بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا

كلية التربية

قسم العلوم _ شعبة الرياضيات

بحث تكميلي لنيل درجة بكلاريوس الشرف في الرياضيات بعنوان:

المعــادلات التفـاضـلية العادية من الرتبة الأولى وبعض طرق حلها وتطبيقـاتهـا

المـعـادلات الـتفـاضـلية الـعـاديـة مـن الـرتـبـة الأولـى وبـعض طرق حلـهـا
almueadalat altafaduliat aleadiat min alrutbat al'uwlaa wabed turuq haliha

إعداد الطلاب:

- أحمد حسن الشيخ إدريس مصطفى
- آلاء خالد أحمد عبدالحليم
- إنعام عبدالرحمن حامد عبدالرحمن
- موسى عيسى محمد إبراه

إشراف الأستاذ:

د/أحمد عبد الرحمن عبدالله

سبتمبر 2016

الآيــة الكريمة

قال تعالى : [أَمْ مَنْ هُوَ قَانِتٌ آَنَاءَ اللَّيْلِ سَاجِدًا وَقَائِمًا يَحْذَرُ الْآَخِرَةَ وَيَرْجُو رَحْمَةَ رَبِّهِ قُلْ هَلْ يَسْتَوِي الَّذِينَ يَعْلَمُونَ وَالَّذِينَ لَا يَعْلَمُونَ إِنَّمَا يَتَذَكَّرُ أُولُو الْأَلْبَابِ]

الزمر .{9}

صدق الله العظيم

الإهداء

إلى من جرع الكأس فارغاً ليسقيني قطرة حب

إلى من كلت أنامله ليقدم لنا لحظة سعادة

إلى من حصد الاشواك عن دربي ليمهد لي طريق العلم

إلى القلب الكبير والدي العزيز

إلى من أرضعتني الحب والحنان

إلى رمز الحب وبلسم الشفاء

إلى القلب الناصع بالبياض

والدتي الحبيبة

إلى الذين بذلوا كل جهد وعطاء لكي أصل إلى هذه المرحلة المتقدمة

أساتذتي الكرام

إلى القلوب الطاهرة الرقيقة والنفوس البريئة إلى رياحين حياتي

إخوتي

الشكر والعرفان

الشكر لله عز وجل الذي أنار لي الدرب وفتح لي أبواب العلم وأمدني بالصبر والإرادة .

حينما نعبر شط العمل الدؤوب لا يهيم في داخلنا سوى أولئك الذين غرسوا زهراً جميلاً في طريقنا ، ألئك الذين منحونا العزم تلو العزم ، لنتخطى الصعاب ، ونقف واثقي الخطى ، نشاطرهم الإبداع حرفاً ولغةً ,

لا يسع حروفي إلا أن تمتزج لتكون كلمات شكر وعرفان

ليس لأحد معين إنما لكل من ساهم في هذا العمل من خلال الإساتذة والمشرفين والإصدقاء ,

لكم ألف شكر وتحية

مستخلص البحث :

يناقش هذا البحث المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الأولى وبعض طرق حلها وتطبيقاتها .

إستعرضنا في الفصل الأول من هذا البحث المقدمة وأهداف البحث والمفاهيم الأساسية التي كان الهدف منها التعرف على معنى المعادلات التفاضلية ورتبتها ودرجتها ، ومشكلة البحث والمنهج المستخدم في البحث .

أما الفصل الثاني فقد استعرضنا بعض أنواع المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الأولى وبعض طرق حلها، والتي من ضمنها حل المعادلة التفاضلية العادية بإستخدام المعادلات ذات المتحولات المنفصلة والمعادلة التفاضلية المتجانسة ومعادلة ريكارتي والمعادلة الخطية من الدرحة الأولى .

أما في الفصل الثالث تناولنا بعض طرق حل المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى بإستخدام طريقة فصل المتغيرات والمعادلة المتجانسة والمعادلة التامة وطريقة ليبنز ماكلورين ومعادلة بيرنولي ,

أما في الفصل الرابع إستعرضنا بعض تطبيقات المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الأولى مثل المسارات المتعامدة والمسارات الغيرمتعامدة و مسائل النمو والإضمحلال و مسائل درجة الحرارة ومسائل الجسم الساقط .

Abstract

In this research the normal differential equations from the first degree have been discusses well as some of ways of their solution beside some applications.

We well review in the first chapter the plan of the research, introduction, the aim, basic concept which was intended recognized the meaning of the normal differential equations, rank and degree, problems and the concept which was used.

In the second chapter we review some types of the normal differential equations of the first order and some ways to solve them such and solving the normal differential equation by using the equations discrete variable, differential equations homogenous, Reckarte equation and linear equation of the first degree.

In the third chapter we review some method of solving the normal differential equations from the first rank and

degree using method of separation of variables, homogenous equation, full equation, method of Maclaurin and Bernoulli equation.

In the fourth chapter we talked about some of the applications of the normal differential equations of the first rank like orthogonal tracks and non-orthogonal tracks, growth and decay issues, the temperature issues and falling object issues.

But in the fifth chapter we dealt with the results, recommendations of this research and references.

الفهرس

الفصل الأول

المقدمة

الإطار العام

(1-1) تمهيد :

ظهر مفهوم المعادلة التفاضلية منذ طرح مفهوم التفاضل وبدأ على نحو أقوى مع بداية القرن السادس عشر وتطورت موضوعات المعادلات التفاضلية بسرعة فائقة وذلك لكثرة تطبيقاتها وإرتباطها المباشر بعدد من فروع الرياضيات مثل الحسبان التفاضلي والتكاملي والمعادلات التكاملية وحسبان التغيرات ومسائل التقريب والحلول المثلى والشروط الحدية وكثير من البحوث الفيزيائية والكيميائية .

المعادلة التفاضلية هي معادلة تحتوي مشتقات وتفاضلات لبعض الدوال الرياضية وتظهرفيها بشكل متغيرات المعادلة ويكون الهدف من حل هذه المعادلات هو إيجاد هذه الدوال الرياضية التي تحقق مشتقاتها هذه المعادلات .

تبرز هذه المعادلات التفاضلية بشكل كبيرفي تطبيقات الفيزياء والهندسة وحتى النماذج الرياضية المتعلقة بالعمليات الحيوية والكيميائية والإجتماعية والإقتصادية .

وهي علاقة تربط بين متغير مستقل واحد او أكثر والدالة المبحوث عنها التابعة لهذه المتغيرات التي يفترض أنها متغيرات حقيقية كذلك الدالة .

وعندما تكون الدالة متعلقة بمتغير واحد فالمعادلة التفاضلية تمثل معادلة تفاضلية عادية , أما عندما تكون الدالة متعلقة بعدد من المتغيرات فالمعادلة التفاضلية تدعى معادلة تفاضلية جزئية . وكما في المعادلات الجبرية هنالك جملة معادلات تفاضلية عادية وكذلك جملة معادلات تفاضلية جزئية .

(2-1) مشكلة البحث :

المعادلات التفاضلية وتعدد أنواعها تشكل غموض في كيفية الحل وكيفية التفريق بين أنواعها المختلفة , وكذلك توجد صعوبة في تطبيق هذه المعادلات في مختلف المجالات الفيزيائية والكيميائية وغيرها لإختلاطها بالعلوم الأخرى ولصعوبة هذه المجالات نفسها لأنها متعددة الفروع وشاملة من العلوم لذلك تطبيق هذه المجالات ليس بالأمر السهل .

(3-1) أهداف البحث :

التعرف على المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الأولى .

1- التعرف على بعض طرق حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى .
2- تطبيق مفهوم المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى في بعض المجالات المختلفة .

(4-1) أهمية البحث :

- يبين البحث المعادلات التفاضلية بطريقة سهلة مبسطة تساعد في تكوين خلفية علمية ثابتة .
- توضيح التطبيقات التي تؤكد أن للرياضيات أهمية كبرى في الحياة العامة .

(5-1) مصطلحات البحث :

- ### المعادلة :

هي عبارة رياضية مؤلفة من رموز رياضية تنص على مساواة تعبيرين رياضيين ويعبر عن هذه المساواة عن طريق علامة التساوي (=) .

- ### المعادلة التفاضلية:

هي علاقة تربط بين متغير مستقل واحد أو أكثر والدالة المبحوث عنها التابعة لهذه المتغيرات " التي يفترض أنها متغيرات حقيقية كذلك الدالة ".

- ### رتبة المعادلة التفاضلية :

تعرف على أنها رتبة أعلى رتبة للمشتقة الموجودة في المعادلة فإذا حوت المعادلة مشتق أول و مشتق ثاني فقط تكون المعادلة من الرتبة الثانية وإذا حوت المعادلة مشتقات أولى فقط تكون المعادلة من الرتبة الأولى .

- **درجة المعادلة التفاضلية :**

هي الأس أو القوة التي يرفع إليها أعلى تفاضل في المعادلة .

(6-1) منهج البحث :

المنهج الوصفي التحليلي :

يعتمد على دراسة الظاهرة كما توجد في الواقع ويهتم بوصفها وصفاً دقيقاً ويعبر عنها كيفياً وكمياً , فالتعبير الكيفي يصنف الظاهرة ويوضح خصائصها أما التعبير الكمي يعطيها وصفاً رقمياً يوضح مقدار هذه الظاهرة ودرجة إرتباطها مع الظواهر الأخرى .

الفصل الثاني

بعض أنواع المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الأولى وبعض طرق حلها

(1-2) أنواع المعادلات التفاضلية :

1) المعادلة التفاضلية العادية :

هي المعادلة التي تعتمد على متغير مستقل واحد . مثل :

1) $\frac{dy}{dx} + xy = 0$

2) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sin x$

2) المعادلة التفاضلية الجزئية :

هي المعادلة التي تحتوي على أكثر من متغير مستقل ومشتقاته الجزئية . مثل :

1) $\frac{d^2z}{dx^2} + \frac{d^2z}{dy^2} + \frac{d^2z}{dt^2} = 0$

2) $\frac{d^2z}{dt^2} = k\frac{d^2z}{dx^2}$

(2-2) حل المعادلات التفاضلية العادية :

تعريف: نقول عن المتغيرالتابع$y = f(x)$ أنه حل للمعادلة التفاضلية إذا تحقق الشرطان :

1) $(x, f(x), f'(x), \dots \dots f^{(n)}(x) \epsilon D, \forall x \epsilon I$
2) $f(xf(x)f'(x) \dots \dots f^{(n)}(x) = 0, \forall x \epsilon I$

حيث تنقسم حلول المعادلة التفاضلية العادية إلى :

1) الحل العام للمعادلة التفاضلية العادية :

وهو الحل الذي يحوي ثوابت إختيارية في المعادلة التفاضلية ويكون في الشكل :

$Q(x, y, c_1, \dots$

مثال (1) :

الحل العام للمعادلة :

$$y'' + 4y = 0$$
$$y = c_1 \sin 2x + c_2 \cos 2x$$

حيث c_1, c_2 ثابتان إختياريان

2) الحل الخاص للمعادلة التفاضلية العادية :

هو الحل الذي نحصل عليه بإعطاء قيم عددية للثوابت الموجودة للحل العام للمعادلة التفاضلية .

مثال (1) :

الحل الخاص للمعادلة :

$$y'' + 4y = ($$
$$y = \sin 2x$$

$c_1 = c_2 = 1$

ملاحظة هامة :

نستطيع الحصول على حل شاذ للمعادلة وهو الحل الذي لا يمكن الحصول عليه من الحل العام وإنما نحصل عليه أثناء حل المعادلة .

(3-2) أنواع المعادلات التفاضلية العادية ذات الرتبة الأولى المحلولة بالنسبة للمشتق وبعض طرق حلها :

(1-3-2) معادلة تفاضلية عادية ذات متحولات منفصلة :

هي كل معادلة تفاضلية في الشكل $y' = f(x,y)$ حيث يمكن إعادة صياغتها بحيث تجتمع dx, x في أحد طرفيها و$dy. y$ في الطرف الأخر حيث تكتب بالشكل :

$$dy = f(x, y$$

وتدعى هذه المعادلة ذات متحولات منفصلة إذا كان n تابع لـ x و m تابع لـ y ويمكن كتابتهما بشكل عام

$$\mathrm{m(x)dx} \ +$$

وهي قابلة للتكامل مباشرة

$$\int m\,(x)dx + \int n\,(y)dy = c$$

مثال (1) :

$$(1 + 3x^2)dx$$

هي ذات متحولات منفصلة ولكن حلها العام هو $(x + x^3 + y^2 = c)$وهناك عدد كبير من المعادلات التي يمكن تحويلها لمنفصلة المتحولات ببعض العمليات البسيطة وسنناقش العديد من الحالات التي يمكن تحويلها لهذا الشكل :

1) المعادلة من الشكل :

$$f(y)dx + g$$

حيث تعيدها إلي منفصلة المتحولات بالقسمة على $f(y)g(x)$ فتصبح ذات متحولات منفصلة من الشكل :

$$\frac{dx}{f(x)} + \frac{dy}{g(y)}$$

2) المعادلة من الشكل :

$$m_1(x).m_2($$

حيث تعيدها إلى ذات متحولات منفصلة بقسمة طرفيها على $m_2(y)\ n_1(x)$

لتصبح على الشكل

$$\frac{m_1(x)}{n_1(x)}dx +$$

3) المعادلة من الشكل :

$$y' = f(y +$$

تصبح منفصلة بإجراء تغيير في التابع بعلاقة من الشكل :

$$z = y + ax$$

وبالتعويض نجد أن $y' + a = z'$ وبالتعويض ينتج :

$$z' = f_1(z)$$

$$dx = \frac{dz}{f_1(z)}$$

فحلها العام هو

$$f(z) = x -$$

وبالعودة للمعادلة السابقة نجد أن :

$$x - c = f(y$$

علماً بأن جذر المعادلة $f'(z) = 0$ قد يكون حلاً للمعادلة

4) المعادلة من الشكل :

$$y' = f(x)g(y)$$

بحيث g, f تابعان مستمرأن حيث أن هذه المعادلة تكتب بالشكل

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x)$$

فتصبح ذات متحولات منفصلة .

إذا كان g(a)=0 كان التابع الثابت y=a حلاً للمعادلة

(2-3-2) المعادلات التفاضلية المتجانسة :

تسمي المعادلة من الشكل $M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$ معادلة متجانسة من الدرجة الأولى إذا كان التابعان M,N متجانسان من الدرجة نفسها.

حيث يمكن تعويض كل x بـ λx و y بـ λy

وللتعرف على المعادلة المتجانسة يجب التعرف على التابع المتجانس حيث التابع المتجانس هو كل تابع معرف على مجال غير تافه حيثيكون من الرتبة K اذا استطعنا أن نستبدل كل x بـ λx و y بـ λy

بحيث يحقق المتطابقة

$$f(\lambda x, \lambda y) =$$

مثال (1) :

حل المعادلة التالية

$$y' = \frac{y}{x}\left[1 -\right.$$

الحل :

لنضع $z = \frac{y}{x}$ فيكون $y = x.z$ وعليه فإن

$$y' = z + xz'$$

$$xz' = (1 -$$

ولهذه المعادلة متحولات منفصلة هما z=1 , z=0 وهذا يعطي للمعادلة حلين شاذين هما y=x , y=0

لنفترض أن z≠1, z>0 من الواضح هنا أن تغيير التابع المجهول ثم نقوم بمكاملة هذه المعادلة $z=w^2$

$$2xw' = 1 -$$

$$\frac{2w'}{(w+1)^2}x + \frac{w-1}{w+1} = 0$$

$$x\frac{w-1}{w+1} = \lambda$$

$$z = w^2 = [$$

وعليه فإن

$$y = x\left[\frac{x+\lambda}{x-\lambda}\right.$$

(3-3-2) معادلة ريكارتي :

المعادلة التفاضلية الأتية

$$y' = P(x) +$$

حيث P , Q ,R دوال في x

P(x) ≠ 0

تسمى معادلة ريكارتي

مثال (1) :

أوجد الحل العام لمعادلة ريكارتي

$$\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} = y^2 - 2$$

إذا كانت $y_1 = e^x$حلاً لها

الحل :

بإستخدام التعويض الأتي

$$y = e^x + \frac{1}{z} \rightarrow \frac{dy}{dx} = e^x - \frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}$$

والتعويض عن ذلك في المعادلة المعطاة نحصل على

$$\frac{dz}{dx} + (2e^x - 2e^x)\, z = -1$$

$$\therefore \frac{dz}{dx} = -1$$

(4-3-2) المعادلة الخطية من الدرجة الأولي :

الصورة العامة للمعادلات الخطية من الرتبة الأولى يمكن كتابتها على الصورة :

$$y' + P(x)y$$

حيث P , Q دوال متصلة في x أو ثوابت

طريقة حل المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى :

مثال (1) :

أوجد الحل العام للمعادلة

$$y' + 3y = e$$

الحل :

$$P(x) = 3$$

نوجد معامل التكامل

$$U(x) = e^{\int 3dx} = e^{3x}$$

ويكون الحل العام للمعادلة هو

$$ye^{3x} = \int e^{3}$$

$$ye^{3x} = \int e^{5}$$

$$ye^{3x} = \frac{e^{5x}}{5}$$

$$\therefore y = \frac{e^{2x}}{5} +$$

وهو الحل العام للمعادلة ويحتوي على ثابت اختياري واحد

مثال (2) :

أوجد الحل العام للمعادلة

$$y' + \frac{y}{x} = e^{x}$$

الحل :

$$P(x) = \frac{1}{x}$$

نوجد معامل المكاملة

$$U(x) = e^{\int \frac{dx}{x}}$$

$$U(x) = e^{\ln x}$$

ويكون الحل العام للمعادلة هو

$$xy = \int x\, e^{x}$$

$$xy = xe^{x} -$$

$$\therefore y = e^{x} - \frac{e^{x}}{x} + \frac{c}{x}$$

الفصل الثالث

بعض طرق حل المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الأولى والدرجة الأولى

(1-3) الطريقة الأولى :- فصل المتغيرات :

تستخدم هذه الطريقة لحل المعادلات التفاضلية على الصورة الأتية :

$$M(x.y)dx +$$

القابلة للفصل التي يمكن أن تأخذ الصورة الأتية :

$$M_1(x)N_2(y)$$

هذه المعادلة يمكن حلها بالتكامل إذا أمكن التخلص من الحدان $M_2(x)$, $N_2(y)$ من المعادلة ويمكن تحقيق ذلك بضرب طرفي المعادلة في الحد $\frac{1}{M_2(X)N_2(y)}$ وهذا الحد يسمى معامل التكامل أو Integrating factor وحينئذ تصبح المعادلة على الصورة الاتية :

$$\int \frac{m_1(x)}{m_2(x)} dx$$

$$M_2 \neq 0 \text{ , } N_2$$

وهذا الحل الذي حصلت عليه هو حل عام يمثل عائلة من المنحنيات وبه ثابت إختياري واحد حيث أن المعادلة التي نحن بصدد حلها من الرتبة الأولى .

ونلاحظ أن طريقة فصل المتغيرات تعتبر من أبسط طرق الحل إذا كانت ممكنة ونلاحظ أنه من البديهي هنا أن تكون الدالتان $M_2(x)N_2(y)$ غير صفريتان . وألا تكون الدوال متصلة كما أننا نلاحظ :

1) لابد من تحقيق صورة المعادلة أولاً حتى تتمكن من إستخدام هذه الطريقة.
2) لا يمكن إستخدام هذه الطريقة إذا كانت المعادلة على الصورة الأتية :

$$[M_1(x) \pm N_1$$

ونستثني من ذلك الحالة الخاصة الأتية :

$M_2(x) = c_1$ $\quad$ $N_1(y) = c_2$

مثال (1) :

أوجد حل المعادلة التفاضلية الأتية :

$$xydx + y\,\mathrm{si}$$

الحل:

بقسمة طرفي المعادلة على y نحصل على

$$x\,dx + \sin y$$

وبتكامل الطرفين نحصل على

$$\int xdx + \int \sin y\, dy = 0$$

$$\therefore \frac{x^2}{2} - \cos y = c$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية .

(2-3) الطريقة الثانية :- المعادلة التفاضلية المتجانسة :

المعادلة التفاضلية المتجانسة من الرتبة الأولى :

$$y' = \frac{dy}{dx} = f$$

تكون المعادلة متجانسة من الرتبة الأولى إذا تحقق
عندما تكون

$$f(x, y) = \emptyset$$

أي أن المعادلة على الصورة

$$\frac{dy}{dx} = \emptyset\left[\frac{y}{x}\right]$$

وبوضع $\lambda = \frac{1}{x}$ في الدالة

$$f(\lambda x, \lambda y)$$

نحصل على

$$f(x, y) = f \Big|$$

هذه المعادلة غير مفصولة المتغيرات ولكن بإستخدام التعويض

$$v = \frac{y}{x}$$

$$\therefore \frac{dy}{dx} = v +$$

بالتعويض في المعادلة نحصل على :

$$v + xv' = f$$

وهذه المعادلة يمكن فصل متغيراتها كالأتي :

$$\frac{dv}{f(i,v)-v} = \frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \int \frac{dv}{f(i,v)-v} = \int \frac{dx}{x+c}$$

ثم بإجراء التكامل نحصل على الحل العام
وإذا كانت المعادلة التفاضلية على الصورة

$$M(x, y)dx +$$

لكي تكون المعادلة متجانسة هو ان كل من $M(x, y), N(x, y)$ دوال متجانسة من نفس الدرجة كل من x, y.
والنظرية الأتية تبين طريقة حل المعادلة المتجانسة من الرتبة الأولى .

نظرية:

إذا كانت المعادلة التفاضلية

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

متجانسة فإن التعويض $y = xv$ يجعل هذه المعادلة قابلة للحل بفصل المتغيرات .

البرهان :

حيث أن المعادلة التفاضلية المتجانسة يمكن كتابتها على الصورة

$$\frac{dy}{dx} = \emptyset\left[\frac{y}{x}\right]$$

بإستخدام التعويض $\quad y = xv$

$$\therefore \ \frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{dx}} = v +$$

تأخذ المعادلة الصورة الأتية

$$V + \frac{xdv}{dx} = \emptyset(v)$$

أي أن

$$(\emptyset(v) - v)dx = xdv$$

وهي معادلة تفاضلية قابلة للحل بطريقة فصل المتغيرات وذلك بالضرب في عامل التكامل

$$\frac{1}{(\emptyset(v) - v)}$$

نحصل على معادلة مفصولة المتغيرات على الصورة

$$\int \frac{dv}{(\emptyset(v) -}$$

$$\int \frac{dv}{(\emptyset(v) -}$$

$$\int \frac{dv}{(\emptyset(v) - v)} = f(v)$$

فإن الحل يأخذ الصورة

$$f(v) + \ln x = c$$

وهذا يمثل عائلة المنحنيات

$$f\left(\frac{y}{x}\right) + \ln x = c$$

(3-3) الطريقة الثالثة :- المعادلات التامة :

تعريف : المعادلة التفاضلية :

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

تسمى معادلة تامة إذا وجدت دالة $f(x, y)$ بحيث أن

$$df(x, y) = M(x, y)dx + N(x, y)dy$$

وفي هذه الحالة يكون الحل على الصورة

$$f(x. y) = c$$

مثال (1) :

المعادلة التفاضلية

$$2xydy + y^2dx = 0$$

معادلة تامة لأن

$$xdy + ydx = d(x^2, y^2)$$

مثال (2) :

المعادلة التفاضلية

$$xdy + ydx = 0$$

معادلة تامة لأن

$$xdy + ydx = d(x^2, y^2)$$

بعد التأكد من أن المعادلة تامة بتحقق الشرط الأتي:

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

يمكن إيجاد الحل العام للمعادلة التفاضلية التامة بإحدى الطرق الأتية :

1) الطريقة الأولى :

وتتلخص في الخطوات الأتية :

1- بإجراء تكامل *M* بالنسبة لــ *X* بإعتبار أن *Y* ثابت التكامل للدالة

$$f(x,y) = \int M(x,y)dx + \emptyset(y)$$

2- بالتفاضل الجزئي بالنسبة إلى y

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\int M(x,y)dx + \emptyset'(y)$$

3- بإستخدام المقارنة مع العلاقة

$$\frac{\partial f}{\partial y} = N$$

ومنها نحصل على $\emptyset'(y)$ ثم بالتكامل نحصل على قيمة $\emptyset(y)$

4- بالتعويض عن $\emptyset(y)$ نحصل على الحل العام

$$f(x,y) = c$$

مثال (1) :

حل المعادلة التفاضلية الأتية

$$\left(y^2 + e^{xy^2} + 4x^3\right)dx + \left(2xye^{xy^2} - 3y^2\right)dy = 0$$

الحل :

من المعادلة نجد أن

$$\frac{\partial \mathrm{m}}{\partial \mathrm{y}} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{y}}\left(y^2 e^{xy^2} + 4x^3\right) = 2ye^{xy^2} + 2xy^3 e^{xy^2}$$

$$\frac{\partial \mathrm{n}}{\partial \mathrm{x}} = \frac{\partial}{\partial \mathrm{x}}\left(2xye^{xy^2} - 3y^2\right) = 2xy^3 e^{xy^2} + 2ye^{xy^2}$$

$$\therefore \frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

الشرط تحقق والمعادلة تامة

يمكن الحصول على الحل بالطريقة الأولى :

$$f(x, y) = \int M(x, y)d = \int (y^2 e^{xy^2} + 4x^3)dx$$

$$= 2ye^{xy} + 2xy^3 e^{xy^2}$$

$$= e^{xy^2} + x^4 + \emptyset(y)$$

لإيجاد $\emptyset(y)$ نفاضل جزئيا بالنسبة إلى y نحصل على :

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 2xye^{xy^2} + \emptyset'(y) = N$$

For $\left[\frac{\partial f}{\partial y} = N\right]$

وبإستخدام العلاقة $\frac{\partial \mathrm{f}}{\partial y} = \mathrm{N}$ نحصل على

$$2xye^{xy^2} + \emptyset'(y) = 2xye^{xy^2} - 3y^2$$

$$\emptyset'(y) = -3y^2$$

$$\emptyset(y) = -y^3 + c$$

وبالتالي فإن :

$$f(x, y) = e^{xy^2} + x^4 - y^3 + c$$

ويكون على الصورة

$$e^{xy^2} + x^4 - y^3 + c = 0$$

2) الطريقة الثانية :

وتتلخص في الخطوات التالية :

1- بإجراء التكامل N بالنسبة إلى y بإعتبار إن x ثابت للدالة

$$f(x, y) = \int N(x, y)dy + \emptyset(x)$$

2- بالتفاضل الجزئي بالنسبة إلى x

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\int N(x, y)dx + \emptyset'(x)$$

3- بإستخدام المقارنة حيث ان :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = M$$

ومنها نحصل على $\emptyset'(y)$ ثم بالتكامل نحصل على قيمة $\emptyset(y)$

4- بالتعويض عن $\emptyset(y)$ نحصل على الحل العام

$$f(x, y) = c$$

مثال (1) :

أوجد حل المعادلة التفاضلية

$$y\sin 2x\,dx - (y^2 - \cos 2x)dy = 0$$

الحل :

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y\sin 2x) = \sin 2x$$

$$\frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(y^2 + \cos 2x) = \sin 2x$$

(4-3) الطريقة الرابعة:- طريقة ليبنز_ ماكلورين :

يمكن عادة حل المعادلات التفاضلية الخطية ذات المعاملات المتغيرة بفرض حل على صورة متسلسلة لا نهائية في قوى x وأبسط هذه الطرق هي إستعمال طريقة ليبنز _ ماكلورين .

مثال (1) :

حل على صورة متسلسلة لانهائية المعادلة التفاضلية

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 5x\frac{dy}{dx} - 3y = 0 \qquad (1)$$

الحل :

نفاضل المعادلة أولاً n من المرات بإستعمال نظرية ليبنز_ماكلورين ونحصل على :

$$(1 - x^2)y_{n+2} - (2n + 5)xy_{n+1} - (n + 1)(n + 3)y_n = 0 \qquad (2)$$

$$y_n = \frac{d^n y}{dx^n}$$

نفرض حلاً للمعادلة (1) على صورة متسلسلة مكلورين:

$$y = y(0) + y_1(0) + \frac{x}{2!}y_2(0) + \cdots + \frac{x^n}{r!}y_r(0) + \cdots \qquad (3)$$

حيث أن $y_r(0)$ هي قيمة $\frac{d^r y}{dx^r}$ عند $x = 0$

بوضع $x = 0$ تؤول العلاقة التكرارية (2) إلى

$$y_{n+2}(0) = (n+1)(n+3)y_n(0)(n \geq 0) \qquad (4)$$

$$\therefore y_2(0) = 1 \cdot 3 \cdot y(0)$$

$$y_3(0) = 2 \cdot 4 \cdot y_1(0)$$

$$y_4(0) = 3 \cdot 5 \cdot y_2(0) = 1 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot y(0)$$

$$y_5(0) = 4 \cdot 6 \cdot y_3(0) = 2 \cdot 4^2 \cdot 6 \cdot y_1(0)$$

$$y_6(0) = 5 \cdot 7 \cdot y_4(0) = 1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot y(0)$$

وبذلك أمكننا التعبيرعن جميع المعاملات التفاضلية عند $x = 0$ بدلالة $y(0)$, $y_1(0)$

وتؤول (3) إلى :

$$y = y(0)\left[1 + \frac{1 \cdot 3}{2!}x^2 + \frac{1 \cdot 3^2 \cdot 5}{4!}x^4 + \frac{1 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 7}{6!}x^6 + \cdots\right] + y_1(0)\left[x + \frac{1 \cdot 4}{3!}x^3 + \frac{2 \cdot 4^2 \cdot 6}{5!}x^5 + \frac{2 \cdot 4^2 \cdot 6^2 \cdot 8}{6!}x^6 + \cdots\right] \qquad (6)$$

ويمكن إعتبار المعادلة (6) بأنها الحل العام للمعادلة (1) لأنها تحتوي على ثابتين إختياريين $y_1(0)$, $y(0)$ ويمكن تعيينها من الشروط الحدية للمسألة .

(5-3) الطريقة الخامسة:معادلة بيرنولي :

تسمي المعادلة على الصورة

$$\frac{dy}{dx} + Py = Qy^n$$

حيث كل من P , Q دالة في x فقط (أوكمية ثابتة) بمعادلة بيرنولي فإذا كانت n=1 فإنه يمكن حل المعادلة بفصل المتغيرات أما إذا كانت n≠1 فإنه يمكن تحويل المعادلة إلى الصورة الخطية كما يأتي :

نقسم طرفي المعادلة على y^n

$$\frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx} + \frac{1}{y^{n-1}}P = Q \qquad (1)$$

Put $v = \frac{1}{y^{n-1}}$

$$v = y^{1-n}$$

$$\frac{dy}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

$$\frac{dv}{dx} = (1-n)y^{-n}\frac{dy}{dx}$$

$$\therefore \frac{1}{y^n}\frac{dy}{dx} = \frac{1}{1-n}\frac{dy}{dx}$$

بالتعويض في المعادلة (1) ينتج

$$\frac{1}{1-n}\frac{dv}{dx} + Pv = Q$$

$$\frac{dv}{dx} + (1-n)Pv = (1-n)Q$$

وهي معادلة خطية في v

مثال (1):

حل المعادلة التفاضلية

$$y' + y = xy^2$$

الحل :

نقسم على y^2 مع فرض أن $y \neq 0$ نجد :

$$y'^{y^{-2}} + y^{-1} = x$$

نفرض أن

$$z = y^{-1} \quad , \quad z' = -y'y^{-2}$$

فالمعادلة السابقة تصبح على الشكل :

$$z' - z = -x$$

عامل التكامل هو

$$u = e^{-\int dx} = e^{-x}$$

وبضرب طرفي المعادلة في عامل التكامل نجد أن :

$$\frac{d}{dx}e^{-x}z = -xe^{-x} = e^{-x}(z' - z) = -xe^{-x}$$

وبتكامل الطرفين فإن

$$\frac{1}{y} = z = x + 1 + ce^{x}$$

$$e^{-x}z = xe^{-x} - \int e^{-x}\,dx + c$$

$$e^{-x}z = -\int$$

وهكذا فإن الحل العام :

$$y = \frac{1}{x + 1 + ce^{-x}} \quad , \quad y \neq 0 \, , \qquad x + 1 + ce^{-x} \neq 0$$

مثال (2) :

حل المسألة التفاضلية :

$$\frac{3}{2}y^{1/2}y' + y^{3/2} = 1$$

$$y(0) = 0$$

الحل :

نفرض أن $z = y^{3/2} \quad \therefore z' = \frac{3}{2} y^{1/2} y'$ وتصبح المعادلة التفاضلية على الشكل :

$$z' + z = 1$$

لحل المعادلة المتجانسة $z' + z = 0$ نجد أن

$$c = \pm e^{a} \quad \Rightarrow z = ce^{x} \quad \Rightarrow \ln|z| = -x + a$$

$$\frac{dz}{z} = -dx \quad \Rightarrow \quad z' = -z$$

وبملاحظة أن $z = 1$ حل خاص فإن الحل العام للمعادلة هو

$$y^{3/2} = 1 + ce^{-x}$$

وحسب الشروط الإبتدائية فإن :

$$(4)^{3/2} = 1 + c \Rightarrow 8 = 1 + c \quad \therefore \quad c = 7$$

فالحل الخاص هو

$$y^{3/2} = 1 + 7e^{-x} \quad \Rightarrow \quad y = (1 + 7e^{-x})^{3/2}$$

مثال (3) :

أوجد الحل العام لمعادلة بيرنولي

$$2y' - \frac{1}{x} y = -y^{3} \cos x$$

الحل :

بالقسمة على y^3

$$2y^{-3}y' - \frac{1}{x}y^{-2} = -\cos x$$

بإستحدام التعويض

$$z = y^{-2} \quad , \quad z' = -2y^{-3}y'$$

$$\therefore -z' - \frac{1}{x}z = -\cos x$$

$$z' + \frac{1}{x^{z}} = \cos x$$

وهي معادلة خطية في z فيها

$$P(x) = \frac{1}{x} \qquad , \qquad Q(x) = \cos x$$

عامل التكامل هو

$$u = e^{\int \frac{dx}{x}} = \ln x = x$$

إذا الحل العام هو

$$zx = \int x \cos x \, dx = x \sin x + \cos x + c$$

ثم بالتعويض عن قيمة z نحصل على

$$\frac{x}{y^2} = x \sin x + \cos x + c$$

مثال (4) :

أوجد الحل العام لمعادلة بيرنولي

$$xy' + y^{-1} = -y^2 \ln x$$

الحل :

بالقسمة على y^2

$$xy^{-2}y' + y^{-1} = \ln x$$

بإستخدام التعويض

$$z = y^{-1} \quad , \qquad z' = -y^{-2}y'$$

$$-xz' + z = \ln x$$

بالقسمة على x

$$z' - \frac{1}{x}z = -\frac{\ln x}{x}$$

وهي معادلة خطية في z فيها

$$P(x) = -\frac{1}{x} \quad , \quad Q(x) = -\frac{\ln x}{x}$$

حيث عامل التكامل هو

$$u = e^{-\int \frac{dx}{x}} = e^{-\ln x}$$

$$e^{\ln x} = \frac{1}{x}$$

الحل العام هو

$$\frac{z}{x} = \int -\frac{\ln x}{x^2} dx$$

$$= \frac{\ln x}{x} - \int \frac{\ln x}{x} dx + c$$

$$= \ln x - \int \frac{dx}{x^2} + c$$

$$= \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + c$$

ثم بالتعويض عن قيمة z نحصل على

$$\frac{1}{x}y^{-1} = \frac{\ln x}{x} + \frac{1}{x} + c$$

$$y^{-1} = \ln x + 1 + cx$$

وهو الحل العام لمعادلة بيرنولي

الفصل الرابع

بعض تطبيقات المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الأولى

(1-4) المسارات المتعامدة :

إذا كانت لدينا مجموعة من المنحنيات

$$f(x, y, c) = 0 \qquad \longrightarrow (1)$$

فإن المنحنيات التي تقطع تلك المنحنيات على التعامد يسمى مساراً (مسارات) متعامداً , حيث يصنع كل مسار مع كل منحنى من المجموعة (1) زاوية قائمة وللحصول على معادلة ذلك المسار نتبع الخطوات الأتية :

1- **توجد مشتقة الطرفين للمعادلة (1) بالنسبة إلى x ونحصل على المعادلة التالية :**

$$G(x, y, y', c) = 0 \qquad \longrightarrow (2)$$

2- **بحذف C من المعادلتين (1)و(2) نحصل على :**

$$y' = f(x, y) \qquad \longrightarrow (3)$$

حيث تمثل $f(x, y)$ ميل مجموعة المنحنيات (1)

3- **يكون ميل المسار العمودي $\frac{-1}{f(x,y)}$ وعلى ذلك فإن المعادلة التفاضلية للمسار العمودي هي :**

$$y' = \frac{-1}{f(x, y)}$$

وذلك في حالة الأحداثيات الكارتيزية

4- **بحل المعادلة التفاضلية نحصل على معادلة المسار العمودي على الصورة :**

$$g(x, y, \propto) = 0$$

حيث $\propto$ ثابت إختياري

مثال (1) :

أوجد المسارات العمودية لمجموعة الدوائر

$$x^2 + y^2 = c^2$$

حيث c باراميتر

الحل :

بتفاضل طرفي المعادلة بالنسبة لـ x نحصل على

$$2x + 2y\frac{dy}{dx} = 0$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x}{y} = f = (x, y)$$

المعادلة التفاضلية للمسار العمودي تكون :

$$\frac{1}{y} dyt = \frac{1}{x} dx$$

بفصل المتغيرات نجد أن :

$$\ln y = \ln x + \ln a$$

∴ معادلة المسار العمودي هي

$$y = ax$$

حيث a ثابت

مثال (2) :

أوجد المسارات المتعامدة لمجموعة المنحنيات

$$ax^2 + y^2 = 2acx \qquad \rightarrow (1)$$

حيث c بارامیتر , a ثابت

الحل :

بتفاضل طرفي المعادلة بالنسبة الى x نحصل على :

$$2ax + 2yy' = 2ac \qquad \rightarrow (2)$$

بضرب المعادلة (2) في x

$$2ax^2 + 2xyy' = 2acx \qquad \rightarrow (3)$$

من (1) و (3) نجد أن

$$ax^2 + y^2 = 2ax^2 + 2xyy'$$

$$\therefore y' = \frac{-ax^2 + y^2}{2xy}$$

نلاحظ أن المعادلة الناتجة تمثل ميل المماس لمجموعة المنحنيات

وتكون المعادلة التفاضلية للمسارات العمودية على الصورة :

$$y' = \frac{2xy}{ax^2 - y^2}$$

وهي معادلة تفاضلية متجانسة.

ونفرض أن $y = vx$

أي أن $y' = v'x = v$

بالتعويض في المعادلة

$$xv + v = \frac{2v}{a - v^2}$$

$$\therefore xv = \frac{2v - av - v^3}{a - v^2}$$

$$x\frac{dv}{dx} = \frac{(2 - a)(v) - v^3)}{a - v^2}$$

بفصل المتغيرات نجد أن :

$$\frac{(a - v^2)}{(2 - a)(v) + v^3}dv = \frac{dv}{x} \qquad (2)$$

أولاً :

إذا كانت $a \neq 2$

بإستخدام التحويل للكسور الجزئية للطرف الأيسر للمعادلة

$$\frac{(a-v^2)}{v[(2-a)+v^2]} = \frac{A}{v} + \frac{Bv+c}{(2-a)+v^2}$$

$$\therefore a-v^2 = A[(2-a)+v^2] + (Bv+c)(v)$$

بمساواة الحد المطلق في الطرفين

نجد أن

$$a = A(2-a)$$

$$\therefore A = \frac{a}{2-a}$$

بمساواة معاملات v^2 في الطرفين

نجد أن

$$-1 = A + B$$

$$\therefore B = -1 - \frac{a}{2-a} \quad \Rightarrow B = -\frac{2}{2-a}$$

بمساواة معاملات v نجد أن :

$$c = 0$$

وعلى ذلك بتكامل طرفي (1) نحصل على

$$\therefore \frac{a}{2-a}\ln[(2-a)+v^2] = \ln kn$$

$$\therefore \frac{v^a}{(2-a)+v^2} = k^{2-a}x^{2-a}$$

نضع $v = \frac{y}{x}$, $k^{2-a} = c_1$

$$\therefore c_1\left[\frac{y}{x}\right]^a = x^{2-a}\left[(2-a)+\frac{y^2}{x^2}\right]$$

بضرب الطرفين في x^a تكون معادلة المسار العمودي

$$c_1 y = (2-a)x^2 + y^2$$

ثانياً :

إذا كانت $a = 2$

بالتعويض في (1) نجد أن :

$$\frac{2-v^2}{v^3}dv = \frac{dx}{x}$$

بالتكامل نحصل على :

$$\frac{-1}{v^2} - \ln v = \ln kx$$

أي أن $\frac{-1}{v^2} = \ln kxv$

بوضع $v = \frac{y}{x}$ نجد أن :

$$-\frac{x^2}{y^2} = \ln ky$$

وهي تمثل معادلة المسار العمودي في حالة :

$$a = 2$$

مثال (3) :

(في حالة الإحداثيات القطبية)

أوجد مجموعة المنحنيات التي تقطع على التعامد مع مجموعة المنحنيات

$$r^2 = a^2 \cos$$

حيث a بارامیتر

الحل:

بتفاضل طرفي المعادلة بالنسبة لــ θ نجد أن :

$$2r\frac{dr}{d\theta} = -a^2 \sin\theta$$

وبحذف a بين المعادلتين نحصل على

$$\frac{dr}{d\theta} - \frac{1}{2} r \tan\theta$$

بوضع $\left(-r^2 \frac{dr}{d\theta}\right)$ بدلاً من $\left(\frac{dr}{d\theta}\right)$ فإن المعادلة التفاضلية للمسارات المتعامدة تكون كالأتي :

$$2r^2\frac{d\theta}{dr} = r\tan\theta$$

وبفصل المتغيرات والتكامل يكون الحل العام هو

$$r = c\sin^2\theta$$

وهذه تمثل مجموعة المنحنيات التي تتقاطع على التعامد مع مجموعة المنحنيات المعطاة .

(2-4) المسارات الغير متعامدة :

ليكن لدينا المعادلة

$$f(x, y, c) =$$

والتي تمثل عائلة المنحنيات المستوية ذات البارامیتر c , المنحنى الذي يقطع عائلة المنحنيات (1)

بزاوية $\theta \neq 90°$ يسمي مسار غير عمودي لعائلة المنحنيات (1) .

بتفاضل المعادلة (1) بالنسبة إلى x وبحذف C بين المعادلة الناتجة والمعادلة (1) نحصل على معادلة تفاضلية على الصورة :

$$\frac{dy}{dx} f(x,y)$$

خط تماس عائلة المنحنيات (1) يكون ميله $f(x,y)$ عند النقطة (x,y) وبالتالي فإن زاوية ميله $\tan^{-1} f(x,y)$ عند(x,y) **, ومن هذا فإن خط التماس للمسار المائل الذي يقطع المنحنيات بزاوية a سيكون له زاوية ميل $\tan^{-1} f(x,y) + a$** عند نفس النقطة(x,y) **ومن هذا فإن المسار المائل هو :**

$$\tan[\tan^{-1}(f(x,y)) + a] = \frac{f(x,y) + \tan a}{1 - f(x,y)\tan a}$$

ومن هنا تكون المعادلة التفاضلية لعائلة المسارات هي :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{f(x,y) + \tan a}{1 - f(x,y)\tan a} \qquad (3)$$

بحل المعادلة (3) نحصل على معادلة المسارات غير المتعامدة للمعادلة (1)

مثال (1) :

أوجد المسارات بزاوية $\frac{\pi}{4}$ على مجموعة الدوائر $x^2 + y^2 = c$.

الحل:

من المعادلة $x^2 + y^2 = c$ نجد ان $\frac{dy}{dx} = -\frac{x}{y}$ من هذه المعادلة يكون $f(x,y) = \frac{-x}{y}$ ولكن $a = \frac{\pi}{4}$ وعليه فإن المعادلة تكون :

أي أن المعادلة هي $\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{-x}{y}+\tan\frac{\pi}{4}}{1+\frac{x}{y}+\tan\frac{\pi}{4}} = \frac{y-x}{y+x}$

$$\frac{dy}{dx} = f(x,y$$

وهذه معادلة تفاضلية متجانسة من الرتبة الأولى حلها

$$x^2 + y^2 = c$$

وهذه تمثل عائلة المسارات المائلة بزاوية $\frac{\pi}{4}$ للمنحنيات المعطاة بحيث c ثابت إختياري .

مثال (2) :

أوجد المسارالذي يقطع المستقيمات $y = cx$ بزاوية قدرها $\frac{\pi}{4}$:

الحل :

من المعادلة $y = cx$ نجد أن $y' = c$ وبحذف c من المعادلتين نحصل على المعادلة التفاضلية

$\frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$ من هذه المعادلة يكون $f(x,y) = \frac{y}{x}$ ولكن $\theta = \frac{\pi}{4}$ فإن المعادلة التفاضلية للمسارات المائلة تكون :

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\frac{x}{y} + \mathrm{ta}}{1 - \frac{x}{y}\mathrm{t}}$$

أي أن المعادلة هي $\frac{dy}{dx} = \frac{y+x}{x-y}$ وهذه معادلة تفاضلية متجانسة من الرتبة الأولى والحل العام لها هو:

$$\ln\left[c_1^2 - (x^2\right.$$

وهي معادلة المسارات المائلة بزاوية $\frac{\pi}{4}$ على المنحنيات المعطاة بحيث c_1 ثابت إختياري .

(3-4) مسائل النمو والإضمحلال :

لترمز N(t) لكمية المادة أو مجموع السكان التي إما أن تكون نامية أو مضمحلة ، إذا فرضنا أن ($\frac{dN}{dt}$ وهو معدل تغير الزمن لهذه الكمية من المادة) تكون متناسبة مع كمية المادة الموجودة فإن :

$$\frac{dN}{dt} = KN =$$

حيث K ثابت التناسب .

بفرضنا ان N(t) تكون دالة قابلة للاشتقاق وبالتالي فهي متصلة ودالة في الزمن وهذا الافتراض غير صحيح في مسائل تعداد السكان ، حيث N(t) هي دالة متقطعة وقيمها أعداد صحيحة وبالرغم من ذلك فإن المعادلة (1) ما زالت تعطي تقريبا جيداً للقوانين الفيزيائية التي تحكم هذا النظام .

مثال (1) :

يتناسب معدل نمو البكتريا في مزرعة جرثومية مع عدد العناصر الموجودة فيها ، لوحظ أنه بعد ساعة واحدة كان للبكتريا 1000 سلالة وبعد أربع ساعات أصبحت 3000 سلالة أوجد :

أ- تعبيراً عن عدد السلالات الموجودة تقريباً عند أي لحظة (t) .

ب- عدد السلالات التقريبية الموجودة اصلاً .

الحل :

ليكن N(t) عدد السلالات عند اللحظة t :

$$\frac{dN}{dt} = KN =$$

وهي معادلة خطية قابلة للفصل أي ذات متغيرات منفصلة ويكون حلها :

$$N(t) = ce^{kt}$$

عندما t=1 ، N=1000 يكون $1000 = ce^{k}$

وعندما t = 4 ، N = 3000 يكون $3000 = ce^{k}$

وبحل هاتين المعادلتين بالنسبة لكل من c ,k نحصل على :

$$K = \frac{1}{3}\ln 3 =$$

وبالتعويض عن قيمتي c , k في (1) نحصل على :

$$N(t) = 694$$

كتعبيرعن عدد السلالات الموجودة في اللحظة t.

- لمعرفة Nعندما t = 0 في المعادلة نحصل على

$$N(0) = 694$$

مثال (2) :

يتناسب معدل إزدياد تعداد سكان قطر معين مع عدد السكان الذين يعيشون فيه ، إذا تضاعف عدد السكان بعد سنتين ،وأصبح 20000 بعد ثلاث سنوات ، أوجد عدد السكان الذين يعيشون في القطر من البداية ؟

الحل :

ليكن N(t) عدد السكان الذين يعيشون في القطر عند أي لحظة t ، N° عدد السكان في البداية في هذا القطر ، من المعادلة (1) نحصل على:

$$N(t) = ce^{k}$$

عندما t = 0 ، N = N° فإنه ينتج من (1) أن $\mathrm{N}^\circ = ce^{k(0)}$ ومنه c = N° .

وعليه فإن $N = \mathrm{N}^\circ e^{kt}$ ، عندما t = 2 ، فإن N = 2N°

وعندما t = 3 ، N = 20000 فإن $N = N^\circ e^{0.347t}$

$$20000 = \mathrm{N}^\circ$$

$$20000 = \mathrm{N}^\circ$$

ومنها نجد أن :

$$\mathrm{N}^\circ = 7062$$

(4-4) مسائل درجة الحرارة :

ينص قانون نيوتن للتبريد والذي ينطبق تماما في التسخين " على أن معدل التغير الزمني لدرجة حرارة جسم يتناسب مع الفرق في درجتي حرارة الجسم والوسط المحيط به ".

لتكن T هي درجة حرارة الجسم و T_m هي درجة حرارة الوسط فإن معدل التغير الزمني لحرارة الجسم تكون $\frac{dT}{dt}$، ويكون قانون نيوتن للتبريد كالآتي :

حيث K هو ثابت التناسب الموجب ، تكون الأشارة السالبة مطلوبة طالما إخترنا **k** موجبة في قانون نيوتن لجعل $\frac{dT}{dt}$ سالبة في عملية التبريد عندما يكون T أكبر من T_m ، وموجبة في عملية التسخين عندما يكون T أقل من T_m .

مثال (1) :

وضع قضيب معدني درجة حرارته $100°\mathrm{F}$ في حجرة درجة حرارتها ثابتة عند $0°\mathrm{F}$ ، أصبحت درجة حرارة القضيب $50°\mathrm{F}$ بعد 20 دقيقة ، أوجد :

ا- الزمن اللازم لتصل درجة حرارة القضيب إلى $25°\mathrm{F}$.

ب- درجة حرارة القضيب بعد 10 دقائق .

الحل :

بإستخدام المعادلة (2) مع $T_m = 0$ ، والوسط هنا الحجرة التي درجة حرارتها ثابتة $0°\mathrm{F}$:

$$\frac{dT}{dt} + kt = ($$

عندما $t = 0$ ، $T = 100$

$$100 = ce^{-k}$$

$$\therefore T = 100e$$

عندما $t = 20$ تكون $T = 50$ ، وبالتالي فإن :

$$50 = 100e^{-}$$

ومنها

$$k = \frac{-1}{20} \ln \frac{5}{1(}$$

$$\therefore T = 100e$$

وبهذا نحصل على درجة حرارة القضيب عند أي لحظة t.

ا- لإيجاد t عندما $T = 25$:

$$25 = :$$

ب- لإيجاد T عندما t = 10 :

T :

ملحوظة *

يجب ملاحظة أن قانون نيوتن يكون متحققا للفروق الصغيرة لدرجات الحرارة وعلى ذلك فإن الحسابات السابقة تمثل فقط تقريباً أولياً للوضع الفيزيائي .

مثال (2) :

وضع جسم درجة حرارته $50°\mathrm{F}$ بالخارج حيث درجة الحرارة $100°\mathrm{F}$ وكانت درجة حرارة الجسم بعد 5 دقائق هي $60°\mathrm{F}$ أوجد :

1- الزمن اللازم لتصل درجة حرارة الجسم إلي $75°\mathrm{F}$.

2- درجة حرارة الجسم بعد 20 دقيقة .

الحل :

بإستخدام المعادلة (2) $T_m = 100$ وبالتالي يكون لدينا $\frac{dT}{dt} + kt = 100k$ وهي معادلة تفاضلية خطية على الصورة :

$$T = ce^{-kt} +$$

وحيث أن T =50 و t = 0 فينتج :

$$50 = ce^{-k(0}$$

$$\therefore c = -50$$

وبتعويضها في المعادلة (1)

$$T = -50e^{-k}$$

وعندما تكون t = 5 ، تكون T = 60 وبالتالي من (2) ينتج :

$$60 = -50e$$

$\therefore\ \boldsymbol{k} = -\frac{1}{5}\ln$

وبتعويض هذه القيمة في (2) نحصل على درجة حرارة الجسم عند أي لحظة t على الصورة :

$\boldsymbol{T} = -50\boldsymbol{e}^{-(}$

1- لإيجاد t عندما T = 75 :

$75 = -50\boldsymbol{e}$

$\therefore\ 0.045\boldsymbol{t} =$

2- لأيجاد T بعد 20 دقيقة :

$\boldsymbol{T} = -50\boldsymbol{e}^{-(}$

(5-4) مسائل الجسم الساقط :

إعتبر جسما كتلته M ساقط رأسياً متأثر فقط بالجاذبية الأرضية g ومقاومة الهواء التي تتناسب مع سرعة الجسم ، نفترض أن كلاً من الجاذبية الأرضية والكتلة يبقيان ثابتان ، وللمقاومة نختار الأتجاه الرأسي إلى أسفل هو الأتجاه الموجب .

قانون نيوتن الثاني للحركة :

القوى المحصلة المؤثرة على جسم تساوي المعدل الزمني لتغير كمية الحركة للكتلة الثابتة .

حيث :

$\boldsymbol{f} \equiv$

في المسألة التيلدينا توجد قوتان مؤثرتان على الجسم :

(1) قوة الجاذبية المعطاة بوزن الجسم (w) والتي تساوي m*g

(2) قوة مقاومة الهواء المعطاة بـ $-kv$ حيث $k \geq 0$ هو ثابت التناسب والأشارة السالبة تكون مطلوبة لأن إتجاه هذه القوة عكس إتجاه السرعة التي تؤثر رأسياً إلى أعلى في الاتجاه السالب وتكون بالتالي قوى المحصلة f على الجسم هي:

$$f = mg - k$$

وبتعويض هذه النتيجة في (3) نحصل على :

$$mg - kv =$$

كمعادلة الحركة للجسم إذا أهملنا مقاومة الهواء أو كانت غير موجودة فإن t = 0

وعلى ذلك المعادلة (4) تكون :

$$\frac{dv}{dt} = g$$

السرعة النهائية v_1 عندما k > 0 تعرف بالمعادلة :

$$v_1 = \frac{mg}{k}$$

ملحوظة *

تكون المعادلات (4) و (5) و (6) متحققة فقط إذا تحققت الشروط المعطاة ، لا تتحقق هذه المعادلات إذا كانت مقاومة الهواء لا تتناسب مع مربع السرعة ، أو إذا أخذ الأتجاه الرأسي لأعلى هو الأتجاه الموجب .

مثال (1) :

أسقط جسم كتلته 5 رطل من إرتفاع 100 قدم بسرعة صفرية وبفرض عدم مقاومة الهواء أوجد :

1- تعبيراً عن سرعة الجسم عند أي لحظة t.

2- موضع الجسم عند أي لحظة t,

3- الزمن اللازم لكي يصل الجسم الى الأرض .

الحل :

1- بما أنه لاتوجد مقاومة للهواء فإنه $g = \frac{dv}{dt}$ تكون معادلة خطية قابلة للفصل ويكون حلها

$$v = gt + c$$

عندما t = 0 ، v = 0 فإنه :

$$0 = g(0) +$$

وبفرض أن $g = 32\, f/sec^2$ $\therefore v = gt$

2- السرعة هي المعدل الزمني لتغير الإزاحة x وبالتالي فإن $32t = \frac{dx}{dt} = v$ وهي معادلة تفاضلية قابلة للفصل ويكون حلها :

$$x = 16t^2 +$$

عندما t = 0 ، تكون x = 0 ،

$$0 = 16(0)^2$$

$x = 16t^2$

3- لإيجاد t عندما x =100 ،

$t = \sqrt{\frac{x}{16}} =$

مثال (2) :

أسقطت كرة من الصلب تزن رطل من إرتفاع 3000 قدم من السكون ، وأثناء سقوطها فإنها تواجه مقاومة الهواء التي تساوي عددا $\frac{v}{8}$ بالرطل ، حيث هي سرعة الكرة (قدم لكل ثانية) اوجد :

1- السرعة النهائية للكرة .

2- الزمن اللازم لوصول الكرة إلى الأرض .

الحل :

w = 2lb ,k = $\frac{1}{8}$, $x = 3000\,ft$

بفرض أن عجلة الجاذبية الأرضية هي $32\ f/sec^2$ فيكون لدينا من الصيغة w = mg

أي أن 2 = m(32) أي أن كتلة الكرة هي $m = \frac{1}{16}slug$

وتصبح المعادلة (4) على الصورة :

$$\frac{dv}{dt} + 2v =$$

ويكون حلها هو $v = t = ce^{-2t} + 16$ عندما t = 0 تكون v = 0

وبالتعويض في (1) ينتج

$$0 = ce^{-2(0)}$$

وعليه تصبح (1) على الصورة :

$$v = t = -1$$

1- من (1) و (2) نجد أن $v \to 16$, $t \to \infty$ وبالتالي فإن السرعة النهائية هي :

$$16\,ft/sec$$

2- لإيجاد الزمن الذي تستغرقه الكره لتصل إلى الأرض (x = 3000) فإننا نحتاج إلي تعبيرعن موضع الكرة عند أي لحظة t حيث أن :

$$v = \frac{dx}{dt}$$

فإنه يمكن كتابة (2) على الصورة :

$$\frac{dx}{dt} = -16e$$

وبتكامل المعادلة بالنسبة إلى t ينتج :

$$x(t) = 8e^{02}$$

عندما $t = o$، $x = 0$

$$0 = 8e^{-2t} +$$

$$x(t) = 8e^{-2}$$

وتصل الكرة إلى الأرض عندما $x(t) = 3000$

$$\therefore 3000 = 8$$

$$\therefore 376 = e^{-}$$

ولعدم إمكانية حل المعادلة (*) بالنسبة لــ t، ونظراً لقيمة t الكبيرة فإننا نهمل الحد الأسي (الصفري) لــ e^{-2t} وتكون المعادلة كالأتي :

$$376 = 2t$$

$$\therefore t = 188\,s$$

الملاحق

النتائج والتوصيات والمراجع

النتائج والتوصيات:

النتائج:

من خلال البحث توصل الباحثون إلى بعض النتائج التي يمكن تلخيصها في الأتي:

1. **إمكانية توضيح المعادلات بتدرج يسهل إختيار (تحديد) نوع حل المعادلة التفاضلية حيث نبدأ بفصل المتغيرات وننتهي بالمعادلات الخطية .**
2. **تبرز أهمية المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الأولى في حل المسائل في العلوم في عدة مجالات وأبرزها في مجال الفيزياء حيث هنالك مسائل يسهل حلها بالمعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى .**
3. **الممارسة المستمرة لحل المسائل تسهل كيفية إختيار الطريقة المناسبة لحل المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الأولى .**

التوصيات :

1. **التوسع في المعادلات التفاضلية من الرتب العليا ، بيان لأهمية المعادلات التفاضلية.**
2. **توضيح أن خل المعادلات التفاضلية يتدرج من الأسهل إلى الأصعب .**
3. **بيان التطبيقات التي تدخل فيها المعادلات التفاضلية لتوضيح أهمية ومكان الرياضيات وخاصة المعادلات التفاضلية .**

المراجع :

- المعادلات التفاضلية "الجزء الأول" ، د/حسن مصطفي العويضي ، مكتبة الرشيد
- المعادلات التفاضلية " الجزء الثاني" ، د/حسن مصطفي العويضي ، مكتبة الرشيد ،2006 م ، الرياض ، المملكة العربية السعودية
- المعادلات التفاضلية ، أحمد حمزة الشيحة ، الدار العربية للنشر والتوزيع , دار الكتب الوطنية بنغازي ، 1996 م
- المعادلات التفاضلية العادية حلول وتطبيقات ، د/إسماعيل بوقفه ، د/عائش الهنادو
- المعادلات التفاضلية – الكتاب الأول ، د/قيصر قبارز مينسكي ، المركز العربي للتعريب والترجمة والتأليف والنشر
- المعادلات التفاضلية وتطبيقاتها الهندسية ، د/محمد محمد عباسي ، منشأة المعارف ، 1980 م ، الأسكندرية ، مصر
- مقدمة في المعادلات التفاضلية ، إبراهيم ديب سرميني وآخرون ، 1996 ، الرياض ، المملكة العربية السعودية