بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا

كلية التربية

قسم الرياضيات

بحث تكميلي لنيل درجة بكالريوس الشرف في الرياضيات

بعنوان

الهندسة التحليلية ثلاثية الأبعاد

Engineering analytical three-dimensional

إعداد الطالبات:

صديقة محمد عبد الباقي

هند فرج

إنصاف الأمين

نسيبة حق الله

فاطمة حمزة

إشراف:

أ/ أسامة سيد أحمد

2015م

الاستهلال

قَالَ تعَالَى: ﴿ ٱقۡرَأۡ بِٱسۡمِ رَبِّكَ ٱلَّذِي خَلَقَ ١ خَلَقَ ٱلۡإِنسَٰنَ مِنۡ عَلَقٍ ٢ ٱقۡرَأۡ
وَرَبُّكَ ٱلۡأَكۡرَمُ ٣ ٱلَّذِي عَلَّمَ بِٱلۡقَلَمِ ٤ عَلَّمَ ٱلۡإِنسَٰنَ مَا لَمۡ يَعۡلَمۡ ٥ ﴾

صدق الله العظيم

العلق: ١ – ٥

الشكر والتقدير

الشكر أولاً وأخيراً لله سبحانه وتعالى ثم إلى الأستاذ/ **أسامة سيد أحمد عبد الله**

الذي أشرف على هذا البحث وله الفضل على ماقدم من جهد متواضع بدون كل فغاية سعادتنا أن نكون تحت إشراف أناس قل أن يجود الزمان بمثلهم وإن أجاد فلكم من وافر الشكر..

وأشكر كل من ساهم في إخراج هذا البحث أو شارك ينصح أو بفكر

وانحني إجلالاً لأسرتي التي قدمت كل ما تملك لأجل أن أصل إلى ما أصبو إليه

الباب الأول

الهندسة التحليلية

(1-1)مقدمة:

هي فرع المعرفة الرياضية الذي تم من خلاله الربط بين فرعي الهندسة والجبر.

تهتم الهندسة التحليلية بالمواضيع التي تهتم بها الهندسة التقليدية غير انها تتيح طرق ايسر لبرهان عديد من النظريات وتلعب دور مهم في حساب المثلثات وحساب التفاضل والتكامل.

وتهتم بدراسة الخواص الهندسية للاشكال باستخدام الوسائل الجبرية.

تقوم الهندسة التحليلية على وصف الاشكال الهندسية بطريقة جبرية عددية واستخراج معلومات رقميه من تمثيلات هندسية .

وتستخدم الهندسة التحليلية نطاقا احداثياً يسمى النظام الديكارتي نسبه للعالم الفرنسي ريينه ديكارت للربط بين الهندسة والجبر

(2-1)قوانين الهندسة التحليلية :

- احداثيات نقطة المنتصف للقطعه المستقيمه x y هي:

$$(y_1 + y_2 /2), \quad (x_1+x_2 /2)$$

-ميل الخط المستقيم : هو فرق الصادلات علي فرق السينات

حيث $x_1 \neq x_2$

المستقيم الذي يوازي محور الصادات ليس لهو ميل و المستقيم الذي يوازي محور السينات يساوي صفر

وايضا الميل يساوي ظل الزاوية المحصورة بين محور السينات الموجب

–المسافه أوالبعد بين نقطتين:

$$|r| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

–معادلة المستقيم L يمر بي نقطه (x1,y1) وميله معلوم هي

$$(y - y_1) = m(x - x_1)$$

–معادلة المستقيم الذي ميله M يقطع من محور الصادات جزءا قدره Z

$$Y = mx + z$$

$$X = X_1 + et \qquad Y = y_1 + mt \;, \quad Z = z_1\ nt$$

بالصوره البارامتريه للمعادلات الخط المستقيم

–معادلات الخط المستقيم المار بي نقتطين $Q(x_2,y_2,z_2)$ $(x)p_1,y_1,z_1)$

تكون على الصورة .

$$\frac{X-X1}{X2-X1} = \frac{y-y1}{y2-y1} = \frac{z-z1}{z2-z1}$$

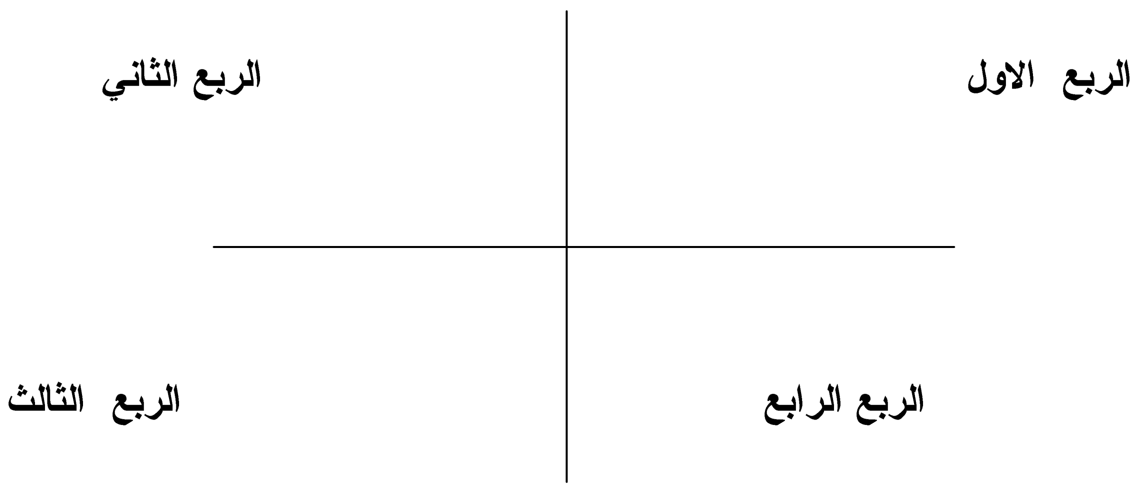
حيث ان: $x_2-x_1\ ,y_2-y_1\ ,z_2-z$ تمثل نسب اتجاه المستقيم

(3-1)المستوى الديكارتي :

لتكن l علاقة في R^2 خاصيتها المحددة c(x,y) تسمى مجموعة كل نقاط المستوى الاحداثي الديكارتي التي كل منها بيان لعنصر l في هذا المستوى وبيان العلاقة هو

l={$(x, y) \in R^2 | c(x, y)$

(4-1)الأرباع:



الربع الاول {(x,y):x>0,y>0}=(x,y)

الربع الاول الموازي لمحور الصادات{(x,y):x>0,y=0}=(x,y)

الربع الثاني $(x,y)=\{(x,y):x<0,y>0\}$

الربع الثاني الموازي لمحور السينات $(x,y)=\{(x,y):x=0,y>0\}$

الربع الثالث $(x,y)=\{(x,y):x<0,y<0\}$

الربع الثالث الموازي لمحور السينات $(x,y)=\{(x,y):x=0,y<0\}$

الربع الرابع $(x,y)=\{(x,y):x>0,y<0\}$

الربع الرابع الموازي لمحور الصادات $(x,y)=\{(x,y):x>0,y=0\}$

نقطة الاصل $(x,y)=\{(x,y):x=0,y=0\}$

(5-1)المستوى القطبي :

للتكن العلاقه I علاقه في R خاصيتها المحددة (θ,r) ولتكن E مجموعة من النقاط في المستوى المنسوب لجملة احداثيات قطبيه تسمى مجموعة النقاط E بيانا للعلاقه I في هذا المستوى اذا تحقق الشرطان التاليان :

- إذا كان $<\Theta, r> \varepsilon\ I$ فان $M<\Theta, r>\varepsilon\ E$
- اذا كان $M\in E$ فهنالك زوج على الاقل من الاحداثيات القطبيه للنقطه M ينتمي الي I

(6-1)الخط المستقيم :

هو مجموعه لانهائيه من النقاط المتصلة معاً والتي تقع على استقامة واحدة

(1−7)زاوية ميل الخط المستقيم :

هي اصغر زاوية موجبة يصنعها المستقيم بالاتجاه الموجب لمحور السينات وتقسيمها بالاتجاه المعاكس لعقارب الساعة

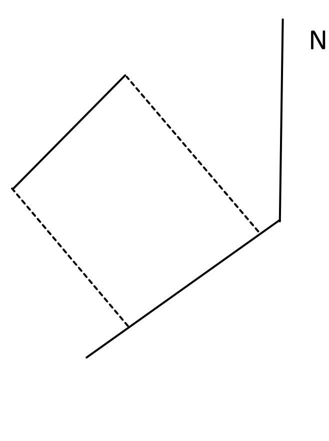
(1−8)ميل الخط المستقيم :

يساوي ظل زاوية ميله او هو فرق الصادات على فرق السينات

(1−9)معادلات الخط المستقيم :

الصورة المتماثلة والصورة البارا مترية :

لايجاد معادلات الخط المستقيم المار بالنقطة $A(x,y,z)$ وله جيوب تمام اتجاه (e,m,n) نفترض ان $p(x,y,z)$ نقطة على الخط المستقيم وليكن $Ap=r$ نرسم Am pN, عمودين على المحور ox كما هو في



w

X H

وبالمثل فإن $x-x1=re$: اي $x - x_1 = Ap \cos \propto$

$y-y_1=rm$ $z-z1=nr$

وعليه فإن $r = \frac{x-x1}{e} = \frac{y-y1}{m} = z-z1$

وبالتالي فان معادلات المستقيم المار بالنقطة $(x1,y1,z1)$ A هى

$$r = \frac{x-x1}{e} = \frac{y-y1}{m} = \frac{z-z1}{n}$$

وتسمى بمعادلات المستقيم فى الصورة المتماثلة

وتسمى $x = x_1 + et, \quad y = y_1 + mt, z= z_1+ nt$

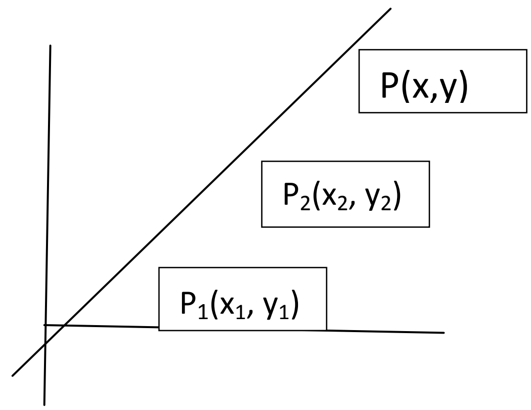
بالصورة البارامترية بمعادلات الخط المستقيم

(10-1)معادله الخط المستقيم المار بنقتطين :

وليكن L مستقيماً يمر بنقتطين (x_1,y_1) p_1 $_1$ (x_2,y_2) p_2ولتكن $p(x,y)$ نقطةعلى هذا المستقيم ونريد ايجاد العلاقة بين الاحداثي x والاحداثي y اي إيجاد معادلة هذا الخط المستقيم

وبتطبيق علاقة الميل :

$$m = \frac{y2-y1}{x2-x1}$$



على النقتطين p_1,p_2 نجد أن $m1 = \frac{y2-y1}{x2-x1}$

وتطبيق العلاقه نفسها على النقتطين p_1,p نجد ان $m2 = \frac{y-y1}{x-x1}$

وبما ان النقاط p_1,p_2,p تقع على المستقيم نفسه اذاً $m_1=m_2$

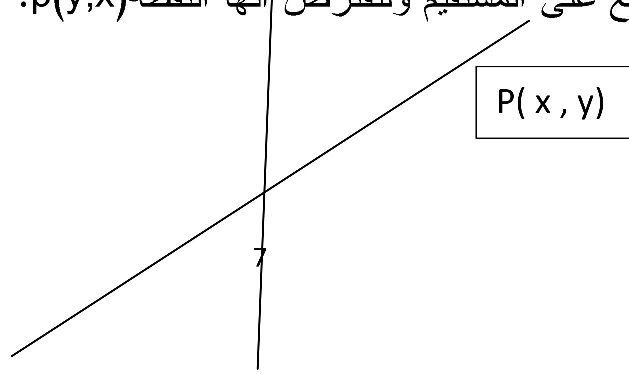
$$\frac{y-y1}{x-x1} = \frac{y2-y1}{x2-x1}$$

وهي معادلة الخط المستقيم المار بنقتطين

(11-1)معادلة الخط المستقيم بمعلومية ميله ونقطة عليه :

ليكن L مستقيماً ميله m ويمر بانقطه p (y,x) ونريد ايجاد معادلته

من المعروف ان معادلة الخط المستقيم هي العلاقة الجبرية بين الاحداثي x والاحداثي y لاي نقطة تقع على المستقيم ولنفترض انها النقطه(p(y,x.



$P_1(x_1 , y_1)$

وبتطبيق علاقة الميل $m = \frac{y2-y1}{x2-x1}$

على النقتطين p1,p نجد ان $m = \frac{y-y1}{x-x1}$

بالضرب التبادلي ينتج $Y - y_1 = m(x - x_1)$

معادلة المستقيم الذي ميله m ويقطع من محور الصادات جزءاً قدره Ƶ هي

xm=y+Ƶ

-معادلة المستقيم الذي يقطع من محور السينات جزءا طوله p ويقطع من محور الصادات جزءا طوله Qهي $\frac{x}{p} + \frac{y}{Q} = 1$

-الصورة العامة لمعادلة المستقيم هي: $p x + Q y + z = 0$

ويكون: ميل المستقيم = -معامل x ÷ معامل y

-الجزء المقطوع من محور الصادات $\left|\frac{-z}{Q}\right|=$

-اذا كانت معادلة المستقيم هي :

yQ+xp+Ƶ=0

فان بعد النقطه (y,x) عن المستقيم 1 يعطي بالعلاقة

$$F=\ldots\frac{|px1+qy1+z|}{\sqrt{p^{2+q^\wedge 2}}}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots:$$

(12−1)المحل الهندسي:

هومسارنقطة (x,y) تتحرك بحيث تتحقق شرط هندسي أو أكثر أثناء حركتها سواء في مستوى أوفي الفراغ .

(13-1)الاحداثيات الكارتيزية القطبية :

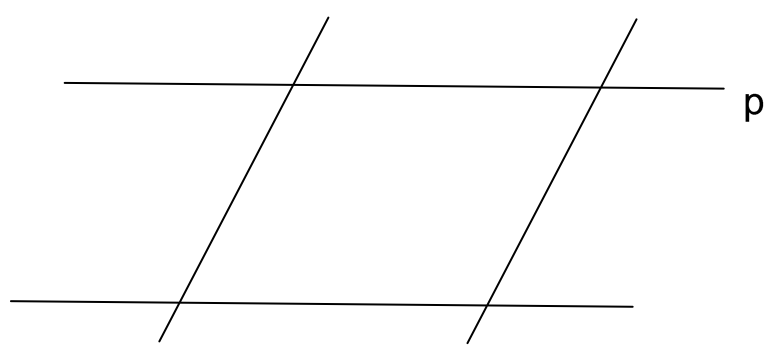
اكثر الوسائل شيوعاً تحديد موقع نقطةp في مستوى هو إنسابها الي محوري متعامدين oy ox وهو الحال في الاحدثيات الكارتيزية أو إنسابها ببعدها r عند نقطه ثابتة (القطب) وزاوية ميلها Ɵعن خط ثابتox يسمى الخط الابتدائي وهو الحال في الاحداثيات القطبية .

(14-1)الاحداثيات الكارتيزية:

الاحداثيات الكارتيزية المائلة

تتحدد مجموعة الاحدثيات هذه باعطاءox,oy يتقاطعان في نقطه o باي زاوية فيهما عدا الزويتين (o,∏).

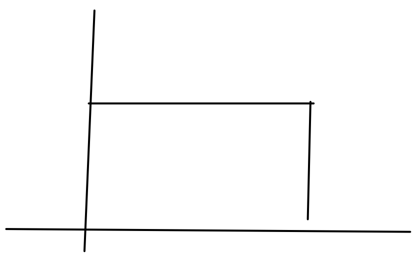
نفرض أن M نقطة في مستوىp نرسم من M مستقيمين موازيين للمحورين xo,yo ونرمز لنقتطتى تقاطعهما في هذين المحورين بالرمزين yM,xM على الترتيب



العددان y,x يسميان بالاحداثيات الكارتيزية المائلة للنقطه M حيث الزواية بين المحورين ليست قائمة .

(1-15)الاحداثيات الكارتيزية المتعامدة:

اذا كانت الزاوية بين المحورين OX, OY قائمه فان مجموعة الاحداثيات تسمى مجموعة الاحداثيات الكارتيزية المتعامدة وهي أبسط مجموعة الاحداثيات وأكثرها شيوعاً ولذا نسمى الاحداثيات الكارتيزية المتعامدة في غالب الأحيان با الاحداثيات الكارتيزية فقط .



(1-16)الاحداثيات القطبية :

تتحدد مجموعة الاحداثيات القطبية باعطاءها o تسمى بالقطب وشعاع(متجه $\overrightarrow{oA}$) يسمى المحور القطبي وتعتبر عادة الدورتان موجبة اذا كانت تتم في اتجاه مضاد لدوران عقارب الساعة ....

نفرض نقطة اختيارية M حيث$|om|$=p و Ɵهي الزاوية AMo ويسمى العددانp,Ɵ والاحداثيات القطبية لنقطة p,m يسمى الاحداثي الاول او

البعد القطبي والعدد Ө بالاحداثي الثاني او الزاوية القطبية ومن ضمن قيم الزاوية Ө نميز قيمة معينة تحقق المتباينة $-11<Ө<\prod$

وتسمى بالقيمة الرئيسية ويمكن القول انها تؤخذ بمثابة الزاوية القطبية الرئيسية التي يجب ان يدور بها الشعاع oA حتى ينطبق على الشعاع Mo محدثاً بذلك دورتان لايزيد عن 180 في اي من الناحيتين .وفي الحالة الخاصة عندما يكون الشعاع mo متجها من الناحية المضادة تماماً لشعاع oA يكون هنالك دورتان محتملان بزاوية قدرها 180درجة وعندئذ يمتاز الدوران الموجب اي تؤخذ $Ө=\prod$ بمثابة القيمة الزاوية القطبية .

ملاحظة :-

1-اذا انطبقت النقطة M على القطب فان o=p ولاتوجد قيمة محددة للزاوية Ө

2- تحدد (p,Ө) نقطة وحيدة في المستوى ولكن العكس غير صحيح بمعنى اذا اخذنا النقطة التي احداثياتها الكارتيزية (s,o) فانه يمكن التعبير عنها بعدد لا نهائي من الاحداثيات القطبية $(s,\pi/2),(s,-3\pi/2),(s,5\pi/2)$

العلاقة بين مجموعة الاحداثيات الكارتيزيه والقطبية:(1-15)

في بعض الحالات يلزم استخدام مجموعتي الاحداثيات الكارتيزيه والقطبية معا اي انه يلزم التحويل من الاحداثيات الكارتيزيه الي القطبية والعكس .

(1-17)تدوير المحاور:

اذا دارت محاور الاحداثيات زاويةӨ يصبح لكل نقطةp نوعين من الاحداثيات (x,y) منسوبة للمحاور الأصلية واحداثيات (x,y) منسوبة للمحاور الجديدة .

(1-18) الدائره :

هى المحل الهندسى لنقطة بحيث بعدها عن نقطة ثابتة $c\ (-a\ ,\ -f)$ تسمى مركز الدائرة يساوى مقداراً ثابتاً وهو نصف القطر.

نفرض أن $p(x,y)$ نقطة على الدائرة متجه موضعها R وان c هو متجه موضع مركز الدائرة وان a هو نصف قطرها فان معادلة الدائرة هى:

$$(r - c)^2 = a^2$$

أو $$r^2 - 2rc + c^2 - a^2 = 0$$

$$r^2 - 2rc + d = 0$$

حيث: $d = c^2 - a^2$

$$C = ai + fj, \quad r\text{-}xi + yi$$

فأن معادلة الدائرة تصبح: $$X^2 + y^2 + 2gx + 2fy + d = 0$$

(1-19)الدائره بمعلومية قطر من اقطارها :

نفرض أن $p_1\ (x_1, y_1)$ و $P_2\ (x_2, y_2)$ نهايتى قطر من اقطار دائرة وان $p\ (x,y)$ نقطه على الدائرة.

$$\overline{p_1p} = p - p_1 = (x_1 - x), (y - y_1)$$
$$\overline{p_2p} = p - p_2 = (x - x_2), (y - y_2)$$

متعامدان الى ان

$$(x - x_1)\ (x - x_2) + (y - y_1)\ (y - y_2) = 0$$

هى معادلة الدائرة

(1-20)معادلة الدائره التى مركزها نقطة الاصل ونصف قطرها يساوى R :

$$(pQ)^2 = (x - 0)^2 + (y - 0)^2 = r$$
$$= x^2 + y^2 = r^2$$

(1-21)المعادلة العامة للدائرة التى مركزها ليس نقطة الاصل :

المعادلة العامة للدائرة التى مركزها (m,n) تكتب على الصورة

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r$$

البرهان:

قانون البعد بين نقطتين

$$= \sqrt{(x-m)2+(y-n)2} = r$$

تربيع الطرفين

$$(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$$

ملاحظة

هنالك صورة اخرى لمعادلة الدائرة التى مركزها (m,n) وهى

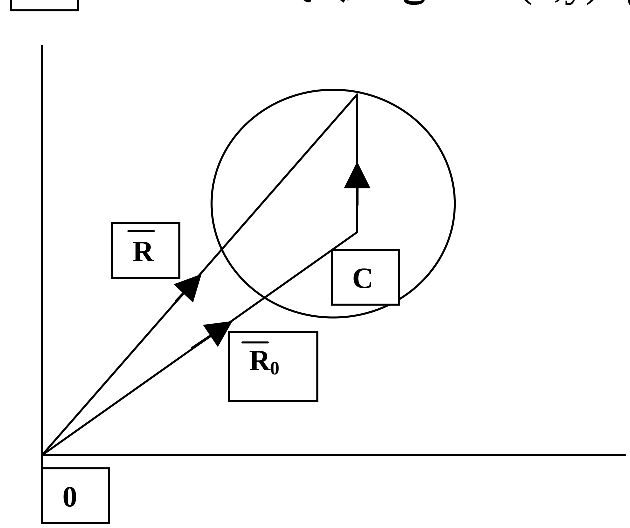
$$X^2 + y^2 + 2ax + 2by + c = 0$$

(22-1)معادلاتها

المعادلة الاتجاهية للدائرة:

تعتبر دائرة مركزها c له متجه موضعى $R^\backslash{}_0 = (x_0, y_0)$ ونصف قطرها s

نقطة عامة p لها متجه الموضع $R^\backslash (x,y)$ على محيطها



فيكون المتجه $R - \mathcal{T}o$ على امتداد القطر أى ان

$$(R - R_0 , R - R_0) = a^2$$

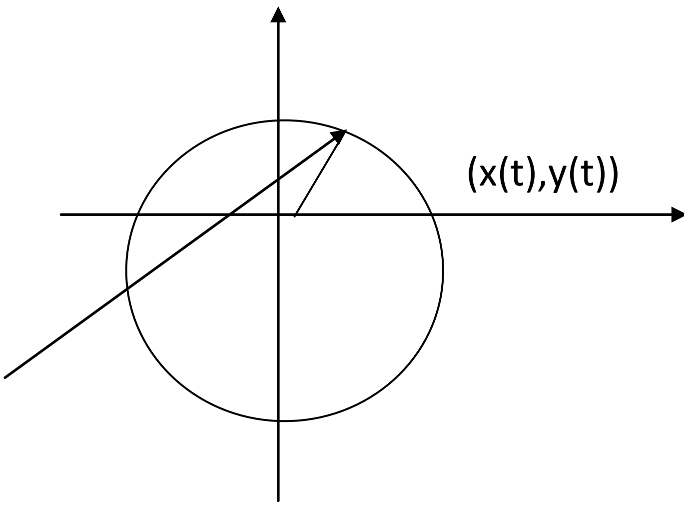
المعادلة (1) تسمى المعادلة الاتجاهية للدائرة أو

$$R = R_0 + ae$$

حيث e متجه الوحدة فى اتجاه نصف القطر

2) المعادلات البارامترية للدائرة

نعتبر $X^2 + y^2 = a^2$



من هندسة الشكل نجد ان

$$Y = a\sin t , \quad x = a\cos t \qquad 1 \leq \pi \leq 2\pi$$

(23-1) معادلات المماس للدائرة:

مماس الدائرة

طول المماس L الذى يمس الدائرة والمرسوم من النقطة (x_1,y_1) يعطى بالعلاقة التالية

$$L = \sqrt{(x1 - m1)2 + (y1 - n)2 - r}$$

البرهان:

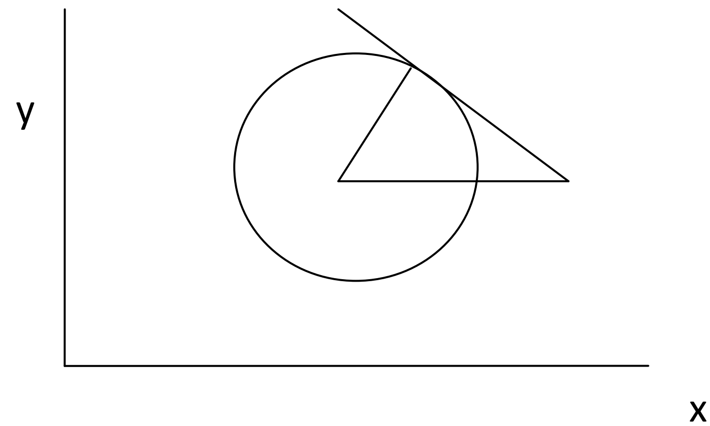
نظرية فيثاغورث

$$Pc^{\backslash 2} = cQ^{\backslash 2} + pQ^{\backslash 2}$$

$$(x_1 - m)^2 + (y - n)^2 = r^2 + L^2$$

$$L^2 = (x_1 - m)^2 + (y - n)^2 - r^2$$

$$L = \sqrt{(x1 - m)2 + (y1 - n)2 - r2}$$



طول المماس المرسوم من نقطة الى الدائرة

لتكن الدائرة

$$X^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

و النقطة p (x,y) المرسوم منها المماس للدائرة عند tمركز الدائرة هو $(-g,-f)$

ونصف قطرها هو

$\sqrt{a2 + f2 - c}$ وعليه فان

$\overline{Pt}^2 = \overline{pc}^2 - \overline{st}^2$ مربع طول المماس

أى أن

$$\overline{Pt}^2 = (x_1 + g)^2 + (y_1 + f)^2 - (g^2 + f^2 - c)$$
$$= x^2_1 + y^2_1 + 2gx_1 + 2gy_1 + c$$

وعليه فأن مربع طول المماس من نقطة الى الدائرة يمكن الحصول عليه بتعويض احداثيات النقطة فى الطرف الايسر للمعادلة (1) ويلاحظ أن معامل كل من (x_2, y_2) هو الوحدة وإذا كان المقدار فى المعادلة (1) موجباً وقعت النقطة p خارج الدائره واماإذا كانت القيمة سالبه فأن النقطة p تقع داخل الدائرة اما إذا ساوت القيمة الصفر فأن النقطة p تقع على الدائرة.

الفصل الثاني

(1-2)تعريف القطوع المخروطية بصورة عامة :

القطع المخروطي هو المحل الهندسي لنقطة تتحرك بحيث يكون بعدها عن نقطة ثابته F تسمى البؤرة الى يحدها عن مستقيم معلوم يسمى الدليل .

حاصل جمع وطرح المسافة ويساوي مقداراً ثابتاً e يسمى الاختلاف المركزي حيث يحدد نوع القطع المخروطى على اساس المقدار الثابت e فإذا كان

$e=1$ يسمى القطع المكافئ

$e>1$ يسمى القطع زائد

$e<1$ يسمى القطع ناقص

(2-2)القطع المكافئ :

تعريف :

القطع المكافئ هو عباره عن المحل الهندسي لمجموعة من النقط (n,y) التي يحد كل منها عن نقطة ثابتة دائما لبعدها عن مستقيم معلوم .

(3-2)عناصر القطع المكافي :

-**البورة** :- البؤرة وهي إحداثيات النقطه n والتي تقع على المحوروداخل المنحنى

الرأس: وهي إحداثيات النقطه m والتي تقع على المحور و علي منحنى القطع وفي منتصف المسافه بين البؤرة والدليل .

-**الدليل** :- وهو المستقيم المعلوم

- **المحور** :- وهو المستقيم الذي يكون عمودياً عل الدليل وتقع عليه البؤرة والرأس ويكون القطع متماثلا حوله

(4-2)معادلات القطع المكافئ :-

المعادلة العامه للقطع المكافئ الذي احداثيات راسه (o,o)واحداثيات بؤرته (a,o) حيث a>o ودليله المستقيم a=x

ومفتوح اليمنى هي: $y^2=4ax$

البرهان :

تعريف المقطع المكافئ oq=pq

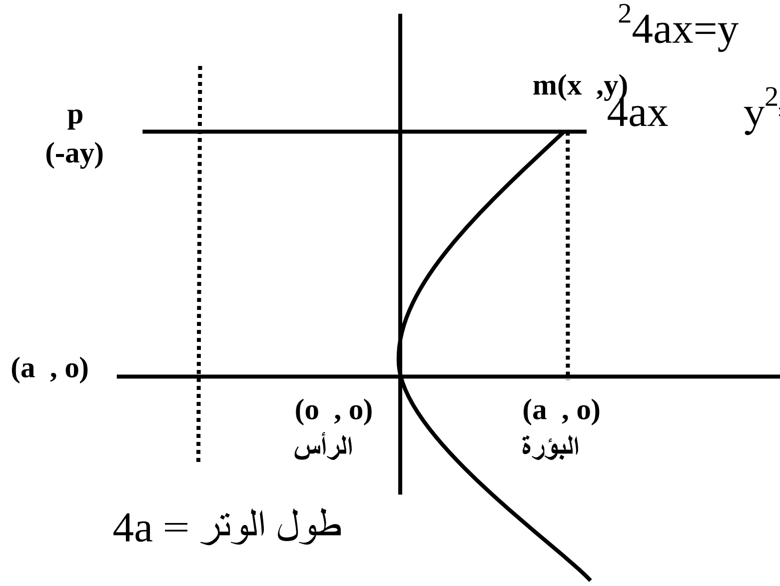
$(x+a)^2+(y-y)=(x-a)^2+(y-o)^2$

$x^2+xaz+a^2=x^2-xaz+a^2+y^2$

$4ax=y^2$

$y^2=4ax$

الدليل X= -a

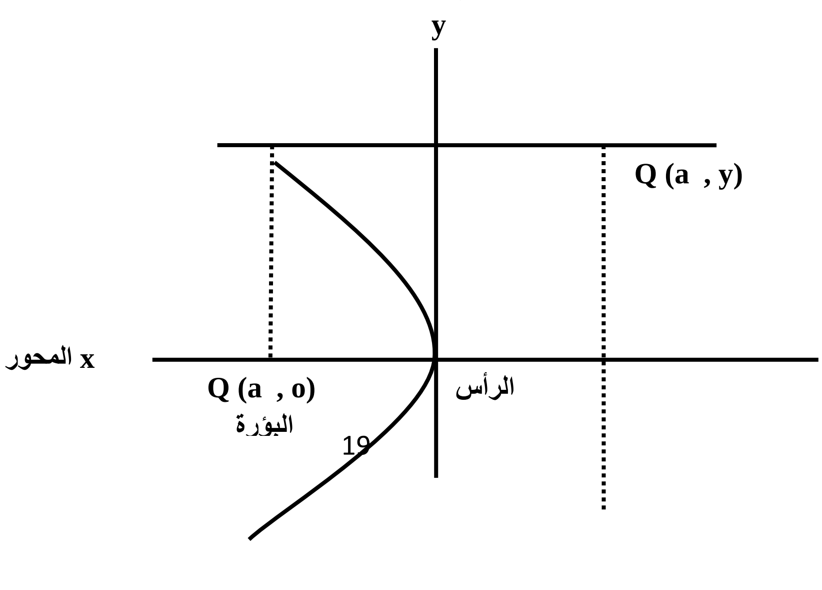


طول الوتر = 4a

-المعادلة العامة للقطع المكافئ الذي إحداثيات رأسه (o,o) وإحداثيات بؤرته (-o,a) ومعادلة دليله a=x ومفتوح الى الناحية اليسرى هي

$$y^2=-4ax,\ a \in R^+$$

البرهان



الدليل $x = a$

تعريف القطع المكافئ

$$(x+a)^2+(y-o)^2=(x-a)^2+(y-y)^2$$

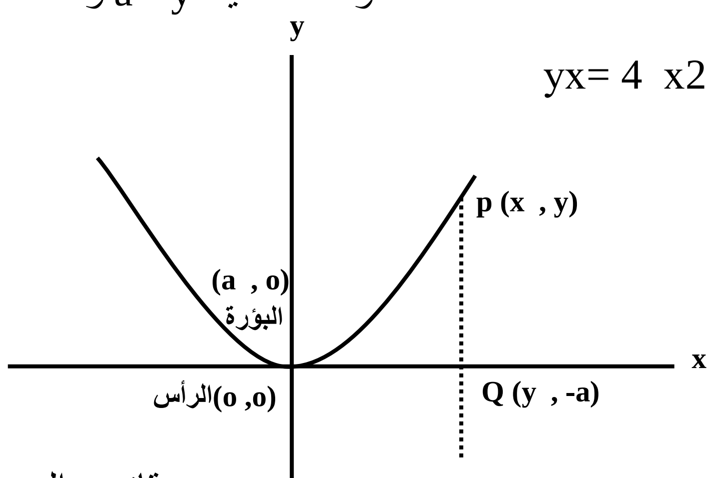
$$x^2 + 2ax + a^2 + y^2 = x^2 - zax + a^2$$

$$y^{2 = 4}\, ax$$

-المعادلة العامة للقطع المكافئ الذي إحداثيات دراسه (o,o) واحداثيات بؤرتة (a,o) ومعادلة دليله y=-a ومتعمد للاعلى هي

حيث $a > o$ $\quad yx= 4\ \ x2$

البرهان



قانون البعد بين نقطتين

$$op=Qp_2$$

$$(n-o)^2+(y-a)^2=(n-x^2)+(y+a)^2$$

$$x^2 +2ay+a^2= y^2-2ay+a^2+y^2$$

$$x^2=2\ ya+2ya$$

$$x^2=-4ay$$

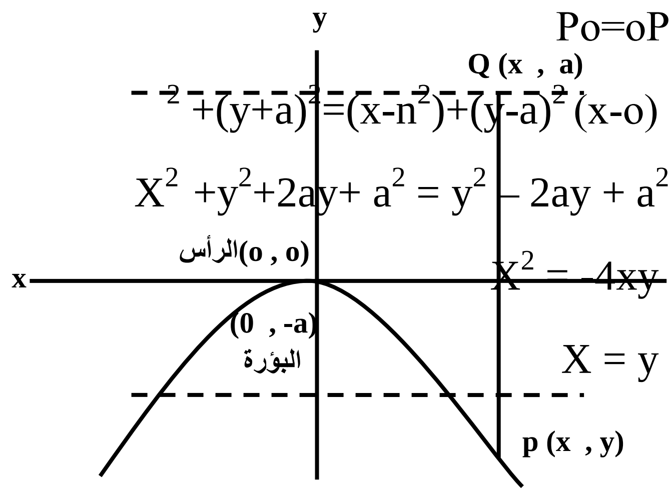
المعادلة العامة للقطع المكافئ الذي احداثيات رأسه (o,o) واحداثيات بؤرته (a-,o) ومعادلة دليله a=y ومقعر للأسفل هي .

$$x^2 = -4\,a\,y \qquad a \in R \text{ حيث}$$

البرهان

تعريف القطع المكافئ

Po=oP



$$(x-o)^2 + (y+a)^2 = (x-n^2) + (y-a)^2$$

$$X^2 + y^2 + 2ay + a^2 = y^2 - 2ay + a^2$$

$$X^2 = -4xy$$

$$X = y$$

الاختلاف المركزى = $\frac{op}{pQ}$

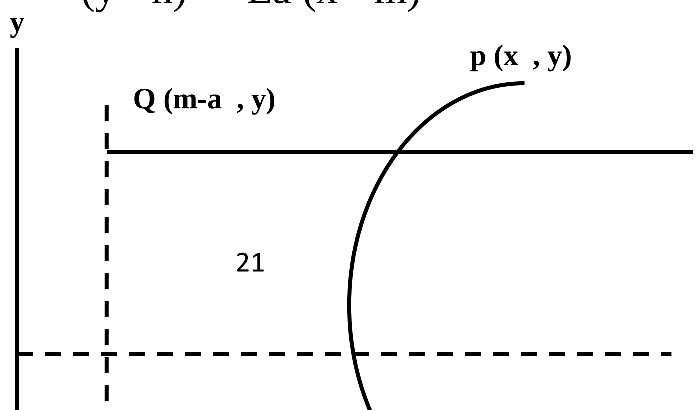
من تعريف القطع المكافى op = pQ

الاختلاف المركزى للقطع المكافى يساوى 1 دائماً ونرمز له بالرمز h1

$$H = 1$$

المعادلة العامة للقطع المكافئ الذى إحداثيات راسه (m,n) ومحوره يوازى x وبعده البؤرى يساوى a وعلى يمين رأسه القطع المكافئ هى

$$(y - n)^2 = La\,(x - m)$$



m ,n m ,n (m t a , n)

البرهان:

من تعريف القطع المكافئ $op = pQ$

$$+ (y - n)^2 = [x - (m - a)^2 + (y - y)^2 \quad [x - (m + a)]^2$$

$$X^2 - 2(m + a)x + (m + a)^2 + (y - n)^2$$

$$-2mx - 2ax + m + 2am + a^2 + (y - n)^2$$

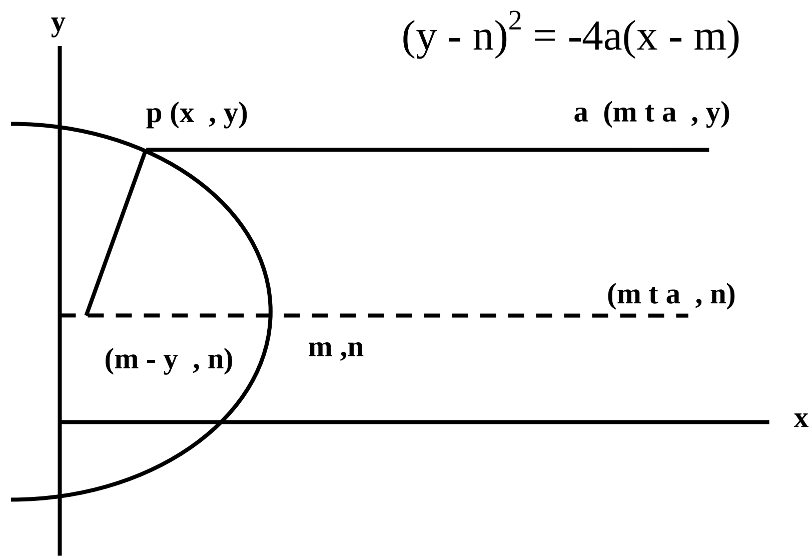
$$= -2mx + 2ax + m^2 - 2am + a^2$$

$$= (y - n)^2 = 4ax - 4am$$

$$(y - n)^2 = 4a(x - m)$$

المعادلة العامة للقطع المكافئ الذى إحداثيات رأسه (m,n) ومحوره يوازى محور x وبعده البؤرى يساوى a وعلى يسار رأس القطع المكافئ

$$(y - n)^2 = -4a(x - m)$$



تعريف القطع المكافئ

$$Op = pQ$$

$$[x - (m - a)]^2 + (y - n)^2 = [x - (m + a)]^2 + (y - y)^2$$

$$X^2 - 2(m - a)x + (m - a)^2 + (y - n)^2 = x^2 - 2(m + a)x + (m + a)$$

$$(y - n)^2 = -4ax + 4am$$

$$(y - n)^2 = -4a(x - m)$$

المعادلة العامة للقطع المكافئ الذى إحداثيات رأسه (m,n) ومقعر لأعلى ومحوره موازى للمحور y هى

$$(y - n)^2 = 4\,a(n - m)$$

البرهان:

$$Op = pQ$$

$$(x - m)^2 + [y - (n + a)]^2$$

$$= (x - x)^2 + [y - (n - a)]^2$$

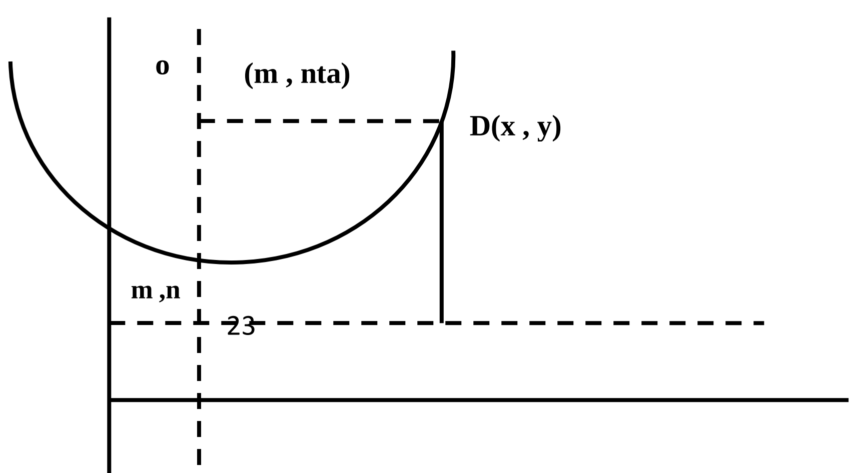
$$(x - m)^2 + y^2 - 2(n + a)y + (n + a)^2$$

$$= y^2 - 2(n - a)y + (n - a)^2$$

$$(x - m)^2 - 2ny - 2ay + n^2 + 2an + a^2 = 2ay + 2ny + n^2 + 2an + a^2$$

$$(x - m)^2 = 4ay - 4am$$

$$(x - m)^2 = 4a(y - n)$$



(m , n - a)　a　(m , n - a)

المعادلة العامة للقطع المكافئ الذى إحداثيات رأسه (m ,n)ومقعر للأسفل ومحور يوازى محور y

$$(x - m)^2 = -4a(y - n)$$

بعد البؤرة عن الرأس يساوى بعد البؤرة عن الدليل

(5-2)القطع الناقص :

هو المحل الهندسى لمجموعة النقط (X, Y) بحيث يكون P(X,Y) عن نقطتين ثابتيين يساوى مقداراً ثابتا وتسمى النقطتان الثابتتان بالبؤرتين ويسمى المقدار الثابت بطول المحور الاكبر

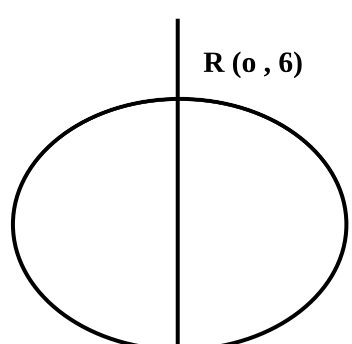
(6-2)عناصر القطع الناقص :

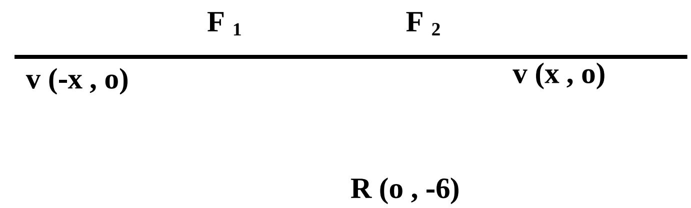
للقطع الناقص محورين للتماثل:

- المستقيم المار بالبؤرتين F_1 و F_2 والمركز O يسمى المحور الاكبر
- المستقيم العمودى على المحور الاكبر واالمار بالمركز O يسمى المحور الاصغر

مركز القطع الناقص النقطة O

- تسمى النقط $R^\backslash$ و R و $V^\backslash$ و V رووؤس القطع الناقص
- يسمى البعد بين البؤرتين F_2 و F_2 البعد البؤرى ويساوى 2C
- نصف البعد البؤرى وهو المسافة بين البؤرة والمركز ويساوى C
- البعد بين الراسين $(V, V^\backslash)$ = طول المحور الاكبر = 2a
- البعد البؤرى بين الرأسين $(R, R^\backslash)$ = طول المحور الاصغر = 2b

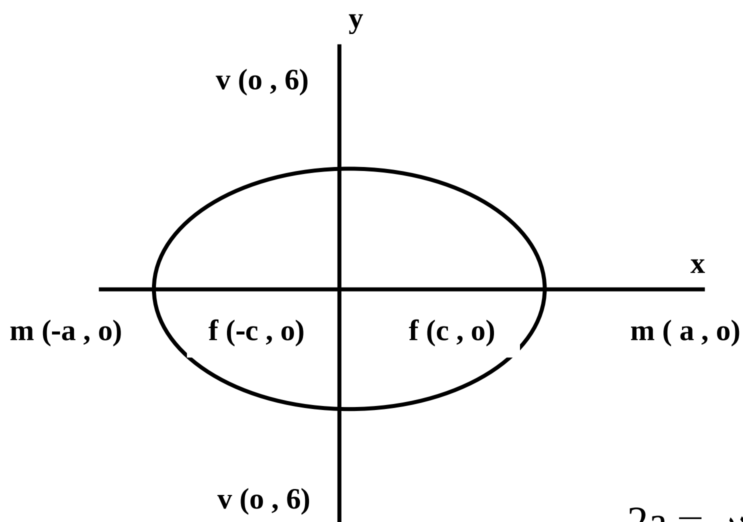




المعادلة العامة للقطع الناقص الذى مركزه (0,0) واحداثيات بؤرته (0, 2±) هى

$$\frac{x2}{a2} + \frac{y2}{b2} = 1 \qquad \text{حيث} \quad a > b > 0$$

البرهان



طول المحور الاكبر = 2a

مقدار ثابت $\qquad pf + pf = 2a$

$$\sqrt{(x-c)2} \;+\; \sqrt{(x+c)2+y2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)2+y2} = 2a - \sqrt{(x-\;LL)2+y2}$$

بتربيع الطرفين:

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)2+y2} + (x-c)^2\, y^2$$

$$X^2 + 2cx + c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)2+y2} + x^2 - 2cx + c^2$$

$$4cx - 4a^2 = -4a\sqrt{(x-c)2+y2}$$

بالقسمة على 4

$(cx - a^2)^2 = -a\sqrt{(x-c)2+y2}$

نربع الطرفين

$C^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2 [(x - c)^2 + y^2]$

$C^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2 [x^2 - 2cx + c^2 + y^2]$

$C^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2x^2 - 2cxa^2 + a^2c^2 + a^2 y^2$

$A^2x^2 - c^2x^2 + a^2 y^2 = a^2 - a^2c^2$

$(a^2 - c^2)x^2 + a^2 y^2 = a^2(a^2 - c^2)$

$A > c \qquad a^2 - c^2 > 0$

ونفرض ان:

$a^2 - c^2 = b^2$

$b^2 x^2 + a^2 y^2 = a^2 b^2$

نقسم على a^2, b^2

$$\frac{x2}{a2} + \frac{y2}{b2} = 1$$

طول المحور الاكبر = $2a$

طول المحورالاصغر = $2b$

الاختلاف المركزى = h

$$H = \frac{c}{a}$$

(7-2)الصورة العامة لمعادلة القطع الناقص :

لإيجاد الصورة العامة نستخدم انسحاب المحاور

نفرض ان المحاور الجديده هى (x', y') ومركزها $m\ (h,k)$ من علاقة الانسحاب

$$x' = x - m$$

$$y' = y - n$$

نجد أن
$$x' = x - h$$

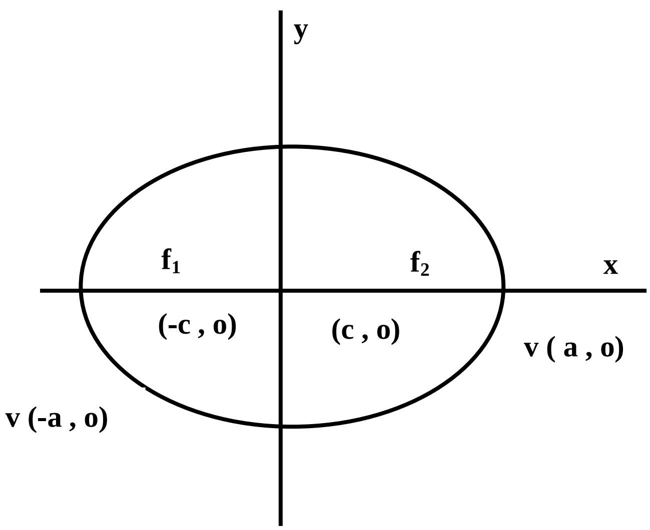
$$y' = y - k$$

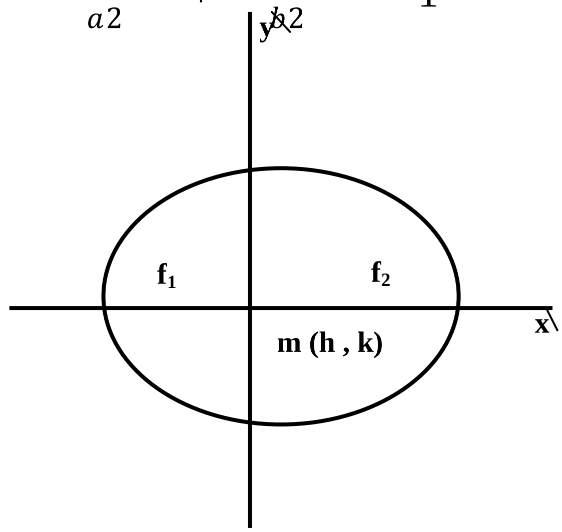
معادلة القطع الناقص الذى مركزها $m\ (h,k)$ ومحوره الاكبر يوازى محور x بالنسبة لـ x', y' وهى

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1$$

بتعويض قيمة x', y'

$$\frac{(x-h)^2}{a^2} + \frac{(y-k)^2}{b^2} = 1$$





أما معادلة القطع الناقص الذى مركزه $m(h,k)$ ومحوره الاكبر يوازى محور y بالنسبة للمحاور الجديدة x', y' هى

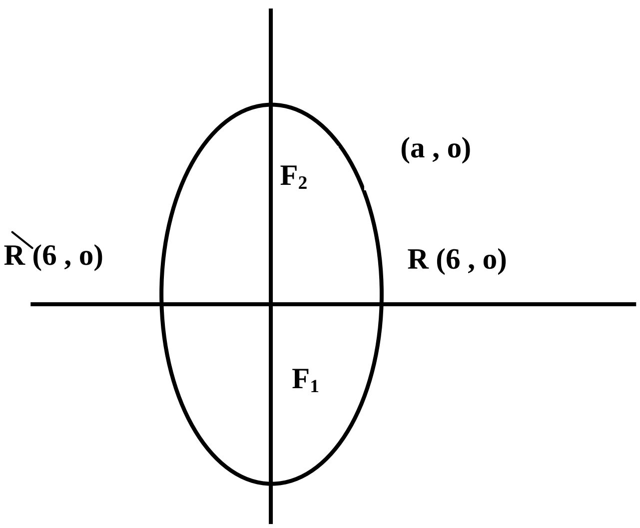
$$\frac{y'^2}{a^2} + \frac{x'^2}{b^2} = 1$$

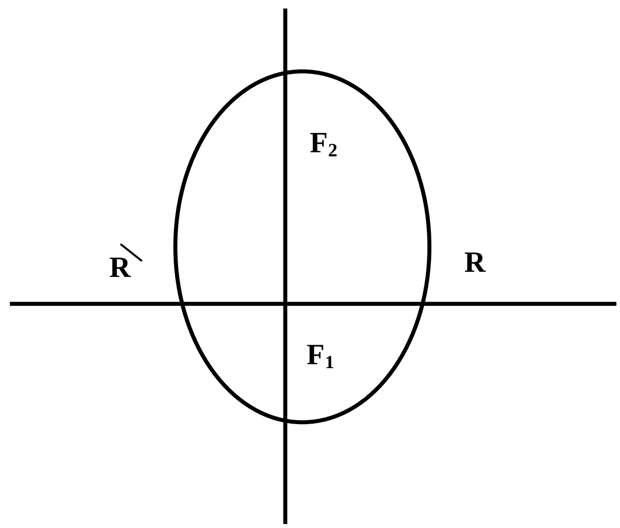
$$x^{\backslash} = x - h$$

$$y^{\backslash} = y - k$$

:. المعادلة هى

$$\frac{(x-h)2}{b2} + \frac{(y-k)2}{a2} = 1$$

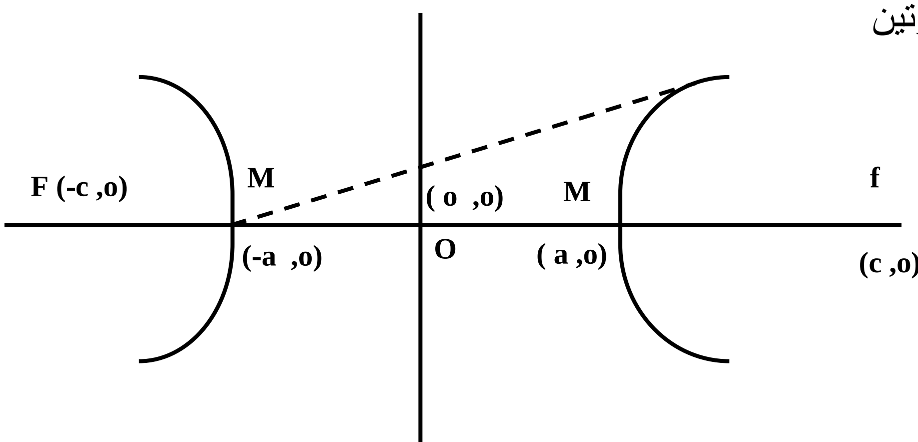




(8-2)القطع الزائد :

تعريف:

القطع الزائد هو المحل الهندسى لمجموعة النقط المستوية p(x,y) بحيث يكون الفرق المطلقبين بعدى p(x,y) عن النقطتين ثابتتين يساوى مقداراً ثابت وتدعى النقطتان الثابتتان البؤرتين



(9-2)عناصر القطع الزائد :

1 -القطع الزائد محوران للتماثل هما:

أ. المستقيم المار بالبؤرتين F_1 , F_2 والمركز O يسمى المحور البؤرى أو المحور القاطع

ب. المستقيم العمودى على المحور القاطع والمار بالمركز O ويسمى المحور المرافق.

2 -مركز القطع الزائد هو النقطة O

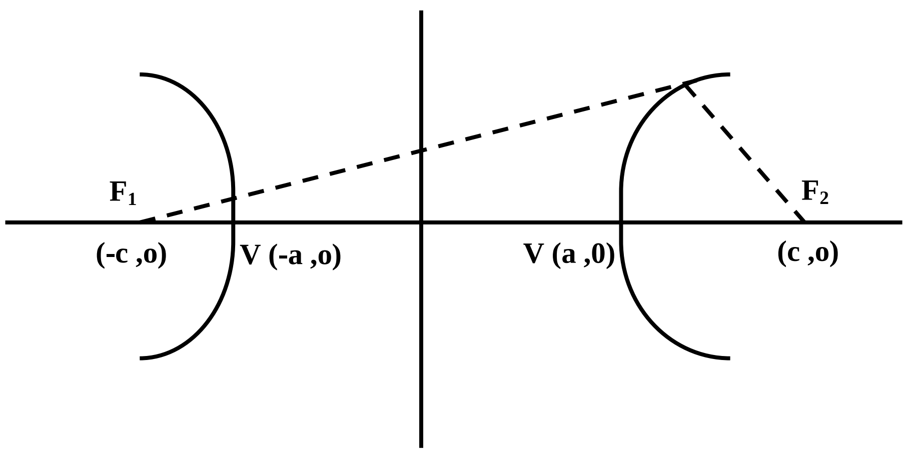
3 -راسا القطع الزائد هما النقطتان $V, V^{\backslash}$

4 -يسمى البعد بين البؤرتين (F_1, F_2) البعد البؤرى ويساوى 2C

5 -نصف البعد البؤرى هو المسافة بين البؤرة والمركز يساوى C

6 -البعد بين الرأسين $(V ,V^{\backslash})$ = طول المحور القاطع ويساوى 2A

7 -طول القطعة المستقيمة $(RR^{\backslash})$ = طول المحور المرافق ويساوى 2B



المعادلة العامة للقطع الزائد الذى مركزه (0و0) واحداثيات بؤريته هما (0و2) هى

$$\frac{X2}{a2} - \frac{y2}{b2} = 1$$

البرهان

الفرق الطلق لبعد النقطة p(x,y) عند البؤرتين 2a من تعريف القطع الزائد

$$pF^{\backslash} - pF| = 2a|$$

$$\sqrt{(x+c)2+y2} \;-\; \sqrt{(x-c)2+y2} = 2a$$

$$\sqrt{(x+c)2+y2} = 2a + \sqrt{(x-c)2+y2}$$

بتربيع الطرفين

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)2+y2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$X^2 + 2cx + c^2 = 4a^2 + 4a\sqrt{(x-c)2+y2} + x^2 - 2cx + c^2$$

$$4cx - 4a^2 = 4a\sqrt{(x-c)2+y2}$$

نقسم كل حد على اربعة

$$Cx - a^2 = a\sqrt{(x-c)2+y2}$$

نربع طرفى المعادلة:

$$C^2x^2 - 2a - cx + a^4 = a^2[(x-c)^2 + y^2]$$

$$C^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^2[x^2 - 2cx + c^2 + y^2]$$

$$C^2x^2 - 2a^2cx + a^4 = a^{2x}2 - 2a^2cx + a^2c^2 + a^2y^2$$

$$A^2 - a^2c^2 = a^2c^2 - c^2x^2 + a^2y^2$$

$$(a\cancel{^2 - c^2)}x^2 + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2) \qquad A$$

نفرض أن $a^2 - c^2 = -b^2$

نعوض فى A

$$-b^2x^2 + a^2y^2 = -a^2b^2$$

نقسم طرفى المعادلة على $-a^2b^2$

$$\frac{x2}{a2} - \frac{y2}{b2} = 1$$

$H = \frac{c}{a}$ مع ملاحظة ان $h > 1$

الفصل الثالث

الهندسة التحليلية فى الفضاء

(1-3)النظم الاحداثية القائمة ثلاثية البعد:

ان القاعدة التي ترتكز عليها الهندسة التحليلية المستوية (ثنائية البعد)هي التقابل بين عناصر مجموعة الازواج المرتبة من الاعداد الحقيقية ونقط المستوي الاحداثي .بشكل مماثل ندخل في الفضاء الثلاثي البعد نظاما احداثيا علي نحو يكون فيه هناك تقابل بين عناصر مجموعة الثلاثيات المرتبة من الاعداد الحقيقية ونقط الفضاء ثلاثي البعد.

(2-3)المستقيم في الفضاء الثلاثي:

يعتبر المستقيم في الفضاء الثلاثي ،من حيث الاساس ،مجموعة النقاط المتشكلة من تقاطع مستويين .

المستقيم في الفضاء الثلاثي هوبيان علاقة من الشكل :

$$\{(x,y,z)\,|\,a1x+b1y+c1z+d1=0, \qquad a2x+b2y+c2z+d2=0 \quad (1)$$

نقول عن المستقيم الذي هو بيان الجملة (1) انه بيان النظام :

$$a1x+b1y+c1z+d1=0 \qquad a2x+b2y+c2z+d2=0 \ (2)$$

ونقول عن النظام (2) انه تمثيل المستقيم بمستويين .

(3-3)السطوح التربيعية :

ومن الواضح ان بيان هذه العلاقة قطع زائد فى المستوى محوره هو المحور x وزروتاه هما (0, 0, 6) و (0, 0, 6-).

أن بيان R_3 مبين فى الشكل 9- 18 حيث بادلنا بين الموضعين المعتادين للمحورين z, y كذلك أن بيان:

$$\{(x, y, z)\,|\,x^2 - 9y^2 + z^2 = 36, \ z = 2x\}$$

$$= \{(x, y, z)\ |\,5x^2 - 9y^2 = 36 , \ z = 2x\}.$$

وهو منحن مولد آخر. أن هذا المنحنى هو قطع واقع فى المستوى الذى معادلته $z = 2x$ ينبغى ان يكون واضحاً أن السطح الذى بيان معادلة من الشكل:

$$Ax^2 + By^2 + cz^2 + Dx + EY + Fz + H = 0$$

يكون سطحاً دورانياً حول احدى المحاور الاحداثية إذا وأذا فقط كان اثنان من المعاملات A, B, C متساويين. فاذا كان مثلاً $A = B$ فان بيان:

$$\{(x, y, z) \mid Ax^2 + Ay^2 + Dx + Ey + Ck^2 + Fk + H = 0,\ z = k\}$$

هو مقطع مستو عمودى على المحور Z. وان هذا البيان دائرة أو نقطة أو المجموعة الخالية، وبالتالى فان السطح المعطى هو سطح دورانى حول المحور Z نرى بشكل مماثل أنه اذا كان $A = C$ فان السطح هو سطح دورانى حول المحور Y واذا كان $B = C$ فان السطح هو سطح دورانى حول المحور X.

السطوح التربيعية:

السطح التربيعى هو سطح بمعادلة (حدودية) من الدرجة الثانية. اى ان مقطع مستوى لسطح تربيعى هو قطع مخروطى أو مستقيمان متوازيان.

مما يساعد عادة عند رسم سطح نجد أن محصوراته(انظر البند 9-4) وأن نعين طبيعة المقاطع المستوية المختلفة له، وبخاصية المقاطع المستوية العمودية على المحاور الاحداثية (بما فيها مقاطع السطح المستوى مع المستويات الاحداثية).

و أنه اذا كان لدينا سطح معادلته $E(x, y, z)=U$ فإن أى مقطع مستوى عمودى على محور احداثى هو بيان أحدى العلاقات

$$R_1 = \{(x, y, z) \mid E(k, y, z) = 0 \quad , \quad x = k\},$$

$$R_2 = \{(x, y, z) \mid E(x, k, z) = 0 \quad , \ y = k\},$$

$$R_3 = \{(x, y, z) \mid E(x, y, k) = 0 \quad , \quad z = k\},$$

نقول أن بيان R_1 هو بيان النظام:

$$E(k, y, z) = 0 \quad x = k$$

وكذلك نقول فى بيان R_2 هما على الترتيب بيان النظامين:

$$E(x, y, k) = 0, \quad y = k.$$

$$E(x, y, k) = 0, \quad z = k.$$

وعلى هذا فأن أى مقطع مستو عمودي علي محور احداثي

وقبل ان ننتقل الى دراسة سطوح تربيعية اخرى نذكر بأننا نقول عن نقطتين p2 و p1 انهما متناظرتان بالنسبة لمستوى اذا واذا فقط كان هذا المستوى عمودياً على القطعة p1p2فى منتصفها. ونقول عن مجموعة من النقاط G انها متناظرة بالنسبة لمستوى اذا واذا فقط وجدت من اجل كل نقطة $P1\in G$ نقطة اخري $p2\in G$علي نحو تكون فيه p1وp2متناظرتين بالنسبة للمستوى. ينتج عن هذا التعريف أن سطحاً تربيعياً s يكون متناظر بالنسبة للمستوى yzاذا واذا فقط ادى $\in s$(p1(x1,y1,z1 الى $\in s$)- p2(x1,y1,z1

ولا يكون هذا الأمر صحيحاً الأ اذا واذا فقط وردتx فى معادلة السطح بقوى زوجية فقط، وعلى هذا فإن أى سطح تربيعى لا يكون متناظر بالنسبة للمستوى y الأ اذا اذافقط وردت x فى معادلة السطح بقوى زوجية فقط. وأما بالنسبة للتناظر بالنسبة للمستوى xy وبالنسبة xz فهناك نتائج متشابهة.

فالاضافة الى الكرة و الاسطوانة التربيعية والسطوح والسطوح التربيعية المتردية التى أوضحناها، هناك ستة سطوح تربيعية نموذجية. سنذكر فيما يلى معادلات هذه السطوح الستة وبياناتها مع مناقشة تفصيلية لمجسم القطع الناقص.

1. أن مجسم القطع الناقص الذى معادلته $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}$

مبين فى الشكل

هناك محصورتان x هما a ,-a,و محصورتان yهما b,b–ومحصورتان z هما c,c–

أن مجسم القطع الناقص متناظر بالنسبة لكل من المستويات الاحداثية .

أن أثر مجسم القطع الناقص فى المستوى ryهو بيان النظام:

$$\frac{X^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1,z=0$$

فهو قطع ناقص، كذلك أن أثر مجسم القطع الناقص فى كل من المستويين الاحداثيين الآخرين هو قطع ناقص.

واذا قطعنا المجسم بمستو عمودي على المحور (x) فان المقطع هو بيان النظام

$$\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\ -\frac{,k^2}{a^2},x=k(50)$$

ان بيان (50) قطع ناقص اذا كان $k^2<a^2$ ونقطة اذا كان $k^2=a^2$ والمجموعة الخالية اذا كان $k^2>a^2$. وأن المقطع المستوى العمودي على المحور y هو بيان النظام:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{z^2}{c^2}=1-\frac{k^2}{b^2},y=k\ (51)$$

وبيان (51) قطع ناقص اذا كان $k^2<b^2$ ونقطة اذا كان $k^2=b^2$والمجموعة الخالية اذا كان $k^2>b^2$. اما المقطع المستوى العمودى على المحور z فهو بيان النظام:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1-\frac{k^2}{c^2},z=k\ (52)$$

وبيان (52) قطع ناقص اذا كان $k^2<c^2$ ونقطة اذا كان $k^2=c^2$ والمجموعة الخالية اذا كان $k^2>c^2$

اذا تساوى عددان من الاعداد a^2,b^2,c^2 فى المعادلة (49) فإن مجسم القطع الناقص يصبح مجسم القطع الناقص الدوارانى لان مقعطه المستوي العمودي على أحد المحاور الاحداثية يصبح فى هذه الحالة دائرة أو نقطة أو المجموعة الخالية

والكرة حالة خاصة من مجسم القطع الناقص نحصل عليها عندما يكون $a^2=b^2=c^2$

(1) مجسم القطع المكافئ الناقص والذى معادلته

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=cz \qquad (53)$$

مبين فى الشكل

(2) مجسم القطع الزائد دو الفرع الواحد والذى معادلته:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (54)$$

مبين فى الشكل

(3) مجسم القطع الزائد ذو الفرعين والذى معادلته

(4) (55) $\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1$

مبين فى الشكل

(5) المخروط والذى معادلته:

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=0 \qquad (56)$$

(6) مجسم القطع المكافئ الزائدى والذى معادلته:

$$\frac{x^2}{a^2}-\quad-\frac{y^2}{b^2}=cz \qquad (57)$$

ينبغى أن نلاحظ أن اية مبادلة بين الرموز x و y و zفى أى من المعادلات (49) و (53) و (54) و (55) و (56) (57) لا يغير من نمط السطح، وانما يغير فقط رموز المحاور الاحاثية. وعلى سبيل المثال ان المبادلة بين () و () فى المعادلة (54) تعطى المعادلة

$$\frac{x^2}{a^2}-\quad-\frac{y^2}{c^2}+\frac{z^2}{b^2}\ =1(58)$$

والمبادلة بين x و y فى (54) تعطى

وبيان كل من المعادلتين (58) و (59) هو مجسم قطع زائد بفرع واحد

(4-3)الاحداثيات فى ثلاثة أبعاد:

يمدنا الرسم البيانى للدوال ذات المتغير الواحد $y = f(x)$ بوسائل مفيدة للغاية لتصور الخصائص الوصفية للدالة. فمن الرسم البيانى للدالة تتضح مباشرة خصائص معينة لها مثل أين تتذايد وأين تتناقص، وأين تكون معقرة الى أعلي و الى أسفل، وأين تقع نهايتها العظمى والصغرى، قيم المتغير x التى تصبح عندها الدالة كبيرة كبراً لا نهائياً، وكذلك سلوك الدالة لقيم المتغير x الكبيرة لكى نعمم مفهوم الرسم البيانى للدوال ذات المتغيرين المستقلين $z= f(x,y)$ يلزمنا ثلاثة محاور للأحداثيات أى محور لكل من المتغيرات z, y, x ولذلك يجب أن نهتم بالهندسة التحليلية فى ثلاثة ابعاد بدلاً من بعدين.

فى هذه الحالة، نختار المحاور المناظرة للمتغيرات x و y وz بحيث تكون متعامدة مثنى مثنى، كما هو مبين بشكل 8 – 4

كل زوج من محاور الإحداثيات يحدد مستو، فمثلاً يحدد من محورى x و y المستوى xy ويحدد محورى x و z المستوى xz، الخ. يأخذ الاحداثي الثالث z القيمة صفر على المستوى xy ويستخدم الاحداثيات x و y لتحديد مواضع النقاط المختلفة على هذا المستوى بالطريقة المألوفة.

شكل 8-4 قمنا بتعين النقطتين (2,4,0) و (0, 2, 3-)

لكى نوضح هذه الطريقة. إذا أردنا تحديد موضع نقطة عامة (x, y, z) لها $z \neq 0$ فإننا نقوم أولاً بتعين النقطة (x, y, 0) فى المستوى xy

ثم نتحرك من هذه النقطة فى اتجاه مواز للمحور z تبعاً للقيمة المعطاة للاحداثى z فمثلاً عند النقطة (4, 2, 3-) فأننا نعين اولاً النقطة (0, 2, 3-) كما فى شكل 8-4 ، ثم نتحرك بعد ذلك مسافة قدرها أربع وحدات فى اتجاه مواز للأتجاه الموجب لمحور z، حتى النقطة المطلوبة p. فعند تعين النقطة (2-, 4,2) فاننا نعين اولاً النقطة (0, 4, 2)

فى المستوى xy ثم بعد ذلك نتحرك مسافة قدرها وحدتين فى اتجاه مواز للإتجاه السالب لمحور z حتى نصل الى النقطة المطلوبة Q.

وفى كثير من الأحيان يكون من الملائم أكثر النظر إلى المستوى xy على أنه أفقى وأن يكون محور z متجهاً رأسياً إلى أعلى. أما جزء محور z فيشير إذن رأسياً إلى أسفل.

تحقق كافة نقاط المستوى xy الشرط $z = 0$

وبالمثل، تحقق كل نقاط المستوى xz الشرط $y = 0$

وتحقق كافة نقاط المستوى yz الشرط $x = 0$ على المحور z فإن كلاالإحداثيين x, y يساويان صفر بالمثل، يكون $y = z= 0$ على محور x، $x = z = 0$ على محور y

نظرية 8 – 2 – 1

البعد بين نقطة الاصل والنقطة (x,y,z) يساوى $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. أما البعد بين النقطتين (x_1, y_1, z_1) و (x_2, y_2, z_2) فيساوى

$\sqrt{}$

البرهان: نفرض أن O نقطة الأصل، وأن p النقطة (x, y, z) وأن Q النقطة (x,y,z) (شكل 8 -6) .

إذن تقع النقطةَ Q فى المستوى xy أسفل p مباشرة، وبالتالى يكون البعد بين النقطتين Q , p هو $pQ = |z|$ (كتابة علامة القيمة المطلقة ضرورى إذ ربما تكون z سالبة).

من صيغة البعد فى المستوى نعرف أن $OQ = \sqrt{x^2 + y^2}$

والان اعتبر المثلث OPQالقائم الزاوية عند الراس Q .من نظرية فيثاغورث :

$$Op^2 = OQ^2 + pQ^2$$

$$= (\sqrt{x^2 + y^2})2 + |z|^2$$

$$= x^2 + y^2 + z^2$$

بأخذ الجذر التربيعي لطرفى هذه العلاقة نحصل على النتيجة المطلوبة،

$$Op = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

نود الأن أن نعمم هذه الدراسة للمستويات الأفقية والرأسية لتشمل المستويات التى تقع محاور الاحداثيات بأى زوايا وقد وجد أن أى مستو فى ثلاثة أبعاد يتعين بمعادلة على الصورة $ax + by + cz = d$ ، حيث a و b و c وd أربع ثوابت.

فمثلاً، المعادلة $x - y + 2z = 3$ تتحقق جميع النقاط (x,y,z) التى تقع كلها على مستو معين. الثوابت فى هذه الحالة تكون $a = 1$، $b = -1$، $c = 2$، $d = 3$

أما المعادلة $2x + y - 3z = 0$ التى فيها $a = 1$، $b = 1$، $c = -3$، $d = 0$ ، فتحققها النقاط الواقعة فى مستو أخر.

أى معادلة على الصورة $ax + by + cz = d$ تسمى معادلة خطية .

يبين الشكل 8 -10 مستو فى الفراغ xyz يقطع محاور الإحداثيات الثلاثة عند N, M, L نسقط الأن عموداً من نقطة الاصل o على هذا المستو ليقابل المستوى عند النقطة p التى ستفترض أن إحداثياتها هى (x_0, y_0, z_0). أفرض أن Q أى نقطة0 (x,y,z) واقعة فى المستوى إذن حيث أننا رسمنا op عمودياً على المستوى المعطى، فإنه ينتج على وجه الخصوص أن op لابد وأن يكون عمودياً على الخط p. وبعبارة اخرى فإن المثلث opQ يكون قائم الزاويةعند الرأس p.

من نظرية فيثاغورث ينتج إذن أن $OQ^2=OP^2+pQ^2$

بالتعويض بقيم الاطوال الثلاثة PQ,OQ,OP نحصل على المعادلة:

$$(x^2+y^2+z^2)=(x^2o+y^2o+z^2o)+(x-xo)^2+(y-yo)^2+(z-zo)^2$$

$$=x^2o+y^2o+z^2o+x^2-2xxo+x^2o+y^2-2yyo+y^2o+z^2-2zzo+z^2o$$

$$=x^2+y^2+z^2+2(x^2o+y^2o+z^2o)-2(xxo+yyo+zzo).$$

إذن بعد إجراء بعض التبسيطات نحصل فى النهاية على المعادلة

$$Xxo+yyo+zzo=x^2o+y^2o+z^2o$$

إذا إنعدم المعامل c فى المعادلة الخطية العامة $ax + by + cz = d$ فإننا نحصل على المعادلة $ax + by = d$ التى لا تظهر فيها المتغير z مثل هذه المعادلة ثمثل مستوى رأسى او بعبارة أخرى مستو مواز لمحور العينات.

وبطريقة مماثلة نجد أن معادلة أى مستو مواز لمحور السنات تكون على صورة $by + cz = d$ (أى أن $a = 0$ فى هذه الحالة)، إما أى مستو مواز لمحور الصادات فتكون معادلته على الصورة $ax + cz = d$ (أى أن $b = 0$)

(5-3)الرسومات البيانية فى ثلاثة أبعاد:

لنفرض أن $z = f(x, y)$ دالة فى متغيرين تكون تجاه D لهذه الدالة يتكون من فئة نقاط المستوى xy التى تكون الدالة معرفة عندها يمكننا حساب قيمة الدالة $z = f(x, y)$ عند أى نقطة (x_1) من نقاط Dثم تعين النقطة (x, y, z) بالنسبة لمحاور ثلاثة فى الفراغ الثلاثى البعد بعمل هذا لكل نقطة (x, y) فى D فإننا نحصل فى النهاية على مجموعة من النقاط (x, y, z) تكون سطحاً من الفراغ الثلاثى البعد توجد نقطة واحدة (x, y, z) على هذا السطح واقعة رأسياً على كل نقطة من نقاط المجال D (أو أسفلها إذا كانت القيمة$(z = f(x, y$ سالبة). هذا السطح يطلق عليه الرسم البيانى للدالة $z = f(x, y)$

الفصل الربع :-

التطبيقات

1/ جد معدلة الدئره التي مركزها نقطة الاصل والتي قطرها يساوي 5وحدات ؟

الحل :-

معادلة الدئره هي :-

$$x^2+y^2=r^2$$

المركز (0,0)ونصف قطره =5

$$x^2+y^2=25$$

2/اوجد احدثيات المركز واحسب طول نصف قطر كل من الدوائر الاتية

$$(x-2)^2+(y+3)^2=9$$

الحل

المركزهو . (2,-3)

ونصف القطر r=3

اوجد طول المماس المرسوم من النقطه 3,4 للدائرة

$$x^2+y^2-6y-8=0$$

مركزالدئره هو (0,3)

نصف القطر هو :

$$r=\sqrt{0+9+8}=\sqrt{17}$$

$$L=\sqrt{(3-0)+(-9-3)\ -17}\ ....$$

$L=\sqrt{9+49-17}=\sqrt{41}$

....

....

- القطع المكافئ الذي احداثيات راسه (n,m) ومقعر لي اسفل ومحوره يوازي محور y هي:-

$$(x-m)^2=-4a(y-n)$$

بعد البؤره عن الراس يساوي بعد البؤره عن الدليل

مثال:- اوجد احداثيات البؤرة واحداثيات الرأس ومعادلة الدليل ومعادلة المحور للقطع المكافئ:

$$x^2-6x-y+4=0$$

$$x^2-6x=y-4+9$$

$$x^2-6x+9=y-4+9$$

$$(x-3)^2=(y+5)$$

تقاس بالصورة القياسيه $(x-m)^2=4a(n-y)$

احداثيات الرأس هي $(3,-5)$

$4a=1 \quad a=1/4 = 0.25$

احداثيات البؤرة (3,-475) معادلة الدليل هي $y=-5.\ 25$

معادلة المحور هي $x=3$

مثال:-

اوجد معادلة القطع المكافئ الذي احداثيات راسه (0,0) ومتماثل بالنسبة لمحورy ويمر بالنقطة (2,-3)

الحل :-

من تعريف القطع المكافئ $(2-0)^2(-3+a)^2=(2-2)^2(-3-a)^2$

$$4+9-a+a^2=0+9+6a+a$$

$$4=12a\ ,\ a=4/12\ ....\ a=1/3$$

$$x^2=-4ay$$

$$x^2=-4.L......y \qquad x^2=4-/3y$$

مثال:-

أوجد معادلة القطع الزائد الذي مركزه نقطة الاصل واحداثيات طرف المحور الموافق(3....,0) وطول المحور القاطع 8 وحدة

الحل :-

$$6=3 \qquad , \ a=4$$

طول المحور القاطع 8

....

$$c^2=a^2+6^2=16+9=25 \qquad , c=5$$

$$h=5/4$$

مثال:-

ارسم منحنى $3y^2-30y-x^2+4x+-68=0$

الحل :-

نعيد ترتيب المعادله اولاً

$$2y^2-30y-x^2+4x=-68$$

$$3(y^2-10y)-(x^2-4x)=-68$$

....

باكمال المربعات :-

$$3(y^2-10y-25)-(x^2-4x+4)=-68+75-4$$

$$3(y-5)^2-(x-2)^2=3$$

نقسم كل حد على الاتي :

....

وهي معادلة قطع زائد احداثيات مركزه (2,5) ومحوره القاطع موازي لمحور y

$a^2=1 \quad .... \ a=1$

$b^2=3 \quad .... \ b=\sqrt{3}$

$c^2=a^2+b^2=1+3=c^2=4........ \ c=2$

احداثيات البؤرتين (2,3)(2,7)

مثال:-

ارسم منحنى $3x^2-24x-y^2-10y=20$

الحل :-

$3(x^2-8x)-(y^2-10y)=-20$

....

با كمال المربعات :-

$3(x^2-8x+16)-(y^2+10y+25)=-20+48-25$

$3(x-4)^2-(y+5)^2=3$ ....

تقسيم كل حد على3

....

وهي احداثيات قطع زائد مركزه(4,-5) ومحور القطع موازي لمحور x

$a=1 \quad , b=\sqrt{3}$

واحداثيات راسه (3,-5)(5,-5)

$a^2+b^2=c^2$

$1+3...........c^2......c^2......=4 \ ......c=2$

واحداثيات بؤرته (2,-5), (6,-5)

مثال:-

اوجد معادلة القطع الناقص الذي احداثيات بؤرته (0 ,2....) ومحوره الاصغر يساوي 6 وحدات

الحل :-

$6=3 \quad c=2$

$a^2-{}^26=c^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \ a^2=6^2+c^2$

$a^2=9+4=13$

الصوره القياسيه لي معادلة القطع الناقص هي :

ز...

مثال :-

اوجد احداثيات راس القطع الناقص احداثياته بؤرته واطوال المحورين والاختلاف المركز نق ارسم : $4x^2+18y^2=36$

الحل :-

$4x^2+18y^2=36$

نقسم على 36

ز...

$a=3 \qquad 6=\sqrt{2} \qquad a^2-{}^20=c^2$

$\ldots-2=c^2 \qquad c^2=7 \qquad c=\ldots.\ \sqrt{7}$

احداثيات البؤرتين ($\sqrt{7}$,5....) احداثيات الراسين (3,0....)

طول المحور الاكبر = 6 , وطول المحور الاصغر = $2\sqrt{2}$

$h=\ldots\ldots.=\ldots\ldots.$

اوجد طول المماس المرسوم من النقطه 4و3 للدئره :-

$x^2+y^2-6y-8=0$

الحل :-

مركز الدئره هو $(0,3)$

نصف القطر هو :

$$r=\sqrt{0+9+8} = \sqrt{17}$$

$$L=\sqrt{(3-0)+}\,(4-3)-17$$

$$L= \sqrt{9+49-17}=\sqrt{41}$$

مستخلص البحث

تعاملنا مع هذا البحث الهندسة التحليلية وقوانين تعريف وأيضا على خط ودائرة المعادلات على التوالي، وحكمه، وتعاملنا مع قطع الثنائية وثلاثية الأبعاد .

وكنا على القطوع المخروطية وأنواع القطع المكافئ والعناصر والنقد المعادل وقطع الزائدة والعناصر والمعادلات وثم القطع الناقص والعناصر والنقد المعادل .

تعاملنا مع هذه الورقة المفاهيم الأساسية لعلم الهندسة التحليلية في الفضاء ثلاثي البعد وحصلنا على القطوع المخروطية ثلاثي الأبعاد (x.y.z)وجدت أن القطوع المخروطية الهامة في الأشكال الهندسية والتصميم، سواء البعد الثنائي أو الثلاثي.

Abstract

We dealt with in this research analytic geometry and the laws of definition and also the straight line and circle equations and equivalents and we dealt with bilateral cuttings and three-dimensional.

And we were to conic sections and types parabola, elements and cash equivalents and excess pieces and elements and equations and then ellipse, elements and cash equivalents.

We dealt with in this paper the basic concepts of analytical geometry in three-dimension space and we got on conic sections three-dimensional (x.y.z) and found that the conic sections important in geometric shapes and design, whether bilateral or trilateral dimension.

المراجع والمصادر:

1 -الهندسة التحليلية ، الدار الجماهيرية ، ليبيا ، 1987م

تأليف : أحمد صادق القرماني وعلي محمد عوني.

2 -الأسس المعاصرة للهندسة التحليلية ، مؤسسة الرسالة ، سوريا ، 1886م.

تأليف خضر حامد الأحمد

3 -دار العلم للطباعة والنشر ، سوسكو باللغة الروسية 1968م.

تأليف مصطفى أحمد الجندي .

4 -الرياضة لدارسي العلوم الحيوية ، جاديش س. أريا وروبين . و.لاردنر –

قسم الرياضيات ، جامة سيمون فرازر