذا كانت $x = \cosh y$ ، فإن $y = \cosh^{-1} x$

تسمي بالدوال الزائدة العكسية

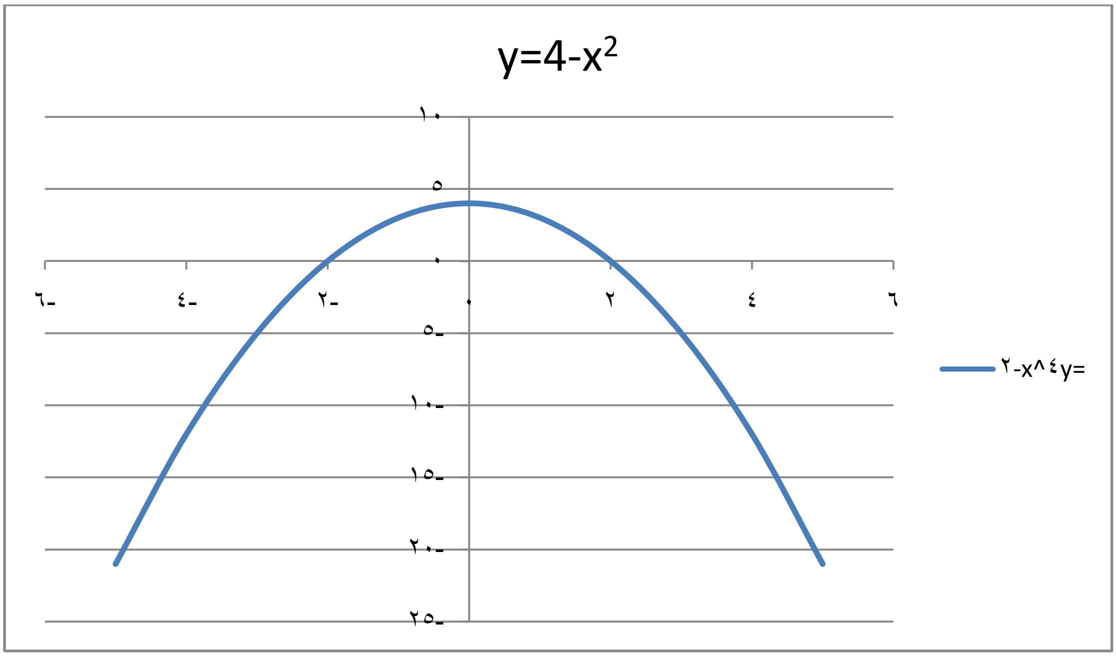
(4-2) التمثيل البياني للدوال:

يكون التمثيل البياني للدالة F هو التمثل البياني لكل النقاط الممكنة $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ حيث في نطاق الدالة F أو $y = f(x)$.

مثال (10):

أرسم الشكل البياني للدالة:

الحل



مثال (11):

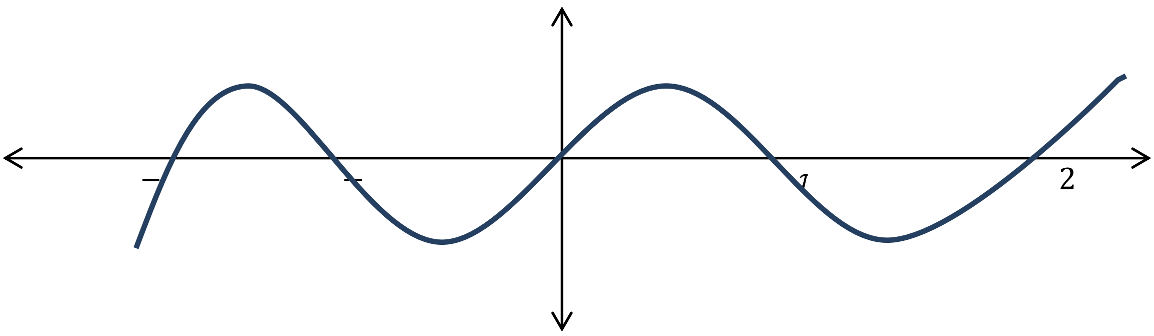
ارسم الشكل البياني للدالة:

i. $y = \sin x$

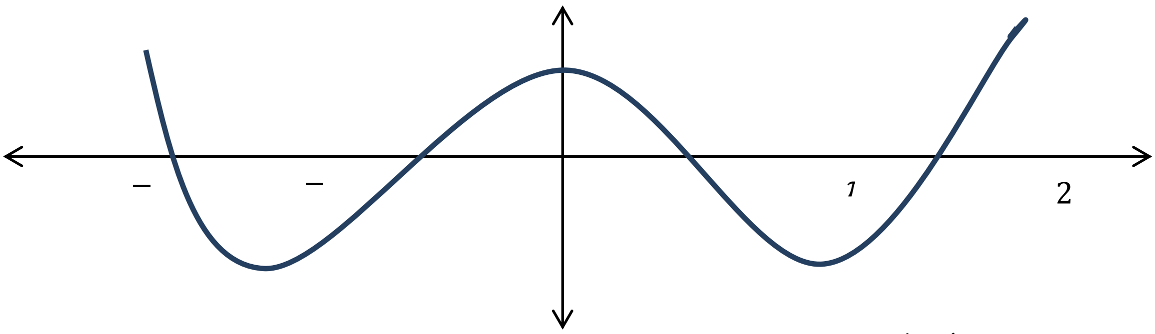
ii. $y = \cos x$

الحل

x		0	
y	0	0	0



X		0	
Y	-1	1	1



(5-2) بعض الأمثلة علي الدوال:

i) إذا كانت الدالة g معرفة حسب القاعدة :

أوجد:

الحل

لإيجاد g(3) نعوض قيمة x بالعدد 3 في القاعدة التي تعرف الدالة فنحصل بذلك علي:

وبنفس الطريقة لإيجاد g(3) :

بما أنه لا يمكن القسمة علي صفر إذا g(2) غير معرفة

ii) أوجد الدالة العكسية للدالة :

الحل

نثبت أولاً أن f أحادية:

أفترض أن :

ينتج أن:

$$\cancel{(u+3)}(v+3)\frac{2}{\cancel{u+3}}=\frac{2}{\cancel{v+3}}(u+3)\cancel{(v+3)}$$

ـ f أحادية

الأن أوجد حل

لأجد x فنجد أن:

iii) حدد ما إذا كانت الدوال الأتية زوجية أو فردية أو ليست أياً منهما:

$f(x)=7x^2$ (1

$g(x) = \frac{4}{x-6}$ (2

الحل

1) $f(x) = 7x^2 \quad , f(-x) = 7(-x)^2 = 7x^2$

تكون الدالة زوجية لأن $f(x) = f(-x)$

2) $f(x) = \frac{4}{x-6} \quad , f(-x) = \frac{4}{-X-6} = -\frac{4}{X+6} \neq f(x)$

$$-f(x) = -\frac{4}{x-6}$$

$$f(-x) \neq f(x)$$

$$-f(x) \neq f(-x)$$

∴ الدالة ليست زوجية ولا فردية.

iv) أوجد قيمة x في كل مما يأتي:

$\log_3 x = \frac{1}{2}$ (a

$\log_x 3 = 2$ (b

الحل

a) $\log_3 x = \frac{1}{2}$ تكافي $x = 3^{\frac{1}{2}}$ اي أن $x = \sqrt{3}$

b) $\log_x 3 = 2$ إذا $3 = x^2$ او $x = \sqrt{3}$

(6-2) النهايــات:

أن مفهوم النهايات هو أحد الأفكار الأساسية التي تميز حساب التفاضل والتكامل عن غيره من فروع الرياضيات الأخرى مثل الهندسة والجبر.

وحيث أن هذا المدخل الرئيسي للتفاضل والتكامل نحاول هنا أن نبسط الأفكار الأساسية ونقوم بتقسيمها وتوضيحها حتي ترسخ في الأذهان ونهتم في كثير من الأحيان بقيم الدالة $f(x)$ عندما تقترب من x من القيمة a ولكن لا تكون مساوية لها.

وفي بعض الأحيان قد لا تكون النقطة $x = a$ أحدى نقاط الدالة، ويكون السوال هو(هل تقترب قيمة الدالة $f(x)$ من مقدار L كما أقتربت x من a !؟) فإذا كان الجواب إيجابياً فأنت تقول أن نهاية $f(x)$ تساوي L عندما تتقارب قيم x من a ونرمز لهذا بالرمز:

تعريف نهاية الدالة :

يقال أن الدالة $F(X)$ نهاية تساوي a عندما تقترب من العدد a

إذا كان لكل عدد صغير موجب $3 > 0$ يمكن إيجاد عدد أخر موجب $5 > 0$ (يعتمد علي ع) بحيث يكون:

$|x - a| < \vartheta$ ويكون $|f(x) - a| < \vartheta$

بحيث أن $x \in D_f$

مثال:

أوجد النهاية

الحل

إذا كانت $x = 2$ فإن النهاية تساوي صفر

خواص النهايات:

1 - الخاصية الأولي : وحدانية النهايات

نظرية (1):

تكون الدالة $f(x)$ تقبل نهاية L عند النقطة $x = a$ ، إذن النهاية L تكون وحيدة.

البرهان:

نعتبر أن الدالة تقبل نهايتين هما:

حيث أن

وهو ما يؤكد وجود عدد حقيقي موجب بحيث:

وبما أن $\lim_{x\to a} f(x) = L$ فأنه يوجد عدد حقيق موجب ،،،،، بحيث أن لكل قيم العدد الحقيقي الموجب $\in$ بحيث أن :

وبما أن الدالة $f(x)$ تقبل نهاية أخري فإنه يوجد عدد حقيقي موجب ،،، بحيث أن :

بما أن $L \neq M$ فأن:

$|L - M| = |L$

حيث يوجد عدد حقيقي

$$\in_1 = \in_2 = {}^{\in}/_{2} \text{و}$$

$0 < |x -$

وهو ما يؤكد أن $L = M$ أي إذا كانت لكل من L, M نهايتان فهما متطابقتان.

الخاصية الثانية:

نظرية (2):

أن الحالات التالية محققة لكل من :

i. $\lim_{x\to a} C = c$
ii. $\lim_{x\to a} x = a$

iii. $\lim f(x) = L > 0 \ = \lim\sqrt{x} = \sqrt{l}$

البرهان:

(i) بما أن $f(x) = c$

وعليه فأنه يوجد عدد حقيقي موجب ،،،،،

(ii)لكل العدد الحقيقي الموجب $0 < \varepsilon$ لدينا وجود العدد الحقيق الموجب

،،،،، بحيث أن المترحجة

وهو ما يؤكد أن :

$$\lim_{x\to a} x = a$$

(iii) ليكن لدينا العدد الحقيقي الموجب $0 < \varepsilon$ فإنه:

$\left|\sqrt{F(X)} - \sqrt{}\right.$

وهو ما يؤكد أن $\lim_{x\to a} \sqrt{F(X)} = \sqrt{L}$

الخاصية الثالثة:

نظرية (3):

إذا كان لدينا:

$$\lim_{x\to a} F(X) = L \qquad , \qquad \lim_{x\to a} T\, G(X) = M$$

فإن كل من الخواص التالية منخفضة:

$$\text{(i) } \lim_{x\to a} f(x) + \lim_{x\to a} tg(x) = \lim_{x\to a}(f(x) + g(x)) = L + M$$

$$\text{(j) } \lim_{x\to a} f(x) - \lim_{x\to a} tg(x) = \lim_{x\to a}\big(f(x) - g(x)\big) = L - M$$

$$(k) \lim_{x\to a} f(x) \,.\, \lim_{x\to a} tg(x) = \lim_{x\to a}(f(x).\, g(x)) = L.\, M$$
$$(l)\ \lim_{x\to a} f(x) \div \lim_{x\to a} tg(x) = \lim_{x\to a}(f(x) \div g(x)) = L \div M$$

النهايات اليمني واليسرى :

عند تعريف النهايات لم نضع اي شروط عن كيفية اقتراب المتغير المستقل X لا من العدد a إلا أنه في بعض الأحيان نجد أن الفهم الأخذ في الإعتبار كيفية إقتراب x من العدد a .

فإذا اعتبرنا أن لكل من x, a عبارة عن عددين حقيقين علي محور x حيث a عبارة عن مقدار ثابت و x عبارة عن قيمة متغيرة فإننا عند ذلك نستطيع القول أن x تقترب من a من الناحية اليمني ويرمز لها : $(x \to a+)$ أو من الناحية اليسرى ويرمز لها : $(x \to a-)$ ولذلك إذا أخذنا $\varepsilon > 0$ فإن لجميع قيم $X(a < x < a + \delta)$.

فالنهاية اليمني

لجميع قيم $X(a < x < a + \delta)$.

فالنهاية اليسرى

وتسمي عندئذ A_1 بالنهاية اليمني للدالة $f(x)$ و A_2 بالنهاية اليسرى للدالة $f(x)$ وهما متساويان لذلك:

مثال (12):

جد قيمة الثابت K لتكن نهاية الدالة التالية:

موجودة عندما $x \to 1$

الحل

شروط وجود النهاية أن تكون:

نظريه (4):

إذا كانت $f(x) < g(x) < h(x)$ حيث f, g, h دوال في المتغير x علي نفس النطاق(الحيز)
وإذا كان:

فإن:

البرهان:

نجد أن المعطيات أنه لكل عدد حقيقي يمكن إيجاد عدد آخر $\geq$ بحيث

وبذلك يكون لدينا بجميع قيم X التي تحقق المتباينتين السابقتين حيث:

أو

لجميع قيم x حيث $|x - A| < \delta$التي تحقق المتباينتين السابقتين وهذا يعني أن :

بعض النـهايات الـهامـة:

1 - إذا كان N عدداً صحيحا موجباً فإن:

البرهان:

فك القوسين في المقدار التالي :

$(x -$

$x^n + ax^{n-i} + a^2$

$= x$

$x^n - a^n$

بالقسمة علي $(x - a)$

$\frac{x^n -}{x -}$

لأحظ أن هنالك nمن الحدود في الطرف الأيمن:

$\lim_{x \to a} \frac{x^n -}{x -}$

مثال (13):

جد

الحل

$\lim_{x}$

نتيجة مباشرة:

حيث m, n عددان صحيحان موجبان

البرهان:

$$\lim_{x \to a} \frac{X^N - a}{x^m - a}$$

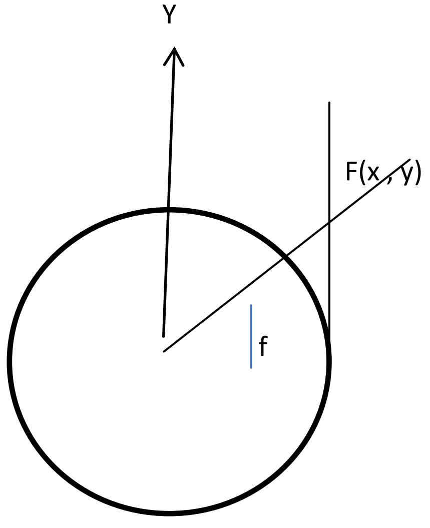
مثال(14):

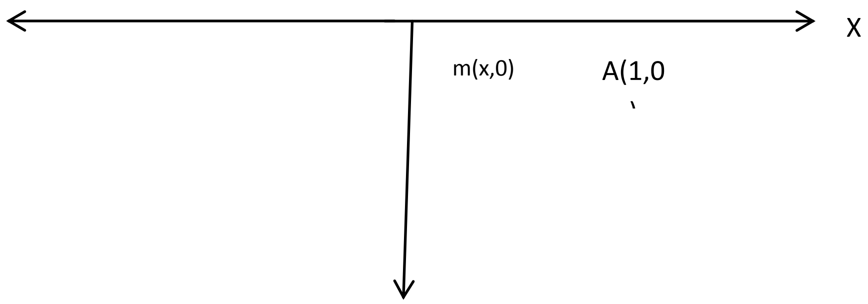
جد

الحل

$$\lim \frac{X^5 - 3^5}{x^4 - 3^4} = {}^{5}\!/_{4}\, 3^{5-4} = \frac{15}{4}$$

(2





$\theta \equiv$ مقياس بالتقدير الدائري

من الشكل نستطيع ملاحظة ما يلي :

المستقيم $\overline{\mathrm{PM}}$ وكذلك القوس$\widehat{\mathrm{PA}}$ بدورة أقصر من المستقيم مقياس $\overline{\mathrm{A}\theta}$ ويمكن صياغة هذه الحقائق رياضياً في المتباينتين الأتيتين:

حيث θ تحقق $0 < \theta < {}^{1}/_{2}$

بقسمة هاتين المتباينتين علي المقدار $\sin\theta$ نحصل علي :

أو

ونهايتنا طرفي المتباينة هي

مثال(15):

جد

الحل

$\text{Let } L = 3x$

$L \to 0$ عندما $X \to 0$

$$\lim_{X \to 0} \sin \frac{3x}{x}$$

(3) أثبت أن:

البرهان:

$$\lim_{X \to}$$

النهايات للدوال الكسرية:

ما يعنينا الأن هو دراسة بعض الطرق لإيجاد النهايات عندما نحصل علي قيم غير معروفة في حالة تعويض المباشر في الدالة ، وفي دراستنا لهذه الطرق سنركز فقط علي الحالة التي تكون فيها الدالة علي الصورة :

حيث:

أو

وهنالك عدة حالات:

1 - **الحالة الأولي:** وهي التي يكون فيها ناتج التعويض $\frac{\infty}{\infty}$ تقسم كلاً من البسط والمقام علي x مرفوعة لأكبر أس علماً بأن:

مثال(17):

جد:

الحل

نقسم كلاً من البسط والمقام علي x^2 (أعلي قوة للمتغير x في المقام).

$\lim_{x \to}$

#

مثال (18):

جد:

الحل

بالقسمة علي أعلي قوة للمتغير x في المقام نحصل علي:

2 - الحالة الثانية: والتي يكون ناتج التعريف فيها $\frac{0}{0}$ نحلل البسط والمقام لاستخراج العامل المشترك ثم التعويض في المقدار الناتج عن x بالقيمة لنحصل علي النهاية المطلوبة.

مثال(19):

جد:

الحل

عند التعويض المباشر نحصل علي $\frac{0}{0}$ وهي قيمة غير معروفة

مثال(20):

جد:

الحل

$$\lim_{X\to 2}\frac{(x-2}{x^2-x-}$$

3 ـ الحالة الثالثة:

بالتعويض المباشر سنحصل علي قيمة غير معروفة $\frac{\text{zero}}{\text{zero}}$ لذلك نلجأ للضرب في المرافق:

$$=\lim_{X\to 4}\frac{}{(x-}$$

الاتصال:

تكون الدالة $f(x)$ متصلة عند $x=a$ إذا حققت الشروط التالية:

i) a تنتمي الي مجال الدالة $f(x)$.

ii) نهاية $f(x)$ موجودة

iii) $\lim_{x\to a} f(x)=f(a)$.

مثال(21):

إذا كان:

هل الدالة متصلة؟

الحل

$\lim_{x \to 1} \frac{2x^2 + x}{x - 1}$

الدالة غير متصلة

تعريف:

نقول أن الدالة $f(x)$ متصلة علي الفترة (a , b) إذا كانت f متصلة عندك كل نقطة من نقاط الفترة (a , b) .

مثال(22):

إذا كان $f(x) = 2x^2 - 3x + 5$

بين أن الدالة متصلة لجميع قيم x الحقيقية

الحل

لجميع قيم a الحقيقية لان f دالة كثيرة حدود

F متصلة لجميع قيم x الحقيقية

نظرية (5):

إذا كان كل من الدالتين $f(x)$ و$g(x)$ متصلة عند $x = a$ فإن:

1) $f(x) \pm g(x) \quad , \quad x = a$

2) $C. f(x)$

متصلة عند $x = a$ حيث c عدد حقيقي

3) $F(x). g(x).$

متصلة عند$x = a$

مثال(24):

ليكن $f(x) = \frac{x^2-4}{x+2}$ أبحث في أتصال الدالة عند $x = -2$

الحل

أن f غير معرفة عند $x = -2$ علي الرغم من أن :

$\lim_{x \to -2} f($

وبالاعتماد علي تعريف الاتصال عند نقطة فإن f غير متصلة عند $x = -2$ وما عدا ذلك فإن f متصلة عند $x = a$ لجميع قيم a .

معدل التغير:

إن ميل القطعة المستقيمة ومتوسط السرعة كل منها عباره عن متوسط تغير لدالة (اقتران) ما، وهنالك الكثير من المفاهيم الفيزيائية التي يمكن التعبير عنها بمعدل تغيير لاقترانات مختلفة .

وبصورة عامة إذا كان $y = f(x)$ دالة (اقتران) معرفة علي مجموعة جزئية من الأعداد الحقيقية ، وتغيير x من x_1 الي x_2 فأننا نقول أن هنالك تغيير في x مقداره $\Delta x = x_2 - x_1$ (نقرأ دلتا x) وتبعاً لذلك فأن تغيراً للدالة (الاقتران) y مقداره ΔY قد حدث ويعطي بالعلاقة:

يسمي المقدار بمتوسط تغير الدالة(الأقتران) $y = f(x)$ علي الفترة $[x_1, x_2]$ (أو عندما تتغير x من x_1 الي x_2)

مثال(25):

جد متوسط التغيير في الدالة(الاقتران):

عندما تتغير x من 1 الي 1.1

الحل

متوسط التغير

$\frac{\Delta y}{\Delta x} =$

مثال(26):

جد معدل تغير الدالة(الاقتران):

عندما $X = 1$

الحل

معدل التغير في الدالة (الاقتران):

$\lim_{\Delta x \to 0}$

المشتقة:-

والاخر هندسي احدهما بنقطتين مراحله اولى في المشتقة مفهوم يرتبط :مفهوم فيزيائي ، فالمماس لمنحنى الدالة (الاقتران) F في احدى نقاطه هو مستقيم وهذا المستقيم له ميل ثابت وسنجد ان هذا الميل مرتبط بما نسميه المشتقة الاولى للدالة (الاقتران) F عند تلك النقطة ، اما الفيزيائي فهو مفهوم السرعة التي هي التغير اللحظي للمسافة بالنسبة للزمن ، سنجد ان هذ التغير اللحظي هو المشتقة الاولى لدالة المسافة ، وهذين المفهومين مثالين على ما يعرف مشتقة الدالة (الاقتران) .

تعريف:

إذا كان $F(X)$ دالة(اقتران معرفة علي الفترة $[a, b]$ وكانت x نقطة في الفترة $[a, b]$ وإذا كانت النهاية التالية موجودة:

فأننا نقول أن الدالة (الاقتران) مشتقه عند x أو قابلة للإشتقاق عند x ويرمز لذلك بالرمز $f^1(x)$
أي أن؛

تلاحظ من التعريف للمشتقة أن :

1 - $f^1(x)$ ميل المماس للمنحني $y = f(x)$ عند النقطة x_1 .
2 - إذا كان x يرمز للزمن ، $f(x)$ يرمز للمسافة المقطوعة بعد x وحدة زمنية فان السرعة $v(x) = f'(x)$.

مثال (27):

إذا كان:

جد: $f'(x)$

الحل

$$\text{Let } x = -1$$

$$f^1(x) = \underset{\Delta x}{\text{li}}$$

مثال(28):

إذا كان

جد: $f^1(x)$

الحل

$$\lim_{L\to x}\frac{{}^{1}/_{x}+2}{L}$$

#

نظرية (6):

إذا كان $f(x)$ قابلة للإشتقاق عندما $x = x_1$ فإنه متصلة عندها.

البرهان:

وباستخدام نظرية النهايات نجد أن:

$$\lim_{x\to x_1} f(x$$

أي أن f متصلة عند $x = x_1$ وعكس النظرية غير صحيح.

مثال(29):

ليكن

هل $f(x)$ قابلة للاشتقاق عند $x = 1$؟!

الحل

نجد أولاً إذا كانت متصلة عند $x = 1$

$F(x)$ غير متصلة عند $x = 1$.

وهكذا فإن $f(x)$ غير قابلة للاشتقاق عند $x = 1$.

قواعد الاشتقاق:

(1) مشتقة الدالة (الاقتران) الثابتة تساوي صفر

البرهان:

ليكن $f(x) = c$

وهو الدالة (الاقتران) الثابتة فتكون

$$f^1(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(}{}$$

(2) إذا كان $f(x) = x^n$ حيث n عدد طبيعي فإن:

البرهان:

$$f^{-1}(x) = \lim_{\Delta x \to}$$

#

(3) قاعدة مشتقة حاصل الجمع:

إذا كان $f(x)$, $g(x)$ دالتين قابلتين للاشتقاق فإن:

يكون قابلة للاشتقاق وتكون:

$h^1(x)$

البرهان:

h

$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x}{}$

$\lim_{\Delta x \to 0}$

(4) مشتقة حاصل ضرب حالتين:

إذا كان $f(x)$, $g(x)$ دالتين قابلتين للاشتقاق فإن الدالة $h(x)$:

تكون قابلة للاشتقاق وتكون:

h^1

وتكتب بالكلمات:

(مشتقة حاصل ضرب دالتين=مشتقة الاول ×الثاني +الأول × مشتقة الثاني)

البرهان:

h

$= \lim_{\Delta x \to}$

$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{1}{\Delta x}$

$= \lim_{\Delta x}$

$= \lim_{\Delta x}$

باستخدام نظرية النهايات نحصل علي :

$h^1(x)$

وحيث أن $g(x)$ قابل للاشتقاق فنكون متصلة ويكون:

#

(5) قاعدة مشتقة خارج القسمة:

إذا كان $f(x)$ و $g(x)$ دلتين قابلتين للاشتقاق فإن الدالة

$$h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

تكون قابلة للاشتقاق بشرط أن $g(x) \neq 0$ وتكون:

h^1

ويعبر عن ذلك بالكلمات:

$$\text{مشتقة خارج القسمة} = \frac{\text{المقام} \times \text{مشتقة البسط} + \text{البسط} \times \text{مشتقة المقام}}{(\text{المقام})^2}$$

البرهان:

h

$$= \lim_{\Delta x \to}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{[f(x +}{}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{}{g(}$$

باستخدام نظرية النهايات نحصل علي:

$$h^1(x) =$$

حيث أن $g(x)$ قابلة للاشتقاق فان $g(x)$ متصلة ولذلك فإن:

إذن:

$$h^1$$

أمثلة علي قواعد الإشتقاق:

1 - جد مشتقة الدالة

الحل

2 - جد مشتقة الدالة:

الحل

3 - جد مشتقة الدالة:

الحل

$f^1($

$= 2$

4 - جد مشتقة الدالة:

الحل

5 - جد مشتقة الدالة:

الحل

الفصل الثالث

النهايات العظمى والصغرى ورسم المنحنيات

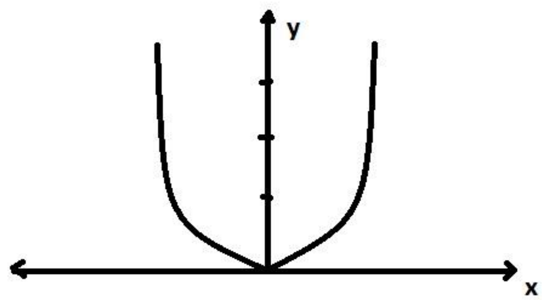
الدوال التزايديه :

تعريف الدالة التزايديه :

اذا كان $f(x_1) < f(x_2)$ عندما تكون $x_1 < x_2$ تجمع قيم x_1, x_2 في الفترة المغلقة $[a, b]$ قيل أن الدالة $f(x)$ دالة تزايديه في الفترة المغلقة $[a, b]$.

مثال (1)

تعتبر الدالة $y = x^2$ دالة تزايديه في الفترة من $[0,4]$ وذلك لأنه من الملاحظة أنه عندما تتجه x الي ناحية اليمين (أي تزيد قمتها) فان قيمة الدالة $f(x)$ تزداد هي الأخرى كما هو واضح من الشكل ....



تعريف الدالة التناقصية :

إذا كان $f(x_2) < f(x_1)$ عندما $x_1 > x_2$ في الفترة المغلقة $[a, b]$ قيل أن الدالة $f(x)$ دالة في تناقصية في الفترة $[a, b]$

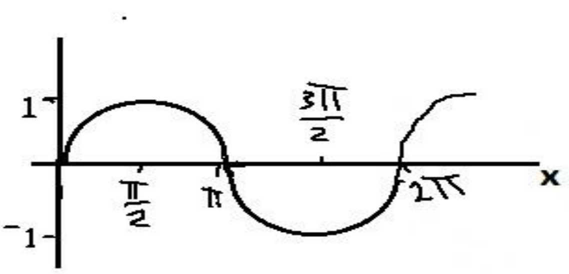
مثال :

الدالة $f(x) = x^2$ الموضح تمثيلها البياني في الشكل أعلاه تعتبر دالة تناقصية في الفترة $[-4,0]$. اي ان قيمة الدالة تتناقص كما تزايدت قيمة xفي الفترة $[0 . 4-]$

ومن المعني الهندسي للتفاضل فأن $\frac{dy}{dx}$ عبارة عن ميل المماس للمنحني عند النقطة (y, x) فإذا كانت تزايديه عند نقطة معينة فأن ميل المماس للمنحني يكون موجباً عند هذه النقطة أي أن $\frac{dy}{dx} > 0$ عند تلك النقطة .

اما اذا كانت الدالة تناقصية عند نقطة معينة فأن ميل المماس للمنحني يكون سالباً عند هذه النقطة أي أن $\frac{dy}{dx} < 0$ عند تلك النقطة .

وتسمي النقطة التي يكون عندها $\frac{dy}{dx} = 0$ بنقطة الإنتقال أو نقطة الدوران ومعني ذلك أن نقطة الدوران هي النقطة التي تتحول عندها الدالة من تزايديه الي تناقصيه أو العكس.



من الرسم البياني للدالة $y = \sin x$ في الحيز $[0,2\pi]$ نجد أن الدالة تزايديه في النطاق $[0,2\pi]$ وكذلك النطاق $\left[3\frac{\pi}{2}, 2\pi\right]$ وتناقصية في النطاق $\left[\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\right]$ وعند $x = 3\frac{\pi}{2}, x = \frac{\pi}{2}$ فللدالة نقطتي دوران .

وبإستخدام التفاضل نجد أن $\frac{dy}{dx}(\sin x) = \cos x$ حيث أن $\cos x > 0$ في كل النطاق $\left[0, \frac{1}{2}\pi\right]$ و $\left[\frac{3\pi}{2}, 2\pi\right]$ فأن الدالة تزايدية وكذلك فإن $\cos x \ > 0$ في النطاق $\left[\frac{1}{2}\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$ فإن الدالة تناقصية وأخيراً فإن $\cos x = 0$ عند كل من $x = \frac{\pi}{2}, x = \frac{3\pi}{2}$.

نقطة الدوران:

تعريف نقطة الدوران : هي التي تتغير عندها إشارة $\frac{dy}{dx}$ من موجب الى سالب أو العكس. وعند نقطة الدوران يكون المنحني مقعراً الي أسفل أو الي أعلي فإن كان المنحني مقعراً الي أسفل فإن إشارة $\frac{dy}{dx}$ تتغير من موجب قبل نقطة الدوران الي سالب بعد نقطة الدوران.

أي أن $\frac{dy}{dx}$ عبارة عن دالة تناقصية إذا اتجهنا ناحية اليمين (في إتجاه زيادة x) وبالتالي فان $\frac{dy^2}{dx^2}$ تكون سالبة وتعتبر نقطة الدوران في هذه الحالة نهاية عظمي (محلية) للمنحني أي أن عظمي بالنسبة للنقاط المجاورة لها (من قبل ومن بعد).

أما إذا كان المنحني مقعراً الي أعلي فإن إشارة $\frac{dy}{dx}$ تتغير من السالب قبل نقطة الدوران الي الموجب بعد نقطة الدوران . أي أن $\frac{dy}{dx}$ عبارة عن دالة تزايدية إذا اتجهنا الي ناحية اليمين (في إتجاه زياده x) وبالتالي $\frac{dy^2}{dx^2}$ تكون موجبة وتعتبر نقطة الدوران في هذه الحالة نهاية صغرى (محلية) للمنحني بالنسبة للنقاط المجاورة لها (من قبل و بعد).

وعليه نجد أن نقطة الدوران تنقسم الي نوعين هي نقط النهايات الصغرى والعظمى.

مما سبق نستنتج أن للمنحني نهاية عظمي (محلية) عند نقطة معينة إذا توفر الشرطان

1- $\frac{dy}{dx} = 0$ يسمي الشرط الضروري

2- $\frac{dy^2}{dx^2} > 0$يسمى الشرط المكافئ عند تلك النقطة

وكذلك للمنحني نهاية صغرى (محلية) عند نقطة معينة إذا توفر الشرطان الاتيان عند هذه النقطة :

1- $\frac{dy}{dx} = 0$ يسمي الشرط الضروري

2- $\frac{dy^2}{dx^2} > 0$يسمى الشرط المكافئ عند تلك النقطة

نقطة الإنقلاب:

تعريف: هي النقطة التي يتغير المنحني عندها تقصره من أعلى الي أسفل أو العكس تسمي نقطة انقلاب أي النقطة التي عندها $\frac{dy^2}{dx^2} = 0$ ويسمي الشرط $\frac{dy^2}{dx^2} = 0$ الشرط الضروري والشرط المكافئ هو $\frac{d^3y}{dx^3} \neq 0$ وستساعدنا نقطة الدوران ونقطة الإنقلاب لرسم المنحنيات.

مثال:

أوجد نقط الدوران ونقط الإنقلاب لمنحني الدالة المعرف بالمعادلة $y = x^3 - 6x^2 + 9x$ ثم أرسم.

الحل

لنجد نقاط الدوران نحل المعادلة $\frac{dy}{dx} = 0$

$$y' = 3x^2 - 12x + 9 = 0x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$(x-1)(x-3) = 0x = 1 \quad , \quad x = 3$$

تضيف إشارة y'' عند هاتين القيمتين السابقتين .

يوجد نهاية عظمي محلية عند $y = 4 , x = 1$ اي موقع النهاية العظمي $(1,4)$ وكذلك:

يوجد نهاية صغرى محلية للمنحنى عند $y = 0 \ , \ x = 3$ اي موقع النهاية الصغرى عند $(3,0)$.

لتصنيف نقطة الإنقلاب نحل المعادلة $y'' = 0$ أي أن $6x - 12 = 0$ اذا $x = 2$

ووضع المعادلة (4) $\frac{dy^3}{dx^3} \neq 0$ وعليه يوجد للمنحني نقطة انقلاب واحدة عند $(2,2)$

لإيجاد نقطة تقاطع المنحني مع محور X نحل المعادلة $y = 0$ أي أن:

أي أن المنحني يقطع محور X عند $x = 0$ ويمسى عند $x = 3$ (التماس واضح من تكرار الجزر).

نأخذ نقطتين علي الأقل غير النقطة التي حصلنا عليها سابقاً فمثلاً لو أخذنا $x = -1$ فإن $y = -16$ وإذا أخذنا $x = 4$ فإن $y = 4$ أي أن المنحني يمر النقطتين $(-1,-6)$, $(4,4)$ ثم نصل هذه النقاط جميعاً بمنحني .

اختبار المشتقة الأولي:

نظرية:

لنفرض أن f متصلة عند النقاط الحرجة x_0 فإن:

(i) إذا كان $f(x) > 0$ لكل من $x \in (a, x_0)$ وكان $f'(x) < 0$ لكل $x \in (x_0, b)$ فإن للإقتران f قيمة عظمي محلية عند x_0 (غير إشارته من موجب الي سالب).

(ii) إذا كان $f(x) < 0$ لكل من $x \in (a, x_0)$ وكان $f'(x) < 0$ لكل $x \in (x_0, b)$ فإن للإقتران f قيمة صغرى محلية عند x_0 (غير إشارته من سالب الي موجب).

(iii) إذا كان $f(x)$ له نفس الإشارة علي أي فترة مفتوحة (أما $f'(x) < 0$ ، أو $f'(x) > 0$) فأنه ليس للاقتران قيمة قصوى.

البرهان:

(i) إذا كان $f'(x) > 0$ علي الفترة (a_1, x_0) فإن f متزايدة علي الفترة (a, x_0) وبالتالي فإن $f(x_0) \geq f(x)$ في الفترة $(a, x_0]$ وكذلك بما أن $f'(x) < 0$ علي الفترة (x_0, b) فإن f متناقصة علي الفترة $[x_0, b)$ وبالتالي فإن $f(x_0) \geq f(x)$ لكل x في الفترة $[x_0, b)$ وهذا يعني أن $f(x_0) \geq f(x)\ , \forall x \in (a, b)$ وهذا يعني بإن القتران f عظمي محلية عند x_0 .

(ii) البرهان مشابه لـ(i) يترك للقارئ.

(iii) لنفرض أن $f'(x) > 0$ علي أي فترة مفتوحة تحوي x_0 وهذا يعني بان الاقتران f متزايد علي الفترة المفتوحة ، وبالتالي ليس للاقتران قيم عظمي محلية ، وكذلك هو الحال عندما $f'(x) < 0$ علي أي فترة مفتوحة تحوي x_0 .

مثال (1):

أوجد النهاية القصوى للدالة $f(x) = x^5 - 5x^4 + 5x^3 - 10$ باستعمال اختبار المشتقة الأولي .

الحل

$y' = x^5 - 5x^4$

القيم الحرجة هي : $x = 0,1,3$

		+	الدالة تزايدية
	-10	0	نقطة انعطاف
		+	الدالة تزايدية
	-9	0	نهاية عظمي
		-	الدالة تناقصية
	-37	0	نهاية صغرى
		+	الدالة تزايدية

مثال(2):

أوجد النهاية القصوى للدالة $f(x) = x^{4/3} + 4x^{1/3}$ باستعمال اختبار المشتقة الاولى ..

الحل

$f'(x) =$

لان $f'(x)$ لا توجد عند $x = 0$ وكذلك $f'(x) = 0$ عندما $x = -1$

القيم الحرجة للدالة f هما: $x = -1,0$

		-	الدالة تناقصية
	-3	0	نهاية صغرى
		+	الدالة تزايدية
	0	غير موجودة	ليس لها نهاية قصوى
		+	الدالة متزايدة

اختبار المشتقة الثانية:

نظرية:

إذا كانت $f(x)$ دالة قابلة للتفاضل مرتين عند $x = c$ فإن:

$x = c(1)$ تكون نهاية عظمي نسبية للدالة f إذا كانت $f'(c) = 0$ و $f''(c) < 0$

$x = c(2)$ تكون نهاية صغرى نسبية للدالة f إذا كانت $f'(c) = 0$ و $f''(c) > 0$

مثال:

أوجد النهاية القصوى للدالة : $f(x) = x^3 + 2x^2 - 4x - 8$ باستخدام إختبار المشتقة الثانية:

الحل

القيم الحرجة $x = -2$, $x = 2/3$

$f''(-2) = -$

$0 < f''\left(2/3\right)$ موجبة إذا نهاية صغرى عند $x = 2/3$ وإحداثياتها $\left(2/3, -256/27\right)$

حيث:

$f\left(2/3\right.$

$0 > f''(-2)$ سالبة ، إذاً نهاية عظمي عند $x = -2$ وإحداثياتها $(-2,0)$ حيث:

$f($

مثال:

عين النهاية القصوى للدالة $f(x) = xe^x$

الحل

و $f'(x) = 0$ عندما $x = -1$

اذا عندما $f'(-1) = 1/e \leftarrow x = -1$ و $f''(-1) > 0$ نهاية صغرى وإحداثياتها

$(-1, -1/e)$.

الفصل الرا

تطبيقات إقتصادية:

دخلت أساليب الرياضيات وخصوصاً مبادئ التفاضل والتكامل في حل مسائل عديدة في الإقتصاد ولعلماء الإقتصاد قاموس خاص بهم في التعريفات سحاول أن نتعرف عليه لتفهم معاني المدلولات فإذا كانت الدالة $f(x)$ تصف شكلا إقتصادياً فإن كلمة (حدي marginal) تعني مشتقي الدالة f لبعض التعريفات الإقتصادية فيما يلي

تعريفات:

أ) دالة التكلفة : ويرمز لها بالرمز $c(x)$ وهي تبين تكلفة إنتاج عدد x من الوحدات.

ب) متوسط دالة الإنتاج: ويرمز لها بالرمز $c(x)$ وهي تبين متوسط تكاليف إنتاج وحدة واحدة وترتبط بالدالة $c(x)$ بالعلاقة:

ت) دالة الدخل: ويرمز لها بالرمز $R(x)$ وهي تعني الدخل نتيجة لبيع عدد x من الوحدات.

ث) دالة الربح : ويرمز لها بالرمز $p(x)$ وهي تعني الربح الناتج من بيع عددX من الوحدات وتعطي من$P(X) = R(X) - C(X)$ ولاستخدام طرق التحليل نستخدم X كعدد حقيقي (مع انه يأخذ قيماً صحيحة فقط) ودائماً نفترض أنه ليس هنالك معني لإنتاج عدد سالب من الوحدات.

التطبيقات الإقتصادية:

1 - تحليل الربح: أفرض أن مصنعاً إمكانياته محدودة بسبب وسائل الإنتاج بحيث ينتج ما لا يزيد عن 80 وحدة يوماً ، إذا كانت دالة التكل

2 -فة اليومية $c(x)$ والإيراد اليومي $R(x)$ هما:

إذا كانت عدد الوحدات المنتجة يتم بيعها ، كم وحدة يجب أن ينتجها المصنع ليحصل علي أكبر ربح ممكن ؟

الحل

نرغب في تعين قيمة x في الفترة $[0\,,80]$ والتي تكون فيها دالة الربح:

$p(x) =$

وفي نهايتها العظمي بما أن $p'(x) = -\Delta x + 100$:

فالقيمة الحرجة لـ$p(x)$ تحدث عندما $4x + 104 = 0$

أو $x = 26$

وبحساب قيمة $p(x)$ في النقاط الطرفية للفترة $[0\,,80]$ وفي القيمة الحرجة هذه نحصل علي :

80	26	0	
-4680	1152	-200	

وعليه فأكبر ربح مقداره 1152 يحصل عليه المصنع وذلك بإنتاج وبيع 26 وحدة في اليوم .

(2) يتوقع وكيل بيع إطارات أن يبيع 8000 إطاراً خلال السنة بمعدل بيع سنوي ثابت إذا كانت التكاليف السنوية للإحتفاظ بالمخزون هي 8 ريالات للإطار الواحد وكان العقد مع بائع الجملة يتطلب دفع مبلغ 35 ريالا عن كل طلب شحنة إطارات بغض النظر عن الكمية المطلوبة كم مرة في السنة يجب أن نطلب الإطارات التي يجب طلبها في كل مرة لكي يكون التكاليف الكلية للمخزون في نهايتها الصغرى.

الحل

نفرض أن حجم الطلب x ثابت في كل مرة وأن كل طلب يصل بالضبط في الوقت الذي يصل فيه مستوي المخزون الي الصفر (الشكل 10) مع هذا الفروض يكون أكبر عدد متوفر من الإطارات في إي وقت هو x بما أن بيع الإطارات يحدث بمعدل ثابت فإن متوسط مستوى المخزون خلال السنة هو $\frac{x}{2}$ (الشكل 10) وعلي هذا يمكن كتابة التكاليف السنوية للإحتفاظ بالمخزون $h(x)$ علي الصورة التالية :

$H(x) =$ التكاليف السنوية لحفظ إطار واحد

متوسط عدد الإطارات $= 4x = 8\frac{x}{2}$

لتحديد حجم تكاليف إعادة الطلب تتبع مابين:

لذلك فإن التكاليف السنوية لإعادة الطلب هي :

وعليه هذا فإن مجموع تكاليف المخزون السنوية $k(x)$ هي:

وبما أن المبيعات السنوية الكلية هي 8000 إطاراً فمن الممكن أن يكون حجم الطلب x مساوياً للوحدة كحد أدني أو مساوياً 8000 كحد اعلي .

اذن المسالة هنا هي مسالة إيجاد النهاية الصغرى ل $k(x)$ في الفترة $[0\,,8000]$ ستمر في الحل كما يلي:

بوضع $k(x) = 0$ نحصل علي القيم الحرجة كما يلي:

او

أي أن :

فان $x = 400$ هي القيمة الحرجة الوحيدة الواقعة في الفترة $[0\,,8000]$ إيجاد قيمة $k(x)$ في النقاط الطرفية وفي النقاط الحرجة يعطي القيم التالية:

800	400	1	
32080	3200	640004	

وعلي هذا فإن أقل قيمة لمجموع التكاليف السنوية للمخزون هي 3200 ريالاً وتحدث عند حجم مخزون يساوي 400 إطاراً ، وعلي هذا فإن الوكيل يقابل الطلب السنوي البالغ 8000 إطاراً عن طريق عمل 20 طلباً :

(3) (سياسة تسعير البترول) تنتج إحدى الأقطار المنتجة للبترول 1000000 برميل من البترول في اليوم الواحد سعر 30 دولار للبرميل الواحد ، الزيادة في السعر عملية معقدة حيث قدر أن كل زيادة مقدارها دولار واحداً في السعر تسبب نقصاً في البيع مقداره 20000 برميل في اليوم ماهو مقدار الزيادة اذا كانت هنالك زيادة في السعر بجمل الإيراد اليومي في نهايته العظمي.

الحل

إذا مثلنا الزيادة في السعر (بالدولارات) ب x دولار فإن يمثل النقص في عدد البراميل المباعة في اليوم لذلك بزيادة x دولار في اليوم للبرميل الواحد ، عدد البراميل المباعة يومياً يكون:

والإيراد اليومي $p(x)$ بالدولارات وفقاً لسعر البيع الجديد $x + 30$ هو :

$p($

أي أن:

R

بما أن زيادة كل دولار في اليوم بسبب إنخفاضاً في البيع مقداره 20000 برميل في اليوم الواحد وبما أن الإنتاج أعلي هو 1000000 برميل في اليوم فالحد الأقصى لزيادة السعر هو $x =$ 50دولاراً (لماذا) ولذلك فالمسالة إيجاد النهاية العظمي ل$R(x)$ في الفترة $[0 , 50]$ نبدا الأن في إيجاد القيم الحرجة :

هي القيمة الحرجة الوحيدة بما أن :

لدينا:

لذلك فإن ل$R(x)$ نهاية عظمى نسبية ونهاية عظمى مطلقي في $x = 10$ ، لذلك فإن علي منتج البترول أن يرفع السعر بمقدار 10 دولارات أي 40 دولاراً لكل برميل للحصول علي أكبر إيراد ممكن.

التطبيقات العملية للنهايات العظمي والصغرى في متغير واحد:-

يستخدم علم التفاضل في حل الكثير من المسائل ذات الصيغة العلمية والتطبيقية وتتلخص طريقة الحل في إيجاد النهايات العظمي والصغرى لبعض الدوال التي تمثل تلك الكميات المراد دراستها.
فعلي ،،،،، في مجال الصناعة يمكن بحث الشروط اللازمة التي تحقق أكبر إنتاج يمكن بإقل تكاليف لازمة.

وسنركز اهتمامنا علي تلك التطبيقات التي يلزم حلها وضع نموذج رياضي للمسالة بربط بين متغيرين وذلك بايجاد الدالة y (المتغير التابع) بدلالة المتغير المستغل x ، ثم البحث عن تقيم x التي تجعل y اكبر أو اقل ما يمكن تبعاً لنوع المسالة المطلوبة حلها . ونلخص طريقة الحل في ما يلي.

1 - السهولة يفضل وضع نموذج ،،،،، ، أو نموذج هندسي للمشكلة . وتحديد الكميات المتغيرة والرموز لها بمتغيرات وكذلك تحديد الكميات الثابتة والرموز لها بثوابت .

2 - كتابة معادلة الكميات المراد حساب النهايات العظمى والصغرى لها ، ولتكن المتغير التابع y بدلاله متغير واحد وليكن x وهذا بدوره يتطلب بعض الحسابات الجبرية ، تحددها المعلومات المعطاه في المسالة.

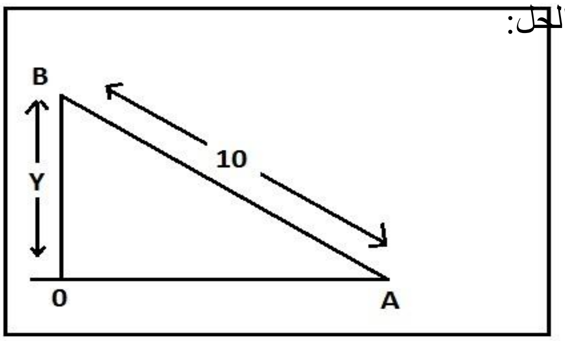
3 - إذا كانت العلاقة المشار اليها في الخطوات السابقة علي $y = f(x)$ فنحصل علي قيمة x التي تجعل y لها نهاية عظمي أو انها صغري من المعادلة $\frac{\Delta y}{\Delta x} = 0$ مع ملاحظة أن قيمة x التي تجعل $y^1 = 0$، $y'' = 0$ تعطي نهاية صغرى للمتغير y . إما قيم x التي تجعل $y^1 = 0$ و $y'' < 0$ تعطي نهاية عظمي للمتغير y .

التطبيقات:

مثال(1):

سلم طوله 10 أمتار ينزلق طرفه علي الأرض أفقية بمعد تغير قدره 1سم/ثانية فما معدل إنزلاق طرفه الآخر علي الحائط العامودي في اللحظة التي يبعد بها الطرف عن الأرض مسافة قدرها 6أمتار.

الحل:



نفرض أن:

حسب نظرية فيثاغورث

نعلم أن معدل انزلاق A هو:

ولحساب معدل إنزلاقB في اللحظة التي يكون فيها $y = 6$ نشتق طرفي المعادلة (1) بالنسبة للزمن (t) فنجد أن:

عندما $y = 6$ فإن $x = 8$ وذلك إستناداً للعلاقة (1) بالتعويض نجد أن:

$$\frac{\partial y}{\partial t} = {}^{0.04}/_{3}\ {}^{m}/_{3}$$

مثال (2):

تذوب كرة ثلجية محافظة علي شكلها ، فإذا كان معدل تناقص نصف قطرها يساوي $19\ {}^{cm}/_{s}$ فما معدل تناقص حجمها في اللحظة التي يكون فيها طول نصف قطرها يساوي $3cm$ ما هو معدل تناقص مساحتها السطحية عند ذلك؟!

الحل

$V \equiv$ الكرة حجم

$r \equiv$ نصف القطر

$$\frac{dv}{dr} = 4\pi r^2 \frac{dr}{dt}$$

$$\frac{d^{-}v^{-}}{dt} = 4\pi \, {cm^3}/{s}$$

مساحة الكرة:

ومنه:

$$\frac{ds}{dt} =$$

مثال (3):

إنطلقت سيارة من النقطة A شرقاً بمعدل تغيير قدره 60كم/ساعة ،وإنطلقت شمالاً من نفس النقطة وبنفس الوقت سيارة أخري بمعدل تغيير قدره 80كم/ساعة فما معدل التباعد بينهما بعد ساعة واحدة من نقطة إنطلقهما؟

الحل

بغرض أن موقع السيارة الأولي عند اللحظة (t) يقع علي بعد x من نقطة البداية A وموقع السيارة الثانية يقع علي بعد y من النقطة A وبغرض أن:

فإن:

$$x^2 + y^2 = z \text{----------------}(*)$$

لنشتق الطرفين بالنسبة للزمن نجد أن:

$$2Z\frac{\partial z}{\partial t} = 2x\frac{\partial x}{\partial t} + 2y\frac{\partial y}{\partial t} \text{--------------------}(**)$$

بعد ساعة من الإنطلاق فإن:

ومن العلاقة (*) نجد أن :

وبما أن :

وبالتعويض في العلاقة (**) نجد أن:

أذن معدل التباعد يساوي 100كم/ساعة.

مثال(4):-

فرق الجهد في دائرة كهربية يساوي 100 فولت إذا رمزنا لشدة التيار الكهربائي بالرمز (I) مقدرة بالأمبير وللمقاومة بالرمز (R) مقدرة بالأوم ، فأوجد معدل تغير التيار بالنسبة للمقاومة بوجه عام أوجد هذا المعدل إذا كان $(R = 15)$.

الحل

العلاقة بين فرق الجهد وشدة التيار والمقاومة هي:

أن معدل تغير (i) بالنسبة للمقاومة Rهو:

وعندما $R = 15$ فإن:

إذن عندما $R = 15$ فإن شدة التيار تتناقص بمعدل تغير قدره $4/9$ أمبير لكل أوم.

مثال(5):

يصب سائل في مخروط دوراني طول نصف قطر قاعدته (8cm) وإرتفاعه (12cm) إذا كان معدل تغيير حجو السائل المنسكب يساوي $\frac{4\pi}{9}\,cm^3/s$ ، أوجد معدل إرتفاع السائل في المخروط في اللحظة التي يكون فيها إرتفاع السائل في المخروط يساوي (5cm) .

الحل

نفرط أن طول نصف قطر مخروط السائل

يساوي (x) وأن إرتفاعه يساوي (h) عندئذ

فان حجم مخروط السائل يساوي:

من تشابه المثلثين ADB , AEF نجد أن:

ومنه:

وبالتعويض في العلاقة (*):

لنشتق طرفي المعادلة بالنسبة ل(t) الزمن فنجد أن:

$$\frac{d^{-}v^{-}}{dt} = {}^{4}\!/_{9}\,\pi h^{2}\,\frac{dh}{dt} \text{ ------------}(**)$$

لكن $h = 5\;,\quad \frac{d^{-}v^{-}}{dt} = \frac{4\pi}{9}$

بالتعويض في (**) نجد أن:

إذن معدل تغيير إرتفاع السائل هو$0.04\ {}^{cm}\!/_{sec}$

مثال (6):

صاحب مصنع يريد أن يصنع علب مفتوحة من أعلى من الالمنيوم مربعة الشكل طول الضلع $(24cm)$ وذلك بأن يقطع منها مربع صغير من كل ركن من أركانها الأربع ثم نتني الأطراف . أوجد طول الضلع المربع الصغير الذي سوف يستقطع حتي يصل علي أكبر حجم ممكن للعلبة؟

الحل

نفرض أن X طول ضلع المربع الصغير الذي سوف يستقطع و V حجم العلبة.

من الشكل:

و V عندما : $X = 0$ و$X = 12$

قيمةX التي نرغب في إيجادها في الفترة $[0,12]$

القيم الحرجة : $X = 12X = 4$

القيمة العظمة المطلقة تحدث عند القيم الحرجة أو عند أطراف الفترة $[0 , 12]$.

v

v(

القيمة العظمي المطلقة للحجم v في الفترة $[0, 12]$ 1024 ويحدث عند 4 إذن أكبر حجم مركب هو 1024cm^3 ونحصل عليه بقطع مربع طول ضلعه (4cm) من الأطراف.

مثال(7):

يراد تشيد خزان كبير بدون غطاء ذي قاعدة مربعة وجوانب رأسية علي شكل مستطيلات بحيث يتسع (32cm^3) من الامتار المكعبة من الماء لتغذية عدة مساكن تكلفة المادة التي سيصنع منها الخزان عشرون دينار للمتر المربع ما هي أبعاد الخزان التي تجعل التكلفة أقل ما يمكن؟!

الحل

نفرض أن x ترمز لطول ضلع القاعدة وأن y للإرتفاع نريد القيمة الصغرى للتكلفة c ، التكلفة تساوي مساحة الخزان مضروبة في المتر المربع:

حجم الماء 32 من الأمتار المكعبة وتساوي حجم الخزان

لإيجاد النقاط الحرجة:

بهذا يلزم أن يكون طول القاعدة للخزان 4 أمتار والإرتفاع:

للتحقيق في أن $x = 4$ نهاية صغرى

$$\frac{\partial c}{\partial x}$$

إذن نهاية صغرى عندما $x = 4$ يعني أقل تكلفة للخزان.

مثال (8):

أوجد عددان مجموعهما ثمانية ومجموع مرابيعهما أصغر ما يمكن؟!

الحل

نفرض أن العددان هما x, y

من المعطيات:

نفرض لدالة:

و

ومنها:

للتأكد أن $x = 4$ نهاية صغرى

إذن نهاية صغرى للعددين x , y

$$X = 4 , y = 4$$

مثال(9):

تتحرك نقطة علي منحني وفقاً للمعادلة الزمنية :

(i) أوجد سرعة النقطة عند :

$t = 2 \quad , \quad t = 1$

(ii) أحسب التسارع (العجلة) في اللحظة $t = 0$ والمسافة المقطوعة عند ذلك مقدرة بالسنتميتر لكل ثانية؟!

الحل

(i) السرعة (معدل التغيير):

(1) عند $t = 1$

$$\frac{\partial s}{\partial t}(1) =$$

(2) عند $t = 2$

$\frac{\partial s}{\partial t}$

(ii) التسارع (معدل التغيير للسرعة):

عند $t = 0$

مثال(10):

يسكب سائل علي حوض علي شكل متوازي مستطيلات : طوله 100cm وعرضه 80cm وإرتفاعه 120cm ، بمعدل تغيير قدره $2\ \text{cm}^3/\text{s}$ ، أوجد معدل إرتفاع السائل في أي لحظة؟!

الحل

نفرض أن إرتفاع السائل في الحوض يساوي $h\ \text{cm}$ إذا حجم الماء مقداره مساحة القاعدة والتي تساوي (100) (80) مصدراً في إرتفاع السائل الذي يعادل $h\ \text{cm}$ ، إذن حجم الماء في الحوض هو:

ومعدل تغيير حجم السائل يساوي

النتائج :

من خلال دراسة موضوع البحث توصل الدارسون للنتائج التالية:

1) تبين النهايات العظمى و الصغرى أهمية في معرفة سلوك الدالة .
2) يعتبر إختبار المشتقة الثانية للدالة أبسط و أسرع في تحديد القيم العظمى و الصغرى للدالة .
3) يستفاد من إختبار المشتقة الأولى و الثانية في حل المسائل الاقتصادية .
4) يمكن عمل نماذج رياضية تستخدم مفهوم النهايات العظمى و الصغرى لبعض العلوم .

التوصيات :

بعد أن وفقنا الله سبحانه و تعالى بإكمال هذا البحث نحن نوصي الدارسون بالآتي :

1) إجراء دراسات و بحوث على النهايات العظمى و الصغرى على الدوال و تطبيقاتها في أكثر من متغير .
2) دراسة النهايات العظمى و الصغرى على الدوال و تطبيقاتها في متغير واحد في مجالات محددة مثل الهندسة أو الفيزياء أو الاقتصاد .
3) التوسع في دراسة التطبيقات العظمى و الصغرى للدوال في كورسات طلاب البكالريوس .
4) إجراء دراسات و بحوث في تطبيقات على النهايات العظمى و الصغرى في مجالات أخرى غير التي تم تناولها في هذا البحث (طبية – علوم إجتماعية) .

مصادر البحث:

1 - أساسيات التحليل الرياضي
عبدالله المعلول دوش وأخرون
الطبعة الاولي 1991م
رقم الإيداع 91-1064
دار الكتب الوطنية
2 - الرياضيات وتطبيقاتها في العلوم الإدارية والإجتماعية
هوارد التون- براناردكولمن
دار المريخ للنشر- الرياض-المملكة العربية السعودية
1422هـ - 2002م -1426هـ -2005م
3 - مبادئ التفاضل والتكامل
ملخصات شؤم إيزي
فريد سغير
الطبعة العربية الاولى 2004
الدار الدولية للإستثمارات الثقافية
4 - حساب التفاضل والهندسة التحليلية
إبراهيم دبب سعيني-1422هـ
فهرست مكتبة الملك فهد الوطنية أننا النشر
5 - التفاضل والتكامل المتقدم
موراي سنجل
الطبعة العربية الثامنة – 2008م
الدار الدولية للإستثمارات الثقافية
6 - مبادئ الرياضيات
د/هادي مجيد الحداد
دار المريخ للنشر 1417هـ - 1997
الرياض – المملكة العربية السعودية
7 - أسس علم الرياضيات، التفاضل والتكامل
د/عبدالشافي فهمي عباده

د/حسن مصطفى العويضي

د/محمد طلعت عبد الناصر

الطبعة الثانية مزيدة ومنقحة 1426هـ -2005م

دار الفكر العربي

8 - الرياضيات المتخصصة – الكتاب الثاني

الصف الثالث ثانوي

آفاق للنشر والطباعة

رقم الإيداع 2008/778

9 - التفاضل والتكامل- الجزء الأول

د/ عنان عوض

د/أحمد علاونة

د/مفيد عزام

دار الفكر للنشر والتوزيع