SUST Journal of Natural and Medical Sciences (JNMS)vol. **16** (2) 2015
ISSN (Print): 1858-6805 e-ISSN (Online): 1858-6813

SUST
Journal of Natural and Medical Sciences

Journal homepage: http://journals.sustech.edu/

مقارنة بين الطرق المختلفة لتقدير مجموع ومتوسط مجتمع طبقي باستخدام متغير مساعد واحد

A comparison of different methods of estimating the total and mean of a stratified society using a single auxiliary variable

أحمد محمد عبد الله حمدي* و آدم عبدالله عثمان سبيل

جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا– كلية العلوم – قسم الاحصاء التطبيقي Email : hamdiam@yahoo.com

تاريخ الإستلام : يونيو 2014 **تاريخ القبول:** أبريل 2015

المستخلص:

الهدف منهذه الورقة التعرف على أثر المتغيرات المساعدة في زيادة دقة تقديرات المعاينة العشوائية الطبقية واستخدم الباحث التقدير بالنسبة بين المتغيرين والتقدير بخط الانحدار من حيث الشروط الواجب توفرهافى كل منهما ، والنظريات المتعلقة بهما ، وكذلك المقارنة بين دقة التقديرات عن طريق حساب الكفاءة النسبية من خلال الجانبين النظري والتطبيقي توصل الباحث الى عدة نتائج أهما:أن التقدير بالنسبة بين متغيرين أكثر دقة من تقديرات المعاينة العشوائية الطبقية التي تعتمد على متغير الدراسة فقط في حالة وجود ارتباط معنوي بين متغير الدراسة والمتغير المساعد أكبر من 50% داخل كل طبقة ، وأن التقدير بخط الانحدار أكثر دقة من التقدير بالنسبة بين متغيرين و تقديرات المعاينة العشوائية الطبقية التي على متغير الدراسة فقط إذا كان خط الانحدار لا يمر بنقطة الأصل داخل كل طبقة ، بينمافي المعاينة العشوائية الطبقية التقدير بخط الانحدار و التقدير بالنسبة بين متغيرين يتساويان في الدقة إذا كان خط الانحدار يمر بنقطة الأصل.

الكلمات المفتاحية : المعاينة العشوائية الطبقية –النسبة بين متغيرين خط الانحدار– والكفاءة النسبية

Abstract

The work aimed to examine the role of variables in improving the accuracy of the stratified random sampling. The estimation was used in the two variables and regression line according to the conditions required for each as well as the related theories. Also a comparison was done between the precise variables theoretically and practically through the relative efficiency. The paper concluded that the estimation in the variables is more precise than the stratified random sampling which depends mainly on the studied variable if there is correlation between the study variable and the auxiliary variable of more than 50% in each stratum. It was also concluded that the estimation of the regression line is more precise than the estimation between the two variables and stratified random sampling if the regression line doesn't pass through the point of origin in each stratum and if the estimate of the two variables and stratified random sampling will not be equal.

المقدمة:

أن إحدى مقومات نمو الإحصاء النظري هو ظهور قدر كبير من المعالجات النظرية التي تناقش كيفية صنع تقديرات جديدة من بيان إحصائي ، ترتبط عملية التقدير بمجموعة مشكلات إحصائية ، يجري التعامل معها بصيغة الاستدلالالذي يقود إلى تصورات دقيقة قدر الإمكان للبحث في قيمة أوأكثر من قيم معلمات

المجتمع ، وتتم عملية التقدير إما بالسعي إلى قيمة محددة (point estimate) مشتقة من بيانات عينة من المجتمع ، بحيث نحاول جعلها أقرب مايمكن إلى قيمة المعلمة الحقيقية ، أوبحساب حدود يتوقع أن تشمل القيمة الحقيقية للمعلمة باحتمال معين (Interval estimate)، وكلما كان الاحتمال عاليا كلما كانت هنالك موثوقية أكبر في حصولنا على مدي الثقة يتضمن القيمة الحقيقية.و سبب تطور نظرية التقدير هو البحث عن تقديرات ذات دقة عالية ، لذلك جاء هذا البحث ليتناول أسلوبي التقدير بالنسبة بين متغيرين و التقدير بخط الانحدار في المعاينة العشوائية بغرض زيادة دقة التقديرات إذا توفرت شروط معينة ، وأن كلا التقديرين يعتمد على المتغير المساعد على الرغم من أن لكل واحدٍ منها شروط خاصة به ، عليه نود التعرف على الجوانب النظرية والتطبيقية لهذين التقديرين في المعاينة العشوائية الطبقية.

تقدير بالنسبة بين متغيرين(R)في المعاينة العشوائية الطبقية:

Ratio estimator in stratified random sampling:

سوف نستعرض مقدرات النسبة= R_h (h لكل طبقة 1,2, … , L) فإذا كانت X_h تمثل مجموع القياسات X في الطبقة h وأن Y_h تمثل مجموع القياسات Y في الطبقة h فإن النسبة الحقيقية للطبقة R_h هي :-

$$\mathrm{R_h} = \frac{Y_h}{\mathrm{X_h}} = \frac{\bar{Y}_h}{\bar{X}_h}$$

$$\hat{Y}_{Rh} = \hat{R}_h \mathrm{X_h} \; , \hat{\mathrm{R}}_\mathrm{h} = \frac{y_h}{\mathrm{x_h}} = \frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h}$$

تقدر المجموع من النسب الطبقية منفردة

أ. **التقدير النسبي الطبقي المنفرد للمجموع:**

The separate ratio estimator of the total:

ويعرف بالشكل التالي :

$$\hat{Y}_{\mathrm{Rs}} = \sum_h \frac{y_h}{x_h} X_h = \sum_h \frac{\bar{y}_h}{x_h} X_h = \sum_h \hat{Y}_{Rh}$$

ب. **التقدير النسبي الطبقي المشترك للمجموع :**

The Combined Ratio estimate of the total

وتعرف بتقديرات خاصة للقياسات Xوللقياسات Y بما يلي :

$$X_{\mathrm{st}} = \sum_{\mathrm{h=1}}^{\mathrm{L}} N_h \bar{\mathrm{X}}_\mathrm{h} \; , \hat{Y}_{\mathrm{st}} = \sum_{\mathrm{h=1}}^{\mathrm{L}} N_h \bar{\mathrm{Y}}_\mathrm{h}$$

وعليه فإن التقدير المشترك يكون :

$$\hat{Y}_{\mathrm{Rc}} = \frac{y_{st}}{x_{st}} X = \frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}} X$$

EstimatorY_1 estimate

نظرية(1):

التقدير النسبي الطبقي المنفرد للمجموع$\hat{Y}_{\mathrm{Rs}}$ هو تقدير غير متحيز لـY

البرهان :

$$\hat{Y}_{\mathrm{Rs}} = \sum_h \hat{R}_h X_h = \sum_h \hat{Y}_{Rh}$$

بإدخال التوقع على طرفي المعادلة ينتج

$$\mathrm{E}(\hat{Y}_{\mathrm{Rs}}) = \sum_h X_h E(\hat{R}_h) = \sum_h X_h R_h = \sum_h Y_h = Y$$

نظرية (2):

إذا كانت أحجام العينات لجميع الطبقات (n_h) كبيرة فإن تباين $\hat{Y}_{\mathrm{Rs}}$ يعطى بالصيغة التالية :

$$V(\hat{Y}_{\mathrm{Rs}}) = \sum_{h=1}^{L} \frac{N_h^2(1-f_h)}{n_h}\left\{\sigma_{y_h}^2 - 2R_h\sigma_{x_h y_h} + R_h^2\sigma_{x_h}^2\right\}$$

البرهان:

من التعريف السابق وجد أن :

$$\hat{Y}_{Rh} = \hat{R}_h \mathrm{X_h} = \frac{y_h}{\mathrm{x_h}}\mathrm{X_h} \quad , \quad \hat{Y}_{\mathrm{Rs}} = \sum_h \hat{Y}_{Rh} \;,\; Y = \sum_{h=1}^{l} Y_h$$

$$\hat{Y}_{Rs} - Y = \sum_h \hat{Y}_{Rh} - \sum_{h=1}^{l} Y_h = \sum_{h=1}^{L} (\hat{Y}_{Rh} - Y_h)$$

نربع طرفي المعادلة وندخل التوقع

$$E\langle \hat{Y}_{Rs} - Y\rangle^2 = E\left\{\sum_{h=1}^{L} (\hat{Y}_{Rh} - Y_h)\right\}^2$$

$$V(\hat{Y}_{\mathrm{Rs}}) = \sum_{h=1}^{L} E\langle \hat{Y}_{Rh} - Y_h\rangle^2 + 2\sum_{h=1}^{L} E(\hat{Y}_{Rh} - Y_h)(\hat{Y}_{Rj} - Y_j)$$

$$V(\hat{Y}_{\mathrm{Rs}}) = \sum_{h=1}^{L} E\langle \hat{Y}_{Rh} - Y_h\rangle^2 + 2\sum_{h=1}^{L} Cov(\hat{Y}_{Rh}, \hat{Y}_{Rj})$$

لكن $Cov(\hat{Y}_{Rh}, \hat{Y}_{Rj}) = 0$ ، وذلك لأن القياسات داخل كل طبقة لاترتبطبقياسات الطبقات الأخرى إذاً :

$$V(\hat{Y}_{\mathrm{Rs}}) = \sum_{h=1}^{L} V(\hat{Y}_{\mathrm{Rh}})$$

ولكن

$$\mathrm{V}(\hat{Y}_{\mathrm{R}}) = \frac{N^2(1-f)}{n}\left[\sigma_y^2 - 2R\sigma_{xy} + R^2\sigma_x^2\right]$$

إذا تباين التقدير لمجموع الطبقة h

$$\mathrm{V}(\hat{Y}_{\mathrm{R}}) = \frac{N_h^2(1-f_h)}{n_h}\{\sigma_{y_h}^2 - 2R_h\sigma_{x_h y_h} + R_h^2\sigma_{x_h}^2\}$$

$$\therefore V(\hat{Y}_{\mathrm{Rs}}) = \sum_{h=1}^{L}\frac{N_h^2(1-f_h)}{n_h}\{\sigma_{y_h}^2 - 2R_h\sigma_{x_h y_h} + R_h^2\sigma_{x_h}^2\}$$

$$\therefore V(\hat{Y}_{\mathrm{Rs}}) = \sum_{h=1}^{L}\frac{N_h^2(1-f_h)}{n_h}\{\sigma_{y_h}^2 - 2R_h\rho_h\sigma_{x_h}\sigma_{y_h} + R_h^2\sigma_{x_h}^2\}$$

نظرية (3):

إذا كان حجم العينة (n) كبير جداً فإن التباين النسبي المشترك $\mathrm{V}(\hat{Y}_{\mathrm{R}h})$ يعطى بالصيغة التالية :

$$V(\hat{Y}_{\mathrm{Rc}}) = \sum_{h=1}^{L}\frac{N_h^2(1-f_h)}{n_h}\{\sigma_{y_h}^2 - 2R\sigma_{x_h y_h} + R^2\sigma_{x_h}^2\}$$

OR

$$V(\hat{Y}_{\mathrm{Rc}}) = \sum_{h=1}^{L}\frac{N_h^2(1-f_h)}{n_h}\{\sigma_{y_h}^2 - 2R\rho_h\sigma_{x_h}\sigma_{y_h} + R^2\sigma_{x_h}^2\}$$

البرهان :

$$\hat{Y}_{Rc} - Y = \frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}}X - Y = \frac{X}{\bar{x}_{st}}\left(\bar{y}_{st} - \frac{Y}{X}\bar{x}_{st}\right) = \frac{N\bar{X}}{\bar{x}_{st}}(\bar{y}_{st} - R\,\bar{x}_{st}) \equiv N(Y_{st} - R\bar{X}_{st})$$

لأن حجم العينة كبير فإن $\bar{x}_{st}$ في المقام ستكون قريبة من القيمة الحقيقية $\bar{X}$

$$\hat{Y}_{Rc} - Y = N\,(\bar{y}_{st} - R\,\bar{x}_{st})$$

لنفرض أن

$$\mathrm{c} = \mathrm{y_{hi}} - \mathrm{Rx_{hi}}$$

$$Z_{st} = \sum_{h=1}^{L} N_h\bar{Z}_h \qquad , \quad \bar{Z}_{\mathrm{h}} = \bar{\mathrm{y}}_{\mathrm{h}} - \mathrm{R}\bar{\mathrm{x}}_{\mathrm{h}}$$

بأخذ التوقع للطرفين

$$E(\bar{Z}_{\mathrm{h}}) = \mathrm{E}(\bar{\mathrm{y}}_{\mathrm{h}}) - \mathrm{RE}(\bar{\mathrm{x}}_{\mathrm{h}}) = \bar{\mathrm{Y}}_{\mathrm{h}} - \mathrm{R}\bar{\mathrm{X}}_{\mathrm{h}} = 0$$

فبالنسبة إلى تباين $\hat{Y}_{Rc}$ فإن

$$V\langle\hat{Y}_{Rc}\rangle = N^2 V\langle\bar{Z}_{\mathrm{st}}\rangle \quad , \quad \bar{Z}_{\mathrm{st}} = \sum_{\mathrm{h}=1}^{\mathrm{L}}\mathrm{N_h}\bar{\mathrm{Z}}_{\mathrm{h}}$$

But

$$V\langle \bar{Z}_{\text{st}}\rangle = \sum_{h=1}^{L}\frac{1-f_h}{n_h}\sigma_{x_h}^2 = \sum_{h=1}^{L}\frac{N_h-n_h}{N_h n_h}\ \sigma_{x_h}^2$$

$$V\langle \hat{Y}_{Rc}\rangle = \sum_{h=1}^{L} N_h^2\frac{N_h-n_h}{N_h n_h}\sigma_{x_h}^2$$

حيث أن

$$\sigma_{x_h}^2 = \frac{1}{N_h-1}\sum_{h=1}^{N_h}(Z_{\text{hi}}-\bar{Z}_{\text{h}})^2$$

وعند التعويض عن $\bar{Z}_{\text{h}}$ ، Z_{hi} نجد أن

$$\sigma_{x_h}^2 = \frac{1}{N_h-1}\sum_{h=1}^{N_h}(\langle \text{Y}_{\text{hi}}-\overline{\text{Y}}_{\text{h}}\rangle - \text{R}\langle \text{X}_{\text{hi}}-\overline{\text{X}}_{\text{h}}\rangle)^2$$

وبعد فتح التربيع داخل المجموع وبإدخال تعريف التباين إلى X,Y والتباين المشترك إلى X,Y داخل كل طبقة نجد أن :

$$\sigma_{x_h}^2 = \left\{\sigma_{y_h}^2 - 2R\rho_h\sigma_{x_h}\sigma_{y_h} + R^2\sigma_{x_h}^2\right\}$$

إذاً فالنتيجة ستكون

$$\therefore V\left(\hat{Y}_{\text{Rc}}\right) = \sum_{h=1}^{L}\frac{N_h^2(1-f_h)}{n_h}\left\{\sigma_{y_h}^2 - 2R\rho_h\sigma_{x_h}\sigma_{y_h} + R^2\sigma_{x_h}^2\right\}$$

1. تقدير الوسط الحسابي الطبقي بطريقة الانحدار في المعاينه العشوائية الطبقية:

Regression Estimate of the mean in Stratified random sampling

بنفس الطريقة التي تم فيها التحليل لتقدير الوسط الحسابي الطبقي عندما نفترض نموذج انحدار بين قياسات x وقياسات y وبالنسبة للمعاينة العشوائية الطبقية فإن هنالك نوعان من التقدير للوسط الحسابي بطريقة الانحدار:

التقدير بخطالانحدارعندما يكون معامل الانحدار β معلوم مسبقاًفي معانيه العشوائية الطبقية:

في كثير من الاحصاءات المدروسة قد نلجأ الى تقدير معامل الانحدار حيث يتم ذلك عن طريق دراسات أو معلومات سابقة. ان التقدير بخط الانحدار يماثل التقدير بالنسبة بين متغيرين في حالة وجود علاقة خطية بين المتغيرين x،y، ويكون التقدير بخط الانحدار اكثر دقة عندما لا يمر خط الانحدار بقطة الاصل و هنالك نوعان من التقدير للوسط الحسابي بطريقة الانحدار وفي كلا النوعان نستخدم تقدير معامل الانحدار $\hat{\beta}$كما يلي:

أ. الوسط الحسابي الطبقي المنفرد بطريقة الانحدار Separate Regression Estimate:

شروط استخدامه هي:

1– إذا كانت هنالك علاقة خطية داخلكل طبقة من الطبقات .

2– في حالة وجود أدلة كافية بأن القيم الحقيقية (β_h)في كل طبقة متجانسة فيما بينها .

لذلك يكون التقدير على هذا النحو:

$$\bar{y}_{lrh} = \bar{y}_h + \hat{\beta}_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h) \quad h = 1,2,3, \dots, L$$

فيكون الوسط الحسابي المنفرد والذي نرمز له بالرمز $\bar{y}_{lrs}$ بالصورة التالية :

$$\bar{y}_{lrs} = \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{y}_{lrh}$$

ب. الوسط الحسابي المشترك (الجامع) بطريقة الانحدار:

Combined Regression Estimate:

في حالة عدم تحقق الشروط الخاصة بالجزء (أ) فإن التقدير يكون بالصورة التالية :

$$\bar{y}_{st} = \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{y}_h \qquad , \qquad \bar{x}_{st} = \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{x}_h$$

وعلية فإن الوسط الحسابي المشترك (الجامع) يعرف بالشكل التالي :

$$\bar{y}_{lrc} = \bar{y}_{st} + \hat{\beta}(\bar{X} - \bar{x}_{st})$$

نظرية (1):

إن تقدير الوسط الحسابي الطبقي المنفرد $\bar{y}_{lrs}$عندما تكونقيمβ_hمعلومة مسبقاً ، هو تقدير غير متحيز إلى الوسط الحسابي الحقيقي $\bar{Y}$ وأن تباينه يعطى بالصيغة الأ تية :

$$V(\bar{y}_{lrs}) = \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h^2(1 - f_h)}{n_h}\{\sigma_{y_h}^2 - 2\beta_h \sigma_{x_h y_h} + \beta_h^2 \sigma_{x_h}^2\}$$

البرهان :

أ. سنبرهن أن الوسط الحسابي الطبقي المنفرد $\bar{y}_{lrs}$ هو تقدير غير متحيز إلى $\bar{Y}$ وبما أن :

$$\bar{y}_{lrs} = \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{y}_{lrh} \,, \bar{y}_{lrh} = \bar{y}_h + \hat{\beta}_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h)$$

بأخذ التوقع لطرفي المعادلة فإن :

$$E(\bar{y}_{lrs}) = \sum_{h=1}^{L} W_h\, E(\bar{y}_{lrh}) = \sum_{h=1}^{L} W_h\, E(\bar{y}_h + \hat{\beta}_h(\bar{X}_h - \bar{x}_h))$$

$$E(\bar{y}_{lrs}) = \sum_{h=1}^{L} \{W_h\, E(\bar{y}_h) + \hat{\beta}_h(\bar{X}_h - E(\bar{x}_h))\}$$

$$E(\bar{y}_{lrs}) = \sum_{h=1}^{L} W_h\, E(\bar{y}_h) + 0 = \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{Y}_h = \bar{Y}$$

$$\therefore \mathbf{E(\bar{y}_{lrs}) = \bar{Y}}$$

علية فإن$\bar{y}_{lrs}$ هو تقدير غير متحيز إلى $\bar{Y}$

ب. نبرهن تباينه :

$$V(\bar{y}_{lrs}) = V(\sum_{h=1}^{L} W_h \bar{y}_{lrh})$$

$$V(\bar{y}_{lrs}) = E(\bar{y}_{lrs} - \bar{Y})^2$$

$$V(\bar{y}_{lrs}) = E\left\{\sum_{h=1}^{L} W_h\left[(\bar{y}_h - \bar{Y}_h) - \beta_h(\bar{x}_h - \bar{X}_h)\right]\right\}^2$$

بتربيع الطرف الأيمن وإدخال التوقع نحصل على :

$$\therefore V(\bar{y}_{lrs}) = \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h^2(1-f_h)}{n_h}\{\sigma_{y_h}^2 - 2\beta_h\sigma_{x_hy_h} + \beta_h^2\sigma_{x_h}^2\}$$

نتيجة:

إذا تم وضع $\beta_h = \frac{\sigma_{x_hy_h}}{\sigma_{x_h}^2}$ **فإن نحصل على أقل تباين:**

$$V_{min}(\bar{y}_{lrs}) = \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h^2(1-f_h)}{n_h}\{\sigma_{y_h}^2 - 2\beta_h\sigma_{x_hy_h} + \beta_h^2\sigma_{x_h}^2\}$$

$$V_{min}(\bar{y}_{lrs}) = \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h^2(1-f_h)}{n_h}\left\{\sigma_{y_h}^2 - 2\frac{\sigma_{x_hy_h}^2}{\sigma_{x_h}^2} + \frac{\sigma_{x_hy_h}^2}{\sigma_{x_h}^2}\right\}$$

وعليه فإن

$$V_{min}(\bar{y}_{lrs}) = \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h^2(1-f_h)}{n_h}\left\{\sigma_{y_h}^2 - \frac{\sigma_{x_hy_h}^2}{\sigma_{x_h}^2}\right\}$$

$$V_{min}(\bar{y}_{lrs}) = \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h^2(1-f_h)}{n_h}\sigma_{y_h}^2\left\{1 - \frac{\sigma_{x_hy_h}^2}{\sigma_{x_h}^2\sigma_{y_h}^2}\right\}$$

$$\therefore V_{min}(\bar{y}_{lrs}) = \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h^2(1-f_h)}{n_h}\sigma_{y_h}^2\{1-\rho^2\}$$

نظرية (2):

إن تقدير الوسط الحسابي الطبقي المشترك $\bar{y}_{lrc}$عندماتكون قيمة معامل الانحدارβمعلومة مسبقاً، هو تقديرغير متحيز إلى الوسط الحسابي الحقيقي$\bar{Y}$ وأن تباينه يعطى بالصيغة التالية

$$V(\bar{y}_{lrc}) = \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h^2(1-f_h)}{n_h}\{\sigma_{y_h}^2 - 2\beta\sigma_{x_hy_h} + \beta^2\sigma_{x_h}^2\}$$

البرهان:

حسب التعريف السابق فإن:

$$\bar{y}_{lrc} = \bar{y}_{st} + \beta(\bar{X} - \bar{x}_{st})$$

بأخذ التوقع للطرفين

$$E(\bar{y}_{lrc}) = E(\bar{y}_{st}) + \beta(\bar{X} - E(\bar{x}_{st}))$$

$$E(\bar{y}_{st}) = \bar{Y} \qquad , \; E(\bar{x}_{st}) = \bar{X}$$

$$\therefore \mathbf{E(\bar{y}_{lrc}) = \bar{Y}}$$

وأن تباينه هو:

$$V(\bar{y}_{lrc}) = V\{\bar{y}_{st} + \beta(\bar{X} - \bar{x}_{st})\}$$

$$\bar{y}_{lr} = \sum_{h=1}^{L} W_h\bar{y}_h - \beta\sum_{h=1}^{L} W_h(\bar{x}_h - \bar{X}_h)$$

$$\bar{y}_{lr} - \bar{Y} = \sum_{h=1}^{L} W_h\{(\bar{y}_h - \bar{Y}) - \beta(\bar{x}_h - \bar{X}_h)\}$$

بتربيع الطرفين وأخذ التوقع نحصل على

$$E(\bar{y}_{lr} - \bar{Y})^2 = E\left\{\sum_{h=1}^{L} W_h\{(\bar{y}_h - \bar{Y}) - \beta(\bar{x}_h - \bar{X}_h)\}\right\}^2$$

$$\therefore V(\bar{y}_{lrc}) = \sum_{h=1}^{L} \frac{W_h^2(1-f_h)}{n_h}\{\sigma_{y_h}^2 - 2\beta\sigma_{x_hy_h} + \beta^2\sigma_{x_h}^2\}$$

الجانب التطبيقي

في هذا العمل تم استخدام المحاكاة لمجتمع افتراضي وهو مجتمعالمزارع المزروعة بالقمح في أحد المناطق ، وتم تجميع بيانات باستخدام الحاسب الآلي، وتمت المقارنة بين تقديراتالعينة الطبقية والتقدير بالنسبة و التقدير بخط الانحدار كما يلي:

في دراسة لتقدير المتوسط والعدد الكلي لإنتاج محصول القمح في احدى المناطق قسمت المزارع إلى ثلاثطبقات ، 150 ذات إنتاج صغير (50-0 طن) ، و 320 ذات إنتاج متوسط (100-51 طن) ، و 210 ذات إنتاج كبير (أكبر من 100 طن) وكذلك تم استخدام الحاسوب لتوليد مشاهدات العينات.

الجدول (1) يوضح نتائج الإحصاءات الأولية لإنتاج محصول القمح:

الطبقات	N_h	n_h	$\bar{X}_h$	$\bar{y}_h$	$\bar{x}_h$	$\hat{\rho}_h$	$\hat{B}_h$	$\hat{R}_h$	$s^2_{y_h}$	$s^2_{x_h}$	s_{y_h}	s_{x_h}
الأولى	150	40	30	32	27	0.92	0.95	1.19	228	216	15	14.7
الثانية	320	82	70	80	74	0.81	0.79	1.1	172	180	13.1	13.4
الثالثة	210	65	120	132	124	0.63	0.67	1.1	202	177	14.2	13.3

المصدر : إعداد الباحث من بيانات الدراسة اعتمادا على نتائج SPSS

1. إيجاد تقديرات المتوسطات في المعاينة العشوائية الطبقية وهي (تقدير متوسط العينة الطبقية ، تقدير المتوسط الطبقي باستخدام النسبة بين متغيرين (المنفرد والمشترك) و تقدير المتوسط الطبقي باستخدام خط الانحدار الخطي البسيط (المنفرد والمشترك)):

أ. تقدير متوسط العينة الطبقية (تقدير المتوسط الطبقي لكل وحدة):

$$\hat{\bar{Y}}_{st} = \bar{y}_{st} = \frac{\sum_{h=1}^{L} N_h \bar{y}_h}{N} = \frac{(150*32)+(320*80)+(210*132)}{680} = \underline{\mathbf{85.50}}$$

ب. تقدير المتوسط الطبقي (المنفرد والمشترك) باستخدام النسبة بين متغيرين:

- تقدير المتوسط الطبقي المنفرد:

$$\hat{\bar{Y}}_{Rs} = \frac{\sum_{h=1}^{L} \frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h} X_h}{N}$$

$$\hat{\bar{Y}}_{Rs} = \frac{\left(\frac{32}{27}*4500\right)+\left(\frac{80}{74}*22400\right)+\left(\frac{132}{124}*25200\right)}{680} = \frac{56375.4}{680} = \underline{\mathbf{82.90}}$$

- تقدير المتوسط الطبقي المشترك:

$$\hat{\bar{Y}}_{Rc} = \frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}} \bar{X} \quad , \quad \hat{\bar{X}}_{st} = \frac{\sum_{h=1}^{L} N_h \bar{x}_h}{N} \quad , \hat{\bar{Y}}_{st} = \frac{\sum_{h=1}^{L} N_h \bar{y}_h}{N}$$

$$\hat{\bar{Y}}_{st} = \bar{y}_{st} = \frac{\sum_{h=1}^{L} N_h \bar{y}_h}{N} = \frac{(150*32)+(320*80)+(210*132)}{680} = \underline{\mathbf{85.47}}$$

$$\hat{\bar{X}}_{st} = \bar{x}_{st} = \frac{\sum_{h=1}^{L} N_h \bar{x}_h}{N} = \frac{(150*27)+(320*74)+(210*124)}{680} = \underline{\mathbf{79.07}}$$

$$\hat{\bar{Y}}_{Rc} = \frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}} \bar{X}_{st} = \frac{85.5}{79} * 77 = \underline{\mathbf{83.34}}$$

حيث أن

$$\bar{X}_{st} = \frac{\sum_{h=1}^{L} N_h \bar{X}_h}{N} = \frac{(150*30)+(320*70)+(210*120)}{680} = \underline{\mathbf{77.00}}$$

ج. تقدير المتوسط الطبقي (المنفرد والمشترك) باستخدام خط الانحدار الخطي البسيط :

- تقدير المتوسط الطبقي المنفرد:

$\bar{y}_{\text{lrh}} = \bar{y}_h + b_0(\bar{X}_h - \bar{x}_h)$, h = 1,2,3

$$b_h = \rho_h * \frac{\sigma_{y_h}}{\sigma_{x_h}}$$

$\bar{y}_{\text{lr1}} = 32 + 0.95(30 - 27) = \underline{\mathbf{34.85}}$

$\bar{y}_{\text{lr1}} = 80 + 0.79(70 - 74) = \underline{\mathbf{76.84}}$

$\bar{y}_{\text{lr1}} = 132 + 0.67(120 - 124) = \underline{\mathbf{129.32}}$

فيكون الوسط الحسابي المنفرد والذي نرمز له بالرمز $\bar{y}_{\text{lrs}}$ بالصور التالية :

$\bar{y}_{\text{lrs}} = \sum_{h=1}^{L} W_h \bar{y}_{\text{lrh}}$

$\bar{y}_{\text{lrs}} = \frac{\sum_{h=1}^{L} N_h \bar{y}_{\text{lrh}}}{N} = \frac{(150*34.85)+(320*76.84)+(210*129.32)}{680} = \underline{\mathbf{84.00}}$

$$\bar{y}_{\text{lrs}} = \frac{56973.5}{680} = \underline{\mathbf{83.78}}$$

●تقدير المتوسط الطبقي المشترك:

$$\bar{y}_{\text{lrc}} = \bar{y}_{st} + b(\bar{X} - \bar{x}_{st})$$

$$b = \frac{\sum_{h=1}^{L} N_h b_h}{N} = \frac{(150*0.95)+(320*0.79)+(210*0.67)}{680} = \underline{\mathbf{0.79}}$$

$$\bar{y}_{\text{lrc}} = 85.5 + 0.79(77 - 79) = \underline{\mathbf{83.92}}$$

حساب التباينات الخاصة بتقديرات المتوسطات أعلاه:

أ. حساب تباين تقدير متوسط العينة الطبقية (تقدير المتوسط الطبقي لكل وحدة):

$$V\langle \bar{y}_{st} \rangle = \frac{1}{N^2}\left\{\frac{(1-f_h)}{n_h} N_h^2 S_h^2\right\} , \ f_h = \frac{n_h}{N_h}$$

$$V\langle \bar{y}_{st} \rangle = \frac{\left\{\left[\frac{\left(1-\frac{40}{150}\right)}{40}(150)^2(228)\right] + \left[\frac{\left(1-\frac{82}{320}\right)}{82}(320)^2(172)\right] + \left[\frac{\left(1-\frac{65}{210}\right)}{65}(210)^2(202)\right]\right\}}{(680)^2}$$

$$V\langle \bar{y}_{st} \rangle = \frac{348429.5}{(680)^2} = \underline{0.75}$$

ب. حساب تباين تقدير المتوسط الطبقي (المنفرد والمشترك) باستخدام النسبة بين متغيرين:

- تقدير تباين المتوسط الطبقي المنفرد:

$$V(\hat{Y}_{\text{Rs}}) = \frac{1}{N^2}\sum_{h=1}^{L} \frac{N_h^2(1-f_h)}{n_h}\left\{\sigma_{y_h}^2 - 2R_h\sigma_{x_h}\sigma_{y_h} + R_h^2\sigma_{x_h}^2\right\}$$

$$V\langle \bar{y}_{\text{Rs}} \rangle = \frac{1}{680^2}\left\{\left[\frac{\left(1-\frac{40}{150}\right)}{40}(150)^2\left(228 + 1.19^2(216) - 2(1.19)(.92)(15)(14.7)\right)\right]\right.$$
$$+ \left[\frac{\left(1-\frac{82}{320}\right)}{82}(320)^2\left(172 + 1.1^2(180)\right.\right.$$
$$\left.\left. - 2(1.1)(.81)(13.21)(13.4)\right)\right]$$
$$\left. + \left[\frac{\left(1-\frac{65}{210}\right)}{65}(210)^2\left(202 + 1.1^2(176.5) - 2(1.1)(.63)(14.21)(13.3)\right)\right]\right\}$$

$$V\langle \bar{y}_{\text{Rs}}\rangle = \frac{164301.6}{680^2} = \underline{\mathbf{0.36}}$$

- **تقدير تباين المتوسط الطبقي المشترك:**

$$V\left(\hat{\bar{Y}}_{\text{Rc}}\right) = \frac{1}{N^2}\sum_{h=1}^{L}\frac{N_h^2(1-f_h)}{n_h}\left\{\sigma_{y_h}^2 - 2R\rho_h\sigma_{x_h}\sigma_{y_h} + R^2\sigma_{x_h}^2\right\}$$

$$V\langle \bar{y}_{\text{Rs}}\rangle = \frac{1}{680^2}\left\{\left[\frac{\left(1-\frac{40}{150}\right)}{40}(150)^2\left(228+1.1^2(216)-2(1.1)(.92)(15)(14.7)\right)\right]\right.$$
$$+\left[\frac{\left(1-\frac{82}{320}\right)}{82}(320)^2\left(172+1.1^2(180)-2(1.1)(.81)(13.21)(13.4)\right)\right]$$
$$\left.+\left[\frac{\left(1-\frac{65}{210}\right)}{65}(210)^2\left(202+1.1^2(176.5)-2(1.1)(.63)(14.21)(13.3)\right)\right]\right\}$$

$$V\left(\hat{\bar{Y}}_{\text{Rc}}\right) = \frac{160994}{680^2} = \underline{0.35}$$

حيث أن

$$R = \frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}} = \underline{1.10}$$

ت. حساب تباينتقدير المتوسط الطبقي (المنفرد والمشترك) باستخدام خط الانحدار الخطي البسيط:

- تقدير تباين المتوسط الطبقي المنفرد:

$$V\left(\hat{Y}_{\text{Lrs}}\right) = \frac{1}{N^2}\sum_{h=1}^{L}\frac{N_h^2(1-f_h)}{n_h}\left\{\sigma_{y_h}^2 - 2b_h\sigma_{x_h}\sigma_{y_h} + b_h^2\sigma_{x_h}^2\right\}$$

$$V\langle \bar{y}_{\text{Lrs}}\rangle = \frac{1}{680^2}\left\{\left[\frac{\left(1-\frac{40}{150}\right)}{40}(150)^2\left(228+0.95^2(216)-2(0.95)(.92)(15)(14.7)\right)\right]\right.$$
$$+\left[\frac{\left(1-\frac{82}{320}\right)}{82}(320)^2\left(172+0.79^2(180)-2(0.79)(0.81)(13.21)(13.4)\right)\right]$$
$$+\left[\frac{\left(1-\frac{65}{210}\right)}{65}(210)^2\left(202+0.63^2(176.5)\right.\right.$$
$$\left.\left.\left.-2(0.63)(.63)(14.21)(13.3)\right)\right]\right\}$$

$$V\langle \bar{y}_{\text{Lrs}}\rangle = \frac{127745.6}{680^2} = \underline{\mathbf{0.28}}$$

- تقدير تباين المتوسط الطبقي المشترك:

$$V\left(\hat{\bar{Y}}_{\text{Lrc}}\right) = \frac{1}{N^2}\sum_{h=1}^{L}\frac{N_h^2(1-f_h)}{n_h}\left\{\sigma_{y_h}^2 - 2b\rho_h\sigma_{x_h}\sigma_{y_h} + b^2\sigma_{x_h}^2\right\}$$

$$V\langle \bar{y}_{\text{Lrs}}\rangle = \frac{1}{680^2}\left\{\left[\frac{\left(1-\frac{40}{150}\right)}{40}(150)^2\left(228+0.79(216)-2(0.79)(.92)(15)(14.7)\right)\right]\right.$$
$$+\left[\frac{\left(1-\frac{82}{320}\right)}{82}(320)^2\left(172+0.79^2(180)-2(0.79)(0.81)(13.21)(13.4)\right)\right]$$
$$\left.+\left[\frac{\left(1-\frac{65}{210}\right)}{65}(210)^2\left(202+0.79^2(176.5)-2(0.79)(0.63)(14.2)(13.3)\right)\right]\right\}$$

$$V\left(\hat{\bar{Y}}_{\text{Lrc}}\right) = \frac{151686}{680^2} = \underline{\mathbf{0.33}}$$

حيث أن

$$b = \frac{\sum_{h=1}^{L} N_h b_h}{N} = \frac{(150*0.95)+(320*0.79)+(210*0.67)}{680} = \underline{\mathbf{0.79}}$$

الجدول (2) تقديرات المتوسطات لإنتاج محصول القمح والتباينات:

$\bar{y}_{st}$	$\bar{y}_{Rs}$	$\bar{y}_{Rc}$	$\bar{y}_{Lrs}$	$\bar{y}_{LRc}$	$V\langle\bar{y}_{st}\rangle$	$V\langle\bar{y}_{Rs}\rangle$	$V\langle\bar{y}_{Rc}\rangle$	$V\langle\bar{y}_{Lrs}\rangle$	$V\langle\bar{y}_{Lrc}\rangle$
85.5	83	83	84	84	0.754	0.355	0.348	0.276	0.328

المصدر : إعداد الباحث من بيانات الدراسة

نلاحظ من الجدول رقم (2) أعلاه تقديرات المتوسطات قريبة جداً من بعضها ولكن عندما ننظر إلى تباينات المقدرات نجدها مختلفة ، وأن تباينات التقدير بخط الانحدار اقل من تباينات التقدير بالنسبة بين متغيرين، ، وأن تباينات التقدير بالنسبة بين متغيرين اقل من تباين العينة العشوائية الطبقية ، عليه من خلال نظرية التقدير والتي تنص على أن المقدر الجيد هو الذي يملك أقل تباين من بين المقدرات الأخرى ، لذلك نستدل أن التقدير بالانحدار يعتبر الأفضل من بين المقدرات الأخري.

2. إيجاد تقديرات المجموع الكلي في المعاينة العشوائية الطبقية وهي (تقدير المجموع الكلي في العينة الطبقية – تقدير المجموع الكلي الطبقي باستخدام النسبة بين متغيرين (المنفرد و المشترك) و تقدير المجموع الكلي الطبقي باستخدام خط الانحدار الخطي البسيط (المنفرد والمشترك)):

أ. تقدير المجموع الكلي في العينة الطبقية (تقدير المتوسط الطبقي لكل وحدة)

$$\hat{Y}_{st} = \sum_{h=1}^{L} N_h \bar{y}_h = \underline{58120.00}$$

ب. تقديرالمجموع الكلي الطبقية (المنفرد والمشترك) باستخدام النسبة بين متغيرين:

- تقدير المجموع الكلي المنفرد:

$$\hat{Y}_{Rs} = \sum_{h=1}^{L} \frac{\bar{y}_h}{\bar{x}_h} X_h = \underline{56375.40}$$

- **تقدير المجموع الكلي المشترك:**

$$\hat{Y}_{Rc} = \frac{\bar{y}_{st}}{\bar{x}_{st}} X = \underline{56440.00}$$

ث. تقديرالمجموع الكليالطبقي(المنفرد والمشترك) باستخدامالانحدار الخطي البسيط:

- تقدير المجموع الكلي المنفرد:

$$\hat{Y}_{Lrs} = N\bar{y}_{Lrs} = (680)(84) = \underline{57120.00}$$

- تقدير المجموع الكلي المنفرد:

$$\hat{Y}_{\mathrm{Lrc}} = N\bar{y}_{Lrc} = (680)(84) = \underline{57120.00}$$

حساب التباينات الخاصة بتقديرات المجموع الكلي اعلاه:

أ. حساب تباينتقدير المجموع الكلي الطبقي العينة البسيطة(تقدير المتوسط لكل وحدة):

$$\mathrm{V}(\hat{Y}_{St}) = N^2\mathrm{V}\left(\hat{\hat{Y}}_{St}\right) = (680)^2(0.754) = \underline{348649.60}$$

ب. حساب تباينتقديرالمجموع الكلي الطبقية (المنفرد والمشترك) باستخدام النسبة بين متغيرين:

- تقدير تباين المجموع الكلي المنفرد:

$$\mathrm{V}(\hat{Y}_{\mathrm{Rs}}) = N^2\mathrm{V}(\hat{\hat{Y}}_{\mathrm{Rs}}) = (680)^2(0.355) = \underline{164152.00}$$

- تقدير تباين المجموع الكلي المشترك:

$$\mathrm{V}(\hat{Y}_{\mathrm{R}c}) = N^2\mathrm{V}(\hat{\hat{Y}}_{\mathrm{Rc}}) = (680)^2(0.348) = \underline{160915.20}$$

ج. حساب تباين تقديرالمجموع الكليالطبقي(المنفرد والمشترك) باستخدامالانحدار الخطي البسيط:

- تقدير تباين المجموع الكلي المنفرد:

$$\mathrm{V}(\hat{Y}_{\mathrm{Lrs}}) = N^2\mathrm{V}(\hat{\hat{Y}}_{\mathrm{Lrs}}) = (680)^2(0.276) = \underline{127622.00}$$

- تقدير تباين المجموع الكلي المشترك:

$$\mathrm{V}(\hat{Y}_{\mathrm{Lrc}}) = N^2\mathrm{V}(\hat{\hat{Y}}_{\mathrm{Lrc}}) = (680)^2(0.328) = \underline{151667.20}$$

نلاحظ من الجدول رقم (3) أن تقديرات المجموع الكلي قريبة جداً من بعضها ولكن عندما ننظر إلى تباينات المقدرات نجدها مختلفة ، وأن تباينات التقدير بخط الانحدار اقل من تباينات التقدير بالنسبة بين متغيرين ، علية من خلال نظرية التقدير والتي تنص على أن المقدر الجيد هو الذي يملك أقل تباين من بين المقدرات الأخرى ، يستدل من ذلك أن تقديرالانحدار يعتبر الأفضل من بين المقدرات الآخر.

الجدول (3) تقديرات المجموع الكلي لإنتاج محصول القمح والتباينات:

y_{st}	y_{Rs}	y_{Rc}	y_{Lrs}	y_{LRc}	$V\langle \mathrm{y}_{st}\rangle$	$V\langle \mathrm{y}_{\mathrm{Rs}}\rangle$	$V\langle \mathrm{y}_{\mathrm{Rc}}\rangle$	$V\langle \mathrm{y}_{\mathrm{Lrs}}\rangle$	$V\langle \mathrm{y}_{\mathrm{Lrc}}\rangle$
58140	56375	56440	57120	57120	348650	164152	160915	127662	151667

المصدر : إعداد الباحث من بيانات الدراسة اعتماداً على نتائجspss

حساب الكفاءة النسبية لتقديرات العينة العشوائية الطبقية :

يمكن حساب الكفاءة النسبية من خلال العلاقة الاتية: $\mathrm{Eff}(\bar{y}_{St}\,, \bar{y}_{\mathrm{Rs}}) = \frac{\mathrm{V}(\bar{y}_{St})}{\mathrm{V}(\bar{y}_{\mathrm{Rs}})}$

فمثلاً إذا كانت $\mathbf{Eff}(\bar{y}_{St}\,, \bar{y}_{\mathrm{Rs}}) = \mathbf{2.00}$ هذا يعني اننا نحتاج فقط لنصف حجم العينة إذا استخدمنا تقديرات النسبة للحصول على نفس الكفاءة من العينة الكاملة باستخدام أسلوب المعاينة العشوائية الطبقية.

الجدول رقم (4) يمكننا ان نلاحظ مايلي:

الجدول (4) الكفاءة النسبية للتقديرات الموضحة في الجدول (2):

$\mathbf{Eff}(\bar{y}_{St}\,, \bar{y}_{\mathrm{Rs}}$	$\mathbf{Eff}(\bar{y}_{St}\,, \bar{y}_{\mathrm{Lrs}}$	$\mathbf{Eff}(\bar{y}_{Rs}\,, \bar{y}_{\mathrm{Rc}}$	$\mathbf{Eff}(\bar{y}_{Rs}\,, \bar{y}_{\mathrm{Lrs}}$	$\mathbf{Eff}(\bar{y}_{Rc}\,, \bar{y}_{\mathrm{Lrc}}$	$\mathbf{Eff}(\bar{y}_{Lrs}\,, \bar{y}_{\mathrm{Lrc}}$
2.12	2.73	1	1.29	1.1	1.19

المصدر : إعداد الباحث من بيانات الدراسة

❖ أن الكفاءة النسبية بين $(\bar{y}_{St}, \bar{y}_{Rs})$ أكبر من (2) هذا يعني أن $\text{Eff}(\bar{y}_{Rs}, \bar{y}_{Rc})$، التقدير بالنسبة بين متغيرين (المنفرد و المشترك) والتقدير بخط الانحدار (المنفرد و المشترك) أكثر كفاءة من تقدير العينة العشوائية الطبقية ، والشرط الذي يمكننا من ذلك> $\text{Eff}(\bar{y}_{st}, \bar{y}_{Rs})$ وعندما1 $\text{Eff}(\bar{y}_{st}, \bar{y}_{Lrs}) > 1$ يكون وهذا الشرط محقق ، أو إذا كان $\rho_h > \frac{C_{x_h}}{2C_{y_h}}$ ، $\rho_h > \frac{1}{2}$ ونستنتج من ذلك أن التقدير بالنسبة بين متغيرين أكثر دقة من التقديرات التي تعتمد على متغير الدراسة فقط في حالة وجود علاقة معنوية بين متغير الدراسة والمتغير المساعد أكبر من 50% داخل كل طبقة.

❖ أن الكفاءة النسبية بين $(\bar{y}_{Rs}, \bar{y}_{Rc})$ تساوي (1) هذا يعني أن التقدير بالنسبة بين متغيرين (المنفرد و المشترك) تتساوى الكفاءة بينهم ، والشرط الذي يمكننا من ذلك $\text{Eff}(\bar{y}_{Rs}, \bar{y}_{Rc}) = 1$ عندما تتحقق العلاقة الآتية :

$$\left(\hat{R}_h - \hat{R}_i\right)^2 < 0.05 \;, \forall \; h \neq i$$

$$h = 1 => (1.1 - 1.19)^2 = 0.008 < 0.05$$
$$h = 2 => (1.1 - 1.1)^2 = 0.00 < 0.05$$
$$h = 3 => (1.1 - 1.1)^2 = 0.00 < 0.05$$

وهذا الشرط محقق وعليه $V(\bar{y}_{Rs}) = V(\bar{y}_{Rc})$

❖ أن الكفاءة النسبية بين $(\bar{y}_{Lrc}, \bar{y}_{Lrs})$ تساوي 1.19 هذا يعني أن التقدير بخط الانحدار المنفرد أكثر كفاءة من التقدير بخط الانحدار المشترك ، والشرط الذي يمكننا من ذلك $\text{Eff}(\bar{y}_{Lrc}, \bar{y}_{Lrs}) > 1$ عندما يكون

ونجد أن احدى أزواج القيم لا يحقق العلاقة وهو:

$$(b_h - b_i)^2 < 0.05 \;, \forall \; h \neq i$$
$$(0.95 - 0.67)^2 = 0.08 > 0.05 \quad ,$$
when h=1,i=3

لذلك نجد $V(\bar{y}_{Lrc}) > V(\bar{y}_{Lrs})$،ونستنتج من ذلك أنه عندي هذه الظرف يفضل استخدام التقدير المنفرد.

❖ أن الكفاءة النسبية بين $(\bar{y}_{Rs}, \bar{y}_{Lrs})$ و $(\bar{y}_{Rc}, \bar{y}_{Lrc})$ أكبر من (1)هذا يعني أن التقدير بخط الانحدار (المنفرد و المشترك)أكثر كفاءة من التقدير بالنسبة بين متغيرين (المنفرد والمشترك)، والشرط الذي يمكننا من ذالك $\text{Eff}(\bar{y}_{st}, \bar{y}_{Lrs}) > 1$ و $\text{Eff}(\bar{y}_{Lrc}, \bar{y}_{Lrs}) > 1$ عندما يكون:

$$\left(\hat{B}_h - \hat{R}_h\right)^2 > 0.05 \;, \forall \; h = 1,2,3$$

$$h = 1 , (0.95 - 1.19)^2 = 0.06 > 0.05$$
$$h = 2 , (0.79 - 1.1)^2 = 0.10 > 0.05$$
$$h = 3 , (0.67 - 1.1)^2 = 0.18 > 0.05$$

وعليه فإن:$(\mathbf{h})$نلاحظ أن الشرط محقق لجميع قيم

$$\mathbf{V}(\bar{\boldsymbol{y}}_{St}) > \mathbf{V}(\bar{\boldsymbol{y}}_{Rc}) > \boldsymbol{V}(\bar{\boldsymbol{y}}_{Lrc}) \text{ و ، } \mathbf{V}(\bar{\boldsymbol{y}}_{St}) > \mathbf{V}(\bar{\boldsymbol{y}}_{Rs}) > \boldsymbol{V}(\bar{\boldsymbol{y}}_{Lrs})$$

ونستنتج من ذلك أن التقدير بخط الانحدار أكثر دقة من التقدير بالنسبة بين متغيرين والتقديرات التي علـــى متغيــر الدراسة فقط إذا كان خط الانحدار لا يمر بنقطة الأصل داخل كل طبقة.

الاستـــــنتـــاجات:

بعد تطبيق النظريات وحساب الكفاءة النسبية وتفسير النتائج والمقارنة يمكن تلخيص الاستنتاجات كالتالي:

- أن التقدير بالنسبة بين متغيرين أكثر دقة من تقديرات المعاينة العشوائية الطبقية التي تعتمد على متغير الدراسة فقط في حـــــــــالة وجود علاقة معنوية بين متغير الدراسة والمتغير المساعد أكبر من 50% داخل كل طبقة.
- أن التقدير بخط الانحدار أكثر دقة من التقدير بالنسبة بين متغيرين و تقديرات المعاينة العشوائية الطبقية التي على متغير الدراسة فقط إذا كان خط الانحدار لا يمر بنقطة الأصل داخل كل طبقة
- في المعاينة العشوائية الطبقية التقدير بخط الانحدار و التقدير بالنسبة بين متغيرين يتساويان في الدقة إذا كان خط الانحدار يمر بنقطة الأصل.
- في حالة عدم تحقق العلاقة $(b_h - \mathrm{b_i})^2 <$ $0.05\ \ ,\forall\ \ \mathrm{h} \neq i$ يفضل استخدام التقدير بخط الانحدار المنفرد.

المصادر والمراجع:

1. أبو شعرة، عبدالرازق أمين (1989) *العينات وتطبيقاتها في البحوث الإجتماعية* (الإدارة العامة للبحوث، معهد الإدارة العامة، الرياض).
2. أبو عمة، عبد الرحمن محمد الحسيني عبد البر راضي ، محمد محمود إبراهيم هندي،(1990) *مقدمة في المعاينة الإحصائية* ، جامعة الملك سعود ،(عمادة شؤن المكتبات)، الرياض _ المملكة العربية السعودية.
3. حمد، عدنان شهاب وآخرون ، (2000) *دليل تصميم وتنفيذ المسوح الاجتماعية* ، الجهاز المركزي للإحصاء ، العراق .
4. حمزة، الناصر عبدالمجيد، صفاء يونس الصفاوي ،(2001) *العينات نظري وتطبيقي* ، جامعة بغداد ، جامعة الموصل ، وزارة التعليم العالي .
5. عبادة، أحمد سرحان (1980) *العينات* ، (دار المعارف– القاهرة)
6. عبد الرسول، محمود جواد وآخرون (1988) ، *أساليب المعاينة التطبيقية* ، (الجهاز المركزيللإحصاء ، العراق) ،.
7. حسين علوان ،(2010) جمع *البيانات و طرق المعاينة* (مكتبة العبيكان نشر،الرياض).
8. حسين علوان ،(1993) *طرق المعاينة* ، (دار المعارف عمان).
9. مصطفى،جلال الصياد، (1990) مقدمة في طرق المعاينة الإحصائية ، (مكتبة الصباح ، المملكة العربية السعودية) .
10. وليام كوكران ،(1977) تقنية المعاينة الإحصائية. (الرياض– جامعة الملك سعود)
11. يونس، بسام ، عادل موسى ،(2005) مبادي الإحصاء ، (جامعة السودان ، كلية التكنولوجيا).