بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا

كلية التربيــــة

قسم العلــــوم

شعبة الريــاضيــات

بحث تكميلي لنيل درجة بكالريوس الشرف

بعنوان:

مبادىء المعادلات التفاضلية الجزئية وبعض تطبيقاتها

The Principles of Partial Differential Equations and Some Applications

إعداد الطلاب:

أمــاني الرشيــد حســن محمد

تسابيــح خلف الله عبد الرحمـــن

كوثر حسب الرسول محمد علــي

مناسك صـــلاح أحمد إبراهيـــم

إشــراف الأستـــاذ:

عمر الخليل عثمان إسحق

سبتمبر ٢٠١٥م

بسم الله الرحمن الرحيم

الآيـــة

قال تعالى:

(يَرْفَعِ اللَّـــهُ الَّذِينَ آمَنُوا مِنكُمْ وَالَّذِينَ أُوتُوا الْعِلْمَ دَرَجَاتٍ ۚ وَاللَّـــهُ بِمَا تَعْمَلُونَ خَبِيرٌ)

صدق الله العظيم

سورة المجادلة آية رقم (١١)

الإهداء

أولا : إلى الذين قالوا ربنا الله ثم استقاموا.

ثانيا : إلى اللواتي حملننا وهنا على وهن أمهاتنا العزيزات.

ثالثا : إلى الذين أفنوا شبابهم لراحة بالنا وسعادتنا آباءنا الأعزاء.

رابعا : إلى أساتذتنا الذين منحونا أفضل العلم ووقفوا معنا لو استطعتنا لوضعناهم في قرص الشمس وأشرنا إلى الجميع بأنهم رفقاء دربنا.

خامسا : إلى أخواننا الأعزاء دون فرز أحد منهم.

سادسا : إلى أصدقائنا وزملائنا الذين وقفوا معنا وقفة رجل واحد.

الشكر والتقدير

أولاً نشكر الله سبحانه وتعالى

لا بد لنا ونحن نخطو خطواتنا الأخيرة في الحياة الجامعية مع وقفة تعود إلى أعوام قضيناها في رحاب الجامعة مع أساتذتنا الكرام الذين قدموا لنا الكثير باذلين بذلك جهودا كبيرة في بناء جيل الغد لتبعث الأمة من جديد ...

نتقدم بجزيل الشكر لأستاذنا الفاضل:

عمر الخليل عثمان إسحق

الذي تفضل مشكورا بقبول الإشراف على هذا البحث، والذي غمرنا بنبل أخلاقه وحسن توجيهه وإرشاده،

وأيضاً الشكر للدكتور:

عبد القادر البشرى

وقبل أن نمضي نتقدم بأسمى آيات الشكر والامتنان والتقدير والمحبة إلى الذين حملوا أقدس رسالة في الحياة وإلى الذين مهدوا لنا طريق العلم والمعرفة إلى جميع أساتذتنا الأفاضل...

لكم بذلك الشكر والتقدير،،،

الفهرس

المستخلص

بفضل من الله وتوفيقه تم عمل بحث لمباديء المعادلات التفاضلية الجزئية وبعض تطبيقاتها وذلك بهدف التعرف علي المعادلات التفاضلية الجزئية وطرق حلها والتوسع في دراستها وحل مسائل أكثر صعوبة بطريقة فصل المتغيرات وذلك بنهج تقديم الأسئلة العلمية وإجاباتها بحلول المنشدة مع استصحاب الأمثلة المناسبة من المعادلات التفاضلية وذلك في اطار وصفي وتحليلي ليحقق الغاية المنشودة.

Abstract

The grace of Allah Almighty was the work of search principles differential equations and some of their applications in order to identify the partial differential equations and their solutions and the expansion of the study and resolve issues more difficult way separation of variables and this approach to provide scientific questions and their answers by female performers with rooming appropriate examples of differential equations, as part of descriptive and analytical to achieve the desired end

الفصل الأول

الإطـــار العــــام

(1) خطة البحث:

(1−1) مشكلة البحث:

تبيان المقصود بالمعادلات التفاضلية الجزئية وكيفية حلولها وعرض مؤجز عن تصنيفها ونظرة عامة عن عدد من الأفكار التي ستدرس بالتفاصيل.

إن معظم الظواهر الفيزيائية سواء كانت في حقل سريان الموائع الكهربائية، الميكانيك، البصريات أو سريان الحرارة يمكن أن توصف بصورة عامة بمعادلات تفاضلية جزئية. وفي الحقيقة إن معظم الفيزياء الرياضية هي معادلات تفاضلية جزئية وعلى الرقم من أن التبسيطات تحول المعادلات قيد الدرس إلي معادلات تفاضلية اعتيادية إلا أن الوصف الكامل لهذه المنظومات يقع ضمن المجال العام للمعادلات التفاضلية الجزئية.

ولذالك جاء البحث للتطرق لهذه المجالات وأبرزها بصورة تبين ارتباط الرياضيات بالعلوم الأخرى.

(1−2) أهداف البحث:

أ.التعرف على المعادلات التفاضلية الجزئية وطرق حلها.

ب.التوسع في دراستها.

ج. حل مسائل أكثر صعوبة بطريقة فصل المتغيرات.

(1−3) أهمية البحث:

إن معظم القوانين الطبيعية في الفيزياء مثل معادلات ماكسويل وقوانين نيوتن للتبريد ومعادلات نافير كلها مكتوبة بدلالة المعادلات التفاضلية الجزئية وبعبارة أخرى فان هذه القوانين تصف الظواهر الفيزيائية بإيجاد العلاقات بين

الفضاء والمشتقات الجزئية بالنسبة للزمن فالمشتقات الجزئية تظهر في هذه المعادلات لكونها تمثل أشياء طبيعية.

وتتبع أهمية البحث من أن المعادلات التفاضلية الجزئية لها دور كبير في حل بعض المشكلات في العلوم الأخرى وهذا ما سنتطرق إلية في هذا البحث.

(1 – 4) أسئلة البحث:

1) مقدمة في المعادلات التفاضلية الجزئية.

2) لفورير دور مهم في حل المعادلات التفاضلية الجزئية (متسلسلات ــ تحويلات ــ تطبيقات).

3) تطبيقات عامة في المعادلات التفاضلية الجزئية في مجال (علوم، هندسة......الخ).

(1 – 5) منهج البحث:

لجأ الدارسون للمنهج الوصفي للإجابة على أسئلة المبحث.

(1–6) مصطلحات البحث:

١/ المعادلات التفاضلية الجزئية:

هي معادلات تفاضلية تحتوي علي دالة واحدة أو أكثر من الدوال المجهولة ومشتقاتها الجزئية.

٢/ المعادلة التفاضلية:

هي معادلة تتضمن دالة مجهولة ومشتقاتها.

٣/المشتقة:

تعرف المشتقة على أنها مقدار التغير في الاقتران على مقدار التغير لـــ X.

٤/ الحل العام:

إن حل المعادلة التفاضلية هي خطوة معاكسة لتركيبها وبالتالي فإن الحل العام للمعادلة يجب أن يحوي عددا من الثوابت الاختيارية مساو لمرتبة المعادلة.

٥/ المؤثر التفاضلي:

هو $D = \frac{d}{dx}$ الذي يؤثر على الحل المطلوب الحصول عليه بدرجات مختلفة بالمشتقة من نفس الرتبة فيتحول بذلك نظام المعادلات التفاضلية إلى نظام من المعادلات الجبرية يتم حله بأي طريقة مع التخلص من تأثير المؤثر التفاضلي على الحل عن طريق فصل المتغيرات وإجراء التكامل.

الفصل الثاني

مقدمة في المعادلات التفاضلية الجزئية

(2−1) تمهيد في المعادلات التفاضلية الجزئية:

المعادلات التفاضلية الجزئية هي معادلات تفاضلية تحتوي علي دالة واحدة أو أكثر من الدوال المجهولة ومشتقاتها الجزئية.

سنقتصر دراستنا للمعادلات التفاضلية الجزئية علي تلك المعادلات التي تحتوي علي دالة مجهولة واحدة فقط ذات متغيرين حقيقيين وأكثر. فمثلا إذا كانت $u=f(x\,,y)$ فإن u تحقق معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الثانية علي الصورة :

$$f\left(x\,,y\,,u,\frac{\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial y},\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},\frac{\partial^2 u}{\partial y^2},\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} \right) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (1)$$

وسنفرض أن (1) تحتوي علي الأقل علي احدي مشتقات u الجزئية وان المشتقات الجزئية المختلفة لا تعتمد علي ترتيب عملية التفاضل أي:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}$$

ونقصد بحل المعادلة (1) تلك الدالة f المعطاة بالصيغة $u = f(x\,,y)$ والمعرفة علي الفئة s من المناطق غير المتداخلة من المستوى $x\;y$ والتي تحقق (1) في كل نقطة من نقط s.

وبالنسبة للمعادلات التفاضلية في دالة u في أكثر من متغيرين، يعرف نطاق الحل بنفس الكيفية كمنطقة في الفراغ ثلاث أبعاد أو أكثر.

تعريف:

رتبة المعادلة التفاضلية الجزئية هي رتبة أعلى مشتقة واردة في المعادلة التفاضلية.

تسمي المعادلة التفاضلية الجزئية خطية عندما وفقط عندما تكون خطية في الدالة المجهولة u ومشتقاتها الجزئية. وتسمي كل المعادلات التفاضلية الجزئية الأخرى بالمعادلات اللاخطية.

وإذا احتوت كل حد من حدود المعادلة التفاضلية الجزئية علي الدالة المجهولة u أو احدي مشتقاتها الجزئية فإن المعادلة التفاضلية الجزئية تسمي متجانسة وإلا فإنها تسمي بغير المتجانسة.

(2−2) بعض طرق حل المعادلة التفاضلية الجزئية:

هنالك طرق كثيرة جدا مطبقة عمليا وأعظمها أهمية تلك الطرق التي بإتباعها تتحول المعادلات التفاضلية الجزئية إلى معادلات تفاضلية اعتيادية ومنها

1ـ فصل المتغيرات:

بهذه الطريقة يتم تحويل المعادلة التفاضلية الجزئية ذات n من المتغيرات المستغلة إلي n من المعادلات التفاضلية الاعتيادية.

2ـ التحولات التكاملية:

بهذه الطريقة يتم تحويل المعادلة التفاضلية الجزئية ذات n من المتغيرات المستغلة إلي معادلة تفاضلية جزئية ذات n-1 من المتغيرات المستغلة ومن ثم بهذه الطريقة يمكن تحويل المعادلة التفاضلية الجزئية ذات المتغيرين إلي معادلة تفاضلية اعتيادية.

3ـ تبديل المتغيرات:

بهذه الطريقة يتم تحويل المعادلة التفاضلية الجزئية إلي معادلة تفاضلية اعتيادية أو إلي معادلة تفاضلية جزئية (أسهل) وذالك بتبديل متغيرات المسالة (كالتدوير أو ما شابه ذلك).

4ـ تحويل المتغير التابع:

بهذه الطريقة يتم تحويل المجهول في المسألة إلي مجهول أخر يمكن احتسابه بطريقة أسهل.

5_ الطرائق العددية:

تحول المعادلة التفاضلية الجزئية إلي مجموعه من المعادلات الفرقية التي يمكن حلها بعمليات حسابيه متكررة بواسطة الحاسبة الالكترونية وفي عدد من الحالات يكون هذا هو الحل الوحيد وإضافة لذلك هناك طرائق لتقريب الحلول بسطوح معادلتها متعددات حدودية (التقريب ألشرائحي).

٦_ طرائق الترجاف:

تحول المسألة غير الخطية إلي متتابعة من المسائل الخطية والتي تقرب للمسألة الأولي.

٧_ طريقه الحافز وإلا ستجاب:

تجزا الشروط الابتدائية والشروط الحدودية للمسألة إلي حوافز بسيطة ثم توجد استجابات هذه الحوافز وتجمع هذه الاستجابات البسيطة لحساب الاستجابة الكلية.

٨_ المعادلات التكاملية:

تحول المعادلة التفاضلية الجزئية إلي معادله تفاضلية تكاملية (معادله يكون المجهول فيها داخل التكامل) وبعدئذ تحل المعادلة التكاملية بطريقه مختلفة.

٩_ طرائق حساب التغيرات:

يوجد حل للمعادلات التفاضلية الجزئية بإعادة صياغتها كمسألة نهايات صغرى وعندئذ يتبع عند النهاية الصغرى لمقدارها (يحتمل إن يمثل المقدار الطاقة الكلية) تكون أيضا حل للمعادلة التفاضلية.

10ـــ طريقة الدوال الذاتية:

بهذه الطريقة يتم إيجاد حل للمعادلة التفاضلية الجزئية كمجموع عدد غير منتهي من الدوال الذاتية وهذه الدوال الذاتية توجد بحل ما يسمى من مسائل القيم الذاتية المناظرة للمسالة الأصلية.

حلول بعض المعادلات التفاضلية البسيطة:

لكي نتوصل إلى بعض الأفكار التي تخص طبيعة الحلول للمعادلات التفاضلية الجزئية دعونا ندرس الأتي:

مثلاً:

استخرج حلولا للمعادلة التفاضلية الجزيئية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = 6\text{x} + 12y^2 \ldots\ldots\ldots (1)$$

يعتمد المتغير التابع في (2)على المتغيرين المستقلين x ,y لإيجاد الحلول نحاول إن نحدد m بدلالة x و y إلى $u(x,y)$ إذا كتبنا (1) بالصيغة:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\right] = 6x + 12y^2 \ldots\ldots\ldots (2)$$

فإننا نستطيع أن نكامل بالنسبة إلى x مع الاحتفاظ بـy ثابتا نجد أن:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 + 12xy^2 + F(y) \ldots\ldots\ldots\ldots (3)$$

حيث أضفنا ثابت التكامل الاختياري الذي يمكن أن يعتمد على y ولذلك فهو في الواقع دالة اختيارية لy ويرمز لها بالرمز $f(y)$ ونكامل الأن (3) بالنسبة إلى y مع الإحتفاظ ب x ثابت نجد أن:

$$u = 3x^2y + 4xy^3 + \int F(y)dy + G(x) \ldots\ldots\ldots. (4)$$

في هذه المرة أضفنا دالة اختيارية ل x معطاة ب$G(x)$ بما أن التكامل دالة اختياريه ل y هو عبارة عن دالة اختيارية أخري ل y فإننا نستطيع أن نكتب (4) بـــ:

$$u = 3x^2y + 4xy^3 + H(y) + G(x) \qquad (5)$$

يمكن التحقق من (5) بتعويضها في (1) والحصول على متطابقة بما أن (1) هي معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة الثابتة بينما الحل (5) له دالتان إختياريتان فإن هذا يقودنا مقارنةً بالمعادلات التفاضلية الاعتيادية إلى تسمية (5) بالحل العام لـــ (1) لإستخدام التشابه نفسه.

من الطبيعي أن سمي أي حل مستخرج من الحل العام (5) بواسطة إختيارات خاصة للدوال الإختيارية على سبيل المثال

$G(x) = \sin x,\ H(y) = y^2$ بالحل الخاص إن هذا يقودنا عندئذ لعمل الأتي:

تعريف:

أعطيت معادلة تفاضلية جزئية من المرتبة ال n يسمي الحل الذي يحتوي علي n من الدوال الإختيارية بالحل العام وان أي حل مستخرج من الحل العام بإختيارات خاصة للدوال الإختيارية يسمي بالحل الخاص.

كما في دالة المعادلات التفاضلية الإعتيادية فإننا غالبا ما نحتاج إلي تحديد حلول من المعادلات التفاضلية الجزئية التي تحقق شروطا، علي سبيل المثال أفترض إننا نريد حل المعادلات التفاضلية (1)خاضعة للشرطين:

$$u(1,y) = y^2 - 2y,\ u(x,2) = 5x - 5 \qquad (6)$$

بعد ذلك يقودنا الحل العام (5) والشرط الأول في (6) إلي:

$$u\ (1,y) = 3(1)^2y + 4(1)y^3 + H(y) + G(1) = y^2 - 2y$$

أو

$$H(y) = y^2 - 4y^3 - G(1)$$

لذلك فإن:

$$u = 3x^2y + 4xy^3 + y^2 - 5y - 4y^3 - G(1) + G(x) \ldots\ldots (7)$$

إذا استخدمنا الآن الشرط في (6) فان ذلك يقودنا إلي:

$$\mathrm{u(x,2) = 3x^2(2) + 4x(2)^3 - 5(2) - 4(2)^3 - G(1) + G(x)}$$
$$= 5\mathrm{x} - 5$$

والتي منها نحصل علي

$$G(x) = 33 - 27x - 6x^2 + G\ (1)$$

باستخدام هذه الأخيرة في (7) نحصل علي الحل المطلوب:

$$u = 3x^2y + 4xy^3 + y^2 - 5y - 4y^3 - 27x - 6x^2 + 33 \ldots\ldots\ldots (8)$$

يمكننا أن نستخدم مصطلح مسألتي القيمة الإبتدائية والحدودية نفسه بالنسبة إلي المعادلات التفاضلية الجزئية.

من ناحية أخري لان هناك بصوره عامه جمعا لشروط ابتدائية وحدودية فإننا نشير عادةً إلي مسائل من هذا النوع بمسائل القيمة الحدودية.

تطبيق(1):

جد حلاً لمسألة القيمة الحدودية:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \quad , \quad u(0, y) = 0 \quad , \quad u_x(x, 0) = x^2$$

الحل بكتابة المعادلة بالصيغة:

$$\frac{\partial}{\partial \mathrm{x}} \left[\frac{\partial u}{\partial y} - u\right] = 2$$

وبالمكاملة بالنسبة لx ينتج:

$$\frac{\partial u}{\partial y} - u = 2x + F(y)$$

التي هي معادلة خطية لها عامل تكاملي e^{-y} اذن:

$$\frac{\partial}{\partial y}(\mathrm{e}^{-y}\mathrm{u}) = 2x\mathrm{e}^{-y} + \mathrm{e}^{-y}F(y)$$

أو

$$\mathrm{u}(\mathrm{x}, \mathrm{y}) = -2\mathrm{x} + \mathrm{e}^{\mathrm{y}} \int \mathrm{e}^{-\mathrm{y}} \, \mathrm{F}(\mathrm{y})\mathrm{dy} + \mathrm{e}^{\mathrm{y}}\mathrm{G}(\mathrm{x})$$

حيث $G(x)$ هي دالة اختيارية بكتابة:

$$H(y) = \mathrm{e}^{y} \int \mathrm{e}^{-y} \, F(y)dy$$

يكون لدينا

$$u(x, y) = -2x + H(y) + e^{y}G(x) \qquad (9)$$

من $u(0, y)$ نجد أن:

$$H(y) = -G\,(0)\,e^{y}$$

لذلك فإن(9) تصبح:

$$u(x, y) = -2x - G(0)\,e^{y} + e^{y}G(x)$$

بالمفاضلة بالنسبة إلي x وبوضع $y = 0$ نجد أن:

$$G(x) = \frac{x^3}{3} + 2x + c$$

أو

$$ux\ (x,0) = -2 + \grave{G}(x) = x2$$

إذن

$$u(x\ ,y) = -2x - G(0)\ e^{y} + e^{y}\left[\frac{x^{3}}{3} + 2x + c\right]$$

بما أن $c\ = G(0)$ فان:

$$u(x\ ,y) = \ \frac{x^{3}}{3}\ e^{y} + 2xe^{y} - 2x \ldots\ldots\ldots\ldots (3-2)$$

(٢-٣) المعني الهندسي للحلول العامة والخاصة:

من الحل العام (10)

$$u = 3x^{2}y + 4xy^{2} + H(y) + G(x)$$

لنفترض الآن نختار دالتين خاصتين ل$H(y), G(x)$ ونبدل u ب z عندئذ نأخذ (10) الصيغة:

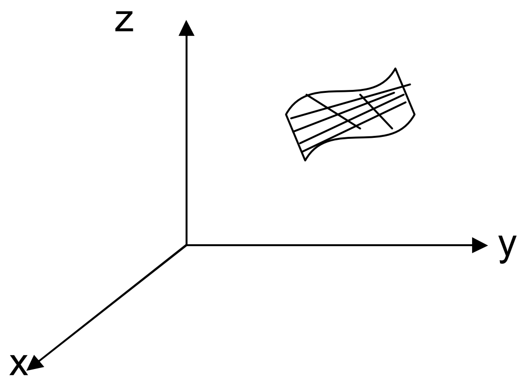
$$Z = f(x,y) \qquad\qquad (11)$$

التي يمكن تفسيرها هندسياً سطحا s في نظام إحداثيات عمودي t وxyz مثل النظام المبين في الشكل أدناه يتكون السطح من نقاط ذات إحداثيات$(x\ ,y,z)$ تحقق (11) بالنسبة للدوال الاختيارية ل$H(y)$ و G(x) نحصل علي مجموعة سطوح كل واحد منها يناظر اختيارا خاصا ل$H(y)$ و$G(x)$ أي يناظر حلا خاصا، المعادلة التفاضلية التي لها هذه السطوح حلولاً تسمي عندئذ بالمعادلة التفاضلية لمجموع السطوح. يلاحظ الطالب التشابه مع المعادلات التفاضلية الاعتيادية التي تمثل فيها الحل العام لثوابت اختياريه مجموعة منحنيات كل منحي فيها يناظر حلا خاصا.

أي يناظر اختيارا خاصا لتلك الثوابت الإختيارية. يمكن تعميم هذه الأفكار لحالات يوجد فيها أكثر من متغيرين مستقلين. لذلك وعلي سبيل المثال في حاله

كون u داله لثلاث متغيرات مستقلة والتي يمكن أن نرمز لها ب x_3, x_2, x_1 فإننا نستطيع أن نفكر بحل خاص لمعادلة تفاضلية جزئية يتضمن تلك المتغيرات ومعطي ب:

$$u = f(x_1, x_2, x_3) \qquad (1,2)$$



الشكل (٢-١)

إن هذا لا يمكن تصوره كما في الشكل أعلاه ولكن نستطيع أن نفكر بمجموعة الأرقام الرباعية (u, x_1, x_2, x_3)علي إنها تمثل نفطه في فضاء ذي أربعه أبعاد وعندئذ نشير (١٢)علي أنها سطع ذو أربعه أبعاد أو سطح فوقي علي سبيل المثال تماما كما تمثل $x^2 + y^2 + z^2 = c^2$ كره نصف قطرها c في فضاء ذي ثلاث أبعاد فإن $x_1^2 + y_2^2 + z_3^2 + u^2 = c^2$ ستمثل سطحها فوقيا نصف قطرها c في فضاء ذي أربعة أبعاد.

معادلة تفاضلية جزئيه ناتجة من حذف دوال اختياريه:

بما أن الحلول التامة للمعادلة التفاضلية الجزئية تتضمن دوال إختيارية فإنه منطقيا أن نستخرج معادلات تفاضلية بعمليه عكسية متضمنة إختزال مثل هذه الدوال.

تطبيق(2):

جد معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الأولي حلها العام هو:

$$u = y^2F(x) - 3x + 4y \qquad (13)$$

حيث $F(x)$ دالة اختيارية ل x

$$\frac{\partial u}{\partial y} = 2yF(x) + 4 \qquad (14)$$

بعد ذلك بإختزال $F(x)$ بواسطة (13)و(14)نجد المعادلة:

$$y\,\frac{\partial u}{\partial y} - 2u = 6x - 4y \qquad (15)$$

$$y\,\frac{\partial u}{\partial y} - 2u = y[2yF(x) + 4] - 2[y^2F(x) - 3x + 4y]$$

$$= 6x - 4y$$

تطبيق(3):

جد معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الأولي حلها العام هو:

$$Z = F\,(3x - 4y) \qquad (16)$$

حيثF دالة اختيارية.

الحل

ضع $u = 3x - 4y$ عندئذ (16) تصبح

$$z = F\,(u) \qquad (17)$$

بمفاضلة (17) بالنسبة ل x يكون لدينا

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial z}{\partial u} * \frac{\partial u}{\partial x} = \grave{F}(\mathrm{u})(3) = 3\grave{F}(\mathrm{u}) \qquad (18)$$

بمفاضلة (18) بالنسبة ل y يكون لدينا

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial z}{\partial u} * \frac{\partial u}{\partial y} = \grave{F}(\mathrm{u})(-4) = -4\grave{F}(\mathrm{u}) \qquad (19)$$

باختزال (u) ` بين (18) و(19) تنتج المعادلة:

$$4\frac{\partial z}{\partial x} + 3\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \qquad (20)$$

تطبيق(4):

جد معادلة تفاضلية جزئية من الرتبة الثانية حلها العام هو:

$$u = x\,F(y) + y\,G(x) \qquad (21)$$

حيث G و F دالتان إختياريتان.

الحل:

نستطيع أن نختزل $F(y)$ في (21) بقسمة كلا طرفي (21) علي x ومفاضلة النتيجة بالنسبة إلي x.

بعد ذلك نجد أن:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{u}{x}\right] = \frac{\partial}{\partial x}\left[F(y) + \frac{y}{x}G(x)\right]$$

أي أن:

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - u = xy\grave{G}(x) - yG(x)$$

التي يمكن كتابتها بالصيغة

$$x\frac{\partial u}{\partial x} - u = y\left[x\grave{G}(x) - G(x)\right] \qquad (22)$$

إذا قسمنا الأن كلاً من الطرفي (22) علي y وفاضلنا بالنسبة ل y وجدنا إن:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{1}{y}\left(x\frac{\partial u}{\partial x} - u\right)\right] = 0$$

أو

$$x\,y\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x} - x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} + u = 0 \qquad (23)$$

التي تعطي معادلة المرتبة الثاني المطلوبة لاحظ إن المعادلة الثانية في (23) يمكن إن تكتب أيضا بالصيغة:

$$xy\,\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y} - x\frac{\partial u}{\partial x} - y\frac{\partial u}{\partial y} + u = 0$$

وذلك لأن

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y\partial x}=\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}$$

(2-4) تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية:

تصنيف المعادلات التفاضلية الجزئية بناء علي إعتبارات عده والتصنيف ذو مفهوم مهم لأن النظرية العامة وطريقة الحل عادة تطبق علي صنف معني من المعادلات ،وتصنف المعادلات التفاضلية الجزئية إلي ستة أصناف هي:

1- رتبة المعادلة التفاضلية الجزئية:

وهي رتبة أعلي مشتقة جزئية في المعادلة فمثلا

$u_t = u_{xx}$ من الرتبة الثانية.

$u_t = u_x$ من الرتبة الأولي.

$u_t = uu_{xxx} + \sin x$ من الرتبة الثالثة.

2- عدد المتغيرات:

وهو عدد المتغيرات المستقلة فمثلا:

$u_t = u_{xx}$ (ذات متغيرين(t, x))

$u_t = u_{rr} + \frac{1}{r}u_r + \frac{1}{r2}u_{\theta\theta}$(ذات متغيرات$(r, \theta, t)$)

3- الخطية:

المعادلات التفاضلية الجزئية إما أن تكون خطيه وإما أن غير خطية في المعادلة الخطية يكون المتغير التابع u وجميع مشتقاتها تظهر بصيغة خطية (أي

أنها غير مضروبة ببعضها أو إن أحداها مربعة) و بصورة أدق فإن المعادلة التفاضلية الجزئية الخطية من الرتبة الثانية ذات المتغيرين هي معادلة من الصيغة:

$$Au_{xx} + Bu_{xy} + Cu_{yy} + Du_x + Eu_y + Fu = G \qquad (1)$$

حيث A, B, C, D, E, F ثوابت أو دوال معلومة بدلالة x , y فمثلا:

$u_{tt} = e^{-t}u_{xx} + sin\,t$ خطية

$u_{xx} + u_t = 0$ غير خطية

$u_{xx} + yu_{yy} = 0$ خطية

$x\,u_x + yu_y + u^2 = 0$ غير خطيه

4- التجانس:

يكون المعادلة (1) متجانسة إذا كان الطرف الأيمن $G(, y)$ يساوي صفر لكل x , y.

إذا لم يكن $G(, y)$ متساويا للصفر فعندئذ تسمي غير متجانسة.

5- نوعية المعاملات:

في المعادلة (1) إذا كانت A, B, C, D, E, F ثوابت فعندئذ تسمى المعادلة ذات معاملات ثابتة (وإذا لم تكن كذالك تسمى المعادلة ذات معاملات متغيره.

6-الأنماط الثلاثة الأساسية للمعادلات الخطية:

كل معادلة تفاضلية جزئية خطية مثل (1) تتمثل احد الأنماط التالية:

أـــ القطع المكافئ.

ب ـــ القطع الزائد.

ج ـــ القطع الناقص.

فمعادلات القطع المكافئ تصف سريان الحرارة وعمليات الانتشار وتحقق الخاصية

$$B^2 - 4AC = 0$$

ومعادلات القطع الزائد تصف حركات الاهتزاز وحركات الموجة وتحقق الخاصية

$$B^2 - 4AC > 0$$

ومعادلات القطع الناقص تصف ظواهر الحالة المستقرة وتحقق الخاصية

$$B^2 - 4AC < 0$$

تطبيقات:

أ- u_t=u_{xx} معادلة قطع مكافئ لان $B^2 - 4AC = 0$

ب- u_{tt}=u_{xx} معادلة قطع زائد لان $\mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} = 4$

ج- u_{xx}+u_{yy}=0 معادلة قطع ناقص لان

$y_{xx} + u_{yy} = 0,\ \ \mathrm{B}^2 - 4\mathrm{AC} = -4\mathrm{y}$

y>0 عندما يكون قطع ناقص

y>0 عندما يكون قطع ناقص

y<0 عندما يكون قطع زائد

الفصل الثالث

فوريير (متسلسلات – تحويلات – تطبيقات)

(1-3) تمهيـــــد:

استخدم عالم الرياضيات الفرنسي جان باتيست فورييه ***Fourier*** ***(1768 - 1830)*** في تحليله للانتقال الحراري في الأجسام الصلبة والتي كان قد اقترحها عوضا" من قبل العالم الرياضي السويسري دانيال بيرنوللي ***D.Bernonly*** ***(1700 - 1782)*** والمتعلقة بتمثيل الدالة f بمتسلسلة لانهائية علي الصورة:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} D_n \, sin\, nx$$

بمعني أخر لقد اخذ في الاعتبار إمكانية تحقيق الشرط الحدي $u(x,0) = f(x)$ باختيار مناسب للمعاملات D_n ومن ثم الحصول علي حل معطي بمتسلسلة لا نهائية علي الصوره:

$$U(x\,,t) = \sum_{\mathrm{n}=1}^{+\infty} \mathrm{D_n e^{-n^2 t}} \sin nt$$

قدم فورييه كثيرا من أفكاره عام 1822م في رسالة بعنوان (نظرية التحليل الحراري "***Analytique delachaleur***"). وكانت هذه هي بداية التفسير الرياضي لنظرية الدفق الحراري وانتقد كثيرا من معاصري فورييه بما فيهم لاجرانج ولابلاس وليجندر أعماله علي أساس نقص الدقة .وتركز الاعتراض الرئيسي حول نوعية الدالة التي يمكن فكها في متسلسلة فورييه.

وقد أعيد البحث في التعريف الصحيح للدالة ووضعت أخيرا نظرية متسلسلات فورييه علي أسس منطقيه ثابتة. وتعتبر أعمال فورييه اليوم علامة مميزه في تاريخ الرياضيات.

ونظرية متسلسلات فورييه ليست سهله. وفي هذا الفصل سنقدم الطرق التي يمكن أن توجد بواسطتها متسلسلات فورييه لدوال معطاة. وسندرس بقيه الفصل

لاستنتاج المعادلات التفاضلية الجزئية التي تحكم بعض العمليات الفيزيائية الهامة. ونصيغ مسائل القيم الحدية لها ونحلها بطريقتي فصل المتغيرات ومتسلسلات فوربيه.

(2−3) سلاسل فورية:

تعريف سلسلة فوريه وإثبات أنه يمكن تمثيل الدوال الدورية *f(x)* كمجموع جيوب وجيب بتمام:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\, cos(n\,\pi x) + b_n\, sin(n\pi x)$$

وإذا كانت الدالة غير دورية معرفة على الفترة($-\infty,\infty$) فبرهن على أنة يمكن أن يستخدم تحويل فورية بدلا من سلسلة فورية لتمثيلها كما سنثبت كيفية تمثيل الدالة $f(x)$ بصورة تحليل مستمر من دوال بسيطة.

وهذا التحليل (تكامل فورية) يمكن أن يكتب بالصيغة المركبة الآتية:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\varepsilon x}\, dx \right] e^{i\varepsilon x} d\varepsilon$$

التي تودي إلى تحويل فورية وتحويل فورية العكسي:

(تحويل فورية):

$$\mathrm{f}(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(\mathrm{x}) \mathrm{e}^{\mathrm{ix}\varepsilon}\, \mathrm{dx}$$

(تحويل فورية العكسي):

$$\mathrm{f}(\mathrm{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f}(\varepsilon) \mathrm{e}^{\mathrm{ix}\varepsilon}\, \mathrm{d}\varepsilon$$

أن أهمية سلاسل فورية في نظرية المعادلات التفاضلية الجزئية هي إن الدوال الدورية *f(x)* المعرفة علي ($-\infty,\infty$) أو الدوال المعرفة علي فترة منتهية

يمكن تمثيلها فترة لانهائية من الجيوب وجيوب التمام، وبهذه الطريقة يمكن تجزئة المسائل إلي أخري مبسطة وعلي سبيل المثال الدالة التي تدعي بالمسننة:

$$f(x) = x \qquad -L < x < L$$

(شرط دوري)

$$f(x-2L) = f(x)$$

يمكن تمثيل سلسلة فورية بالاتي:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[(a_n \cos(n\,\pi x/L) + b_n \sin(n\pi x/L))] \quad (1)$$

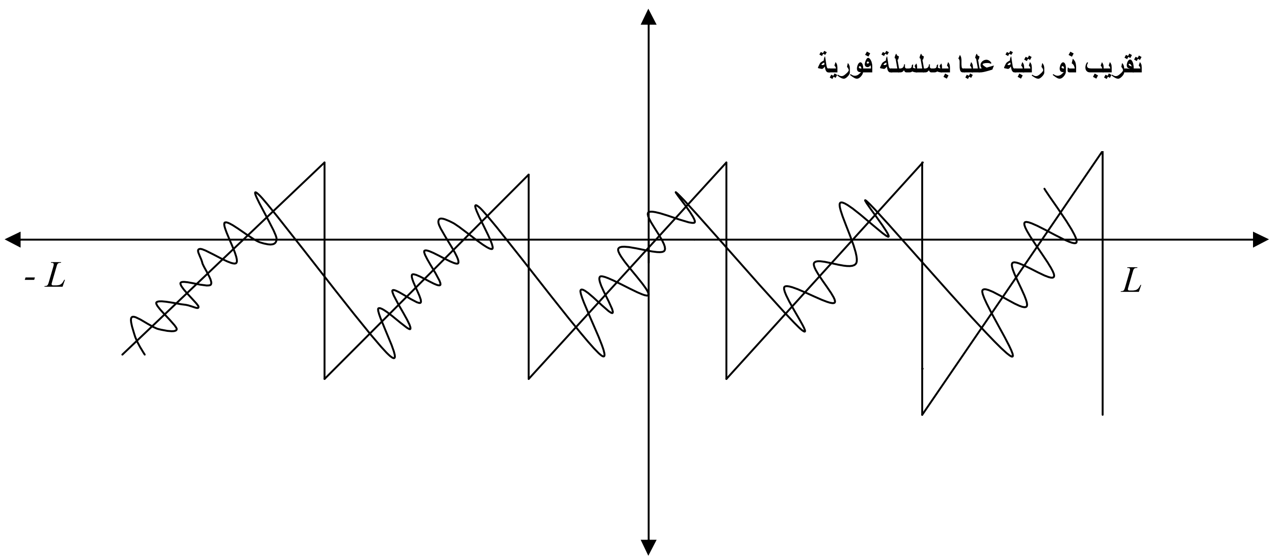
حيث تحسب معادلات فورية بموجب صيغ أويلر:

$$a_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\cos(n\,\pi x/L)dx = 0 \qquad n = 0,1,2,\dots..$$

$$b_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} f(x)\sin(n\pi x/L)\,dx = -(2L/n\pi)\,(-1)^n$$

n=0,1,2,…..(2)

لاحظ الشكل أدناه



شكل (3−1) الدالة المسننة ممثلة بسلسلة فوريه

هذه التكاملات هي حسابات روتينيه لإيجاد صيغ اويلر للمعادلات a_n ,b_n علي التوالي نضرب طرفي المعادلة (1) بالحد $\sin(n\pi x/L)$ او بالحد

ونكامل المعادلة الناتجة من $-L$ إلي L أن تعامد الدوال $\cos(\mathrm{n}\,\pi x/L)$ و $\sin(n\pi x/L)$ يسهل حساب في b_n, a_n وتمثيل فورير للدالة المسننة هو الأتي:

$$f(x)=\frac{2L}{\pi}\Big[\sin(\pi x/L)-\frac{1}{2}\sin(2\pi x/L)+\frac{1}{3}\sin(3\pi x/L)-\cdots\Big]\ (3)$$

حيث أن لكل حد فيها (يدعي توافقي) تردد أكبر من سابقه وكل هذه الترددات هي مضاعفات للتردد الأولي الذي له نفس الدورة كالدالة $f(x)$.

أن أحد مردات سلاسل فورير هو أنه لكي يكون للدالة تمثيل بسلسلة فورير يجب أن تكون دورية وبالطبع إذا أردنا أن تمثيل الدالة المعرفة علي فترة منتهية (مثل $f(x)=x$ علي $0<=x<=1$) يمكن أن نتخذ التمثيل (1) وحقيقة كون دورية سلسلة فورية خارج الفترة [0,1] لا يهمنا لأننا نحصر انتباهنا في الفترة (1) فقط وفي الحقيقة أنه يمكن تمثيل دالة داخل فترة معينة بنماذج عديدة من سلاسل فورية بإتخاذ نماذج مختلفة من توسيعات الدالة خارج الفترة (بعضها يقترب أسرع من البعض).

وعلينا الا ندعي أنه تمثيل كل دالة دورية بدلالة سلسلة فورية والذي نفهمه هو أنه إذا أمكن تمثيل الدالة بسلسلة فورية (1) فعندئذ نحسب المعاملات a_n , b_n بموجب صيغ أُويلر(2) والأكثر من ذلك أنه حتى إذا أمكن تمثيل الدالة f(x) بسلسلة فورية فعندئذ لا يمكن أيجاد مشتقاتها$\grave{f}$(x) بالضرورة باشتقاق حدود سلسة فورية حدا حدا. وفي الحقيقة يمكن الملاحظة بسهولة أنه لا يمكن أيجاد مشتقة الدالة $f(x)=x$ (للدالة المسننة) بإشتقاق كل حد من السلسلة الفورية (3) وبالفعل فإن مشتقات حدود السلسلة لا تكون حتى متقاربة إلي أي x.

ولمعرفة الشروط الدقيقة التي تؤمن أن مشتقة الدالة المتمثلة بسلسلة فورية يمكن أن تحسب بإشتقاق حدود السلسلة حداً حداً.

وللوصول إلي أهدافنا نعد لمعرفة النتيجة المهمة التي تدعي مبرهنة دير اشلية التي تنص علي:

(3−2−1) مبرهنة دير أشلية:

إذا كانت $f(x)$ دالة مفيدة دورية ذات عدد منته من النهايات العظمي والصغري وعدد منته من نقاط عدم الإستمرارية في كل دورة فعندئذ تكون سلسلة فورية للدالة $f(x)$ متقاربة من $f(x)$ عند كل نقطة x فيها $f(x)$ مستمرة ومتقاربة من معدل النهاية من اليمن و النهاية من اليسر عند كل نقطة تكون فيها $f(x)$ غير مستمرة.

فمثلا في شكل أعلاه تكون سلسلة فورية متقاربة من الدالة $f(x)$ لكي النقط باستثناء $x=\pm l, \pm 3l, \dots\dots$ (نقاط عدم الاستمرارية) في هذه النقاط تقترب من صفر (معدل $-L,+L$) تكاد نكون ألان مستعدين لأن نعرف تحويل فورية إلا انه من المفيد قبل ذلك تعريف مفهوم طيف تردد الدالة الدورية.

طيف تردد الدوال الدورية المتقطع:

يمكن تفسير سلاسل فورية بالنسبة للدوال الدورية كتبديل الدالة الدورية $f(x)$ بمتتابعة$\{e_n\}$من الأعداد:

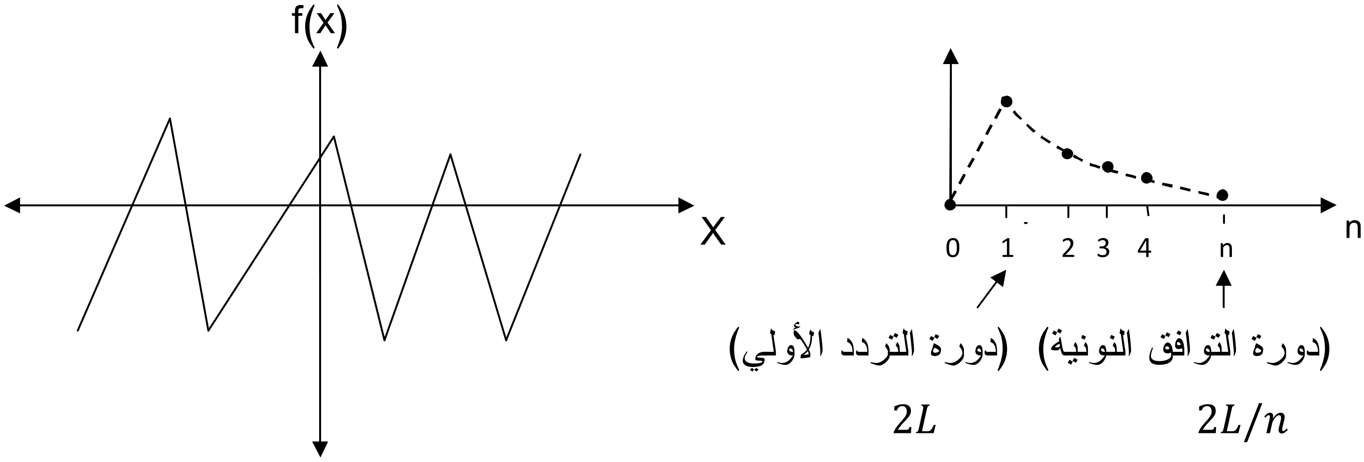
$$c_n = \sqrt{{a_n}^2 + {b_n}^2} \qquad\qquad n=0,\ 1,\ 2,\dots$$

حيث تؤخذ c_n كمقياس أمدي إسهامات مركبات التردد المختلفة للدالة f(x)وعلي سبيل المثال فإن التمثيل الفوري للدالة المسننة $f(x)$ هو:

$$f(x) = \frac{2L}{\pi}\left[\sin\frac{\pi x}{L} - \frac{1}{2}\sin 2\pi x/L\right]$$

وعليه فان طيف التردد$\{e_n\}$ هو ${}_n = 2L/n\pi$ حيث $n=0,1,2,....$

و$c_0 = |a_0|=0$



شكل (2−3) طيف التردد المتقطع للدالة المسننة

إن المتتابعة $\{c_n\}$ مشابهة نوعا ما إلي تحليل الضوء الأبيض إلي طيف تردد الألوان الحاصلة بالمطياف.

(3−3) تحويلات فوريية:

تعريف سلسلة فورية واثبات أنة يمكن تمثيل الدوال الدورية $f(\mathrm{x})$ كمجموع جيوب وجيب تمام.

أن الصعوبة العظمى بالنسبة لتمثيلات سلاسل فورية هي عدم إمكانية تمثيل الدوال غير الدورية المعرفة علي و$(-\infty,\infty)$ مع ذالك يمكن إيجاد تمثيل مشابه لبعض هذه الدوال. وبدون الرجوع إلي تفاضل البرهان يمكن إثبات أن تمثيل فورية:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}[(a_n\, cos(n\,\pi x/L) + b_n\, sin(n\pi x/L))]$$

يتغير إلي تمثيل تكامل فورية (تمثيل تردد مستمر):

$$f(x) = \int_0^{\infty} a(\varepsilon)\, cos(\varepsilon x) d\varepsilon + \int_0^{\infty} b(\varepsilon)\, sin(\varepsilon x)\, d\varepsilon \dots\dots\dots\dots (1)$$

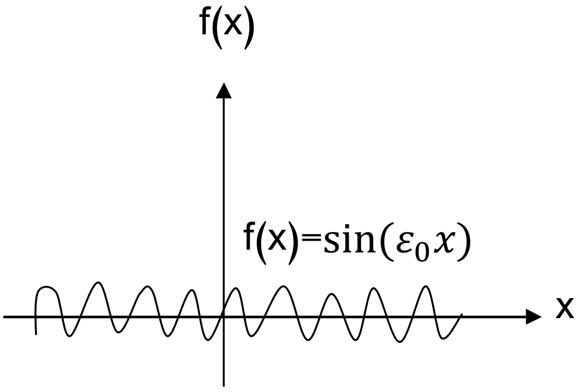
حيث:

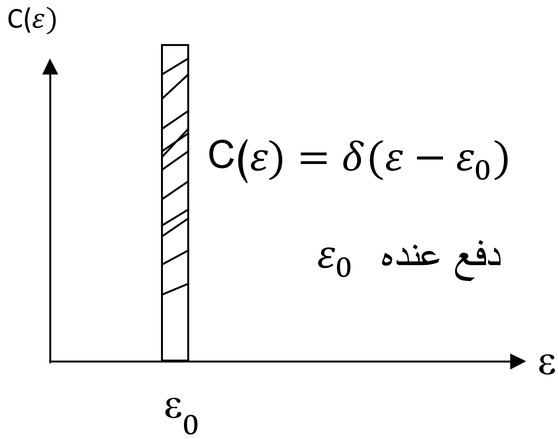
$$a(\varepsilon) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\cos(\varepsilon x) dx$$
$$b(\varepsilon) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\sin(\varepsilon x) dx$$

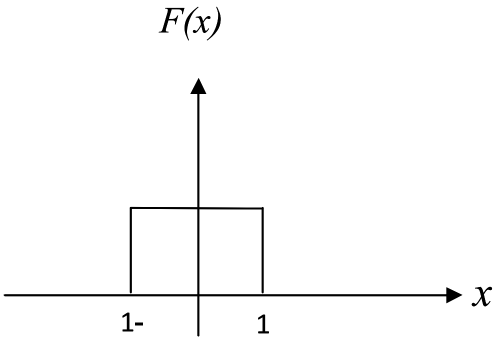
وذلك لدوال غير الدورية المعرفة علي$(-\infty,\infty)$ وهنا نلاحظ ان التمثيل التكاملي الفوري بصرف الدالة $f(x)$ إلي كل ترددداتها $\infty > \varepsilon > 0$ (وليس فقط مضاعفات التردد أساس واحد'كما الدوال الدورية) كما أجرينا في سلاسل فورية نعرف طيف التردد

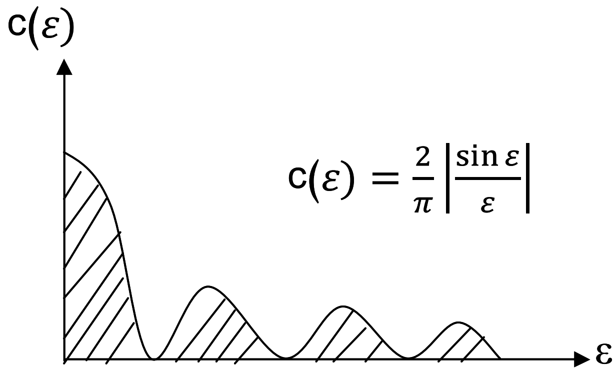
$$c(\varepsilon) = \sqrt{a^2(\varepsilon) + b^2(\varepsilon)}$$

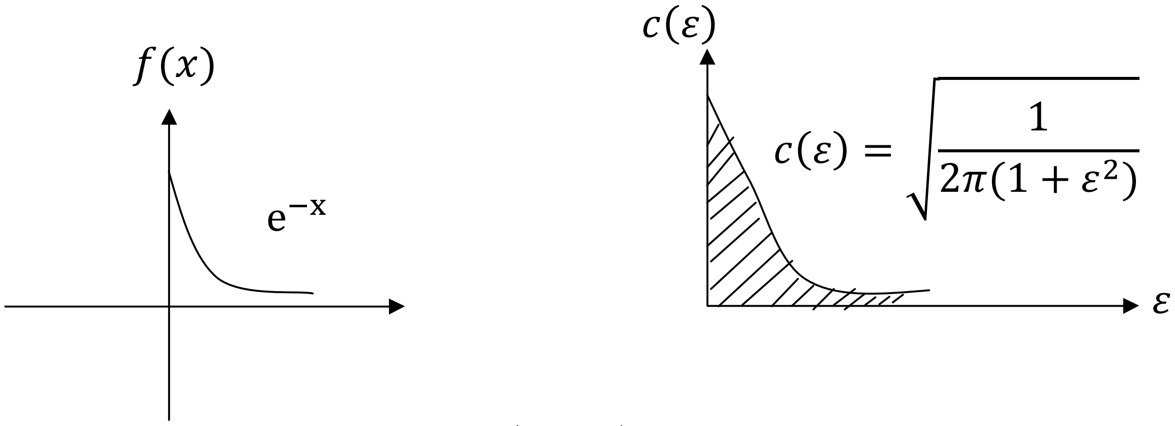
الذي يعين تركيب الدالة $f(x)$ من حدود ترددداتها وفي الشكل أعلاه بعض التطبيقات علي دوال $f(x)$ واطيافها.











شكل (3-3)

$$c\,(\varepsilon) = \sqrt{a^2(\varepsilon) + b^2(\varepsilon)}$$

لاحظ أن الدوال التي لها حافات حادة إي أطياف تردد ذوات ترددات عالية لان الحافات تتطلب مركبات ترددات عالية لتمثيلها من ناحية أخري فأنة يتضح بسهولة أن الدالة الدورية البسيطة $f(x) = sin(ع_0 x)$ ذات طيف تردد يساوي صفرا عند كل النقاط ما عد ا $\varepsilon = \varepsilon_0$ نحن الان في وضع لتعريف ما يسمي تحويل فورية الاسي (معادلتا فوريلا فورية الجيبي و الجيب تمامي) بموجب معادلة (اويلر):

$$e^{i\theta} = \cos\theta\,\Theta + i\sin\theta\,\Theta$$

يمكن إعادة صياغة (1) بعد إجراء بعض العمليات بالاتي :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\varepsilon x}\,dx\right]e^{i\varepsilon x}d\varepsilon \qquad (3)$$

والتي تدعي بتمثيل فورية التكاملي ومن هذا يمكن استنتاج المعادلتين (تحويل فورية):

$$\mathcal{F}[f] \equiv F(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{i\varepsilon x}\,dx \ldots\ldots..(4)$$

(تحويل فورية العكسي):

$$\mathcal{F}[f] \equiv \mathrm{f(x)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(\varepsilon) e^{i\varepsilon x}\, d\varepsilon$$

اللتين تمثلان تحويل فورية وتحويل فورية العكسي.

تحويلات فوريه المنتهية:

(التحويل الجيبي والتحويل الجيبتمامي):

لتقديم تحويل فورية التكامليين (التحويل الجبيبي المنتهي والتحويل الجيبتمامي المنتهي)

(التحويل الجيبي المنتهي) $S_n = s[\, f\,] = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\, sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx$

(التحويل الجيبتمامي المنتهي) $C_n = \mathrm{c}[\,\mathrm{f}\,] = \frac{2}{L}\int_0^L f(x) \cos(n\pi x/L) dx$

(التحويل العكسي الجيبي) $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} S_n \sin(n\pi x/L)$

(التحويل العكسي الجيبتمامي) $\mathrm{f(x)} = \frac{C_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\pi x/L)$

وتبيان كيفية حل مسائل القيم الحدودية (وبصورة خاصة غير متجانسة)باستخدام هذة التحويلات.

وقد تعلمنا سابقا عن التحويلات فورية ولابلاس المنتظمة وكيفية حل المسائل بتحويل المعادلات التفاضلية الجزئية إلي معادلة تفاضلية اعتيادية، فتحويل فورية المعتاد يتطلب تحويل المتغير إلي مدي من $-\infty$ إلي ∞ وعلية فان يستخدام لحل المسائل في الفضاء الحد (بدون حدود) وفي هذا يتبين كيفية حل المسائل القيمة الحدودية (بالحدود) بتحويل المتغيرات المحدودة (او المفيدة) والذي تقوم بإجراه للمرة الاولي.

لنؤجل أولا النظر في سبب استخدام هذه ونبدأ فقط بتعاريفها هي و معكوساتها و استخداماتها.

باختصار يمكن اختيار طريقة التحويل هذه كتجزئة لدوال لمسألة إلي ترددتها المختلفة. حل طيف كلي للمسائل كلي تردد تم جمع هذه النتائج. نبداء أولا بدالة $f(x)$ علي الفترة $[0, L]$،التحويلات الجيبي والجيبتامي المنتهيان لهذه الدالة يعرفان كالأتي:

$$s[\,f\,] = S_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin(n\pi x/L)dx$$ (التحويل الجيبي المنتهي)

$$c[f] = C_n = \frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos(n\pi x/L)dx$$ (التحويل الجيبتامي المنتهي)

$$n = 0,1,2, \dots\dots.$$

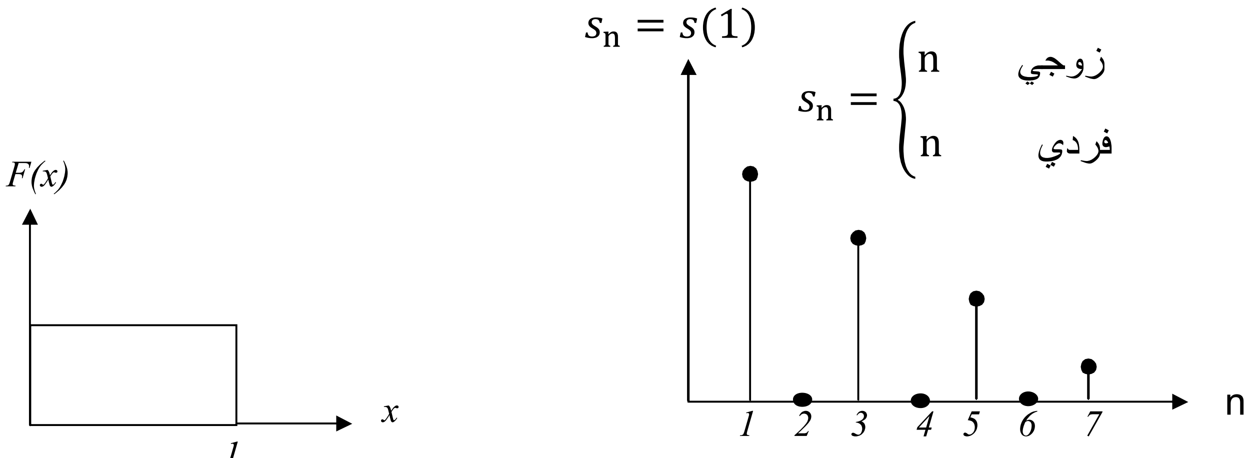
لاحظ أن المجموع يبداء من $n = 1$ في التحويل العكسي الجيبي ويبداء من $n = 0$ في التحويل العكسي الجيبتامي.

تطبيقات علي التحويل الجيبي:

$$f(x) = 1 \qquad ,0 <= x <= 1$$

$$S_n = s[\,1\,] = 2\int_0^1 \sin(n\pi x)dx = \begin{cases} 0 & \text{زوجي } n \\ \frac{4}{n\pi} & \text{فردي } n \end{cases}$$

لاحظ بيان الدالة $f(x)$ وتحويلها في الشكل ادناه



شكل (3-4) بيان الدالة *f(x)=1* وتحويلها العكسي يكون:

$$f(x) = 1 = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1}{2n-1}\right] sin(n\pi x)$$

هل تعلم ما هو بيان الدالة خارج الفترة [0,1]؟ إذا تأملت ذلك ستلاحظ

أيضا إن التحويل الجيبي للدالة $f(x)$ هو دالة معرفة علي مجموع الأعداد الصحيحة الموجبة فقط (إي أنها متتابعة من الأعداد الصحيحة الموجبة) وبعبارة أخري كلا من التحويل الجيبي والتحويل الجيبتمامي يحول الدوال إلي متتابعات.

خواص التحويلات:

قبل البدء بحل المسائل علينا استنتاج بعض الخواص المفيدة لهذه التحويلات فإذا كانت $u(x,t)$ دالة ذات متغيرين فعندئذ

$$s[\,u\,] = S_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L u(x,t)\,sin(n\pi x/L)dx$$

$$c[\,u\,] = C_n(t) = \frac{2}{L}\int_0^L u(x,t)\cos(n\pi x/L)dx$$

(لاحظ إننا حولنا المتغير x فقط وحصلنا علي متتابعة من الدوال المعتمدة علي الزمن فقط)

ماذا عن المشتقات ؟ هنا عدد من القوانين المفيدة.

$$S[u_t] = \frac{\partial s[u]}{\partial u} \qquad\qquad S[u_{tt}] = \frac{\partial^2 s[u]}{\partial t^2}$$

$$s[u_{xx}] = -[\frac{n\pi}{l}]^2 s[u] + 2n\pi/l^2[u(0,t) + (-1)^{n+1}u(l,t)]$$

$$c[u_{xx}] = -[n\pi/l]^2 c[u] - \frac{2}{l}[u_x(0,t) + (-1)^{n+1}u_x(l,t)]$$

حل المسائل بطريقة التحويل المنتهي:

حل مسائل القيم الحدودية غير المتجانسة باستخدام التحويل الجيبي المنتهي تأمل معادلة الموجة المتجانسة الاتية:-

المعادلة التفاضلية الجزئية:

$$u_{\mathrm{u}} = \mathrm{u_{xx}} + \sin(\pi x) \qquad 0 < x < 1 \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الحدية:

$$\begin{cases} u(0,t) = 0 \\ u(1,t) = 0 \end{cases} \qquad 0 < t < \infty$$

الشروط الابتدائية

$$\begin{cases} u(x,0) = 1 \\ u(x,0) = 0 \end{cases} \qquad 0 \leq x \leq 1$$

لحل هذه المسألة نجري الخطوات الآتية:

الخطوة الأولي: (تعيين التحويل)

بما أن المتغير x يتغير من0 إلي1 فنتبع التحويل المنتهي في هذه الحالة، التحويل الجيبي ،نستطيع حل المسالة باستخدام تحويل لابلاس بتحويل t (وستضمن نفس الصعوبة تقريبا كما في التحويل الجيبي المنتهي)

الخطوة الثانية (إجراء التحويل):

بتحويل المعادلة التفاضلية الجزئية هنا نحصل علي :

$$s[u_{tt}] = s[u_{xx}] + s[\sin(\pi x)]$$

حيث $s_n(t)$= s[u] وباستخدام متطابقات التحويل الجيبي نحصل علي

$$\frac{d^2 s_n(t)}{dt^2} = -(n\pi)^2 \mathrm{s_n(t)} + 2n\pi[u(0,1) + (-1)^{n+1}u(1,t) + D_n(t)] = -(n\pi)^2 s_n(t) + D_n(t)$$

حيث

$$D_n(\mathrm{t}) = \mathrm{s}[\sin(\pi \mathrm{x})\ ] = \begin{cases} 1 & n = 1,2, \dots. \\ 0 & n = 2,3, \dots. \end{cases}$$

(هذه هي معادلات سلسلة فورية الجيبية)

والآن إذا حولنا الشروط الابتدائية للمسألة فنحصل علي الشروط الابتدائية للمعادلة التفاضلية الاعتيادية

$$S[u(x,0)]s_n(0) = \begin{cases} \frac{4}{\pi n} & n = 1,3,\dots.. \\ 0 & n = 2,4,\dots\dots \end{cases}$$

$$S[u_t(x,0)] = \frac{ds_n(0)}{dt} = 0$$

وعليه بحل مسألة (أو مسائل) القيم الابتدائية الآتية:

$$\frac{d^2 s_n}{dt^2} + (n\pi)^2 s_n = \begin{cases} 1 & n = 1 \\ 0 & n = 2,3,\dots\dots.. \end{cases}$$

الشروط الابتدائية:

$$\begin{cases} s_n(0) = \begin{cases} \frac{4}{n\pi} & n = 1,3,\dots. \\ 0 & n = 2,4,\dots. \end{cases} \\ \frac{ds_{n(0)}}{dt} = 0 \qquad n = 1,2,3,\dots\dots \end{cases}$$

يتبع أن:

$$s_1(t) = A\cos(\pi t) + \left(\frac{1}{\pi}\right)^2$$

حيث:

$$A = \frac{4}{\pi} - \frac{1}{\pi^2} = 1.17$$

$$S_n(t) = \begin{cases} 0 & n = 2,\ 4,\dots \\ \frac{4}{4\pi} \quad \cos(n\pi t) & n = 3,5,7,\dots. \end{cases}$$

وعلية فان الحل $u(x,t)$ للمسالة هو

$$u(x,t) = [A\cos(\pi t) + (\frac{1}{\pi})^2]\sin(\pi x) + \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2n+1}\cos[(2n+1)\pi t]\sin[(2n+1)\pi x]$$

(3− 4) تحويل فورية وتطبيقاته في المعادلات التفاضلية الجزئية:

لإيضاح خواص مفيدة متعددة لتحويل فورية وكيفية تطبيقها في حل المعادلات التفاضلية الجزئية، بصورة خاصة سنبين كيفية أن تحويل فورية يحول التفاضل إلي ضرب وعلية تتحول المعادلة التفاضلية إلي معادلة جبرية، كذلك نستخدم مفهوم الالتفاف غير المنتهي.

أن تحويل فورية للدالة $f(x)$ حيث $-\infty < X < \infty$ يتعين بالصيغة الآتية:−

$$f[\varepsilon] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\varepsilon x}dx \qquad (1)$$

أي انه إذا ابتدأنا بدالة $f(x)$ معرفة علي محور x الحقيقي فنعوض عنها بالمعادلة (1)

ونحصل علي دالة جديدة $f(\varepsilon)$ حيث $-\infty < \varepsilon < \infty$ وعلي سبيل المثال، فان جدول (1) يبين بعض تحويلات فورية المألوفة .

جدول بعض تحويلات فورية المألوفة:

الدالة *f(x)*	تحويل فوريه f(ε)
$1-\ f(\mathrm{x})=\begin{cases} e^{-x} & x\geq 0 \\ -\mathrm{e}^{-\mathrm{x}} & x<0 \end{cases}$	$f(\varepsilon)=-i\sqrt{\frac{2}{\pi}}\ \frac{\varepsilon}{1+\varepsilon^2}$ (دالة مركبة)
$2-f(\mathrm{x})=\begin{cases} 1 & -1<x<1 \\ 0 & \text{في الحالات الاخري} \end{cases}$	$f(\varepsilon)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sin\varepsilon}{\varepsilon}$ (دالة حقيقية)
3−f(x) =e^{-x^2}	$f(\varepsilon)=\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-(\frac{\varepsilon}{2})^2}$ (دالة حقيقة)

ولتحويلات أخري نشير إلي الجداول في تزييل الكتاب نلاحظ من التطبيقات أن الدالة المحولة $f(\varepsilon)$ قد تكون مركبة وقد لا تكون ففي المثال الأول الدالة المحولة $f(\varepsilon)$ تتضمن العدد المركب i وعلية نسميها دالة مركبة القيم بالمتغير الحقيقي ε (حيث ε يتغير من ∞−الي ∞)، وبعبارة أخري أن قيم المتغير ε حقيقية وقيم الدالة المركبة.

ان فائدة تحويل فورية (كما في معظم التحويلات الاخري) تأتي من حقيقة تحويل عملية التفاضل إلي عملية ضرب، إي أن المعادلة التفاضلية تتحول إلي معادلة جبرية، كما أن هنالك عدد كبير من الخواص التي تجعل من تحويل فورية أداة عملية فعالة، ندون قليلا منها.

خواص مفيدة لتحويل فورية:

الخاصية الأولي: (أزواج تحويل فورية)

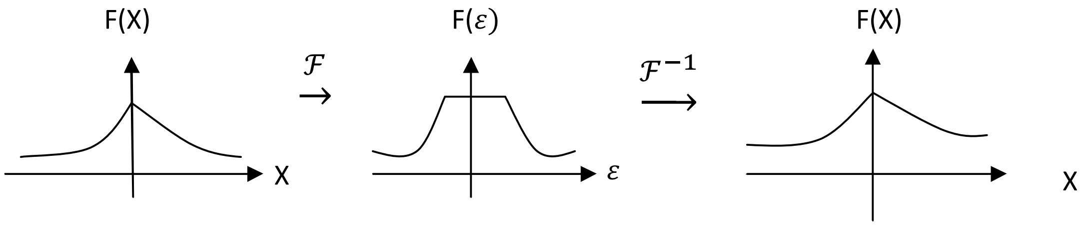
أن تحويل فورية للدالة *f(x)* حيث $-\infty<x<\infty$ يعطي دالة جديدة *f(x)* معرفة بالصيغة:

$$\mathcal{F}[F]=\mathrm{f}(\varepsilon)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{f}(\mathrm{x})\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\varepsilon\mathrm{x}}\,\mathrm{dx}$$

وان تحويل فورية العكسي $f(x)$ حيث $-\infty < \varepsilon < \infty$ سيعطي الدالة الاصلية $f(x)$ طبقا للصيغة:

$$\mathcal{F}^{-1}[\mathrm{f}] = \mathrm{f(X)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(\varepsilon)e^{\varepsilon x}\,dx$$

لاحظ الشكل



شكل (3−5) يبين منحني الدالة وتحويلها

الخاصية الثانية :(التحويل الخطي) أن تحويل فورية هو تحويل خطي اي ان:

$$\mathcal{F}[af + bg] = a\mathcal{F}[f] + b\mathcal{F}[g]$$

ويمكن إثبات هذة الصيغة بسهولة حيث ستطبق مرارا ف المستقبل فمثلا تحويل فورية للدالة

$\frac{1}{x^2+1} + 3\mathbf{e}^{-x^2}$ يكون

$$\mathcal{F}[\frac{1}{x^2+1}] + 3\mathcal{F}[\mathbf{e}^{-x^2}]$$

الخاصية الثالثة:(تحويل المشتقات الجزئية):

عندما نناقش تحويل المشتقات يجب أن نميز المشتقات الجزئية بالنسبة إلي متغيراتها المختلفة فمثلاً إذا كان تحويل فورية يحول المتغير x (متغير التكامل في التحويل) وإذا كانت الدالة المراد تحويلها هي المشتقة الجزئية للدالة u(x,t) بالنسبة إلي x فعند إذن صيغ التحويل تكون

$$\mathcal{F}[u_x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u_x(x,t)\, e^{-i\varepsilon x}dx = i\mathcal{E}\mathcal{F}[u]$$

$$\mathcal{F}[u_{xx}] = \frac{1}{\sqrt{2x}}\int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(x,t)e^{-i\varepsilon x}dx = -\varepsilon^2\mathcal{F}[u]$$

من ناحية أخري إذا حولنا المشتقة الجزئية $u_t(x,t)$ (وإذا كان المتغير التكامل في التحويل x) فعندئذ يكون تحويل:

$$\mathcal{F}[u_x] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} u_x(x,t)\, e^{-i\varepsilon x}dx = \frac{\partial}{\partial t}\mathcal{F}[u]$$

$$\mathcal{F}[u_{xx}] = \frac{1}{\sqrt{2x}}\int_{-\infty}^{\infty} u_{xx}(x,t)e^{-i\varepsilon x}dx = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\mathcal{F}[u]$$

الخاصية الرابعة:(خاصية الالتفاف)

لكل تحويل تكاملي هنالك ما يسمي بخاصية الالتفاف حيث أنة لا يكون بالضرورة حاصل ضرب دالتين *f(x),g(x)* مساويا حاصل ضرب تحويلهما أي أن:

$$\mathcal{F}[\mathrm{f(x)g(x)}] \neq \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]$$

ومع ذلك وفي نظرية التحويلات هنالك ما يسمي بالالتفاف *f* g* للدالتين *f,g* التي تلعب بطريقة أو بآخري دور حاصل الضرب والصحيح عن الالتفاف هو ان:

$$\mathcal{F}[\mathrm{f} * \mathrm{g}] = \mathcal{F}[\mathrm{f}]\mathcal{F}[\mathrm{g}] \qquad \ldots\ldots \qquad (2)$$

فما هو الالتفاف؟ يعرف بالصيغة

$$(\mathrm{f} * \mathrm{g})(\mathrm{x}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{f(x,t)g(\varepsilon)d\varepsilon} \qquad \ldots\ldots\ldots. \qquad (3)$$

هذا ويمكن وبدون صعوبة إثبات صحة (2) ونلاحظ من تعرية الالتفاف انه اذا كانت *f(x),g(x)* دالتين فعندئذ الالتفاف *(f*g)(x)* دالة جديدة

تطبيق علي التفاف دالتين:

$$f(x) = x$$
$$G(x) = e^{-x^2}$$

عندئذ التفاف هاتين الدالتين هو:

$$(f * g)(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (x - \varepsilon) e^{-\varepsilon^2} \, d\varepsilon$$

وحصلنا علي هذه القيمة بتطبيق الصيغة:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\varepsilon^2} = \sqrt{\pi}$$

أن أهمية الالتفاف (3) في التطبيقات غالبا ما يعزي إلي أن الخطوة الأخيرة من حل المعادلة التفاضلية الجزئية هي باختصار إيجاد التحويل العكسي لمقدار يمكن أن يفسر بأنة حاصل ضرب تحويلين $\mathcal{F}[g]\mathcal{F}[f]$ أي إيجاد

$$\mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}[\mathrm{f}]\mathcal{F}[\mathrm{g}]\}$$

وباتخاذ التحويل العكسي لطرفي (2) نحصل علي النتيجة الآتية

$$\mathrm{F} * \mathrm{g} = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}[\mathrm{f}]\mathcal{F}[\mathrm{g}]\}$$

وعلية إيجاد (4) فان كل ما علينا هو إيجاد التحويل العكسي لكل عامل للحصول علي g وf ثم حساب التفافهما.

نحن ألان في موضع يؤهلنا لحل مسالة مهمة في نظرية المعادلات التفاضلية الجزئية وهذا هو حل مسألتنا، وقبل ترك المسالة لنحلل هذه النتيجة، نلاحظ أن الدالة المطلوب تكاملها تتألف من حدين

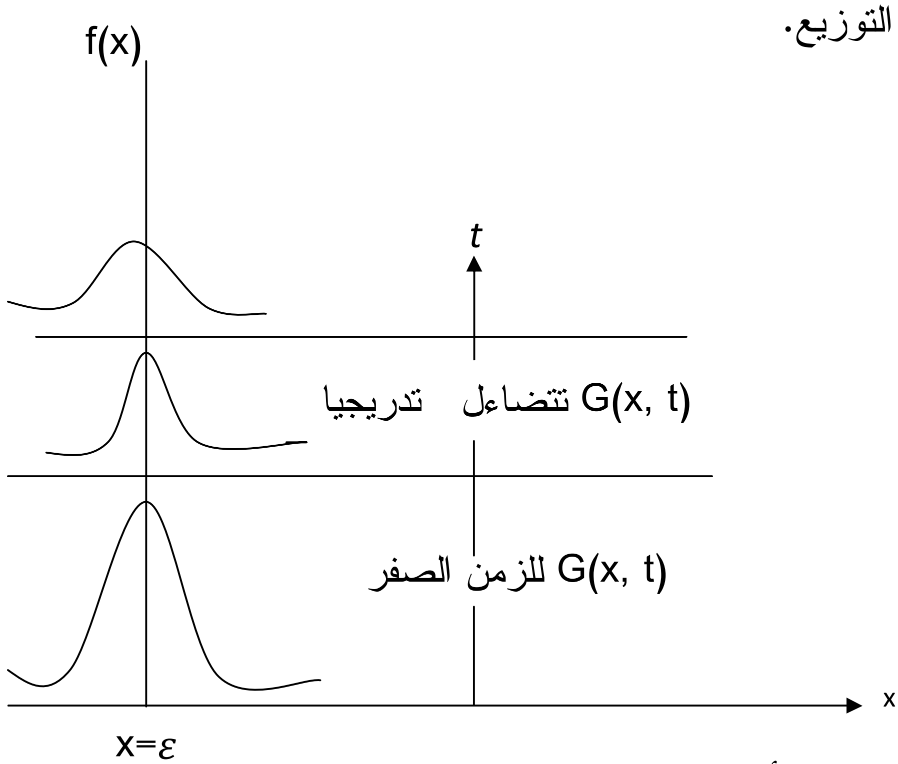
1- درجة الحرارة الابتدائية $\emptyset(x)$

2- الدالة $\mathrm{G}(\mathrm{x}, \mathrm{t}) = \frac{1}{a\sqrt{gt}} e^{-(x-\varepsilon)^2/4a^2t}$

والتي تسمي بدالة كرين أو دالة الحافز والاستجابة

يمكن البرهنة علي أن دالة الحافز والاستجابة $G(x,t)$ هذه هي درجة حرارة الاستجابة الي درجة حرارة الحافز عندما $x=\varepsilon$ وبعبارة اخرى $G(x,t)$ هي درجة حرارة في الذراع في زمن t الناشئة عن وحدة حافز حرارة عندما $x=\varepsilon$

$G(x,t)$ شبه ما يسمي منحني التوزيع الطبيعي في الإحصاء حيث نلعب دور تباين التوزيع.



الشكل أعلاه دالة الحافز والاستجابة $G(x,t)$ من درجة حرارة محفزة عندما $x=\varepsilon$ لذا فان تفسير حل (٤) هو أن درجة الحرارة الابتدائية $u(x,0)=\emptyset(x)$ تتجزأ إلي متصلة من الحوافز ذات قيم $\emptyset(\varepsilon)$ (عند كل نقطة $x=\varepsilon$) وتوجد درجة الحرارة الناتجة $\emptyset(\varepsilon)G(x,t)$ وثم تجمع (تكامل) درجات الحرارة هذة للحصول علي (٤) سنلاحظ بعدئذ أن هذا المفهوم العام يعرف بالتراكيب من جهة النظر العلمية.

غالبا ما يمكن إيجاد التكامل في الحل (٤) لدرجة حرارة ابتدائية معينة $\emptyset(x)$ أما إذا لم يمكن إيجاد ذلك تحليليا فان الحل يمكن إيجاده عند أي نقطة (x,t) بحساب التكامل بطرائق عددية.

الفصل الرابع

تطبيقات عامة في المعادلات التفاضلية الجزئية

(4−1) تمهيد:

لابلاس ليس له أهمية تذكر في تحويل لابلاس، بالرغم من أن طريقته لحل بعض المعادلات التفاضلية يمكن اعتبارها مثالا لاستخدامها. والتطور الحقيقي بدا في نهاية القرن التاسع عشر غيرها اكتشف العالم اولفر هيفي ساير طريقه فوريه لكنها غير ميرده وهي الطريقة الدراسة المعادلات التفاضلية الجزئية والاعتيادية للفيزياء الرياضية وحوالي عام 1920م. فإن طريقه هيفي سايد أصبحت شرعيه واعتبرت مثل تحويل لابلاس الذي يستخدم الآن وبعد ذلك التعميم كانت نظريه شوارتز في التوزيع عام 1940م. وحساب تفاضل وتكامل ميكوتسكي 1950م. ولأخير يعتبر أكثر عموما (لاحظ المعادلات التفاضلية الرياضيات التطبيقية تالف ديف وتايير1966) كلا النظريتين تعطي التفسير ل $\Gamma(s)=1$ والذي هو ليس تحويل لابلاس لابه داله، بالمعني الذي استخدم وتوجد أعداد أخرى من التحويلات تحت اسم فوريه ،ميلان هيتكل وآخرين تشبه تحويل لابلاس في حين أن بعض الدوال الاخري e^{-st} لتعريف التكامل (العمليات الرياضيه) تالف تشيرشل 1972م يعطي معلومات أخري حول تطبيقات التحويلات. إن جداول التحويلات يمكن إيجادها في جداول الخاصة بتحويل التكامل تأليف ايردلين 1954 م.

(4−2) استخدام المعادلات التفاضلية في المسائل التطبيقية:

تستخدم المعادلات التفاضلية الجزئية عاده في المسائل التطبيقية التالية:−

1) معادله الموجه *Wave Equation*:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = C^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ أحادية البعد

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left[\frac{1}{C^2}\right]\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$ ثنائية البعد

2) معادلة سريان الحرارة *Heat flow equation* :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\left[\frac{1}{k}\right]\frac{\partial u}{\partial t}$$ أحادية البعد

$$\nabla u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=\left[\frac{1}{k}\right]\frac{\partial u}{\partial t}$$ ثنائية البعد

3) معادله لابلاس *Laplace equation*:

$$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$

4) معادله يوسوان poisson equation :

$$\nabla^2 u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=f(x,y)$$

5)**معادله البث *Radio equation*:**

$$-\frac{\partial v}{\partial x}=L\frac{\partial I}{\partial t}$$

$$-\frac{I}{x}=C\frac{\partial V}{\partial t}$$

حيث Vهو الجهد ،I هو التيار ،L هو معامل الحث

1/ معادله الموجه:

تطبيق:-

خيط طوله L مثبت من طرفيه. إذا أزيح الخيط من نقطتين لأسفل واعلي لمسافتين متساويين من نقطتين علي بعد متساوي من الطرفين كما في الشكل إستنتج تعبير عن إزاحة الخيط عند أي زمن t واثبت أن الإزاحة صفر عند نقطه المنتصف.

الحل:

عند أي نقطه تحقق المعادلة (1) $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=C^2\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ ……………..

الإزاحة $Y\ (x,t)$

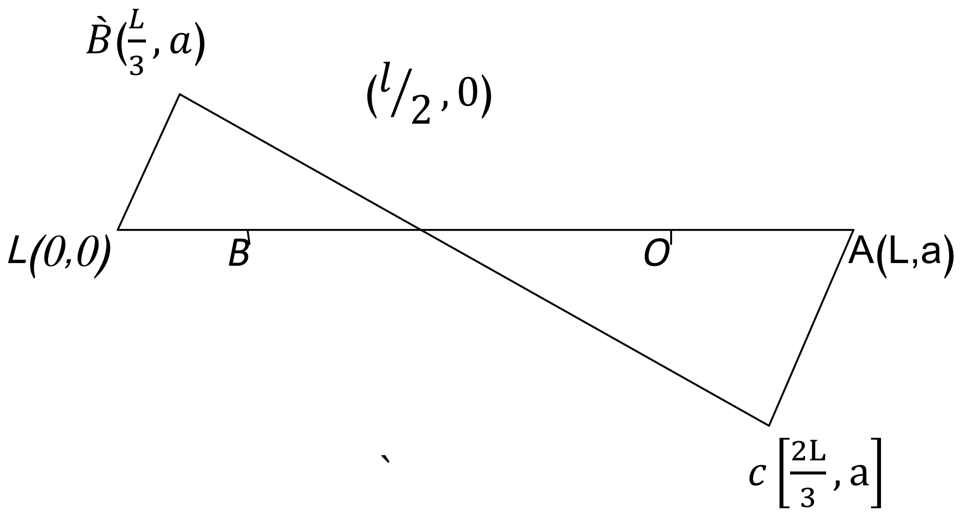
والشروط الحدية هي

$Y(0,t)=0 \qquad ,y(l,t)=0 \qquad (2)$

$$\left[\frac{\partial y}{\partial t}\right]_{t=0} \qquad (3)$$

باقي الشروط عندهt=0 يكون الخيط كما هو مبين بالشكل معادله $\grave{B}\grave{C}\grave{A}$

هي$O\grave{B}$



معادله $\grave{B}\grave{C}$ هي

$$y=\frac{3a}{l}x$$

معادله $\grave{C}\grave{A}$ هي

$$\frac{y-0}{x-\frac{l}{3}}=\frac{0-(-a)}{\frac{l}{3}-\frac{2l}{3}}$$

أي أن $\qquad y=\frac{3a}{l}(l-2x)$

وعليه يكون

$$y(x,0) \; = \frac{3a}{l}\begin{bmatrix} x & 0 \le x \le \frac{l}{3} \\ (L-2x) & \frac{1}{3}L \le x \le \frac{2}{3}L \\ (x-L) & \frac{2}{3}l \le x \le l \end{bmatrix}\Bigg\} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(4)$$

حل المعادلة (١)تحت الشروط الحدية (٢)و(٣) هي

$$y(x,0) \; = \frac{3a}{l}\sum_{n=1}^{\infty} B_n \, sin(\frac{n\pi}{L}x)\, cos(\frac{n\pi c}{L}t)$$

$$y(x,0) = \sum B_n \, sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)$$

باستخدام متسلسلة فوريه تحصل علي

$$B_n = \frac{2}{L}\left\{\int_0^{\frac{l}{3}} x\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \right.$$

$$+\int_{\frac{L}{3}}^{\frac{2L}{3}} (L-2x)\sin(\frac{n\pi}{L}x)dx$$

$$\left. +\int_{\frac{2L}{3}}^{L} (x-L)\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right)dx \right\}(\frac{3a}{L})$$

نلاحظ أن

$$\int x\sin(mx)dx = -\frac{1}{m}x\cos(mx) + \frac{1}{m^2}\sin(mx)$$

$$\int (L-2x)\sin(mx)dx$$

$$= -\frac{1}{m}(L-2x)\cos(mx) - \frac{2}{m^2}\sin(mx)$$

$$\int (x-L)\sin(mx)dx = -\frac{1}{m}(x-L)\cos(mx) + \frac{1}{m^2}\sin(mx)$$

وعلي ذلك فإنه

$$\frac{L^2}{6a} - B_n = \left\{\frac{L^2}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi x}{l}) - \frac{L}{n\pi}\mathrm{x}\cos(\frac{n\pi x}{l})\right\}_0^{\frac{l}{3}}$$

$$\left\{\frac{-2L^2}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi x}{l}) - \frac{L}{n\pi}(\mathrm{l}-2\mathrm{x})\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right\}_{\frac{l}{3}}^{\frac{2l}{3}}$$

$$+\left\{\frac{-L^2}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi x}{l}) - \frac{L}{n\pi}(\mathrm{x}-\mathrm{l})\cos\left(\frac{n\pi x}{l}\right)\right\}_{\frac{2l}{3}}^{\frac{l}{3}}$$

$$=\frac{L^2}{n^2\pi^2}\left\{\sin(\frac{n\pi}{3}) - 2\sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right) + 2\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \sin(\frac{2n\pi}{3})\right\} - \frac{L}{n\pi}\left[\frac{L}{3}\cos\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \frac{L}{3}\cos\left(\frac{2n\pi}{3}\right) - \frac{L}{3}\cos(\frac{n\pi}{3}) + \frac{L}{3}\cos(\frac{2n\pi}{3})\right]$$

$$B_n = \frac{18a}{n^2\pi^2}\left(\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) - \sin\left(\frac{2n\pi}{3}\right)\cos(\frac{n\pi}{3})\right)$$

$$= \frac{18a}{n^2\pi^2}\left(\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right) - 2\sin\left(\frac{n\pi}{3}\right)\cos(\frac{n\pi}{3})\right)$$

$$= \frac{18a}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi}{3})[1+(-1)^n]$$

$$B_n = \begin{cases} \frac{36a}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi}{3}) & , \text{n زوجي} \\ 0 & , n \text{ فردي} \end{cases}$$

$$\mathrm{y(x,t)} = \sum_{n=2,3} \frac{36a}{n^2\pi^2}\sin(\frac{n\pi}{3})\sin(\frac{n\pi}{l}x)\cos(\frac{n\pi c}{l}t)$$

يأخذ n=2m حيث m=1,2,3,........

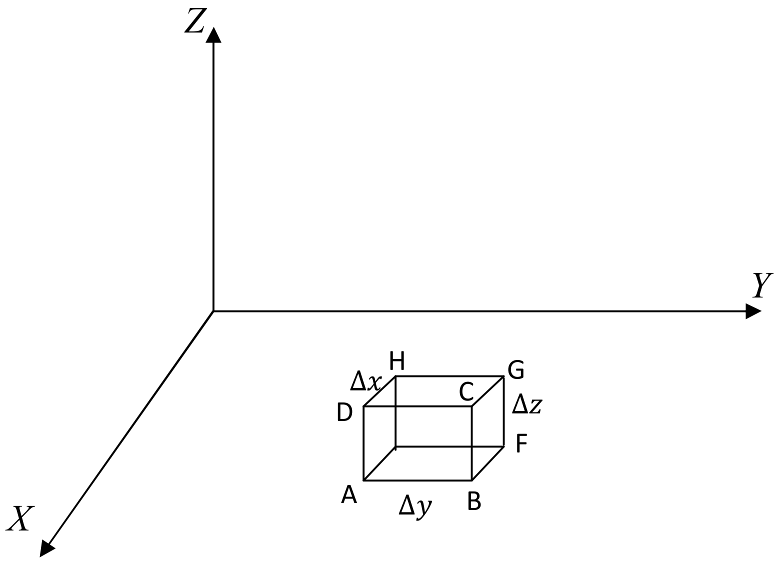
$$\mathrm{y(x,t)} = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{9a}{m^2\pi^2}\sin(\frac{2m\pi}{3})\sin(\frac{2m\pi}{l}x)\cos\frac{2m\pi ct}{l}$$

بوضع $x=\frac{1}{2}L$ نجد ان

$Y(x,t)=0 \;\Rightarrow\; y(\frac{1}{2}L, t)=0$

2/جريان الحرارة خلال جسم في الفراغ:

إن أفضل مثال لتكوين المعادلات التفاضلية الجزئية هو في تصور جريان الحرارة خلال جسم في الفراغ كما يوضح ذلك الشكل أدناه ويجب الأخذ بعين الاعتبار الحقائق التالية:



1.إن جريان الحرارة يحدث باتجاه تناقص الحرارة.

2. معدل جريان الحرارة خلال مساحة معينة يتناسب مع إنحدار الحرارة بالدرجات لوحدة المساحة وفي اتجاه عمودي علي تلك المساحة.

3. كميه الحرارة المكتسبة من قبل النظام المفقود من الجسم تتناسب مع كتله الجسم درجة الحرارة.

إن ثابت التناسب في نقطه (2) يسمي بمعامل التوصل الحراري (k)يسمي الحرارة النوعية للمادة (c).

وآلات تغير الظروف الحرارية في مقطع محدد من معدن موصل للحرارة كما في الشكل أعلاه إذا كانت كتله المعدت لوحده الحجم أو ا يعرف فيزيائيا بالكثافة (ρ) فان تغير كتله المقطع هو

$$\Delta m = \rho \Delta x \Delta y \Delta z \dots \dots \dots . (5)$$

ومن جهة أخري إذا كانت t هي درجه الحرارة عند أي زمن و إذا كانت Δt هي التغير بدرجه الحراره الذي يحدث خلال مقطع في فتره زمنيه معينه محدده هي $\Delta\theta$ فإن كميه الحراره المحفوظه في المقطع عن الفتره الزمنيه هي :

$$\Delta H = C. \Delta m \Delta. \Delta t = c. \rho. (\Delta x. \Delta y. \Delta z) \dots\dots\dots (6)$$

أما معدل الحرارة التي يكتسبها النظام هي

$$\rho \frac{\Delta H}{\Delta \theta} = C \Delta x \Delta y \Delta z$$

حيث إن θ هو الزمن التي تسمي أيضا الحرارة المتراكمة أو المتجمعة في الجسم.

إن الحرارة التي تتولد نتيجة التغير في Δt تاتي من مصدرين هما :-

المصدر الأول:-

يمكن توليد الحرارة خلال الجسم بواسطة وسائل كهربائية أو كيميائية لحظية عند معدل معلوم مثل

$F(x, y, z, \theta)$ وان المعدل الذي تصل فيه الحرارة إلي المقطع من هذا المصدر سيكون:

$$F(x, y, z, \theta) \Delta x \Delta y \Delta z \qquad \dots \dots \dots \dots \dots \dots$$

المصدر الثاني:

هو الحرارة المكتسبة من انتقال الحرارة المفترد خلال أوجه المقطع المختلفة .

إن الصيغة العامة لانتقال الحرارة بالتوصيل خلال مساحه معينه يمكن الحصول عليها من المعادلة التالية:

$$-KA \frac{dT}{dx} \dots \dots \dots \dots . (7)$$

وعلي هذا الأساس فإن كميه الحرارة المنتقلة خلال المقطع x(ADHL)

هي

ولذا فإن صافي التدفق الحراري:

$$-K\Delta y\Delta z\left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{x}$$

وخلال نهاية المقطع$X+\Delta x$ هي:

$$-k\Delta y\Delta z\left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}$$

ولذا فإن صافي التدفق الحراري:

$$-k\Delta x\Delta z\left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{y}-\left[-k\Delta x\Delta z\frac{\partial t}{\partial y}\right]_{y+\Delta y}=k\Delta x\Delta z\left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{y+\Delta y}-$$

$$k\Delta y\Delta z\left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{y}=k\Delta y\Delta z\left[\frac{\partial t}{\partial x}\right]_{x+\Delta x}-\left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{x} \qquad (8)$$

إن الاشاره السالبة تعني أن التدفق الحراري يحدث باتجاه نقصان درجه الحرارة ويمكن تكوين معادلات تفاضلية بنفس الحالة في اتجاهين y وz.

$$-k\Delta x\Delta z\left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{y}-\left[-k\Delta x\Delta z\frac{\partial t}{\partial y}\right]_{y+\Delta y}=k\Delta x\Delta z\left[\left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{y+\Delta y}-\right.$$

$$\left.k\Delta x\Delta z\left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{y}\right]\ldots\ldots\ldots..(9)$$

وفي اتجاه z يكون التدفق الحراري بصيغته النهاية علي الصورة التالية:

$$-k\Delta x\Delta y\left.\frac{\partial t}{\partial z}\right|_{z}-\left[-k\Delta x\Delta y\frac{\partial t}{\partial z}\right]_{z+\Delta z}$$

$$=k\Delta x\Delta y\left[\left.\frac{\partial t}{\partial z}\right|_{z+\Delta z}-k\Delta x\Delta y\left.\frac{\partial t}{\partial z}\right|_{z}\right]\ldots\ldots(10)$$

وبموجب قانون حفظ الكتلة الطاقة فإن (الدخل - الخارج = المتراكم)

(***in-out =Accnmulation***) نجد أن:

صافي تدفق الحرارة في مقطع الجسم + الحرارة المتولدة في المقطع = المتراكم الحراري.

بالتعويض عن كل صيغه بما يساويها من المعادلات أعلاه ينتج أن:

$$K\Delta y\Delta z\left[\left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{x+\Delta x\Delta}-\left.\frac{\partial t}{\partial x}\right|_{x}\right]+k\Delta x\Delta z\left[\left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{y+\Delta y}-\left.\frac{\partial t}{\partial y}\right|_{y}\right]+$$
$$k\Delta x\Delta y\left[\left.\frac{\partial t}{\partial z}\right|_{z+\Delta z}-\left.\frac{\partial t}{\partial z}\right|_{z}\right]+F(x,y,z,\theta)\Delta x\Delta y\Delta z=$$
$$\rho c\Delta x\Delta yz\frac{\partial t}{\partial \theta}\ldots\ldots..(11)$$

إن الرمز $F(x,y,z,\theta)$ سيتم يغيره إلي q^0 إي كميه الحرارة المتولدة من الجسم وستصبح المعادلة (11) بعد قسمه جميع الحدود علي المقدار $\Delta x\Delta y\Delta z$ بالشكل التالي:

$$K\left[\frac{\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x+\Delta x}-\left.\frac{\partial T}{\partial x}\right|_{x}}{\Delta x}+\frac{\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y+\Delta y}-\left.\frac{\partial T}{\partial y}\right|_{y}}{\Delta y}+\frac{\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z+\Delta z}-\left.\frac{\partial T}{\partial z}\right|_{z}}{\Delta z}\right]+q^0=$$
$$C\rho\frac{\partial T}{\partial \theta}\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.(12)$$

وبأخذ النهايات $\Delta\, x,\Delta y,\Delta z$ من الصفر ومن تعريف المشتقة نستنتج أن: عندما تقترب كل

$$k[\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}]+q^0=\rho c\frac{\partial T}{\partial \theta} \qquad (13)$$

وبقسمة طرفي المعادلة علي الثابت k نحصل علي

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 T}{\partial z^2}+\frac{q^0}{k}=\frac{1}{\alpha}\frac{\partial T}{\partial \theta} \qquad (14)$$

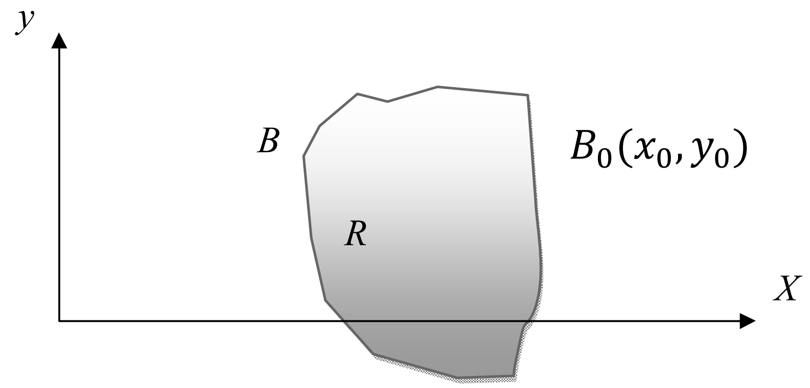
حيث أن: $\alpha=\frac{k}{\rho c}$

أو بما يعرف بمعامل الانتشار الحراري. وتمثل المعادلة (14) المعادلة العامة لانتقال الحرارة في الأجسام المستوية الثلاثية الإبعاد.

(٤-٣) مسائل القيم الحدية:-

تكمن المسألة الأساسية في المعادلات التفاضلية الجزئية التطبيقية في إيجاد حل المعادلة التفاضلية الجزئية صالح في منطقه ما R ويحقق شروط معينه تسمي بالشروط الحدية علي R حدود المنطقة R. والكمية u هي كميه متغيره لدرجه الحرارة مثلا، وهي داله حقيقية في n من المتغيرات الحقيقية، R فئة مفتوحة ومتصلة في فراغ المتغيرات n.

ولكن تحدد هذه الأفكار بدقه أكثر نفرض أن $n=2$ و $u=u(x ,y)$ تحقق معادله تفاضلية جزئية عند كل نقطه من النقاط المنطقة R. الموضحة في الشكل أدناه حدود المنطقة R تتكون من الفئة النقط R التي بها خارجية إن كل دائرة مركزها B_0 تحتوي علي نقط موجوده في R ونقط غير موجودة في R. ومسالة القيم الحدية هي إيجاد دالة تتحقق شروط معينه علي الحدود B. وليس من الضروري أن تتحقق الحل $u=f(x,y)$ المعادلة التفاضلية الجزئية علي B.



ومن الواجب وضع شروط إضافية لكي تكون مسالة القيم الحدية جيد الصياغة (***well-posed***) إلي كلي مثل مسألة القيم الحدية نموذجا مناسبا لدراسة عمليه فيزيائية واقعيه.

علي سبيل المثال نقض أن الشرط الحدي يؤكد أن $u=g(x,y)$ علي B حيث g داله معطاة إذا استطعنا أن نحصل علي حل $u=f(x,y)$ في R فانه يمكننا أن نعرف u اختياريا علي B بحيث تكون $u=g(x,y)$.

ومن الثابت إننا في كل وضعيه (حاله) معينه تريد من $f(x,y)$ أن تكون قريبه من قيمه $g(x,y)$ عند النقطة $B_0(x_0, y_0)$ الواقعه علي B أي أن تكون قريبه من $g(x_0, y_0)$ عندما تكون النقطة (x,y) فيR قريبه من B_0.

حيث:

$|f(x,y) - g(x_0, y_0)|<\varepsilon$ عندما تكون (x,y) في R و $\sqrt{(x-x_0)^2 - (y-y_0)^2} < \delta$ وكذلك نفرض وجود حل لمسألة القيم الحدية وان الحل يكون وحيدا. ويمكن إحدى الطرق لإثبات أن هنالك حلا هي إنشاء حل يحقق جميع الشروط الحدية المعطاة ومن ثم التحقق مباشره من أن الحل يحقق المعادلة التفاضلية الجزئية في R. ولإثبات أن الحل المعطي بالدالة $u_1 = u_1(x,y)$ وحيدا نستطيع أن نستخدم الطريقة المضادة وذلك بفرض وجود حل أخر $u_2 = u_2(x,y)$ وبعد ذلك اثبات $u_1 = u_2$ في R وعلي حدوده.

كي تكون المعادلة التفاضلية جيدة الصياغة نفرض أن الحل الوحيد يعتمد باتصال (اعتماد متصلا) علي الشروط الحدية. وبعبارة عامه يعني هذا أن تغيرا صغيرا من الشروط الحدية الي تغير صغير في الحل. وهذا الافتراض ضروري ،لان الشروط الحدية تحتوي عمليا علي معلومات ناتجة ومستمرة من الملاحظة، وبالتالي فلا بد وان تكون مثل هذه المعلومات قد دخل فيها التقريب ،وإذا كان الحل المرتبط بمعلومات تقريبية لايقرب الحل المرتبط بالقيم الحدية المضبوطة فمن الواضح أن النموذج المستخدم لابعكس العملية الفيزيائية بدقه.

والمطلبات ألازمه لمسالة القيم الحدية كلي تكون جيده الصياغة يسهل تعميمها إذا كان الحل المرغوب فيه يعتمد علي أكثر من متغيرين.

وكما ذكرنا سابقا تكون الدالة في معظم التطبيقات داله في الإحداثيات الفراغية x,y,z والزمن t. ويعرف الشرط الذي تحققه u عندما $t=0$ بالشرط الابتدائي ومن المناسب أحيانا أن ننظر إلي الشرط الابتدائي علي انه شرط حدي.

والتوضيح لماذا كانت u تمثل إزاحة وتر متذبذب مثبت عند $x=0$ و $x=2$ (قدم) فالمتغير y في شكل أعلاه يناظر t المنطقة R هي السرعة نصف ألانهائية المعرفة ب:

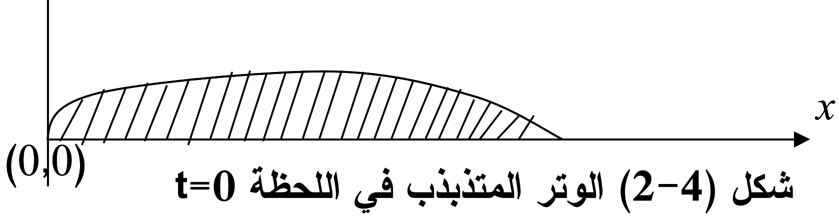
$$R=\{(x,y)\ ;\ 0< x < 2\ , t > 0\}$$

والإزاحة u داله في الزمن t والمسافة x علي محور السينات المقاسة من $x=0$

وهنالك نوع أخر من الشروط الحدية وهو وصف قيم احدي مشتقات u الجزئية ولتكن مثلا $u_x(x,y)$ علي كل او علي جزء من B.

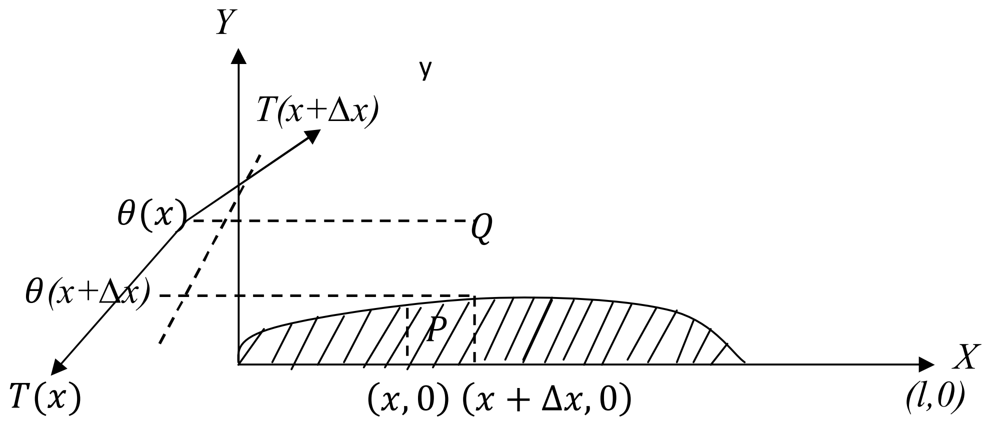
(٤ – ٤) تطبيقات الموجه:-

ندرس وترا تام المرونة مثبتا عند (0,0) وعند (L,0) كما في الشكل أدناه وتثبت في ذبذبة الوتر إزاحة رأسيه لكل نقطه من نقطه في المستوي xy. وهذا الإزاحة تكون صغيرة (ربما تكون صفرا) وكذلك سرعه ابتدائية (وربما تكون صفرا) عمودية علي محور السينات.



شكل (4−2) الوتر المتذبذب في اللحظة t=0

نستنتج معادله تفاضلية جزئية تحكم وتصف ذبذبه الوتر بعض الفرضيات الفيزيائية القليلة نفرض أن الشد T في الوتر قابل للانثناء بما يكفي لان يكون الشد مماسا للوتر عند كل نقطه من نقطه.ونفرض أن جزئيات الوتر تتحرك راسيا في المستوي XY، إن اكبر إزاحة لأي نقطه من الوتر متجانس نأخذ P كتله الوتر لوحده الطول ثابت. وهذا يتضمن إن الكتلة الكلية للوتر بين الخطين $X=x$ و $X=X+\Delta X$ مساويه $P(\Delta X)$ عند تذبذب الوتر ويوضح الشكل شكل أدناه الوتر في لحظه زمنيه اختياريه T. ويعتمد الارتفاع Y لآي نقطه من الوتر تبعد Xمن الوحدات عن المحور الراسي (الصادي) ليس فقط علي X وإنما علي الزمن T. وسنحاول إيجاد معادله تفاضلية جزيئه تحققها $y(x,t)$ حيث , $0< x < l$ $<t$وكما هو موضح في شكل أدناه يقع جزء الوتر المحصور بين $x=x$ و $x=x+\Delta x$ تحت تاثير الشد $t=t(x)$ الذي يوثر بزاوية $\theta = \theta(x)$ عند نقطه P، والشد $t=t(x+\Delta x)$ الذي يوثر بزاوية $\theta=\theta(x + \Delta x)$ عند نقطه Q.



الشكل (4-3) الوتر المتذبذب في اللحظة $t=t$

و θ هي زاوية ميل مماس للوتر. وتطبيق القانون الثاني لنيوتن في اتجاهين X,Y نحصل علي:

$$t(x+\Delta x)\sin[\theta(x+\Delta x)]$$
$$-T(x)\sin[\theta(x)] = P(\Delta x)\frac{\partial^2 y}{\partial t} \quad \ldots\ldots(15)$$
$$\mathrm{t}(\mathrm{x}+\Delta x)\cos[\theta(x+\Delta x)] - t(x)\cos[\theta(x)] = 0 \ldots\ldots\ldots(16)$$

وتمثل $\frac{\partial^2 \mathrm{y}}{\partial \mathrm{t}^2}$ عجله مركز ثقل الجزء الضغير من الوتر محل الدراسة في الاتجاه y. ويكون الطرف الأيمن للمعادلة (16) مساويا للصفر لافترضنا عدم حركه الوتر افقيا.

وبهذا فان:

$$t(x+\Delta x)\cos[\theta(x+\Delta x)] = t(x)\,cos[\theta(x)] = t \qquad \ldots\ (17)$$

حيث تمثل T الشد الأفقي الثابت للوتر. ومنها نجد:

$$\frac{t(x+\Delta x)\sin[\theta(x+\Delta x)]}{\mathrm{t}(\mathrm{x}+\Delta\mathrm{x})\cos[(\mathrm{x}+\Delta x)]} - \frac{\mathrm{t}(\mathrm{x})\sin[\theta(\mathrm{x})]}{\mathrm{t}(\mathrm{x})\cos[\theta(\mathrm{x})]} = \frac{\mathrm{p}(\Delta\mathrm{x})}{\mathrm{t}}\frac{\partial^2 \mathrm{y}}{\partial \mathrm{t}^2}$$

أو

$$\tan[\theta(x+\Delta x)] - \tan[\theta(x)] = \frac{p(\Delta x)}{t}\frac{\partial^2 \mathrm{y}}{\partial \mathrm{t}^2} \ldots\ldots..(18)$$

وحيث أن $\tan\theta = \frac{\partial \mathrm{y}}{\partial \mathrm{x}}$ ويمكن كتابة (18)علي الصور

$$\frac{\left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=x+\Delta x} - \left.\frac{\partial y}{\partial x}\right|_{x=x}}{\Delta \mathrm{x}} = \frac{\mathrm{p}}{\mathrm{t}}\frac{\partial^2 \mathrm{y}}{\partial \mathrm{t}^2}$$

إذا كانت 0 $\ldots\ldots\ldots \Delta$ فان Y تؤول إلي y عندما $x=x$ والطرف الأيسر يؤول إلي $\frac{\partial^2 \mathrm{y}}{\partial \mathrm{x}^2}$ عندما $x=x$ونحصل علي معادله التفاضلية الجزئية:

$$\frac{\partial^2 \mathrm{y}}{\partial \mathrm{x}^2} = \frac{1}{\mathrm{c}^2}\frac{\partial^2 \mathrm{y}}{\partial \mathrm{t}^2} \qquad (19)$$

حيث $c=\sqrt{\frac{t}{p}}$ وتسمي (١٩) بالمعادلة الموجية في بعد واحد.

والآن نشرع في إيجاد ارتفاع الوتر المتذبذب Y بدلاله x , t. وتعين علينا حل مسألة القيم الحدية التالية:

$$y_{xx} = \frac{1}{c^2} y_{tt} \qquad 0 < x < l\,, t > 0 \qquad (20)$$

$$Y(0,t)=0 \qquad t \geq 0 \qquad (21)$$

$$Y(l,t)=0 \qquad t \geq 0 \qquad (22)$$

$$Y(x,t)=0 \qquad 0 \leq x \leq l \qquad (23)$$

$$Y(x,0)=g(x) \qquad 0 \leq x \leq l \qquad (24)$$

وتمثل الدالة f الشكل الابتدائي للوتر، وتصف الدالة g السرعة الابتدائية لأي نقطه من الوتر. ونفرض أن $f.g$ دالتان متصلتان علي $[L,0]$ ونلاحظ أن $f(0)=f(l)=g(x)=g(l)=0$ وذلك لان الوتر مثبت عند نهايته. ولقد رأينا منحني الدالة f في الشكل اعلاه ومن المحتمل أن تأخذ $f(x)$ احدي الصيغ التالية:

حيث a ثابت لا يساوي الصفر. وهنالك احتمال أخر وهو أن تكون $f(x)=0$ وقد تنشأ هذه الحالة عندما لا تكون مثلا في الحالة $g(x)$ مساوية للصفر بالتطابق. ومثلا في حاله طرف وتر مستقر ليبانو. وعندما يعطي الوتر إزاحة ابتدائية $f(x)$ ويترك من حاله السكون فإن $g(x)=0$.

وبتطبيق طريقه فصل المتغيرات نحاول إيجاد حل المسالة القيم الحدية علي الصورة:

$$\mathrm{Y(x,t) = x(x)t(t)} \qquad (25)$$

وبالتعويض بالصيغة (25) , (19) نحصل علي:

$$x''t = \frac{1}{c^2} xt''$$

وإذا كان $x\,t \neq 0$ فانه يمكن كتابتها علي الصورة:

$$\frac{x''}{\mathrm{x}}=\frac{1}{\mathrm{c}^2}\frac{\mathrm{t}''}{\mathrm{t}} \qquad (26)$$

فإن طرفي المعادلة (26) لهما نفس القيمة بالثانية k.

وبهذا نحصل علي معادلتين تفاضليتين عاديتين:

$$x''-\mathrm{kx}=0 \qquad (27)$$

$$t''-kc^2t=0 \qquad (28)$$

وإذا كان $\mathrm{k}=\lambda^2>0$

$$Y(x,t)=(A\,sinh\,\lambda x+B\,cosh\,x)(C\,sinh\,xct+D\,cosh\,\lambda ct$$

في كلتا الحالتين لا تخفف الشروط الحدية. إلا إذا كانت *y(x)=0* أي فقط عندها يكون الحل التافه (***trivital***)هو الموجود.

و ألان تأخذ في اعتبار الاحتمال الوحيد الباقي $\mathrm{k}=-\lambda^2<0$ من (١٩) (٢٢)، (٢٥) نستنتج انه إذا كانت $y(x,t)\not\equiv 0$ فان x(0)=x(L)=0 ومسألة القيم الحدية ذات النقطتين:

$$x''+\lambda x=0 \quad ,x(0)=0 \ \ ,x(l)=0 \qquad (29)$$

نعطي :

$$X(x)=Acos\,\lambda x+B\,sin\,\lambda x$$

منx(0)=0 نحصل علي *A=0* ومن *x(L)*=0 نحصل علي $\mathrm{B}\sin\lambda L=0$

وهنا نفترض أن $B\neq 0$ وإلا كانت *X(x)=0* و *y(x,t)* ولهذا، فلكي تتحقق الشروط الحدية ,(22) و(21) يجب أن يكون :

$$sin\,\lambda x=0$$

وهذا يتطلب أن يكون:

... ... $N=-1,\mp 2$ لقيم $\lambda=\frac{\pi\mathrm{n}}{\mathrm{L}}$ أو $\mathrm{L}\lambda=\mathrm{N}\pi$

وبما أن $sin(\_\propto)$ فإن حلول (29) غير التافهة تكون فقط علي الصورة:

$$X_{\mathrm{N}} = \mathrm{B_N} \sin \mathrm{nx} = \mathrm{B_N} \sin \frac{N\pi X}{l}$$

حيث n عدد صحيح موجود وكل ثابت اختيار $B_{n\neq 0}$

وبمثل يكون للمعادلات التفاضلية العادية $t''^{+\lambda c^2} t = 0$ حلول علي الصوره:

$$T_{\mathrm{n}}(\mathrm{t}) = C_n \sin c\lambda nt + D_n \cos cnt$$

$$C_{\mathrm{n}} \sin \frac{n\pi c}{L} t + D_n \cos \frac{n\pi c}{L} t$$

حيث أن $n=1,2,3$……….

وفي تكوين حاصل الضرب $x_n(x) T_n(t)$ تاخذ كلا من $B_n = 1$ بدون الإخلال العمومية وذلك لان $C_{\mathrm{n}}, \mathrm{D_n}$اختياري وتسمي قيم λ التي تحقق عندما الصيغة

$$\mathrm{y(x,t)} = \sin \lambda nx (C_n \sin c\lambda nt + D_n \cos c\lambda t)$$

المعادلة(20)، الشرط (22) (21), بالقيم الذاتية لمسالة القيم الحدية .

وتسمي حلول المعادلة غير الصفرية المناظر لها $\sin(\frac{n\pi x}{l})$ بالدالة لمسالة القيم الحدية. ونهدف ألان إلي اختيار قيم $_n$,D_n وقيم مسموح بها λ لكي تحقق الشروط الحدية و الابتدائية (24) و (22) ولكي تتحقق (23) يجب أن يعطي المعادلة (30):

$$\mathrm{y(x,0)} = D_n \sin \lambda_n x = D_n \sin \frac{n\pi x}{l} = f(x) \quad \dots (30)$$

وإذا كانت *f(x)* علي الصورة $D_n \sin\left(\frac{n\pi x}{l}\right)$ او حتي $\sum_{\mathrm{k=i}}^{n} \mathrm{D_k}(\frac{\mathrm{k\pi x}}{\mathrm{L}})$

ولذا سنحاول إيجاد الحل في الصورة:

$$y(\mathrm{x},\mathrm{t})=\sum_{k=i}^{+\infty}\sin\lambda nx(C_n\sin C\lambda_n t$$
$$+D_n\cos C\lambda_n t)\qquad(31)$$

حيث $\lambda_n=\frac{\mathrm{n\pi}}{\mathrm{l}}$ اي دعنا تركيز حلا لا نهائيا من الحلول التي علي الصورة (30) ولكي تتحقق (23) يجب ان تكون

$0\leq x\leq l$ علي $y(x,0)=\sum_{n=1}^{+\infty}\sin\lambda_n x=f(x)$ (31)

وتتعرف علي (30) بوصفها متسلسلة الجيب لفوربيه للدالة f حيث الدورة 2P=2L وبهذا نعطي معادلات فوربيه ب:

$$D_n=\frac{2}{l}\int_0^l f(x)\sin\frac{n\pi x}{l}dx\quad,n=1,2,3,\dots\dots\dots\qquad(32)$$

وليتحقق الشرط لحدي النهائي (22) نفترض شرعيه تفاضل (31) حدا حدا ويعطينا هذا الفرض:

$$y_t(x,t)=\sum_{n=1}^{+\infty}C\lambda_n\sin\lambda_n x(c_n\cos C\lambda_n-D_n\sin C\lambda_n t)\qquad(33)$$

حيث $\lambda_n=\frac{\mathrm{n\pi}}{\mathrm{L}}$

ويحول الشرط (24) لمعادله (33) الي :

$$y_{\mathrm{t}}(x,0)=\sum_{n=1}^{+\infty}C\lambda_n\sin\lambda_n x=g(x)\qquad(34)$$

علي $0\leq x\leq l$

يوضع $C\lambda_n C_n=f_n$ تميز (34) علي أنها متسلسلة الجيب الفوريه للدالة g. حيث الدورة *2P=2L* وبهذا نعطي معاملات فوريه ب:

$$y_{\mathrm{n}}=\frac{2}{\mathrm{L}}\int_0^{\mathrm{L}}\mathrm{g(x)}\sin\frac{\mathrm{n\pi x}}{\mathrm{L}}\partial\mathrm{x}\quad,\mathrm{n}=1,2,3\dots\dots$$

ومن ثم فإن:

$$
\begin{aligned}
C_n = \frac{\mathrm{f_n}}{\mathrm{c}\lambda_{\mathrm{n}}} = \frac{lf_n}{n\pi} \\
= \frac{2}{\mathrm{n\pi c}}\int_0^{\mathrm{L}} \mathrm{g(x)} \sin\frac{\mathrm{n\pi x}}{\mathrm{L}}\,\partial \mathrm{x} \qquad n = 1,2,\ldots. \qquad (35)
\end{aligned}
$$

المراجع

١. آس فارلو- ترجمة د. مها عواض الكبيسي- المعادلات التفاضلية الجزئية- منشورات جامعة عمر المختار البيضاء- بنغازي -ليبيا- ٢٠٠٥م.

٢. أ.د حسن مصطفى العويضي- المعادلات التفاضلية الجزء الثاني- مكتبة الرشد- الرياض- المملكة العربية السعودية- ١٤٢٦هـ/ ٢٠٠٥م.

٣. ديفيد ل. ياورز- ترجمة الدكتور. نزار حمدون شكر- مسائل القيمة الحدودية- لمديرية دار الكتب للطباعة والنشر- جامعة الموصل- العراق- ١٤٠٩هـ/١٩٨٩م.

٤. د. أمين صادق الفرماني- د. الفيدري عمر سالم- المعادلات التفاضلية.

٥. د. أمجد إبراهيم شحاذة - م. محمد رياض علي- المعادلات التفاضلية- الطبعة الأولى- دار الفجر للنشر والتوزيع - القاهرة- مصر.