الفصـل الأول

خطـة البحـث

خطة البحث

(1-1) مقدمة :

المقدمة وقد أشتملت على تعريف متتاليات كوشي وما إندرج تحتها من مصطلحات وعلى تعريف الفضاءات وهي مفهوم أو مصطلح تندرج تحت متتاليات كوشي, وتطبيق هذا الأسلوب في مختلف الفضاءات ,عرفت متتاليات كوشي كمصطلح تحدث, عن الفضاءات.

(2-1) أهمية البحث :

تكمن أهمية البحث في مجال التحليل وحل العديد من مشاكل التحليل ويستخدم في إتمام الفضاءات.

(3-1) صعوبات ومشاكل البحث:

أن من الصعوبات التي واجهتنا في إعداد بحثنا هذا هي:-

1 / قلة المراجع المتعلقة بالموضوع.

2/ أعمال كوشي مشتتة.

(4-1) أسئلة البحث:

1- لماذا حددت أكبر مسافة بين أي حدين ب ع؟
2- لماذا يجب إسقاط حدود من بداية المتتابعة ينطبق عليها وصف كوشي؟
3- لماذا لا يعد التعريف متحققاً في المتتابعة في كل عنصر ومن البداية؟
4- لماذا لا توجد متتابعة تؤول إلى ما لانهاية (متباعدة) ولكن عناصرها تقترب من بعضها؟

(5-1) أهداف البحث :

1- التعرف على أهم شخص في مادة الرياضيات وأبو التحليل.
2- التعرف على أهم بعض الفضاءات المترية .
3- إستعراض بعض أعمال كوشي في الفضاءات المختلفة.
4- التعرف على بعض الفضاءات.
5- تجمع أعمال كوشي.

الفصـل الثانــي

الفضاءات المنتظمة

الفضاءات المتنظمة

(Normed spaces)

(1-2)تعريف الفضاء المنتظم :-

ليكن V فضاء متجهات على $\mathbb{R}$ أو C والدالة

$$||....|| : V \rightarrow \mathcal{R}$$

يقال أنها تنظيم على V إذا حققت الشروط التالية :-

1 - $|| V || \geq 0 \quad , \quad \forall v \in V$

And

$|| V || = 0 \quad \text{if } V = 0$

2- $|| \propto V || = | \propto | \, || V ||$

3- $|| V + \omega || \leq || V || + || \omega ||$

وفي هذه الحالة نقول أن ($V.||...||$) فضاء منتظم

$|| V ||$ يسمى نظير العنصر V

(2-2) تطبيقات على الفضاء المنتظم :-

تطبيق :

أثبت أن R فضاء منتظم تحت $|| V || = | V |$

1- $\left.\begin{matrix} || V || = | V | \\ | V | \geq 0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow || V || \geq 0 \qquad \forall v \in V$

$|| V || = 0 \Rightarrow || V || = |V| = 0$

أو بالعكس

$2- || \alpha V ||=| \alpha V |=| \alpha || V |$

$=| \alpha | \; || V ||$

$3- || V+\omega ||=| V+\omega \; | \leq |V|+|\omega|$

$|| v+\omega || \leq || V|| + || \omega||$

تطبيق :

اثبت أن $(||\ldots||\,.\,\mathcal{R}^3)$ هو $\forall v \;\in\; V$

حيث$(a_1.a_2.\ldots\ldots a_m)$ = p هذا نظيم يسمى نظيم الإقليدي

Solution

$1 - || P||^2 = \sum_1^m |ai|^2$

$=|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2+\cdots|a_n|^2$

$=\sum|a_1|^2+|a_2|^2+|a_3|^2+\cdots|a_n|^2$

إذا كانت

بأخذ الجذر التربيعي

$|| P$

$|| P|$

$||P$

$=a_1 = 0 \, . a_2 = 0. \dots . a_2 = 0$

2- $\left||\alpha P|\right| = \sqrt{\sum_1^n |\alpha a_i|^2}$

بأخذ الجذر التربيعي

$$||\alpha P|| = \sqrt{|\alpha| \sum}$$

$$||\alpha P|| = |\alpha| \sqrt{\sum}$$

$3\text{-}||v - \omega|| \leq ||v|| + ||\omega||$

نفرض أن

$v + \omega$

$||v + \omega||$

بإستخدام متباينة أو قاعدة منكوفكسي

(

∴ الشرط الثالث تحقق

$||P|| =$

(1-2-2) فضاء الدوال المستمرة :

أثبت أن الفضاء $c = [a, b]$ (فضاء الدوال المستمرة) على الفترة $c[a, b]$ هو فضاء منتظم تحت النظيم

Solution

1-$||f|| = \int_a^b |f(x)|.dx$

إذا كان

بعكس الخطوات

$f(x$

$2 - \|\alpha f\| = |\alpha$

المطلوب

∴ الشرط الثاني تحقق

$3 - \|f + g\|$

نفرض

بإستخدام المتباينة المثلثية

∴ الشرط الثالث تحقق

∴الفضاء $c = [a, b]$ **هو فضاء منتظم تحت النظيم**

(2-2-2) فضاء الدوال المحددة :

اثبت أن الفضاء $B(x)$ فضاء الدوال المحددة المعرفة على الفئة x هو فضاء الدوال منظم تحت نظيم

Solution

$$1 - |f(x)| \geq 0$$

إذا كان

بعكس الخطوات

$2 - ||\alpha f|| = |\alpha$

المطلوب

$3 - ||f + g|| \leq$

$\therefore$الفضاء $B(x)$ هو فضاء منتظم تحت النظيم $||f|| = sup|f(x)|$

نظرية:

$\sum x_n$ متقاربة مطلقاً فإنها لا بد أن تكون متقاربة بالفضاء المنتظم

Proof

إذا كان $\sum x_n$ متقاربة مطلقاً ,فهذا يعني أن المتسلسلة $\sum ||x_n||$ متقاربة في R هذا يعني

حيث أن

الآن بإستخدام المتباينة المثلثية نرى أن

$||x_n + 1 + x_n$

هذا يكفي لإستنتاج أن $\sum x_n$ متقاربة

(3-2)فضاء الضرب الداخلي :

(1-3-2) تعريف فضاء الضرب الداخلي :

إذا كان x فضاءاً متجهاً فوق الحقل F فإن الدالة

على x إذا تحققت الشروط الآتية :-

(i)ليكن $x \in X$ يكون $< x,x > \geq 0$,كما يكون $< x,x >$ فقط عند

وفي هذه الحالة يقال أن$(x, < \cdot,\cdot >)$فضاء ضرب داخلي

(2-3-2) خواص الضرب الداخلي :

$(1) < x, y > =$

إذا كان $x, y \in R$

Proof

من الشرط(4) $< x, y > = < \overline{y, x} >$

لأن $x, y \in R$

$(2) < x, x > \in$

Proof

$(3) < x, y + y'$

Proof

$= < x, y > + < x, y' >$

$(4)(i) < 0, y >$

$(ii) < x, 0 > =$

Proof (1)

$(iii) < x, 0 > =$

$(5) < x, \alpha y > \bar{\iota}$

Proof

$= \bar{\alpha} < \overline{y, x} > = \bar{\alpha} < x, y >$

(3-3-2) تطبيقات :

أثبت أن R^n مع دالة الضرب فضاء داخلي

Solution

$(1) < x, x > = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i = \sum_{i=1}^{n} {x_i}^2 =$

ولكن كل منها

اكبر من او تساوي الصفر

∴ الشرط الأول تحقق

$(2) < x + x', y > = \sum (x_i + x'_i, y_i)$

∴الثاني تحقق

$(3) < \alpha x, y > = \sum \alpha x_i y_i$

∴الثالث تحقق

$(4) < x, \bar{y} > = \sum_1^n \overline{x_\iota y_i} = \sum \overline{x_\iota} . \overline{y_\iota} = \sum x_i y_i$

∴ الرابع تحقق

الفصل الثالث

الفضاءات المترية

الفضاءات المترية

(1-3) مقدمة :-

يمثل التحليل الدالي أحد الفروع المجددة من عالم الرياضيات والمنبثقة عن التحليل الرياضي التقليدي . وقد بدأ هذا الفرع بالتطور منذ قرابة ثمانين عاماً . وقد كان الدافع لنشوء التحليل الدالي

كل من الجبر الخطي والمعادلات التفاضلية الخطية العادية والجزئية ,و حساب المتغيرات ,ونظرية التقريب وبوجه خاص نظرية المعادلات التكاملية الحطية التي كان لها أكبر الأثر في تطوير الأفكار المعاصرة .

وفي المعالجة المجردة فإننا ننطلق عادة من مجموعة من العناصر تحقق مسلمات معينة .اما طبيعة العناصر فتترك دون تحديد . وهذا أمر نفصله عن قصد ففي الجبر تستعمل هذه المعالجة في الحقول والحلقات والزمر وفي التحليل الدالي ,فإننا نستعملها في سياق الفضاءات المحددة.

وسندرس بعضاً منها بكثير من التفصيل .وسنرى أن مفهوم الفضاء هنا يستعمل بمعنى واسع جداً بصورة مدهشة.

فالفضاء المجدد هو مجموعة عناصر تحقق مسلمات معينة.

سندرس في هذا الفصل الفضاءات المترية مفاهيم متعلقة بها.

(2-3) تعريف :

الفضاء المتري هو الزوج (x,d) يتكون من المجموعة الغير خالية x ودالة مسافة d حيث لكل $x,y,z \in X$ فإن الشروط الآتية تتحقق

(1) $d(x,y) \geq 0$

(2) $d(x,y) = 0 \qquad iff\ x = y$

(3) $d(x,y)$=$d(y,x)$

(4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$متباينة مثلثية

نظرية :-

كل فضاء منتظم هو فضاء متري ولكن العكس غير صحيح.

البرهان

أولاً نحقق شروط الفضاء المتري (1) $d(x,y) \geq 0$

$(2) d(x, y) = 0$

(3) $d(x, y) = d(y, x)$

(4) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

نحاول نثبت أن هذا التعريف يعرف فضاءاً مترياً ولكن لا يعرف فضاءاً منتظم

(1) $d(x,y) \geq 0 \Rightarrow \left||x-y|\right| \geq 0 \Rightarrow |x-y| \geq 0$

∴ الآول تحقق

إذا كان

$d(x,$

$x_k = $

نحاول نثبت العكس

$$(x_1, x_2, \dots\dots, x_n) = (y_1, y_2, \dots\dots, y_n) \;\; \Rightarrow \;\; x_k = y_k$$

$$\Rightarrow x_k - y_k = 0 \Rightarrow |x_k - y_k| = 0$$

$$\therefore ||x_k - y_k|| = 0 \Rightarrow \therefore d(x,y) = 0$$

الشرط الثاني تحقق∴

(3) $d(x,y) = d(y,x)$

$$d(x,y) = \sum_1^\infty \frac{1}{2k} \frac{|-1|(y_k - x_k)}{1+|-1|(y_k - x_k)} \quad \Rightarrow \sum_1^\infty \frac{|y_k - x_k|}{1+|y_k - x_k|} = d(y,x)$$

الشرط الثالث تحقق∴

(4) $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$

بإستخدام المتباينة

$d(x, y) =$

∴ الشرط الرابع تحقق

$d(\alpha x$

∴ ليس فضاء منتظم لأن

∴ النظام ليس فضاء منتظم

∴ ليس كل فضاء متري هو فضاء منتظم

ملاحظات :-

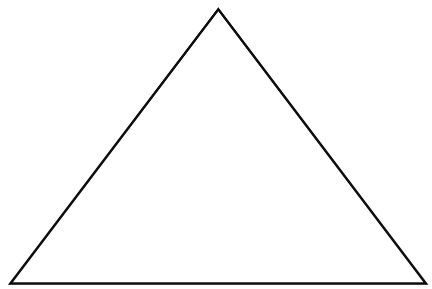
- الدالة d تدعى بالدالة المترية (المسافية) على x والعدد الحقيقي $d(x,y)$ يدعى بالمسافة من x إلى y

1- أن البديهة الأولى $d(x,y)$ تعني أن المسافة بين النقطتين لا يمكن أن تكون سالبة.

2- البديهة الثانية تعني أن المسافة من نقطة إلى نفسها تساوي صفر.

3- البديهة الثالثة (بديهة التناظر) تعني أن المسافة من x إلى y هي المسافة y إلى x نفسها لذلك سنقول للمسافة بين بدلاً من إلى

4- البديهة الرابعة تدعى بالمتراجحة المثلثة لأن إذا كانت نقاط في مستوى تؤلف رؤوس مثلث فإن مجموع طولي أي ضلعين في مثلث هو أكبر من الضلع الثالث كما هو موضح في الشكل



(3-3) تطبيقات :

لتكن R مجموعة الأعداد الحقيقية و d معرفة بالشكل السابق

(1) لكل $x, y \in R$ يكون $d(x,y) = |x-y|$

نلاحظ أن $d(x,y) \geq 0$ لأن $|x-y| \geq 0$

$|x-y| = |y-x|$ لذلك فإن $d(x,y) = d(y,x)$ (2)

(3) إذا كان $d(x,y) = 0$ أي أن $|x-y| = 0$ يكون $x-y=0$ والعكس

$y-x=0$ فإن $|x-y|=0$ أي $d(x,y)=0$

(4) نعلم أن

بهذا أثبتنا أن

تطبيق:

إذا كانت x مجموعة غير خالية و d معرفة كالآتي

أثبت أن (x, d) فضاء متري

Solution

1- $d(a,b)$وكان تساوي (1) أو تساوي (0)

2- إذا كان $a \neq b \Rightarrow$ $d(a,b) = 1$

$d(a,b) = 1 \Rightarrow d(a,b) = d(b,a)$

إذا كان $b = a$

$d(a,b) = 0$

$d(b,a) = 0$

∴الشرط الثاني تحقق

3- إذا كان $d(a,b) = 0$ فإن $a = b$

وإذا كان $a = b$ فإن $d(b,a) = 0$

∴ الشرط الثالث تحقق

4- إذا كان

$d(b,c)d(a,c)$+$d(a,b) \leq$

إذا كانت a, b, c فهي ثلاث نقاط مختلفة

فإن

$d($

وبذلك تتحقق المتراجحة

(1-3-3) الفضاء الإقليدي ذو البعد النوني:

$\rightarrow R$ $d: R^n \times R^n$ (فضاء متري ذو بعد n)

على النحو التالي

$d(x,y)$أكبر الأعداد $| \leq i \leq |$

$x_1 - y_1$كان لدينا متري آخر على R^n فمن أن d يستوفي الشرطين

بما أن :

$|x_1 -$

من ثم فإن :

تطبيق:

لتكن d دالة مترية معرفة على مجموعة غير خالية x عندئذ الدالة

حيث $x, y, z \in X$ هي مترية على X أيضاً

Solution

إن البديهيات الثلاث الأولى واضحة لأن d دالة مترية على X سوف تحقق البديهية الرابعة فقط

ليكن$\forall x, y, z \in R^n$عندئذ

$d^*($

$d^*($

والأن بما أن d دالة مترية فإن

$\therefore$ وبذلك تتحقق المسلمة $[m, 2]$

من ناحية اخرى نفرض أن $x, y, z \in X$ والمطلوب اثبات أن

من تعريف e يتضح لنا أن البديهية الرابعة تحققت

تطبيق:

إذا أخذنا $R^n = x$ فالدالة

حيث

يعرف فضاء متري على R^n

فمن الجلي أن d تستوفي الشرطين م1 , م2 استناداً على متباينة شوارتز

أياً كانت الأعداد الصحيحة

$$\sum_{1}^{n}(a_i + l$$

ومن ثم

$$\sum_{1}^{n}$$

بأخذ

نعوض القيم في المعادلة $(*)$

$$\left(\sum_{1}^{n}((x_i -\right.$$

منها يتضح أن d تحقق أيضاً (متباينة الثلث) إذن d فضاء متري على R^n

ومنها يعرف الفضاء المتري (R^n, d) بالفضاء الاقليدي ذي البعد n ويسمى المترك d المترك المعتاد على R^n

(2-3-3) فضاء الدوال المتتاليات S :

أثبت أن فضاء المتتاليات s هو فضاء متري

Solution

بإستخدام الدالة F المساعدة المعرفة على $R - [-1]$ بالمساواة

بالإشتقاق نجد أن $f(t) = {}^{1}/_{(1+t)^2}$ وهو مقدار موجب

لذا فإن f رتبة متزايدة .وبالتالي

و هذا يقتضي أن يكون

نستنتج استناداً إلى f وإلى متباينة المثلث بالنسبة للأعداد أن

$\overline{1}$

سنضع في هذه المتباينة $a = x - z$, $b = z - y$

وإذا ضربنا طرفي هذه المتباينة ب $\frac{1}{2}$ ثم جمعنا $i = 1$ حتى x فإننا نجد أن $d(x, y)$ في اليسار ومجموع $d(x, z)$ و $d(z, y)$ في اليمين

أي أن:

(3-3-3) فضاء الدوال المحددة :

أثبت أن فضاء الدوال المحدودة $B(A)$ هو فضاء متري

Solution

أن كل عنصر x من $B(A)$ هو دالة معرفة ومحدودة على مجموعة معطيات A, والمترك يحدد بالمساواة

حيث sup هو الحد الأعلى

وفي الحالة $A = [a, b] \in R$ فإننا نشير إلى $B(A)$ بالشكل $B[a, b]$

نحاول نثبت أن $B(A)$ فضاء متري نجد أن

$d(x, y) = 0$ وبالعكس ,فإذا كان $d(x, x) = 0$

ونلاحظ أنه إذا كان t من A فإن

$$|x(t)-y(t)| \leq |x(t)-z(t)+|z(t)-y(t)|$$

$|x(t)$ ·

وهذا يثبت أن $x-y$ دالة محددة على A

الفصل الرابع

أعمال كوشي في الفضاء المنتظم

أعمال كوشي في الفضاء المنتظم

(1-4) نبذة عن العالم كوشي :-

ولد 21 أغسطس سنة 1789م في فرنسا توفي 23 مايو سنة 1857م.بدأ كوشي مشروع لصيانة وإثبات نظريات الحساب المتناهي في الصغر على نحو دقيق وكان بذلك من رواد التحلي

الرياضي ووضع بعض النظريات الهامة في التحليل المركب وبدأ أيضاً دراسة مجموعات التبادي وكان له تأثير واسع على معاصريه ولاحقيه .وتغطي كتاباته نطاقاً كاماً من الرياضيات والفيزياء الرياضية.

سيرته الذاتية :-

يعتبر كوشي سيد التحليل بلا منافس خلال النصف الأو من اقرن التاسع عشر .فقد سجلتأعماله منعطفاً في تاريخ الرياضيات فقد كان طالباً في المدرسة المتعددة التكنلوجية الفرنسية وعمل عدة سنوات مهندس جسور وبعد التخصص في الرياضيات البحتة من عام 1813م عمل أستاذاً في المدرسة التي تخرج منها ومن ثم في السوريون ودخل عضواً في اكادمية العلوم سنة 1816م.
نفي إلى تورين بسبب خلاف مع لويس فيليب ,وهناك ابتدع فيزياء رياضية ثم عاد إلى باريس سنة 1838م حيث سمح له بالعودة إلى المدرسة المتعددة التكنولوجية.

طفولته ونشأته :-

ولد اوغستان وهو لويس فرانسو كوشي (1760-1848م) ووالدته هي ماري.ماردين ديستري .كان لكوشي شقيقان : الكسندر لوران كوشي (1792-1857م) الذي أصبح رئيساً لتقسيم محكمة الإستئناف في 1847م وقاضياً في محكمة النقد في عام 1849م ,ويوجين فرانسو كوشي (1802-1877م) الذي كان ناشراً لأعماله الرياضية .تزوج كوشي الواس دي بوري في 1818م التي هي قريبة للناشر الذي نشر أعماله وقال أنه من قبلها ابنتان ,ماري فرانسوز أليسيا (1819موماري ماتيلد (1823م).

تكوينه في الهندسة :

بعد الإنتهاء من الدراسة الجامعية في عام 1810 ,قبل كوشي وظيفة مهندس في سيبلوغ ,حيث يقصد نابليون لبناء قاعدة بحرية .
مدرس في المدرسة المتعددة للتقنيات.

في المنفى :-

في يوليو من العام 1830م قطعت فرنسا لثورة أخرى .هرب تشارز من البلاد ,وخلفه الملك لويس فيليب (في مجلس)وريناد) . ومن ثم اعتمدت اعمال الشعب من الطلاب الذين يرتدون الزي الرسمي لطلاب الفنون التطبقية على مقربة من منزل كوشي في باريس .هذه الأحداث كانت نقطة تحول في حياة كوشي ,وانقطاع في ابحاثه الرياضية ,ونتيجة لذلك اصبح يحمل

الكراهية العميقة لليبراليين الذين كانوا يتناولون السلطة في باريس للذهاب إلى الخارج وترك عائلته وراءه وقضى فترة قصيرة في كربيورغ في سوسيرا حيث كان عليه أن يقرر ما إذا كان أقسم اليمين على المطلوب من الولاء للنظام الجديد .رفض القيام بذلك وبالتالي فقد كل مواقعه في باريس إلا عضويته في الأكادمية .والتي لم يكن مطلوب على القسم .في عام 1831م ذهب كوشي إلى المدينة الإيطالية تورينو , وبعد مرور بعض الوقت هناك قال أن قبل عرضاً من ملك سردينيا (الذي حكم تورينو ومنطقة بيد مون المحيطة) لكرسي الفيزياء النظرية ,التي انشأت خصيصاً له .درس في تورينو خلال 1832م إلى 1833م .في عام 1833م تم انتخابه عضواً أجنبياً في الأكادمية الملكية السويدية في العلوم.

أعماله :-

نظرية التوابع القابلة للإستئناف ,والنظرية تعتبر من أهم أعمال كوشي وأهم المواضيع التي تناولها بالبحث هي :-

حساب التكاملات المحددة , التوسع في السلسلة وفي التفاضل اللانهائي ,تمثيل حدود المعادلات التفاضلية .

كما أشتهر كوشي بطرق تدريسه ومقرراته التي نتشرها هي مجلة موانيو وتمارينه في الرياضيات ,واشتهر أيضاً بمعادلاته التفاضلية ووضع ثلاث طرق للحل عرفت بإسمه : نظرية كوشي ,الصيغة المتكاملة عن كوشي ,ومسألة كوشي .

وبذلك يكون قد عمل في الرياضيات البحتة والرياضيات التطبيقية في كل مجال من مجالات الرياضيات .

أعماله الأولى :-

- نظرية الموجات والميكانيك.
- الدوال العقدية .
- مبرهنة تايلور

قائمة المواضيع المنسوبة إلى اوغستين لوي كوشي :-

- متطابقة بنين - كوشي .
-

(2-4) المتتابعة الكوشية في الفضاء المنتظم :

تعريف:-

ليكن $(x, || \dots ||)$ فضاء منتظم

نقول أن $\{x_n\} \leq x$ متتابعة كوشية في الفضاء المنتظم x إذا كان :

أي أن

(3-4) المتتابعة التقاربية في الفضاء المنتظم :

تعريف :

في الفضاء المنتظم ($x, || \dots ||$) نقول أنه$\{x_n\}$ x $\leq$ متتابعة تقاربية إلى ان x إذا كان

أي أن$||x_n - x||$ $\to 0 n \to \infty$

نظرية :-

في الفضاء المنتظم نهاية المتتابعة التقاربية وحيدة

Proof

نفترض أن ($x, || \dots ||$) فضاء منتظم

وأن $\leq \{x_n\}$x متتابعة في الفضاء المنتظم

نفرض أن المتتابعة $\{x_n\}$ نهايتان مختلفتان (x, y)أي أن $x \neq y$

إذا كان $\{x_n\}$ تتقارب إلى x فإن

إذا كان $\{x_n\}$ تتقارب إلى $\Leftarrow y$

$$||x_n - y|| = 0 n > N(\varepsilon) \longrightarrow (2)$$

بتعويض (2) (1)

وهذا التعارض نتج عن افتراضنا الخاطئ بأن للمتتابعة التقاربية نهايتان

∴ للمتتابعة التقاربية نهاية وحيدة

نظرية:-

في الفضاء المنتظم كل متتابعة تقاربية هي متتابعة كوشية ولكن العكس غير صحيح

Proof

نفرض (|| ... || ,x) فضاء منتظم وأن $\{x_n\} \leq$ x وليكن $\{x_n\}$ تقاربية إلى x

∴إذا كل متتابعة تقاربية في الفضاء المنتظم كوشية

ثانياً :

نثبت أن العكس غير صحيح

لو اخذ المتتابعة التي حدها العام

في الفضاء المنتظم Q

وعرفنا المتتابعة التي حدها العام

$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ هي متتابعة كوشية

لكن

واضح أن هذه المتتابعة كوشية ولكنها ليست تقاربية في Q إذن عكس النظرية ليس دوماً صحيح

نظرية :-

في الفضاء المنتظم المتتابعة الكوشية تكون تقاربية إذا وفقط إذا كان كل متتابعة جزئية تقاربية

$Proof$

نفرض أن $(x, || \ldots ||)$ فضاء منتظم وأن $x \{x_n\} \leq$

متتابعة كوشية تقاربية ل x

والمطلوب اثباته انه توجد

وأن $\{x_{nk}\}$ تقارب إلى x

ولإثبات العكس

(4-4) متتابعة كوشي ثوارند منكوفسكي في الضرب الداخلي :

نظرية :-

ليكن x فضاء داخلي فإنه لكل $x, y \in X$ تتحقق المتباينة

وتسمى هذه المتباينة بمتباينة كوشي ثوارند منكوفسكي وتتحقق علاقة التساوي عندما يكون x, y متجهات مرتبطة خطياً.

Proof

تتحقق المتراجحة عندما $y = 0$

،

بالضرب في $< y, x >$

$\lambda < y,$

بأخذ المرافق للطرفين

بضرب $(3)(1) \times$

$\lambda \neq \lambda y$ غير مترابطين خطياً

$< x - \lambda y, x -$

$\geq$

$=< x, x$

$=< x, x$

وإذا كان x, y مترابطان خطياً فإن $x = \lambda y$

وفي هذه الحالة نستبدل علاقة أكبر من بالتساوي

(5-4) نظريات في فضاء الضرب الداخلي :

نظرية :-

ليكن x فضاء ضرب داخلي فإن دالة الضرب

Proof

$\|x_1 - x_2\| < \delta \quad |f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$

من كوشي شوارتز منكوفسكي

$\|\|\|x_1 - x_2\|\|y\|\| \qquad \leq \delta\|\|y\|\| = \varepsilon$

نظرية :-

لتكن $\{x_n\},\{y_n\}$ متتاليتان من عناصر فضاء ضرب داخلي بحيث :

عندئذ يكون

Proof

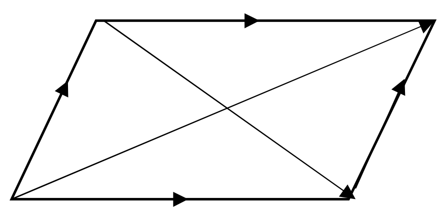
$(< x$

قانون متوازي الأضلاع

إذا كان x فضاء ضرب داخلي ,فإنه لأي $x, y \in X$ يحقق قانون متوازي الأضلاع أي أنه :-

Proof

x



x

$||\iota$

$< x, \lambda$

$< x, x$

$\|x +$

$\therefore$

نظرية :-

الفضاء المنتظم يكون فضاء ضرب داخلي إذا كان النظيم يحقق قانون متوازي الأضلاع وإذا كان نظيم لا يحقق قانون متوازي الأضلاع فإن الفضاء لا يشكل فضاء ضرب داخلي.

تطبيق:

هل الفضاء $c[a,b]$ و فضاء الدوال المستمرة على الفترة $[a,b]$ فضاء ضرب داخلي

solution

تأمل النظيم

نفرض أن

.:الفضاء لا يشكل فضاء ضرب داخلي

ملحوظة :-

- نقول أن الفضاء المنتظم فضاء تام إذا كانت كل متتابعة كوشية هي متتابعة تقاربية في نفس الفضاء.
- نقول أن فضاء الضرب الداخلي فضاء تام إذا كانت كل متتابعة كوشية تقاربية في نفس الفضاء

الفصل الخامس

اعمال كوشي في الفضاء المتري

التقارب :

تعريف (تقارب المتتاليات –النهاية):

نقول عن متتالية في فضاء متري $x = (x, d)$ انها متقاربة إذا وجد عنصر x من X يكون:

تسمى x نهاية المتتالية (x_n) وتكتب

او

وعندئذ نقول بان x_n تتقارب من x , وأن xنهاية المتتالية (x_n) .وإذا لم تكن (x_n)متقاربة قلنا أنها متباعدة.

ولنبين اولاان خاصيتين مالوفتان للمتتالية المتقاربة (وهما وحدانية النهاية والمحدودية) تنتقلان من الفضاء موعة R الي الفضاءات المترية العامة .

نقول عن مجموعة جزئية M فيx انها مجموعة محدودة ا ذا كان قطرها

عددا منتهيا .ونقول عن متتالية(x_n) فيx أنها متتالية محدودة وإذا كانت المجموعة المؤلفة من حدودها مجموعة محدودة في x .

نظرية:

إذا كان $x = (x, d)$ فضاءا متريا فان :

(أ) كل متتالية متقاربة في x محدودة , ونهايتها محدودة .

(ب) إذا كان $x_n \to x$ و $y_n \to y$ في x فإن $d(x_n, y_n) \to d(x, y)$

Proof

(أ) نفرض أن $x_n \to x$. وإذا اخذنا $\varepsilon = 1$ فإنه يوجد عدد صحيح موجب N بحيث يحقق المتراجحة $d(x_n, x) < 1$, $n > N$.

فإنه $d(x_n, x) < 1 + a$ حيث

a

∴ المتتالية (x_n) محدودة.

وإذا إفترضنا أن $x_n \to z, x_n \to x$

نستنتج أن

(ب) إذا كان $d(x_n, y_n) \le d(x_n, x) + d(x, y) + d(y, y_n)$

لذا نجد المتباينة

$d(x_{n}$

وبالمقارنة ما بين x, x_n وما بين y, y_n ثم الضرب في -1 نجد أن

$|d(x_n, y_n$

عندما $n \to \infty$

متتالية كوشي

تعريف :

نقول عن متتالية $x(n)$ في فضاء متري $x = (x, d)$ إنها متتالية لكوشي إذا وجد لكل عدد موجب ε عدد صحيح موجب $N = n(\varepsilon)$ بحيث يكون $(1) d(x_m, x_n) < \epsilon$

ايا كان العددان صحيحان m, n المحققان للشرط $m, n > N$. ويقال عن الفضاء X انه تام اذا كانت كل متتاليه لكوشى فيه متقاربه ويقتضى معيار تقارب كوشى معبرا عنه بدالة التمام المبرهنه التاليه (مبرهنة المحور الحقيقي ,المستوى العقدى).

إن المحور الحقيقي والمستوى العقدي هما فضاءات متريان تامان إن حذف نقطة a من المحور الحقيقي يعطينا الفضاء غير التام

وإذا حذفت كل الاعداد غير العادية فإننا نجد المحور العادي Q وهو فضاء غير تام .

تطبيق :

المجموعة $x = (0,1)$ المحددة بالمترك المألوفة المعرفة بالمساواة $d(x, y) = |x - y|$

ولنأخذ المتتالية x_n, حيث $x_n = \frac{1}{n}$, $n = 1,2, ...$ وهي متتالية كوشية إلا أنها ليست متقاربة,ذلك أن النقطة 0 ليست نقطة من x

إذا مفهوم التقارب ليس خاصية ذاتية للمتتالية نفسها ,بل تعتمد على الفضاء الذي تقع فيه المتتالية وبعبارة أخرى ,فإن المتتالية المتقاربة ليست متقاربة بل يجب أن تتقارب من نقطة الفضاء.

نظرية:-

كل متتالية متقاربة في فضاء متري هي متتالية كوشية

Proof

اذا كان $x_n \to x$ فإنه يوجد عدد صحيح موجب ε $N = N(\varepsilon)$ بحيث أن

وأن

$\therefore$ $< x_n >$متتالية كوشية

عكس النظرية السابقة غير صحيح عامة ,أي قد تكون المتتابعة هي كوشية في فضاء متري ,لكنها ليست تقاربية كما سيتضح من المثال التالي:

المتتابعة $\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4} \ldots\right\}$ في فضاء المتري المعتاد (x, d) حيث$x = (\ 0{,}1)$

هي متتابعة كوشي لكنها ليست تقاربية في x حيث ان المتتابعة تتقارب إلى النقطة $O \notin$ لكن$(0{,}1)$

تطبيق

الفضاء المتري (x, d) حيث d المترية $(0{,}1) = x$ليس فضاء تام,حيث توجد به متتالية كوشي $< \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots >$ وهي غير تقاربية في الفضاء المتري (x, d) كما تبين لنا من المثال .

ملحوظة :

نسلم أن $x = (0{,}1), R$ متشاكلات *(chemotrophic)* وأن R فضاء متري تام ,بينما x ليس فضاء مترياً تاماً ,إذا خاصية التمام ليست خاصية تبولوجية.

نظرية :

في الفضاء المتري كل متتالية كوشي هي متتالية محدودة

Proof

لتكن (x_n) متتالية كوشية ,ولتكن $\varepsilon = 1$ إذا توجد N حيث $n=N$

$(x_n)CB(x_n,$

نظرية

إذا قبلت متتالية كوشي نقطة ملاصقة فهي متقاربة نحوها

Proof

$\forall \varepsilon >$

a نقطة ملاصقة للمتتالية .يعني أنه توجد متتالية جزئية (x_{nk}) من (x_n) متقاربة نحو a

$\forall \varepsilon > 0$

$\forall \varepsilon > 0$

نتيجة :

متتالية كوشي اما أنها متقاربة فنهايتها هي النقطة الملاصقة الوحيدة لها او أنها لا تملك اي نقطة ملاصقة.

نظرية :

كل متتالية جزئية من متتالية كوشي هي متتالية كوشي

Proof

لتكن (x_{nk}) متالية جزئية من متتالية كوشي (x_n)

لدينا :

بما أن

النتائج:

توصل الباحثون من خلال البحث إلى بعض النتائج التى يمكن تلخيصها فى الأتى :

1. من خلال البحث توصل الباحثون إلى أن العالم كوشى له إسهامات واسعة فى الرياضيات (تحليل دالى ، تحليل حقيقى، تحليل مركب....الخ)
2. التطبيق على نظرية كوشى إثباتها بإستخدام تقارب المتتاليات
3. مدى أهمية أعمال كوشى فى إثبات كثير من المسائل فى الفضاء المترى والمنتظم
4. الممارسة المستمرة فى تطبيق المسائل تسهل كيفية إختيار الطريقة المناسبة لإثبات النظريات

التوصيات:

1. التوسع فى أعمال كوشى فى الفضاءات المختلفة لبيان أهميتها
2. بيان التطبيقات التى تدخل فيها أعمال كوشى لتوضيح أهمية ومكانة الرياضيات وخاصة أعمال كوشى فى الفضاءات المختلفة
3. توفير المراجع الخاصة بأعمال كوشى

المراجع:

(1) أساسيات التبولوجيا العامة

تأليف

وليام بيرقن

ترجمة

د / عطا الله تامر العاني

مدرس / قسم الرياضيات

مديرية دار الكتب للطباعة والنشر

جامعة الموصل

(2)مقدمة التبولوجيا

الدكتور محمد عبد المنعم اسماعيل
استاذ مساعد في الرياضيات
كلية العلوم - جامعة الملك سعود

الناشر عمادة شؤون المكتبات – جامعة الملك سعود
ص.ب 2454 الرياض – المملكة العربية السعودية
الطبعة الأولى 1402هـ ــــ (1982هـ)

(تبولوجيا الاعداد الحقيقية) للصفوف الثانية في كلية العلوم

تأليف

د/عربيى حسين الزوبعي	د /محمد جواد سعد الدين
كلية التربية	كلية العلوم
جامعة بغداد	الجامعة المستنصرية