بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا

كلية التربية ـ قسم العلوم

شعبة الرياضيات

بحث تكميلي لنيل درجة بكالوريوس الشرف في التربية رياضيات

بعنوان:

بعض تطبيقات الجبر الخطي

إعداد:

- أحمد موسى الحسين محمد
- آدم عبدالرحمن محمد أبكر
- بدرالدين عرجة تابت مادبو
- محمد عبدالله محمد أحمد
- مروه عبدالله محمد عبدالله

إشراف

د. أحمد عبدالرحمن عبدالله

سبتمبر 2016م

بسم الله الرحمن الرحيم

الآية الكريمة :

قال تعالى في محكم تنزيله:

ورَّقُبِّلْ ز ِ د ْنِي عِلْمًا"

صدق الله العظيم

(سورة طه ـ الآية 114)

الإهداء

الحمد لله رب العالمين والصلاة والسلام على خاتم الأنبياء والمرسلين الهي لا يطيب الليل إلا بشكرك ولا يطيب النهار إلا بطاعتك ولاتطيب اللحظات إلا بذكرك ولاتطيب الآخرة إلا بعفوك ولا تطيب الجنة إلا برؤيتك

إلي من أسقتني الحب والحنان إلي رمز الحب وبلسم الشفاء إلي القلب الناصع بالبياض إلي من أكبر على يديها وعليها أعتمد

أمي الحبيبة

إلي من كلله الله بالهيبة والوقار إلي من علمني العطاء بدون إنتظار

إلي من أحمل أسمه بكل إفتخار

إلي القلب الكبير والدي

إلي من هم أقرب إلي من روحي إلي من شاركوني حضن الأم

وبهم أستمد عزتي وإصراري

أخوتي الأعزاء

إلي من يحلو بهم الإخاء تميزوا بالوفاء والعطاء

إلي ينابيع الصدق إلي من سعدت برفقتهم

أصدقائي ورفقاء دربي

إلي من وهبوني الأمل والتفاؤل في الحياة ونهلت من تجاربهم وكانوا ومازالوا عوناً في حياتنا

الأساتذة الأجلاء

إلي ذلك الصرح الشامخ جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا

الشكر والعرفان

بحروف نكتبها لكم من نور ... صدقاً وأمانة نطوقها بالعهد والوفاء نترجمها شكراً وتبجيلاً لفضائل وجلائل أعمالكم التي إشرأبت لها هامة الزمان وتظل أعمالكم شعلاً تضئ عزة وشموخاً

فعندما يتوارث الناس روائع الأشياء .. تكون منبعاً للأصالة

وفي ألق التهذيب ... هكذا عرفناكم ... وانصهرت هممكم العالية بذلاً وعطاءً وامتزجت أرواحكم بالنبل والنقاء وكنتم قناديلاً تحترق لتهب غيرها الضياء

وتختبئ الكلمات بعيداً عن عيون القلم لأنها طعم المستحيل في التعبير

عن الشكر والثناء ويبقى ما نكتب وثيقة للصدق والمحبة

إعترافاً لما قدمته لنا الأب الروحي وقائد السرب

د.أحمد عبدالرحمن عبدالله

بكل فخر وإعزاز نتوجك اليوم ملكاً في بحور العلم والمعرفة

ونزف لك أسمى آيات الشكر المعبقة

بعطر الفل والياسمين

فهرس المحتويات

الإطـــــــــار العام

(1-1) المقدمة :

استخدم الصينيون واليابانيون والمصريون الجبر قبل آلاف السنين وأول دليل على إستخدام الجبر بنود الرياضي المصري أحمس الذى عاش حوالي 1700ق.م ،واشهر ماقام به بردية أحمس التى تعد أقدم ماكتب عن الجبر فى ذلك الحين ، وبعد ذلك بقرون طويلة ساهم الأغريق فى تطوير الجبر حيث استخدم الرياضي الأغريقي ديوفانتشي الذى عاش فى القرن الثالث معادلات الدرجة الثانية ورموز كميات غير معلومة .

إن فكرة المصفوفات جاءت مع محاولة البابلين والصينين فى القرن الثانى والثالث قبل الميلاد لحل أنظمة بسيطة للمعادلات الخطية ، أما المحددات فإنها عرفت لأول مرة فى العام 1683م فى كل من اليابان وأروبا . تلا ذلك تطورات كثيرة فى دراسة المصفوفات والمحددات كانت دوافعها مزيجاً من الأفكار الهندسية والجبرية، ولقد شهد القرن التاسع عشر تطوراً كبيراً فى مفاهيم الجبر الخطي على يد الكثيرين من علماء الرياضيات من أهمهم هاملتون ، كوشي، جروسمان وليبييعتبر علم الجبر من العلوم القديمة قدم البشرية ولاشك أنه يشكل ركيزة هامة في حياة الفرد ،وبالرغم

من أنه تبلور في القرن السابع عشر الميلادي إلا أنه كان من أكثر العلوم إستخداماً في مجال الحياة التطبيقية .

هذا البحث جهد مبزول لإقتباس الأفكارالرئيسة للجبر بوجه عام و الجبر الخطي بوجـه خـاص ، في الأبواب الأولى منه تحدثنـا عن الجبر الخطي بصورة عـامة وهـذا سيكون مفيدا للأفراد الذين قـد نسـوا بعض مفاهيم الجبر الخطي الذي درس مسبقاً ويحتاجون إلى جرعة منشطة ،هذا ربما أيضـاً يخدمنا بتزويدنا بخلفية عـامة للطلبـة الذين درسوا أنماطاً مختلفة من مقررات الجبر الخطي الأولى وفـي الأبـواب الأخيـرة نتطـرق لموضوعـات أكـثر تقدمـاً فتناولنـا في تطبيقات الجبر الخطي فى الرياضيات وتطبيقاته فى مناحى الحياة العامة .

(2-1) أهمية البحث:

لقد اذدات أهمية دراسة الجبر الخطي فى السنوات الأخيرة لما شهدته هذه السنوات من تقدم مزهل فى مجالات الإتصالات ومعالجة البيانات ، حيث يلعب الجبر الخطي دوراً أساسياً فى شتى العلوم الإقتصادية والفيزيائية وغيرها كما يدخل بصورة مباشرة فى نظرية التشفير التى تستخدم فى المجالات العسكرية .

(3-1) أهداف البحث:

- التعرف على الجبر الخطي.
- التعرف على جبر المصفوفات .

ـ التمكن من إستخدام مفاهيم الجبر الخطي في فروع الرياضيات المختلفة من معادلات تفاضلية وهندسة تحليلية وغيرها من الفروع.

ـ التطبيق على الجبر الخطي من خلال بعض نواحي الحياة العامة .

أعددنا هذا البحث لدارس الجبر الخطي حيث أكثرنا فيه بالأمثلة مع عرض النظريات بصورة مبسطة دون الإخلال بالدقة الرياضية وهدفنا هو نمو المفاهيم العلمية وصولاً إلى أحدثالإكتشافات والإختراعات وذلك بهدف غرس منهجية التفكير العلمي لدى الطلاب وتوسيع مداركهم إلى أبعد من حدود الموضوعات الدراسية.

(4-1) مشكلة البحث:

على الرغم من أن الجبر الخطى من المواضيع المباشرة و البسيطة إلا انه يستخدم فى الكثير من الموضوعات المختلفة التى تشكل غموض فى كيفية الحل وكيفية التطبيق على الصفوفات والمحددات وحل انظمة المعادلات الخطية ، كما ان كثرة المجالات التى يستخدم فيها الجبر الخطى بصفة عامة وجبر المصفوفات بصفة خاصة تثير نوعاً من الصعوبة فى تطبيق هذه المعادلات فى المجالات الهندسية والفيزيائية والعسكرية وغيرها لإختلاطها بالعلوم الآخرى ولصعوبة هذه المجالات نفسها أنها متعددة الفروع وشاملة لكثير من العلوم لذلك تطبيق هذه المعادلات عليها ليس بالأمر السهل.

(5-1) منهج البحث:

استخدم الباحثين فى هذا البحث المنهج التحليلي الوصفى .

بعض المفاهيم الاساسية فى الجبر الخطى

(1-2) جبر المصفوفات :

تعرف المصفوفة بأنها عبارة عن مجموعة من الأعداد مرتبة فى شكل صفوف وأعمدة وموضوعة داخل قوسين كالآتى :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots \ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{nn} \end{bmatrix}$$

a_{ij}يسمى عنصراً فى المصفوفةA ويقع فى الصف رقم i والعمود رقم j.

أى أن i يعبر عن رقم الصف وj يعبر عن رقم العمود. كما أن العناصر a_{ii}تسمى عناصر القطر الرئيسى ، والمصفوفة قد تكون مربعة إذا كان عدد الصفوف يساوى عدد الأعمدة وقد تكون مستطيلة إذا كان عدد الصفوف لا يساوى عدد الأعمدة، وتتحدد درجة المصفوفة بعدد الصفوف وعدد الأعمدة التى تحتويها.

وتلعب المصفوفات دوراً هاماً فى التعبير عن العلاقات الرياضية متعددة المتغيرات بشكل بسيط يسهل فهمه وبالتالى وضع الحلول لهذه العلاقات، فضلاً عن ذلك فإن المصفوفات لها مجالات تطبيقية عديدة فى الاقتصاد والإحصاء وبحوث العمليات وغيرها من العلوم الأخرى. ومن ثم فإننا سوف نتناول فى هذا البند بعض المفاهيم والتعاريف الهامة وأنواع المصفوفات ثم ننتقل إلى جبر المصفوفات (الجمع والطرح والضرب) وبعدها نتناول كيفية إيجاد معكوس المصفوفة المربعة بالطرق المختلفة تمهيداً لاستخدامه فى حل المعادلات الخطية.

(2-2) أنواع المصفوفات :

توجد المصفوفات على أنواع كثيرة ومختلفة وكل نوع له ما يميزه عن النوع الآخر بما يحتويه من صفوف وأعمدة.

المصفوفة المربعة : هى مصفوفة عدد صفوفها يساوى عدد أعمدتها ولذلك فهى تكون من الرتبة $n \times n$، وسوف نرى فيما بعد أن مصفوفة المعاملات لنظام المعادلات الخطية هى مصفوفة مربعة دائماً .

المصفوفة المستطيلة : هى مصفوفة عدد صفوفها لا يساوى عدد اعمدتهاولذلك فهى تكون من الرتبة $m \times n$.

مصفوفة الوحدة : وهى مصفوفة مربعة كل عنصر من عناصر قطرها الرئيسى يساوى الواحد الصحيح، وباقى عناصر المصفوفة أصفار. ويرمز لها بالرمز I .

المصفوفة القياسية : هى مصفوفة مربعة عناصر قطرها الرئيسى متساوية القيمة وباقى عناصرها أصفار .

المصفوفة القطرية : هى مصفوفة مربعة عناصر قطرها الرئيسى مقادير حقيقية ليست بالضرورة متساوية.وعلى ذلك فإن كلاً من مصفوفة الوحدة والمصفوفة القياسية هى حالة خاصة من المصفوفة القطرية.

المصفوفة الصفرية : هى مصفوفة جميع عناصرها أصفار وقد تكون المصفوفة الصفرية مربعة أو مستطيلة.

مصفوفة الصف الواحد (متجه الصف) : وهى مصفوفة مستطيلة تحتوى على صف واحد وأى عدد من الأعمدة وصورتها العامة هى :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \quad \text{متجه صف من الدرجة} (1 \times n)$$

مصفوفة العمود الواحد (متجه عمود) : وهى مصفوفة مستطيلة تحتوى على عدة صفوف وعمود واحد فقط وصورتها العامة هى :

$$\begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} \text{ متجه عمود من الدرجة} (n \times 1)$$

(3-2)منقول المصفوفة:

نحصل على منقول المصفوفة بتبديل صفوفها بأعمدتها أى بجعل صفها الأول مكان العمود الأول وصفها الثانى مكان العمود الثانى وهكذا. فإذا كان لدينا المصفوفة :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

فإن مبدول هذه المصفوفةA ويرمز له بالرمز A'يكون على الصورة الآتية :

$$A' = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{bmatrix}$$

خصائص منقول المصفوفة :

إذا كان لدينا المصفوفات A, B, Cفإن :

1. $(A')' = A$
2. $(A' + B' + C') = (A + B + C)'$
3. $(A' \times B' \times C') = (A \times B \times C)'$
4. $(A')^{-1} = (A^{-1})'$

ملاحظة :

إذا كان $A = A'$ فإن المصفوفة تسمى مصفوفة متماثلة ، ونلاحظ أنه عند إيجاد منقول المصفوفة A نجد أن عناصر القطر الرئيسى لا تتغير وبالتالى فإنه يمكننا القول أن المصفوفة القطرية والمصفوفة القياسية ومصفوفة الوحدة والمصفوفة الصفرية المربعة جميعها مصفوفات متماثلة. كما أن المصفوفات المتماثلة تعطى معكوسات متماثلة أيضاً .و يقال لمصفوفتين أنهما متساويتان إذا كانتا من نفس الدرجة وكان كل عنصر فى المصفوفة الأولى يساوى نظيره فى المصفوفة الثانية.

(4-2)المصفوفةالمفردة وغيرالمفردة :

لأى مصفوفة مربعة A من الدرجة$n \times n$، يقال إنها غير مفردة إذا كان المحدد الذى درجتهnلا يتلاشى. أى أنه :

إذا كان $|A| \neq 0$ فإن المصفوفةA غير مفردة.

أما إذا كان $|A| = 0$ فإن المصفوفة Aتسمى مصفوفة مفردة.

وتلعب المصفوفة غيرالمفردة(non-singular)دوراً هاماً فى إيجاد معكوس المصفوفة.

<u>مثال (1) :</u>

بين ما إذا كانت المصفوفة الآتية مفردة أم غير مفردة:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \\ 7 & 5 & 3 \end{bmatrix}$$

الحل:

لتحديد ما إذا كانت هذه المصفوفة مفردة أم غير مفردة ، نوجد محددها كالآتى:

$$|A| = 3\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 3 \\ 7 & 5 \end{vmatrix}$$

$$3(9 - 10) + 2(12 - 14) - (20 - 21) = 0$$

إذن المصفوفة Aمصفوفة مفردة.

(5-2)محدده المصفوفة المربعة :

إذا كانت المصفوفة مربعة فإنه يمكن تكوين محدد لهذه المصفوفة كما سنوضحه فى المثال التالى :

<u>مثال (2):</u>

أوجد محدد المصفوفة التالية :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

فإن محدد المصفوفة A والذى يرمز له بالرمز $|A|$يمكن إيجاده كالآتى :

$$|A| = 3\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 5 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$3(3-2) - 2(0-10) - (0-5) = -18$$

(6-2)العمليات على المصفوفات :

يمكن إجراء عمليات الجمع والطرح والضرب على المصفوفات ، ويشترط لجمع أو طرح المصفوفات أن تكون من نفس الدرجةعلى أن يتم جمع العناصر المتناظرة جمعاً جبرياً . أما فى حالة ضرب المصفوفات فإن هذه العمليات تتطلب شرطا خاصا لكى تتم عملية الضرب.

أولاً : جمع وطرح المصفوفات :

مثال (3) :

إذا كان :

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 1 \\ 8 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 9 & 0 & -3 \\ 6 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

فأوجد:

I. $A + B$

II. $B - C$

الحل:

$$A + B = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 5 \\ 4 & 1 & 6 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 7 & -3 & 1 \\ 8 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 10 & -5 & 6 \\ 12 & 0 & 6 \\ 5 & 3 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{B} - \boldsymbol{C} = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 1 \\ 8 & -1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 5 & 1 & -2 \\ 9 & 0 & -3 \\ 6 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2 & -4 & 3 \\ -1 & -1 & 3 \\ -3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

ثانياً : ضرب المصفوفات :

يشترط لضرب مصفوفتين أن يكون عدد أعمدة المصفوفة الأولى يساوى عدد صفوف المصفوفة الثانية والمصفوفة الناتجة تكون فى هذه الحالة من الدرجة (عدد صفوف الأولى × عدد أعمدة المصفوفة الثانية) ، المثال الآتييوضح كيفية ضرب مصفوفتين.

<u>مثال (4) :</u>

إذا كان :

$$A = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

أوجد :

I. $A \times B$
II. $B \times A$

الحل :

$$A \times B = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (4 \times 3) + (-1 \times 5) & (4 \times 2) + (-1 \times -1) \\ (6 \times 3) + (-2 \times 5) & (6 \times 2) + (-2 \times -1) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (12 - 5) & (8 + 1 \\ (18 - 10) & (12 + 2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 7 & 9 \\ 8 & 14 \end{bmatrix}$$

$$B \times A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & -1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 6 & -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (3 \times 4) + (2 \times 6) & (3 \times -1) + (2 \times -2) \\ (5 \times 4) + (-1 \times 6) & (5 \times -1) + (-1 \times -2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} (12 + 12) & (-3 - 4) \\ (20 - 6) & (-5 + 2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 24 & -7 \\ 14 & -3 \end{bmatrix}$$

(7-2)معكوس المصفوفة :

يمكن إيجاد معكوس المصفوفة بإحدى الطرق الآتية :

1- باستخدام المحددات.

2- طريقة جاوس.

3- طريقة العمليات المختصرة على الصفوف.

4- طريقة العوامل المرافقة.

5- طريقة التقسيم.

وجميع هذه الطرق المستخدمة فى إيجاد معكوس المصفوفة تعطى نفس النتيجة. غير أننا سوف نتناولهنا طريقتين فقط لإيجاد معكوس المصفوفة وهما:

أولاً : طريقة العوامل المرافقة :

وتتخلص هذه الطريقة فى الخطوات الآتية :

(i) نوجد قيمة محدد المصفوفة .

(ii) نوجد مصفوفة المرافقات.

(iii) نوجد مدور مصفوفة المرافقات.

(iv) نقسم مدور مصفوفة المرافقات على قيمة محدد المصفوفة فنحصل على معكوس المصفوفة .

ثانياً : طريقة العمليات المختصرة على الصفوف :

تستخدم طريقة العمليات المختصرة على الصفوف (التحويلات الصفية المختصرة) لإيجاد معكوس المصفوفة. وتتلخص هذه الطريقة فى الخطوات الآتية :

(i) نضع المصفوفة المطلوب إيجاد معكوسها بجوار مصفوفة الوحدة من نفس الدرجة ويفصل بينهما خط رأسى، وتسمى المصفوفة الممتدة.

(ii) نقوم ببعض العمليات (التحويلات) على الصفوف حتى تتحول المصفوفة الأولى إلى مصفوفة الوحدة، وتتحول مصفوفة الوحدة إلى مصفوفة جديدة هى المعكوس المطلوب الحصول عليه للمصفوفة الأصلية.

(8-2) حل المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات:

تستخدم المصفوفات فى حل المعادلات الخطية فى متغيرين أو أكثر. وسوف نكتفى هنا بحل نظام من المعادلات فى متغيرين أو ثلاثة متغيرات. هذاويعتمد حل المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات على إيجاد معكوس المصفوفة بإحدى الطريقتين اللتين تم دراستهما من قبل فى هذا الباب.

أولاً : حل نظام من المعادلات الخطية فى متغيرين :

بافتراض أن لدينا المعادلتين الآتيتين :

$$a_1x + b_1y = c_1$$

$$a_2x + b_2y = c_2$$

فإنه يمكن حل هذا النظام من المعادلات الخطية باستخدام المصفوفات كالآتى:

(1) نوجد مصفوفة المعاملات: $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}$

(2) نحدد عمود الثوابت: $C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$

(3) نوجد معكوس مصفوفة المعاملاتوذلك باستخدام طريقة العمليات المختصرة على الصفوف أو طريقة العوامل المرافقة وليكن : $\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}^{-1}$

(4) نحصل على قيمتى x, y باستخدام المعادلة الآتية :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$$

مثال (5) :

أوجد مجموعة الحل للنظام الآتى باستخدام المصفوفات.

$$2x + 3y = 8$$

$$4x + 5y = 11$$

الحل :

(1) نوجد مصفوفة المعاملات.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 5 \end{bmatrix}$$

(2) مصفوفة الثوابت .

$$C = \begin{bmatrix} 8 \\ 11 \end{bmatrix}$$

(3) نوجد معكوس مصفوفة المعاملات باستخدام طريقة العوامل المرافقة كالآتى :

$$|A| = 10 - 12 = -2$$

مصفوفة المرافقات = $\begin{bmatrix} -4 & 5 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$

مبدول مصفوفة المرافقات = $\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$

معكوس المصفوفة

$$A^{-1} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}$$

(4) نحصل على قيمتى x, y باستخدام المعادلة التالية :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = A^{-1}\, C$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} -3 & 5 \\ 2 & -4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 8 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{-2}\begin{bmatrix} 7 \\ -10 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{7}{2} \\ 5 \end{bmatrix}$$

أى أن : $x = -\frac{7}{2}\,, y = 5$

ثانياً : حل نظام من المعادلات الخطية فى ثلاثة متغيرات :

بفرض أن لدينا نظام المعادلات التالى فى ثلاثة متغيرات :

$$a_1x + b_1y + c_1z = d_1$$

$$a_2x + b_2y + c_2z = d_2$$

$$a_3x + b_3y + c_3z = d_3$$

فإنه يمكن حل هذا النظام من المعادلات باستخدام المصفوفات كالآتى :

(i) مصفوفة المعاملات : $A = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}$

(ii) نحدد عمود الثوابت : $D = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$

(iii) نوجد معكوس مصفوفة المعاملات بأية طريقة وليكن :

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}^{-1}$$

(iv) $$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \end{bmatrix}$$

<u>مثال (6) :</u>

حل نظام المعادلات الآتى باستخدام المصفوفات :

$$x + y + z = -1$$

$$2x + 3y - z = 0$$

$$3x - 2y + z = 4$$

الحل :

(i) مصفوفة المعاملات :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & -1 \\ 3 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

(ii) عمود الثوابت

$$D = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

(iii) معكوس مصفوفة المعاملات يتم الحصول عليه بطريقة العوامل المرافقة (أو بأية طريقة أخرى) كالآتى :

معكوس مصفوفة المعاملات :

$$A^{-1} = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -5 \\ 1 & 5 & -13 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -4 & -3 & 1 \\ 3 & -2 & -5 \\ 1 & 5 & -13 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = -\frac{1}{17}\begin{bmatrix} -17 \\ 17 \\ 17 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$x = 1, y = -1 , z = -1$$

(9-2) الفضاء الخطى :

قبل دراسة هذا البند سوف نسترجع بعض المفاهيم التى تدخل فى تعريف الفضاء الخطى وهى :

الزمره : إذا كان Vمجموعة غير خالية وكانت* عملية ثنائية فىV فإن النظام الرياضي$(V,*)$ يسمى زمرة تبديلية إذا تحققت الشروط التالية :

1. التجميع $\forall u, v, w \in V; (u * v) * w = u * (v * w)$
2. الإبدال $\forall u, v \in V; (u * v) = (v * u)$
3. المحايد $\forall u \in V ; \exists\, e \in V , (u * e) = (e * u) = u$
4. المعكوس $\forall u \in V ; \exists\, u^{-1} \in V , (u * u^{-1}) = (u^{-1} * u) = e$

الحقل : نقول للنظام الرياضى$(F,\times, +)$حقلاً إذا كان :

1. $(F, +)$زمرة تبديلية
2. $(F,\times)$زمرة تبديلية
3. توزيع الضرب على الجمع $a(b + c) = ab + ac , \forall a, b, c \in F$

من هنا يمكننا تعريف فضاء المتجهات على انه : إذا كانتV مجموعة غير خالية و Fحقل نقول ان Vفضاء متجهات بالنسبة للحقلF إذا تحققت الشروط التالية :

1. $(V, +)$ زمرة تبديلية .
2. Vتحقق خواص الضرب القياسي .

يقال على الفضاءW أنه فضاء جزئي من الفضاءV على الحقل Fإذا كانتW مجموعة غير خالية وتحقق الشروط :

1. $\forall u, v \in W , u + v \in W$
2. $\forall k \in F , u \in W , ku \in W$

تحويل خطى : ليكنU, V فضائين على الحقلF للدالة Tيسمى التحويل$T: V \to W$ تحويلاً خطياً إذا تحققت الشروط :

1. $T(u + v) = T(u) + T(v).$
2. $T(ku) = k\, T(u).$

(10-2) القيم الذاتية والمتجهات الذاتية :

تعريف :

لتكن Vفضاء متجهات بالنسبة للحقل F و $T: V \to V$ نقول انλ قيمة ذاتية للتحويلةT إذا وجدت قيمة $v \in V$تحقق الشرط :

$$T(V) = \lambda V$$

وتسمى λ بالقيمة الذاتية.

<u>مثال (7):</u>

ليكن $T: R^2 \to R^2$ تحويل خطى معرف بـ $T(x, y) = (x + 2y, 2x - y)$ جد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية ؟

الحل:

نفرض أن $v = (x, y) \in R^2$

من التعريف نجد:

$$T(V) = \lambda V$$

$$T(x, y) = (x + 2y, 2x - y) = \lambda$$

$$x + 2y = \lambda x$$

$$2x - y = \lambda y$$

بالتالى نحصل على :

$$(1 - \lambda)x + 2y = 0$$

$$2x - (2 + \lambda)y = 0$$

يكون للمعادلتين اعلاه حل غير صفري إذا كانت المحدده :

$$\begin{vmatrix} (1 - \lambda) & 2 \\ 2 & -(2 + \lambda) \end{vmatrix} = 0$$

$$-(2 + \lambda)(1 - \lambda) - 4 = 0$$

$$\lambda^2 + \lambda - 6 = 0$$

$$(\lambda + 3)(\lambda - 2) = 0$$

إذا القيم الذاتية هي

$$\lambda = -3,2$$

لإيجاد المتجهات الذاتية نعوض عن قيمλ فنحصل على

$$-x + 2y$$

$$2x - 4y$$

$$x = 2y$$

نفرض أن $y = b$ ونجد أن $x = 2b$

إذن المتجهات الذاتية هى :

$$(x, y) = (a, -2a)$$

تطبيقات الجبر الخطى فى الرياضيات

(1-3) التطبيقات فى المعادلات التفاضلية :

توصف كثير من قوانين الفيزياء والكيمياء وعلم الاحياءوالإقتصاد بمصطلحات المعادلات التفاضلية أى المعادلات المتضمنة على دوال ومشتقاتها ،الغرض من هذه الوحدة هو توضيح إحدى الطرق التى يطبق فيها الجبر الخطى لحل أنظمة معينة من المعادلات التفاضلية .

تعتبر المعادلة التفاضلية التالية من أبسط المعادلات التفاضلية :

$$y' = ay \quad \rightarrow (1)$$

حيث $y = f(x)$دالة مجهولة يراد تعيينها هى ومشتقاتها $y = \frac{dy}{dx}$، aثابت مثل أغلب المعادلات التفاضلية ، للمعادلة (1) حلول لانهائية العدد وهى دوال على الصورة :

$$y = ce^{ax} \quad \rightarrow (2)$$

حيثc ثابت إختياري.كل دالة على هذه الصورة حل للمعادلة $y' = ay$حيث

وبالعكس كل حل للمعادلة $y' = ay$ يجب أن يكون دالة على الصورة $y' = cae^x = ay$
لهذا فإن (2) تصف كل حلول المعادلة $y' = ay$، كما نسمى (2) الحل العام للمعادلة $y = ce^{ax}$. (1)

فى بعض الأحيان تنص المسألة الفيزيائية المنشئة لمعادلة تفاضلية على بعض الشروط الإضافية التى تسمح لنا أن نفرض حلاً خاصاً واحد من الحل العام .على سبيل المثال إذا افترضنا أن يكون حل المعادلة $y' = ay$ مستوفياً للشرط الإضافى

$$y(0) = 3 \quad \rightarrow (3)$$

بمعنى أن $y = 3$ عند $x = 0$ فبالتعويض عن هذه القيم فى المعادلة العامة $y = ce^{ax}$ نحصل على قيمة الثابت c وهى

$$3 = ce^0 = c$$

ولذلك فإن $y = 3e^{ax}$

هى الحل الوحيد للمعادلة (1)الذى يستوفى الشرط الإضافى يسمى شرطاً إبتدائياً الشرط مثل (3) الذى يخصص قيمة الحل عند نقطة . مسألة حل معادلة تفاضلية تحت شرط إبتدائي تسمى **مسألة قيمة إبتدائية.**

سنوجهه إهتمامنا نحو حل أنظمة المعادلات التفاضلية على الصورة :

$$y'_1 = a_{11}y_1 + a_{12}y_2 + \cdots + a_{1n}y_n$$

$$y'_2 = a_{21}y_1 + a_{22}y_2 + \cdots + a_{2n}y_n \quad \rightarrow (4)$$

$$y'_n = a_{n1}y_1 + a_{n2}y_2 + \cdots + a_{nn}y_n$$

حيث $y_1(x) = f_1(x), y_2(x) = f_2(x), \dots, y_n(x) = f_n(x)$ دوال يراد تعينها والمعاملات a_{ij} ثوابت بإستخدام المصفوفات يمكن كتابة (4) كما يلى :

$$\begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots \ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

أو بشكل أكثر إيجازاً $y' = A\,y$

مثال (1):

أ. أكتب النظام التالى فى صورة مصفوفات

$$y'_1 = 3y_1$$
$$y'_2 = -2y_2$$
$$y'_3 = 5y_3$$

ب. أوجد حل النظام

ت. أوجد حلاً للنظام يحقق الشروط الإبتدائية :

$$y_1(0) = 1, y_2(0) = 4 , y_3(0) = -2$$

الحل:

$$\begin{bmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ y'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} \quad \rightarrow (5)$$

يمكننا حل المعادلات كل على حده لأن كل معادلة تتضمن دالة مجهولة واحدة فقط بإستخدام المعادلة (2) نحصل على :

$$y_1 = c_1 e^{3x}$$

$$y_2 = c_2 e^{-2x}$$

$$y_3 = c_3 e^{5x}$$

أو يمكننا التعبير عنها بصيغة المصفوفات كما يلى :

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 e^{3x} \\ c_2 e^{-2x} \\ c_3 e^{5x} \end{bmatrix}$$

نحصل من الشروط الإبتدائية المعطاة على :

$$1 = y_1(0) = c_1 e^0 = c_1$$

$$4 = y_2(0) = c_2 e^0 = c_2$$

$$-2 = y_3(0) = c_3 e^0 = c_3$$

بهذا يكون الحل المستوفى الشروط الابتدائية هو

$$y_1 = e^{3x}$$

$$y_2 = 4e^{-2x}$$

$$y_3 = -2e^{5x}$$

أو بصيغة المصفوفات:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^{3x} \\ 4e^{-2x} \\ -2e^{5x} \end{bmatrix}$$

كان النظام فى هذا المثال السابق سهل الحل لأن كل معادلة تتضمن دالة مجهولة واحدة فقط وكانت هذه الحالة لأن مصفوفة المعاملات (5) للنظام كانت قطرية ولكن كيف نعالج نظامها

$$y' = Ay$$

فيه المصفوفةA ليست قطرية ؟ الفكرة بسيطة حاول أن تجرى تعويضها عن المصفوفة يؤدي الى نظام جديد بمصفوفة yمعاملات قطرية .حل هذا النظام الابسط الجديد ومن ثم إستخدم هذا الحل لتعيين حل النظام الأصل .

نوع التعويض الذي نحفظه هو :

$$\mathrm{y_1} = \mathrm{p_{11}u_1} + \mathrm{p_{12}u_2} + \cdots + \mathrm{p_{1n}u_n}$$

$$\mathrm{y_2} = \mathrm{p_{11}u_1} + \mathrm{p_{12}u_2} + \cdots + \mathrm{p_{1n}u_n} \qquad \rightarrow (7)$$

$$\mathrm{y_n} = \mathrm{p_{11}u_1} + \mathrm{p_{12}u_2} + \cdots + \mathrm{p_{1n}u_n}$$

بصيغة المصفوفات :

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots \ \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots p_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_n \end{bmatrix}$$

أو بشكل أكثر إيجازاً :

$$y = Pu$$

من هذا التعويضp_{ii} ثوابت يراد تعيينها بحيث يكون النظام الجديد المتضمن الدوال المجهولة$u_1, u_2, \dots, u_n$ مصفوفة معاملات قطرية وبعد إجراء التفاضل من (6) نستنتج أن :

$$y' = pu'$$

إذا اجرينا التعويض$y = pu\ , y' = pu'$ فى النظام االأصلى $y' = pu'$

وإذا افترضنا أنp قابلة للإنعكاس فإننا نحصل على :

$$pu' = A(pu)$$

أى:

$$u' = (p^{-1}Ap)u$$

بمعنى :

$$u' = Du$$

حيث $D = p^{-1}Ap$ ويمكن الان إختيارpواضحاً فإذا اردنا لمصفوفة المعاملاتD ان تكون قطرية فيجب ان تختارp لتكون مصفوفة تحولA الى مصفوفة قطرية .

يقترح ماسبق الاسلوب التالى لحل نظام ما

$$y' = Ay$$

له مصفوفة معاملاتA قابلة للتحويل الى الصورة القطرية :

خطوة (1): : أوجد مصفوفةP تحولA إلى الصورة القطرية

خطوة (2): أجر التعويض$y = pu\ , y' = pu'$ لتحصل على نظام قطري جديد $u' = Du$حيث $D = p^{-1}Ap$

خطوة (3): حل $u' = Du$

خطوة (4) : عين yمن المعادلة $y = pu$

مثال (2):

أ. حل النظام :

$$y'_1 = y_1 + y_2$$
$$y'_2 = 4y_1 - 2y_2$$

ب. أوجد الحل الذى يحقق الشرطين الإبتدائيين $y_1(0) = 1 , y_2(0) = 6$

الحل:

مصفوفة المعاملات للنظام هى :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 4 & -2 \end{bmatrix}$$

وفقاً للمناقشة (6) تكون قابلة للتحويل الى الصورة القطرية بواسطة أى مصفوفة أعمدة متجهات ذاتية غير مرتبطة خطياً للمصفوفة حيث أن :

$$\det(\lambda I - A) = \begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -4 & \lambda + 2 \end{bmatrix} = \lambda^2 + \lambda - 6 = (\lambda + 3)(\lambda - 2)$$

إذاً القيم الذاتية للمصفوفة هى $\lambda = -3, \lambda = 2$ بالتعويض يكون

$$x = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$$

متجهاً ذاتياً للمصفوفةAمناظراً للقيمةλ إذا وفقط إذا كان xحلاً غير صفرياً للمعادلة $(\lambda I - A)x$أى النظام

$$\begin{bmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ -4 & \lambda + 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

إذا كانت $\lambda = 2$هذا النظام يصبح :

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -4 & \lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

إجراء الحل يعطى

$$x_1 = t , x_2 = t$$

لهذا فإن :

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t \\ t \end{bmatrix} = t \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

وإذن يكون :

$$p_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

(2-3) التطبيقات فى الهندسة التحليلية :

(1-2-3) إيجاد معادلة منحنى مار بنقطة معطاه :

نبين فى هذا التطبيق كيفية إستخدام المحددات لإيجاد معادلة منحنى مار بنقطة معينة فى المستوى الإقليدى ، سيقتصر تطبيقنا على معادلة المستقيم والدائرة ولكن هذه الطريقة تصلح لإيجاد معادلة أى قطع مخروطى مار بنقاط معينة كما أن هذه الطريقة مفيده لإيجاد معادلة كل فى المستوى الكرة وبعض السطوح المارة بنقاط معطاة فى الفضاء الثلاثي .

إن فكرة هذا التطبيق ترتكز على انه إذا كان لدينا نظام معادلات متجانس وفيه عدد من المعادلات يساوى عدد المتغيرات فإن له حلاً غير تافه إذا وفقط إذا كان عدد مصفوفة المعاملات يساوى صفراً .

معادلة المستقيم :

إذا كان لدينا النقتطان (x_2, y_2) , (x_1, y_1)فى المستوى ونريد إيجاد المستقيم المار بهما فإن هذه المعادلة هى $a_1x + a_2y + a_3 = 0$على الصورة حيثa_1, a_2, a_3 اعداد حقيقية بحيث أنa_1 أو a_2 لاتساوى صفر.

أنظر الشكل :

إذا كان(x, y) اى نقطة على هذا المستقيم فإننا نحصل على نظام المعادلات المتجانس التالى :

$$a_1x + a_2y + a_3 = 0$$

$$a_1x_1 + a_2y_1 + a_3 = 0$$

$$a_1x_2 + a_2y_2 + a_3 = 0$$

حيث a_1, a_2, a_3هى المجاهيل لاحظ اننا نبحث عن حل حل غير تافه للنظام اعلاه لذا محدده المصفوفة يجب أن تساوى صفراً .

أى ان :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

أي أن :

$$\begin{vmatrix} x & y & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

وبفك المحدده نحصل على المعادلة :

$$2x - 3y + 5 = 0$$

(2-2-3) معادلة الدائرة :

نعلم من دروس الهندسة أن اى ثلاثة نقاط(x_3, y_3), (x_2, y_2), (x_1, y_1) فى المستوى وليست على إستقامة واحده لحين دائرة وحيده .

أن معادلة الدائرة هى على الصورة :

$$a_1(x^2 + y^2) + a_2x + a_3y + a_4 = 0$$

حيث $a_1 \neq 0$

إذا كانت (x, y) أى نقطة على الدائرة ، انظر الشكل :

فإننا نحصل على النظام المتجانس التالى :

$$a_1({x_1}^2 + {y_1}^2) + a_2x_1 + a_3y_1 + a_4 = 0$$

$$a_1({x_2}^2 + {y_2}^2) + a_2x_2 + a_3y_2 + a_4 = 0$$

$$a_1({x_3}^2 + {y_3}^2) + a_2x_3 + a_3y_3 + a_4 = 0$$

حيث المجاهيل هى a_1, a_2, a_3, a_4 وغننا نبحث عن حل غير تافه للنظام أى أن محدد المصفوفة يجب أن يساوي صفراً ، أى أن :

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ {x_1}^2 + {y_1}^2 & x_1 & y_1 & 1 \\ {x_2}^2 + {y_2}^2 & x_2 & y_2 & 1 \\ {x_3}^2 + {y_3}^2 & x_3 & y_3 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

ومعنى ذلك أن (x, y)تقع على الدائرة إذا وفقط إذا كان المحدده اعلاه تساوى صفراً .

مثال (3):

إستخدم المحددات لإيجاد معادلة الدائرة المارة بالنقاط $(1,0)$,$(1, -1)$,$(-1,1)$.

الحل :

النقطة (x, y) تقع على الدائرة إذا وفقط إذا كان :

$$\begin{vmatrix} x^2 + y^2 & x & y & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

وبفك المحدده نحصل على المعادلة :

$$x^2 + y^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{vmatrix} - x \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{vmatrix} + y \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

أى أن $x^2 + y^2(-2) - x + y(-2) - (-4) = 0$ وبالتالى فإن :

$$x^2 + y^2 + x + y - 2 = 0$$

هى المعادلة المطلوبة .

(3-3) التطبيق على سلاسل ماركوف :

فى هذا البند سوف ندرس دور المصفوفات فى نموذج رياضى للنظام يتحول فى حالة إلى آخرى وسنحتاج فى دراستنا إلى مفهوم نظام المعادلات الخطية كما نحتاج غلى مفهوم نهاية متتالية حقيقية .

لنفرض أن لدينا نموذجاً رياضياً لنظام يتغير من حالة إلى آخرى ، ولنفرض أن عدد حالات النظام الممكنة منته ، على سبيل المثال حالة الطقس فى منطقة ما من مناطق العالم قد تكون ممطرة غائمة أو مغبرة أو حالة الإقتصاد فى أحد البلدان قد يكون منتعش أو مستقر أو راكد ، لو افترضنا مثل هذه الأنظمة تتغير مع مرور الزمن من حالة إلى آخرى وأننا فى أوقات محددة قد سجلنا الحالة التى عليها النظام ولكن لا يمكن التحديد بدقة الحالة التى سيكون عليها النظام وإنما يمكن حساب إحتمال ما يكون عليه النظام فى حالة معينة من معرفة الحالة السابقة لها .

إن مثل هذا الوضع يسمى سلسلة ماركوف ولوصف ماسبق بالرموز لنرض أن لدينا نظاماً له kمن الحالات وليكن p_{ij}هو إحتمال أن يكون النظام فى الحالةi بعد أن كان فى الحالة j، يمكن وضع هذه القراءات فى مصفوفة$p = [p_{ij}]$ نطلق عليها مصفوفة الإنتقال لسلسلة ماركوف.

<u>مثال (4):</u>

إذا كان لدينا سلسلة ماركوف بثلاثة حالات فقدم وصفاً لذلك بإستخدام مصفوفة الإنتقال .

الحل :

المصفوفة المطلوبة p هى :

$$p = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \\ p_{31} & p_{32} & p_{33} \end{bmatrix}$$

حيث p_{23} هو إحتمال تحول النظام من الحالة 3 إلى الحالة 2 وهكذا .

مثال (5):

فى دراسة سجل التبرعات السنوية لإحدى الجمعيات الخيرية تبين أن 70% من المتبرعين فى إحدى السنوات يتبرعون فى السنة اللاحقة وإن 40% من غير المتبرعين فى إحدى السنوات لايتبرعون فى السنة اللاحقة .

أكتب مصفوفة الإنتقال لسلسلة ماركوف .

الحل:

هنالك حالتان الأولى هى التبرع للجمعية والتاليه عدم التبرع لها إذن لدينا مصفوفة من الدرجة 2×2 وهى :

$$P = \begin{vmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{vmatrix}$$

حيث العمود الاول يمثل المتبرعين فى إحدى السنوات والعمود الثانى يمثل غير المتبرعين .لاحظ اننا وضعنا العدد 0.3فى الموقع p_{21}لأن حاصل جمع الاعداد فى كل عمود يجب أن يساوى الواحد اى أن :

تعريف:

يسمى المتجه $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_k \end{bmatrix}$ متجه حالة لسلسلة ماركوف المكونة من k من الحالات إذا كان

$x_1 + x_2 + \cdots + x_k = 1$ وكان x_i هو إحتمال كون النظام فى الحالة i

ملحوظة:

أعمدة اى مصفوفة انتقال هى متجهات حالة .

إن فكرة متجه الحالة مرتبطة بالزمن فالمتجه x^t بصف إحتماله حالة النظام فى الزمن t حيث t وحدة الزمن غير كسرية (ساعة – دقيقة –شهر) وهكذا إذا جعلنا متجه الحالة فى وحدة الزمن t هو x^t فيمكن حساب x^{t+1} كالاتى :

$$x^{t+1} = px^t$$

حيث p هى مصفوفة الإنتقال . من قوانين الإجتماعات الشرطية .

<u>مثال (6):</u>

من المثال السابق أحسب متجه الحالة لأحد الاعضاء الذى تبرع فى بداية عضويته للجمعية وذلك بعد مرور ثلاث سنوات .

الحل:

أن متجه الحالة فى البداية هو : $x^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

اى أن العضو فى البداية كان فى الحالة الأولى وهى حالة التبرع إذا جعلنا x^t يرمز لمتجه الحالة بعد مرور t من السنين فإن $x^1 = px^0 , x^2 = px^1 = p^2x^0 , x^3 = px^2 = p^3x^0$

حيث p هى مصفوفة الإنتقال

$$p = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}$$

لذا فإن

$$x^1 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.3 \end{bmatrix}$$

$$x^2 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.7 \\ 0.3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.61 \\ 0.39 \end{bmatrix}$$

$$x^3 = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.4 \\ 0.3 & 0.6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.61 \\ 0.39 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.583 \\ 0.417 \end{bmatrix}$$

وهذا يعنى انه بعد ثلاله سنوات سيكون احتمال تبرعه فى تلك السنة هو 0.583 أو58.3% وإحتمال عدم تبرعة هو 0.417أو 41.7%.

فى المثال السابق إذا استمرينا فى حسابx^t لقيم عليا للمتغيرt نجد مايلى :

$$x^t = \begin{bmatrix} 0.571429 \\ 0.428571 \end{bmatrix}$$

ونجد أن متجه الحالة قد استقر عند قيمة ثابتة بعد مرور زمن معين وهنا نسأل هل هذا صحيح فى جميع سلاسل ماركوف ؟ الجواب بالنفى والمثال التالى يوضح ذلك .

مثال (6):

لنفرض أن مصفوفة الإنتقال هى :

$$p = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

وأن $x^0 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$أحسب قيم$t \geq 1$, x^t لكل

الحل:

لاحظ هنا ان $I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = p^2$مصفوفة الوحدة لذا فإن $p^t = I$لقيم tالزوجية و $p^t = p$ لقيم tالفردية

وعليه يكون :

$$x^t = px^{t-1} = p^t x^0 = \begin{cases} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, & \text{زوجى} \\ \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, & \text{فردى} \end{cases}$$

إذاً هذا النظام يتأرجح مابين الحالتين $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ ولا يستقر على حال ثابته

وهنا ينشأ سؤال هو : هل هناك شروط على مصفوفة الإنتقال p لضمان الوصول إلى حالة الاستقرار ؟

وللإجابة على هذا السؤال نحتاج إلى التعريف الآتى :

تعريف :

يقال عن مصفوفة الانتقال p انها منتظمة إذا كانت جميع عناصر إحدى قواها p^n موجبة .

نتيجة :

إذا كانت p مصفوفة انتقال منتظمة و x متجه حالة فإنه عندما $n \to \infty$ فإن المقدار p^n يؤل إلى q حيث :

$$q = \begin{bmatrix} q_1 \\ q_2 \\ \vdots \\ q_k \end{bmatrix}$$

البرهان:

نعلم أن $p^n \to q$ عندما $n \to \infty$ إذن لأي متجه حالة يكون $p^n x \to Qx$ ولكن $Qx = q$ وهذا يبرهن النتيجة .

تعريف :

المتجهq الوارد فى النتيجة السابقة يسمى متجه حالة الإستقرار ، لاجل حساب المتجهq نحتاج إلى المبرهنة التالية :

مبرهنة :

إذا كان qمتجه حالة الإستقرار لمصفوفة الانتقال المنتظمة pفإن qهو الحل الوحيد للمعادلة :

$$px = x$$

البرهان :

لاحظ أن$\lim_{n\to\infty} p^n = Q$ وكذلك $\lim_{n\to\infty} p^{n+1} = Q$

ولكن $\lim_{n\to\infty} p^n = pQ$من وحدانية النهاية نستنتج أن $pQ = p$ومن هذا نجد أن $pq =$ pولإثبات انq هو الحل الوحيد لهذه المعادلة نفرض أن rهو حل آخر لذا فإن:

$p^2r = p(pr) = pr = r$ وبالإستقراء الرياضي نستطيع إثبات أن $p^n r = q$ لكل $n \geq 1$ إذن $q = r$ولكن إذنqهو الحل الوحيد لنظام المعادلات المتجانس$(1-p)x = 0$.

ونستخدم المبرهنة أعلاه لإيجاد متجه حالة الاإستقرار(q) .

<u>مثال (7):</u>

فى مدينة ما توجد مكتبة عامة بها ثلاثة فروع يرمز لها بالرمز 1,2,3يمكن لأى شخص ان يستعير كتاباً من اى فروع المكتبة ويعيده إلى أحد الفروع عند دراسة وضع المكتبة تم التوصل إلى مصفوفة الانتقال التالية :

$$p = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.6 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$

إستخدم المبرهنة لإيجاد متجه حالة الاستقرار (q)

الحل :

لاحظ اولاً انp المصفوفة منتظمة مما يتيح لنا استخدام المبرهنة ولذا فإن متجه حالة الاستقرار هو الحل الوحيد للمعادلة المتجانسة $(1-p)x = 0$حيث

$$p = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.5 & 0.1 \\ 0.2 & 0.3 & 0.6 \\ 0.1 & 0.2 & 0.3 \end{bmatrix}$$

ومنه فإن :

$$\begin{bmatrix} 0.3 & -0.5 & -0.1 \\ -\ 0.2 & 0.7 & -0.6 \\ -0.1 & -0.2 & 0.7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

وبالتالى فإن :

$$0.3x_1 - 0.5x_2 - 0.1x_3 = 0 \quad \to (8)$$

$$-0.2x_1 - 0.7x_2 - 0.6x_3 = 0 \quad \to (9)$$

$$-0.1x_1 - 0.2x_2 + 0.7x_3 = 0 \quad \to (10)$$

بالإضافة الى العلاقة $x_1 + x_2 + x_3 = 1$

إذا اخذنا المعادلات1,2,4 نجد أن الحل هو

$$x_1 = 0.544117$$

$$x_2 = 0.294118$$

$$x_3 = 0.161765$$

وكذلك الحال بالنسبة للمعادلة 4مع اى معادلتين اخريتين من بين 1,2,3

إذا متجه الاستقرار (q) هو

$$q = \begin{bmatrix} 0.544117 \\ 0.294118 \\ 0.161765 \end{bmatrix}$$

تطبيقات الجبر الخطى فى المجالات الآخرى

يلعب الجبر الخطى والمصفوفات دوراً حيوياً وهاماً فى التعبير عن العلاقات الرياضية متعددة المتغيرات بشكل بسيط يسهل فهمه وبالتالى إيجاد الحلول المناسبة لهذه العلاقات. فضلاً عن ذلك فإن المصفوفات لها تطبيقات فى مجالات عديدة، فى الاقتصاد، والإحصاء وبحوث العمليات والعمليات الإدارية وغيرها من المجالات.فمثلاً نجد أن المصفوفات هى الأساس فى صياغة نماذج المنتج والمستخدم ، وكذلك صياغة سلاسل ماركوف .

ومن هذا المنطلق سوف نقدم بعض الأمثلة التطبيقية حتى يلمس الدارس مدى الاستفادة من المصفوفات فى المجال التطبيقى والواقع العملى.

(1-4) التطبيقات فى علم الإقتصاد :

نعرض فى هذا البند نموذجيين لتطبيقات الجبر الخطى فى الإقتصاد وينسب هذان النموذجان إلى عالم الإقتصاد ليونتيف يسمى النموذج الاول نموذج ليونتيف المغلق والثانى يسمى نموذج

ليونتيف المفتوح ، فى كلا النموذجين نتعامل مع بعض القراءات الإقتصادية لوحدات الإنتاج فى إقتصاد معين مثل الاسعار، كمية الناتج وغيرها . ويكون الغرض منها بعض الاهداف الاقتصادية .

(4-1-1) نموذج ليونتيف المغلق :

نبدأ اولاً بالنموذج المغلق ونقدمه من خلال المثال المبسط التالى :

مثال (1):

إتفق نجار ، كهربائي وسباك على إنجاز بعض اعمال الصيانة فى بيوتهم الثلاثة على أن يعمل كل منهم مجموعة 10 أيام فقط ، كما اتفقو ان يدفع كل منهم اجراً للآخر دون اهمال إحتساب أجر الشخص الذى يعمل فى بيته وذلك لضمان الدقة فى اجراءات المحاسبة ، إن الاجر اليومى المعتاد هو 100 ريال ولكن تم الاتفاق على تعديل هذا الاجر بحيث يصبح المبلغ المدان به كل شخص بعد إنتهاء اعمال الصيانه يعادل المبلغ الذى له .

احسب الاجر اليومى لكل عامل إذا علمت ان توزيع ايام العمل كما فى الجدول التالى :

عدد ايام العمل فى بيت	العمل المنجز من قبل		
	السباك	الكهربائي	النجار
النجار	2	5	3
الكهربائى	4	2	3
السباك	4	3	4

الحل :

لنفرض ان الاجر اليومى للنجار p_1 وللكهربائي p_2 و السباك p_3 العامل الاول وهو النجار عليه أن يدفع مبلغ $3p_1 + 5p_2 + 2p_3$ وهو يستلم لقاء عمله $10p_1$ ولذا فإننا نحصل على المعادلة :

$$3p_1 + 5p_2 + 2p_3 = 10p_1 \quad \rightarrow (1)$$

وبالمثل نحصل على المعادلتين التاليتين للكهربائي والسباك :

$$3p_1 + 2p_2 + 4p_3 = 10p_2 \quad \rightarrow (2)$$

$$4p_1 + 3p_2 + 4p_3 = 10p_3 \quad \rightarrow (3)$$

بقسمة المعادلات 1,2,3 على 10 وإستخدام المعادلة المصفوفيه المقابة نحصل على :

$$\begin{bmatrix} 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.3 & 0.8 & 0.4 \\ 0.4 & 0.3 & 0.6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

ومن ذلك نحصل على :

$$\begin{bmatrix} 0.3 & -0.5 & -0.2 \\ -0.3 & 0.8 & -0.4 \\ -0.4 & -0.3 & 0.6 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow (4)$$

حيث اعتبرنا

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$$

وبإستخدام طريقة جاوس لحل النظام المتجانس نجد أن مجموعة الحل هى

$$\left\{\left(t, \frac{17}{18}t, \frac{41}{36}t\right) : t \in p^t\right\}$$

لاحظ اننا اشترطنا أن تكون t موجبة وليست صفراً لكي لايكون الحل تافهاً وهو الحل الذى لايتقاضى اى من العمال اجراً .

كذلك لاحظان هنالك عدداً غير منته من الحلول للمسألة ولكن علينا ان نختار حلاً معقولاً والمقصود بذلك هو حل قريب من الاجرة اليومية المعتادة للعمال لذا يمكن ان نأخذ $t = 100$ فتكون الإجور $p_1 = 100, p_2 = 94.40 , p_3 = 113{,}89$.

ان المثال السابق يوضح السمات الرئيسية لنموذج ليونتيف المغلق فهو يمثل اقتصاداً معتمداً على ذاته وهو فى حالة توازن ينتج مايستهلكه ويستهلك ماينتجه . ان الوصف العام لهذا النموذج المغلق هو كالاتى :

لنفرض ان هنالك نظام اقتصادى n من الصناعات والخدمات ولنفرض انه فى فترة زمنية معينة يتم استهلاك كل ناتج الصناعات والخدمات ضمن قطاعات الاقتصاد نفسه وبنسب محدده ثابته .

المطلوب هو تحديد اسعار ناتج الصناعات والخدمات بحيث يكون مجموع المصروفات يساوى مجموع الدخول وبذلك يكون الاقتصاد متوازناً .

لتكن p_i هى قيمة ناتج الصناعة أو الخدمة i ولتكن a_{ij} نسبة ماتشتريه أو تستهلكه الصناعة أو الخدمة i من الصناعة او الخدمة j إذن لدينا الخصائص التالية :

1. $p_i \geq 0$ لكل $1 \leq i \leq n$

2. $a_{ij} \geq 0$ لكل $1 \leq i, j \leq n$

3. $a_{1j} + a_{2j} + \cdots + a_{nj} = 1$ لكل $1 \leq j \leq n$

المتجه $\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_n \end{bmatrix}$ يسمى متجه السعر والمصفوفة التالية:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots \ \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots a_{nn} \end{bmatrix}$$

تسمى مصفوفة النسب .

لاحظ أن الشرط (3) اعلاه بمعنى أن حاصل جمع العناصر فى كل عمود من A يساوى 1 (المصفوفة A مشابه للمصفوفات فى سلاسل ماركوف ولكن قيمة المصفوفة فى هذا البند تختلف عنها) كما وجدنا فى المثال السابق لكى نحصل على متجه السعر p الذى يعطينا التوازن الإقتصادى فإن p يجب ان يحقق:

$$Ap = p \quad \rightarrow (5)$$

$$(1 - A)p = 0 \quad \rightarrow (6)$$

ان المعادلة (6) هى عبارة عن نظام معادلات متجانس وان هذا النظام له حل غير تافه إذا وفقط إذا كان محدد المصفوفة $1 - A$ يساوى صفراً

(2-1-4)نموذج ليونتيف المغلق :

فى هذا النموذج نفترض أن لدينا اقتصاداً فيه n من وحدات الإنتاج الصناعية والخدمية . وان ناتج هذه الوحدات يفيض عن الحاجة المحلية . كما نفرض ان هنالك إلتزاماً من قبل وحدات الانتاج بتصدير كمية محدده من إنتاجها للخارج . ان الغرض من هذا النموذج ليس تحديد سعر بيع ناتج الوحدة كما رأينا فى النموذج المغلق وإنما هو تحديد كمية الإنتاج مع افتراض وجود سعر محدد مسبقاً لكل منتج ، من أجل وصف هذا النموذج نستخدم الترميز التالى :

x_i القيمة المالية لإنتاج الوحده i.

d_i القيمة المالية من ناتج الوحده i والواجب تصديرها للخارج .

c_{ij} القيمة المالية لناتج الوحده i والذى تحتاجه الوحده j لإنتاج ماقيمته وحده نقدية واحدة .

لنفرض ان $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$, $d = \begin{bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{bmatrix}$ هما متجها الإنتاج والطلب على التوالى و ان مصفوفة الاستهلاك هى :

$$C = \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \dots c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \dots c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots \ \vdots \\ c_{n1} & c_{n2} & \dots c_{nn} \end{bmatrix}$$

حيث :

1. $x \geq 0 , d \geq 0$
2. $c_{ij} \geq 0$
3. $c_{1j} + c_{2j} + \cdots + c_{nj} \leq 1$ لكل $1 \leq j \leq n$

مما تقدم يمكن ان نستنتج ان القيمة $c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \cdots + c_{in}x_n$ تمثل قيمة ناتج الوحده i والذى تحتاجه جميع الوحدات فى هذا النظام الإقتصادى . إذن الفائض هو :

$$x_i - (c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \cdots + c_{in}x_n)$$

وهذا الفائض يجب ان يساوي d_i من هذا نحصل على العلاقة :

$$(1 - c)x = d \leftrightarrow x - xd = d \quad \rightarrow (7)$$

لنأخذ مثالاً توضيحياً .

مثال (2) :

لنفرض ان هنالك مدينة فيها ثلاث وحدات انتاجية هى منجم للفحم ، شركة توليد الطاقة الكهربائية و شركة سكة حديدية .

ولنفرض ان الوحدة النقدية فى هذه المدينة هى الدينار الذى يعادل 10 ريالات . اذا كان انتاج ماقيمته ديناراً واحداً من الفحم يتطلب 0.25 دينار تيار كهربائي و 0.25 دينار نقل فى السكة الحديدية وانتاج ماقيمته دينار واحد من الكهرباء تحتاج غلى 0.65 دينار من الفحم و0.05 دينار تيار كهربائي و 0.05 نقل ، ولغرض توفير خدمة النقل فى السكة الحديدية بقيمة دينار واحد تحتاج الشركة إلى 0.55ديناراً من الفحم و 0.100 دينار من الكهرباء .

فى أحد الاسابيع إلتزم منجم الفحم بتصدير ما قيمته 50.000 دينار من الفحم إلى الخارج والتزمت شركة الكهرباء بتزويد مدن مجاورة بما قيمته 25.000 دينار من الكهرباء ، ولم تلتزم شركة السكة الحديدية بتقديم اى خدمة إلى الخارج .

كم يجب على وحدات الانتاج الثلاثة أن تنتج فى ذلك الإسبوع لكى تفى بإلتزاماتها المحلية والخارجية ؟

الحل :

لتكن

x_1 القيمة المالية لإنتاج الفحم فى ذلك الاسبوع .

x_2 القيمة المالية لإنتاج الكهرباء فى ذلك الاسبوع .

x_3 القيمة المالية لخدمات النقل فى ذلك الاسبوع .

من المعلومات الواردة فى نص المثال نستنتج أن :

$$c = \begin{bmatrix} 0 & -0.65 & 0.55 \\ 0.25 & 0.05 & 0.10 \\ 0.25 & 0.05 & 0 \end{bmatrix}$$

النظام الخطى $(1 - c)x = d$ يصبح

$$\begin{bmatrix} 1 & -0.65 & -0.55 \\ -0.25 & 0.95 & -0.10 \\ 0.25 & -0.05 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50.000 \\ 25.000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

نلاحظ ان المصفوفة على اليسار لها معكوس (غير شاذه)مما يعطينا حلاً وحيداً للنظام هو :

$$x = (1 - c)^{-1}d = \frac{1}{503}\begin{bmatrix} 756 & 542 & 470 \\ 220 & 690 & 190 \\ 200 & 170 & 630 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 50.000 \\ 25.000 \\ 0 \end{bmatrix}$$

إذن على منجم الفحم ان ينتج ماقيمته 102.087 دينار وعلى شركة الكهرباء انتاج ماقيمته 56.163 دينار وعلى شركة السكك الحديدية تقديم خدمة قيمتها 28.330 دينار .

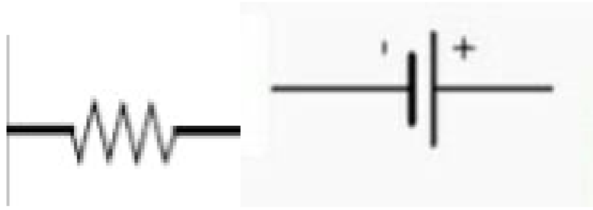
لنعود الان الى المعادلة (7) لاحظ انه فى حالة وجود معكوس للمصفوفة$c - 1$ فإنه يمكن إيجاد x بالعلاقة $x = (1 - c)^{-1}d$. إضافة إلى ذلك إذا كانت عناصر$(1 - c)^{-1}$ كلها غير سالبة فإن هذا يضمن ان يكون $x \geq 0$ لكل $d \geq 0$. ان الشرط الاخير اعلاه امر محبز لانه يعنى ان النظام

الاقتصادى قيد الدراسة يستطيع أن يلبى اي طلب خارجى وذلك إذا تجاهلنا معوقات الإنتاج الآخرى.

(2-4) التطبيقات فى علم الفيزياء(الدوائر الكهربائية) :

فى هذا التطبيق نبين كيفية استخدام انظمة المعادلات الخطية لإيجاد قيم التيار فى الاجزاء المختلفة من الدائرة الكهربائية .ستقتصر دراستنا فى هذا التطبيق على الدوائر الكهربائية الحاوية على ما يسمى بالتيار ولن نتطرق الى دوائر التيار المتناوب لكونها تتبع لقوانين فيزيائية مختلفة .

تتكون الدائرة الكهربائية من بطاريات هى مصدر التيار ومقاومات تستهلك الطاقة مثل المصابيح . ولغرض تسهيل وصف الدائرة الكهربائية نستخدم الرموز التالية :



مقاومة بطارية

هنالك ثلاثة مقادير فيزيائية تتعلق بدراسة الدوائر الكهربائية هى :

1. فرق الجهد ويرمز له بالرمز Eويقاس بوحدة الفولت أو V .فمثلاً ان قيمة Eبين قطبى بطارية من نوعAA التى تباع فى الاأسواق$1.5V$.
2. المقاومة ويرمز لها بالرمز R وتقاس بوحدة الأوم والتى يرمز لها بالرمز Ω.
3. التيار ويرمز له بالرمز Iويقاس بوحدة الأمبير والتى يرمز لها بالرمزA.

تحكم المقادير الثلاثة أعلاه ثلاثه قوانين فيزيائية تستخدم فى دراسة الدوائر الكهربائية للتيار المباشر وهى :

أ. قانون أوم ونعبر عنه بالمعادلة $E = RI$

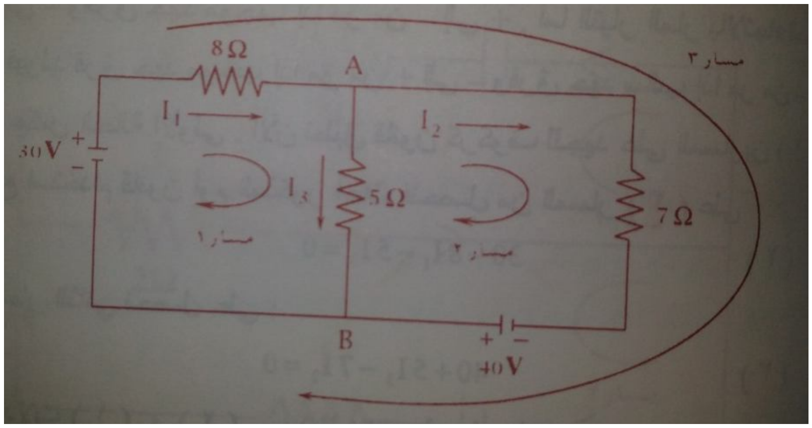
ب. قانون كركوف للتيارات المباشرة : وهو أن مجموع قيم التيارات الكهربائية الداخلة فى أى نقطة من الدائرة الكهربائية يساوى مجموع قيم التيارات الخارجه عنها .

ت. قانون كركوف للجهد : فى كل مسار مغلق فى الدائرة الكهربائية يكون مجموع فروقات الجهد مساوياً للصفر .

لأجل توضيح القوانين الثلاثة اعلاه وبيان كيفية إستخدام أنظمة المعادلات الخطية فى إيجاد قيم التيار الكهربى فى اجزاء الدائرة الكهربائية نورد المثال التالى :

<u>مثال (3) :</u>

أحسب قيم التياراتI_1, I_2, I_3 فى الدائرة الموضحة فى الشكل ادناه :



الحل :

لاحظ أولاً اننا عينا إتجاها لإنسياب التيار فى اجزاء الدائرة ويتم ذلك حسب إختيار الشخص وذلك لغرض وضع اساس يتم بناءً عليه اعتبار قيمة التيار بالإتجاه المعين موجب وبالاتجاه المعاكس سالب ، كذلك لاحظ اننا عينا ثلاثة مسارات مغلقة ووضعنا اتجاهاً نعتبره الاإتجاه الموجب . الان نطبق قانون كركوف للتيارات فى النقتطين A, B فنحصل على :

$$I_1 = I_2 + I_3$$ للنقطة A

$$I_3 + I_2 = I_1$$ للنقطة B

ان كلتا المعادلتين اعلاه تتبسط إلى المعادلة الخطية

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0 \quad \rightarrow (8)$$

من أجل إيجاد قيم نحتاج إلى معادلتين أخريتين نحصل عليهما من قانون كركوف للجهد ، ولأجل تطبيق القانون فى المسارات الموضحة فى الدائرة يجب مراعاة مايلى :

1. التيار المار فى مقاومة بالإتجاه الموجب للمسار يولد فرق جهد سالب والتيار المار بالإتجاه السالب يولد فرق جهد موجب .
2. التيار المار فى البطارية بالإتجاه الموجب للمسار يولد فرق جهد سالب إذا مر من + إلى – وفرق جهد موجب إذا مر من – إلى + ، اما التيار المار بالاتجاه السالب للمسار فيولد فرق جهد موجب إذا مر من + إلى – وفرق جهد سالب إذا مر من – إلى + اى عكس الحالة الأوولى .

الان نطبق قانون كركوف للجهد على المسارين (1) و (2) مع إستخدام قانون أوم المذكور أعلاه فنحصل من المسار (1) على :

$$30 - 8I_1 - 5I_3 = 0 \rightarrow (9)$$

ومن المسار الثانى نحصل على :

$$40 + 5I_3 - 7I_2 = 0 \rightarrow (10)$$

من المعادلات (8) و (9) (10) نحصل على النظام :

$$I_1 - I_2 - I_3 = 0$$

$$8I_1 - 5I_3 = 30$$

$$5I_3 - 7I_2 = 40$$

ومنه نحصل على الحل :

لاحظ أن I_3سالب ويعنى أن اتجاهه هو عكس الاتجاه الموضح فى رسم الدائرة الكهربائية . قد يسأل القارئ لماذا نستخدم المسار (3) عند تطبيق قانون كركوف للجهد . والجواب أن تطبيق هذا القانون على المسار (3) يعطينا معادلة مكرره بمعنى أنه يمكن استخدامها بدلاً من اى من المعادلتين المشتقتين من المسار (1) و (2) . وتعطينا الجواب السابق نفسه .

(3-4) التطبيق فى علم التشفير (التعمية) :

نقدم فى هذا البند إحدى الطرق المستخدمة فى الحفاظ على سرية الرسائل المرسلة عبر قنوات الإتصال المختلفة . إن العلم المعنى بهذا الأمر يسمى التعمية ويسميه البعض علم التشفير . سنحتاج

فى هذا البند إلى حساب المصفوفات قياس n كما نستخدم فكرة التحويلات الخطية وطريقة جاوس فى الحذف .

يهتم علم التعمية بالمحافظة على سرية الرسائل المهمة المرسله عبر قنوات الإتصال المختلفة . كما أن جانب من هذا العلم يعنى بتحليل الرسائل المعماه لغرض كسر نظام التعمية المستخدم أو على الأقل الحصول على أكبر قدر من المعلومات التى يمكن الإستفادة منها . نبدأ هذا البند بتعريف بعض المصطلحات المستخدمة فى علم التعمية .

1. النص الواضح : ويُعنى به الرسالة قبل تعميتها أو بمعنى آخر النص دون تغير أو تبديل .
2. النص المعمى : وهو النص الذي نحصل عليه بعد إجراء عملية التعمية .
3. التعمية أو التشفير : وهى عملية تحويل النص الواضح إلى نص معى .
4. مفتاح التعمية أو الشفرة : هو القيمة أو مجموعة القيم التى تستخدم فى وصف عملى التعمية.

إن ابسط الطرق فى التعمية طريقة التعويض وهو عبارة عن إبدال كل حرف من حروف الهجاء بحرف آخر كما فى الجدول التالى :

الحرف	**الحرف المقابل**	**الحرف**	**الحرف المقابل**	**الحرف**	**الحرف المقابل**	**الحرف**	**الحرف المقابل**
أ	ت	د	أ	ض	و	ك	ز
ب	ل	ذ	ت	ط	ث	ل	خ
ت	ق	ر	ي	ظ	ج	م	ز
ث	م	ز	ش	ع	ه	ن	ض
ج	س	س	ب	غ	ص	ه	ذ
ح	ط	ش	ظ	ف	ن	و	ح
خ	ك	ص	ع	ق	ر	ي	غ

بإستخدام هذا الجدول يمكن تعمية النص : أرسل الدبابات إلى المعمى : ت ي ب خ ت ت خ أ ل ت ل ت ق .

إن طريقة التعمية هذه سهلة الكسر . اى من السهل فك الشفرة ومعرفة النص الواضح وذلك من حساب نسبة التكرار فى كل حرف فى النص المعمى ومقارنتة وذلك بالنسب المعروفة للتكرار فى اللغة العربية .فمثلاً نسبة تكرار الحرف ج فى اللغة العربية هى حوالى 1.02% وعلى إذا وجدنا

ان نسبة تكرار حرف الفاء مثلاً فى النص المعمى هى نفس النسبة فإن هذا يقودنا إلى التخمين أن حرف الفاء على الأرجح احتمال يقابل الحرف جيم . وهكذا بالنسبة لبقية الحروف .

ولكن علينا أن ننوه أن هذه الطريقة فى كسر الشفرة لا تصلح لكسر جمل قصيرة كالتى ذكرناها اعلاه لأن حساب التكرار لايكون دقيقاً

ان إحدى الطرق المستخدمةللتغلب على مشكلة ضعف طريقة التعميةهذه هى أن تقسم النص الواضح إلى مجموعات متساوية من الحروف ثم تشفر كل مجموعة على حده . وتعرف هذه الطريقة فى التعمية بالطريقة التعددية . فى هذا البند سندرس إحدى الطرق التعددية المسماه بطريقة هِل فى التعمية نسبة إلى مكتشفها فى العام 1929 م وتعتمد هذه الطريقة على إستخدام المصفوفات كتحويلات خطية .لغرض شرح طريقة هِل للتعمية فى اللغة العربية ، نقوم اولاً بترقيم حروف اللغة العربية كما فى الجدول الآتى :

أ	ب	ت	ث	ج	ح	خ	د	ذ	ر
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10

ز	س	ش	ص	ض	ط	ظ	ع	غ	ف
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20

ق	ك	ل	م	ن	ه	و	ي
21	22	23	24	25	26	27	0

نلاحظ أننا اعطينا الحرف ي الرقم 0 لاننا نستعمل داخل الحلقة Z_{28} فيها$28 \equiv 0(mod\ 28)$.
لكى نوضح طريقة هِل نقدم المثال التالى الذى يستخدم المصفوفات من الدرجه 2×2 على الحلقة .

<u>مثال (4) :</u>

إستخدم المصفوفة التالية لتعمية الرسالة الهجوم غداً :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$$

الحل :

أولاً : نحول الرسالة إلى متتالة من الاعداد بإستخدام الجدول السابق فنحصل على :

1،23،26،5،27،24،19،8،1 على التوالى .

ثانياً : لتكوين المصفوفة من الدرجة 2×2 فإننا نجمع كل عددين متتالين فإن متجه كما يلي:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 19 \\ 8 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 27 \\ 24 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 26 \\ 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 23 \end{bmatrix} \rightarrow (11)$$

لاحظ كررنا العدين فى المتجه الآخر لكون عدد حروف الرسالة فردياً .

ثالثاً : نقوم بتعمية الرسالة كما يلى :

$$A = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$$

حيث $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ هو أحد المتجهات الواردة فى (11) فنحصل على :

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 23 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 9 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 26 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 18 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 27 \\ 24 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 11 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 19 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 22 \\ 23 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix}$$

لاحظ اننا قمنا بعملية الجمع والضرب قياس العدد (28) . اى اننا نعمل فى الحلقة Z_{28} .

رابعاً : نستخدم الجدول السابق لتحويل الرسالة إلى حروف فنحصل على الرسالة المشفره :ج ز ق ع ح ز ك ل خ ج

لاحظ أن عدد أحرف الرسالة المشفرة هو عشرة أحرف وذلك نتيجة لتكرار الحرف الاخير من النص الواضح كما ذكرنا فى ثانياً .

ملحوظة :

من المثال السابق إستخدمنا مصفوفات من الدرجة 2×2 لعملية التعمية مما دعانا إلى تجميع ارقام الحروف فى متجهات ثنائية . ان هذه الطريقة فى التعمية تسمى طريقة هِل من الرتبة 2. اما فى حالة إستخدامنا لمصفوفات من الدرجة$m \times m$ فإننا نجمع ارقام الحروف فى متجهات من الرتبة mوتسمى طريقة التعمية عندئذ بطريقة هِل من الرتبة m.

ان استخدام طريقة هل فى التعمية تتطلب إجراء حسابات داخل الحلقة Z_n، ويمكن للقارئ الإستعانة باى كتاب فى نظرية الاعداد للتعرف على هذه الحسابات ، فإذا لم يكن قد درسها من قبل .

مثال (5) :

إذا استطعنا ان نحصل على الرسالة المشفرة ص ل ن ر ذ ذ وعرف بطريقة ما أنها تقابل كلمة " اسلام "وان طريقة التعمية المستخدمة هى طريقة هِل من النوع 2×2 فإستخدم هذه المعلومات لإيجاد الشفره .

الحل :

نحول الرسالة المشفرة إلى ارقام بإستخدام اللجدول السابق ونحصل على :

14 ، 22، 25 ، 10 ، 17 ، 24

كما كانت طريقة هِل المستخدمة هى من النوع 2×2 فنكون المتجهات الثنائية التالية :

$$c_1 = \begin{bmatrix}14\\23\end{bmatrix},\ c_2 = \begin{bmatrix}25\\10\end{bmatrix},\ c_3 = \begin{bmatrix}9\\9\end{bmatrix}$$

الان نحول الكلمة المقابلة "اسلام " إلى ارقان فنحصل على :

1، 25، 12 ، 23 ، 1 ، 24

فنكون المتجهات :

$$p_1 = \begin{bmatrix}1\\23\end{bmatrix},\ p_2 = \begin{bmatrix}12\\23\end{bmatrix},\ p_3 = \begin{bmatrix}1\\24\end{bmatrix}$$

نختار متجهين فقط من ببين الثلاثه أعلاه ونتأكد انهما مستقلان خطياً على الحلقة Z_{28}. المتجهانp_1, p_2 يفيان بالشرط نختار المتجهين c_1, c_2المقابلين ونكون المصفوفتان :

$$p = [p_1, p_2] = \begin{bmatrix} 1 & 12 \\ 23 & 23 \end{bmatrix}$$

$$c = [c_1, c_2] = \begin{bmatrix} 14 & 25 \\ 23 & 10 \end{bmatrix}$$

يمكن التأكد أن p_1, p_2 مستقلان خطياً على Z_{28} من ملاحظة($\gcd(\det(p), 28$ الآن نحسب p^{-1} فنجد :

$$p^{-1} = \frac{1}{\det(p)} \begin{bmatrix} 23 & -12 \\ -23 & 1 \end{bmatrix} = \frac{1}{-253} \begin{bmatrix} 23 & 16 \\ 5 & 1 \end{bmatrix} = 27 \begin{bmatrix} 23 & 16 \\ 5 & 1 \end{bmatrix}$$
$$= \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 23 & 27 \end{bmatrix} mod\ 28$$

إذن حسب الصيغة الواردة اعلاه نجد ان المفتاح :

$$A = cp^{-1} \begin{bmatrix} 14 & 25 \\ 23 & 10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 12 \\ 23 & 27 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 9 & 14 \end{bmatrix} mod\ 28$$

من معرفة هذا المفتاح نستطيع تحويل بقية النص المشفر فى الؤسالة إلى نص واضح عن طريق الضرب بالمصفوفة A^{-1} .

ملخص البحث :

تحدثنا في هذا البحث عن الجبر الخطى بصفة عامة وعن جبر المصفوفات بصفة خاصة وعن مدى اهمية الجبر الخطى فى الرياضيات وفى الحياة العامة ؟ وللإجابة على هذا السؤال تطرقنـا لمفاهيم عدة من خلال البحث فتناولنا في الفصل الأول مقدمة عن الجبر الخطى وجبر المصفوفات والمحددات .

ومن ثم بعض العمليات على المصفوفات وطرق إيجاد معكوس المصفوفة و طرقة إستخدامه لحل الانظمة الخطية فى متغيرين ولأكثر من متغير ومن ثم إيجاد القيم الذاتية والمتجهات الذاتية وإستخدام كل ماسبق فى حل الانظمة الخطية فى كثير من التطبيقات.

كل باب يبدأ بعبارات ونصوص واضحة لتعريفات وثيقة الصلة بالموضوع وكذلك الأساسيات والنظريات سويا مع مادةعلمية موضحة وأخرى وصفية لها ويتبع هذا فئاتمصنفة من المسائلالمحلولة توضح وتفصل النظريات ثم أعقبناها ببعض تطبيقات الجبر الخطي فى الإقتصاد والدوائر الكهربائية وغيرها من التطبيقات ، وكذلك كان علينا كتابة ما خلصنا إليه من خلال تناولنا لموضوع البحث.

المراجع :

1. الجبر الخطى المبسط ، هوارد انتون ، ترجمة د. سامح سامى داؤد و د. فائق محمد غالب
2. الجبر الخطى وتطبيقاته ، د. معروف سمحان ، د. فوزى بن أحمد ، د. على بن عبدالله ، المملكة العربية السعودية ، الطبعة الاولى ـ 2001م
3. الجبر العام ، موراي شبيجل ، روبرت إ. موير ترجمة أ.د. محمد خلوصى اسماعيل ، الطبعة العربية الاولى ـ الدار الدولية للإستثمارات الثقافية ، 2001م .
4. حقائق فى تاريخ الرياضيات ، د. بشري الفاضل إبراهيم .
5. سلسلة المسائل المحلولة شوم ، 3000 مسأله محلوله فى الجبر الخطى ،سايمور لبشوتر ترجمة علي مصطفى بن الأشهر .
6. الجبر الخطى 1، راية فوزي الرخ ـ الطبعة الأولى 2013، مكتبة المجتمع العربى للنشر والتوزيع .
7. ملخصات شوم ، نظريات ومسائل فى المصفوفات ، د. فرانك آيرز ، ترجمة نخبة من الاساتذه المتخصصين ، جمهورية مصر العربية .
8. المصفوفات النظرية والتطبيق ، أ.د/ مجدى الطويل ، الطبعة الثانية ــدار النشر للجامعات ، 1999م .