امعة السودان للعلوم والتكنلوج

كلية التربية

قسم الرياضيات

بحث بعنوان :

علم حساب المثلثات وعلاقته ببعض فروع الرياضيات

Trig and its relationship to some branches of mathematics

إعداد الطلاب :

ابتهال السنوسي

عفراء بابكر

مريم ابكر

هناء عبدالحميد

اشراف:

د. عمر خليل

2016م ديسمبر

بسم الله الرحمن الرحيم

الآيـــــــــه

وَأَنْزَلَ اللَّهُ عَلَيْكَ الْكِتَابَ وَالْحِكْمَةَ وَعَلَّمَكَ مَا لَمْ تَكُنْ
تَعْلَمُ ۚ وَكَانَ فَضْلُ اللَّهِ عَلَيْكَ عَظِيمًا)

صدق الله العظيم

سورة النساء:113

الإهـــــداء

إلى من أوقدت لنا أصابعها شموعاً ....وسارت في درب الأشواق هادئة بالريح والأنواء , تمهد لنا الطريق وتنثر على جانبيه الورود .....فما نملك إلا أن نخلع نعلينا أمام بساطها ونبتهل إلى الله بالدعوات لها دوماً

أمي الحبيبة

إلى من كلله الله بالهيبة والوقار ......إلى من علمني العطاء بدون إنتظار إلى من أحمل إسمه بكل إفتخار

والدي العزيز

إلى رفقاء العلم والمعرفة أصدقائي وإلى اللذين كانوا شمعة لدربي استاذتي الأعزاء إلى كل صوت ينادى بلادي.....بلادي الى أمنا الحبيبة جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا

الشكروالتقدير

جهلت عيون الناس ما في داخلي ......فوجدت ربي بالفؤاد بصيرا

ربي معي فمن الذي أخشي إذا.......ما دام ربي يحسن التدبيرا

وهو الذي قد قال في قرآنه.......وكفى بربك هادياً ونصيرا

بدءاً نحمد الله ونشكره شكراً كثيراً بأن وفقنا وسدد خطانا وأتم شكر نعمته علينا بأن أتممنا هذا البحث المتواضع.

شكرا معلمي شكرا يظل دائماً لحناً على فمي يأيها العملاق فتحت لي آفاقاً بالعلم والأخلاق.

الشكر موصول الى حاملي مشاعل النور ليضيئوا لنا الدروب أساتذتي الأجلاء والذين حملوا أقدس رسالة في الحياة.

أساتذتي بكلية التربية قسم الرياضيات:

يا دار العلم تحياتي ....يا زاد الحاضر والآتي أنحنى لكم احتراماً وتقديراً ولكم منا جزيل شكرنا وامتناننا ونخص بالشكر أستاذنا ومشرفنا الفاضل

الأستاذ عمر خليل عثمان

الذي كان دوماً يوجهنا ويرشدنا فجزاه الله عنا خيراً وله منا كل التقدير والإحترام.

والشكر إلى كل من ساعدنا في إتمام هذا البحث.

المستخلص

تناول هذا البحث دراسة علم حساب المثلثات وعلاقته ببعض فروع الرياضيات مثل الحسبان ، الهندسة التحليلية ، التحليل المركب وتحليل المتجهات.

قام الباحثون في الفصل الأول بطرح مشكلة التي تتمثل في أهمية علم المثلثات في جميع فروع الرياضيات. و يحتوي على أسئلة البحث التي تتمثل في هل هناك أهمية لدراسة علم المثلثات بشكل عام؟ وما مدى أهمية مشتقات الدوال المثلثية وتكاملاتها ؟وما مدى أهمية علم المثلثات في دراسة الهندسة التحليلية والتحليل المركب؟ وما مدى أهمية حسا ب المثلثات في دراسة الحسبان وإستخدم الباحثون المنهج الوصفي والتجريبي.

وفي الفصل الثاني تناول الباحثون مقدمة عن حساب علم المثلثات وتطوره عبر العصور والعلماء البارزين في كل عصر.

اما في الفصل الثالث فتناول الباحثون الحسبان والهندسة التحليلية وفي التفاضل والتكامل أدخلوا بعض النظريات المثلثية التي تساعد في حل المسائل المعقدة وفي الهندسة التحليلية إستفاد الباحثون من علم المثلثات في التحويل بين الإحداثيات الكارتيزية والقطبية وفي الفصل الرابع تناول الباحثون المتجهات والتحليل المركب وفي تحليل المتجهات إستخدم الباحثون معادلتا كوشي وريمان في الصورة القطبية والعلاقة بين الإحداثيات الإسطوانية والكارتيزية وفي التحليل المركب تناول الباحثون مبرهنه ستوكس وبعض التطبيقات التي تم إستخدام المثلثات فيها.

Abstract

This research study trig and its relationship to some branches of mathematics, such as account, analytic geometry, complex analysis and vector analysis.

Researchers in the first quarter by asking a problem that is the importance of trigonometry in all branches of mathematics. And it contains the research questions that are in Is there a significance to the study of trigonometry in general? And how important derivatives of trigonometric functions and Taladtha? And how important trigonometry in the study of analytic geometry and analysis compound? And how important calculation of triangles in the study account the researchers used the descriptive and experimental.

In the second chapter, the researchers dealt with an introduction to the expense of trigonometry and its evolution through the ages, prominent scientists in every age.

But in the third quarter, the researchers handled the account, engineering, analytical and in calculus admitted some trigonometric theories that help resolve complex issues and the analytical geometry, the researchers took advantage of trigonometry in the conversion between the coordinates Rtezih and polar In the fourth chapter, the researchers dealt with Vector composite analysis and vector analysis, the researchers Madlta Use Cauchy and Riemann in the polar image and the relationship between the cylindrical coordinates and Rtezih theorem in complex analysis, the researchers dealt with Stokes and some of the applications that have been using the triangles.

الفهـــــــــــرس

الفصل الاول

(1-1) المقدمه :

علم حساب المثلثات هو علم يدرس أضلاع وزوايا المثلث والتوابع المثلثية كالجيب وجيب التمام وهو مجموعة من النسب المثلثية تسمى الدوال المثلثية .والأساس الذي أدى إلي نشوء هذا العلم هو إكتشاف علماء الرياضيات أن هنالك علاقة ثابتة بين الزوايا والأضلاع .حساب المثلثات يشمل حساب المثلثات المستوية وحساب المثلثات الكروية ،لحساب المثلثات متطابقات مثلثية وهي تعني أن الكميتين متساويتان.ومن علاقاتها الأساسية علاقة فيثاغورث والقسمة وعلاقة المقلوب وأيضا توجد لها علاقة بفروع الرياضيات الأخرى.ومن تلك العلاقات علاقتها بالهندسةالتحليلية تتمثل في الإحداثيات القطبية للدائرة التي مركزها c ونصف قطرها a وإحداثياتة(r, θ)نجد أن

$$x = r\cos\theta \qquad , \qquad y = r\sin\theta$$

أما في القطوع المخروطية القطع الناقص معادلته القطبية

$$r = \frac{e}{1 + ecos\theta}$$

والقطع الزائد معادلته القطبية هي

$$r = \frac{e^k}{1+ecos\theta}$$

وأيضا لها علاقة بالتحليل المركب نجد أن العدد المركب z في الصوره القطبية تحصل على هذه العلاقة

$$z = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

ولها علاقة بالحسبان نجد كل الدوال المثلثية متصلة ومعرفة عند أي نقطة (اي قابلة للإشتقاق في كل أنواع الإشتقاق) ويمكن تكامل الدالة المثلثية بإستخدام كل أنواع التكاملات.

(1-2)مشكلة البحث:

تنبع مشكلة البحث من حيث أن علم المثلثات له أهمية فى جميع فروع الرياضيات الأخرى فهو يساعد على تبسيط العمليات الحسابية والخروج من النهاية المسدودة لحل بعض المسائل .

(1-3)أهمية البحث:

من خلال دراستنا لعدد من فروع الرياضيات مثل الحسبان والهندسة التحليلية والتحليل المركب وتحليل المتجهات وغيرها إستشعرنا أهمية دراسة علم حساب المثلثات فى حل كثير من المسائل لتذليل الصعوبات فى حلها لذلك سنعمل على جمع هذه العلاقات في مكان واحد للوقوف على هذه الأهمية .

(1-4) أهداف البحث:

1 - يجب التعرف على النقطة المثلثية والدوال المثلثية والمتطابقات المثلثية وبراهينها.

2-إيجاد العلاقة الاساسية بين الدوال المثلثية وعلاقتها بفروع الرياضيات الأخرى.

3-إيجاد صيغ عامة لتكامل وتفاضل الدوال المثلثية المعقدة .

(1-5)أسئلة البحث:

1-هنالك أهمية لدراسة علم المثلثات بشكل عام .

2- مدى أهمية علم المثلثات فى دراسة الحسبان والهندسة التحليلية .

3- مدى أهمية علم المثلثات فى دراسة التحليل المركب .

4-مدى أهمية علم المثلثات في دراسة تحليل المتجهات .

(6-1) منهج البحث:

سنستخدم فى هذا البحث المنهج الوصفي والتجريبي .

(7-1) مصطلحات البحث :

الإحداثيات الكارتيزية :

في نظام الإحداثيات الكارتيزية يتعين موضع النقطة في الفراغ بالإحداثيات $(x\ ,y\ ,z)$

بالنسبة لثلاث محاور ثابتة متعامدة . أى نقطة (p)في نظام الإحداثيات الكارتيزية يعبر عنها بثلاث أعداد حقيقية ، تعبر عن مواضع المساقط العمودية من هذه النقطة إلى ثلاث خطوط ثابتة ومتعامدة تسمى المحاور $(axes)$.

الدالة التحليلية :

إذا كانت المشتقة $f'(\mathrm{z})$ معرفة عند كل النقاط في منطقة ، D فإنه يقال أن $\mathrm{f}(z)$ تحليلية في المنطقة (D) . وتسمى دالة تحليلية في المنطقة D أو تحليلة في D.

ويقال أن الدالة $f(z)$ تحليلية عند النقطةz_0 إذا كان يوجد $\delta > 0$ بحيث $|z-z_0| < \delta$ عند كل النقاط التى توجد عندها$f'(z)$.

الدالة التوافقية :

إذا وجدت المشتقات الجزئية الثانية لكل من $u\ ,v$ بالنسبة ل y,x وكانت متصلة في D فإننا نجد من معادلتي كوشي ـ ريمان :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0 \qquad , \qquad \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$$

ويلي ذلك تحت هذه الشروط أن كل من الجزء الحقيقي والجزء التخيلي لدالة تحليلية يحققان معادلة "لابلاس" :

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{أو} \quad \nabla\varphi = 0 \quad , \quad \nabla = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

ويسمي ∇^2 عادة بمؤثر لابلاس وتسمى الدوال $u(x,y)$, $v(x,y)$ والتي تحقق معادلة لابلاس في منطقة ما D بالدوال التوافقية، ويقال إنها توافقية في D .

الفصل الثاني

(1-2) نبذة تاريخيه :

علم حساب المثلثات هو علم عربي إسلامي ويعترف علماء الرياضيات الأوربيين بإسهامات العلماء المسلمين في هذا العلم والأساس الذي أدى إلى نشؤ هذا العلم هو إكتشاف علماء الرياضيات أن هنالك علاقة ثابتة بين الزوايا والأضلاع.

يعود تاريخ علم حساب المثلثات إلى الإغريق الذين وضعوا قوانينها ومن أهمها الزوايا القائمة والحادة والمنفرجة.

يعتبر قدماء المصريين أول من إستخدموا قواعد حساب المثلثات في بناء الإهرامات والمعابد وكما قام البابليون بقياس الزوايا بالدرجات والدقائق والثواني يأضاً طور الهنود نظاماً لحساب المثلثات يعتمد على دالة الجيب وليس على الوتر الذي إعتمد عليه اليونانيون وعلى الدالة الحديثة ،لم تكن دالة الجيب هذه نسبه إنما كانت ببساطة طول الضلع المقابل للزاوية في مثلث قائم الزاوية ذو وتر ثابت ومحدد.

إنتقلت الحضارة العربية عن طريق إسبانيا إلى الغرب ويعزى إلى(ريجيومانتوس) توحيد وتبسيط حساب المثلثات عن طريق التعويض للزاوية بدلاً عن القوس .

وقدم (فيتا)عام(1540م-1630م)لأول مرة قانون جيب التمام في الهندسة المستوية وقد ظهر قانون الظل في عمل (فيتا) وقانون نصف الزاوية في (رويتس) عام (1508م)،(اوجلرد)عام (1657م) و(نابيير) عام (1619م) بينما قدم (جاوس ودلاميرت) عام(1807م) و(يموافي) عام(1667م-1754م) و(اويلر) عام(1707م-1783م) قوانينهم التي كانت من أوائل الدراسات التي فتحت الطريق لدراسة حساب المثلثات التحليلي أما عمل (فورير) على المتسلسلات ظهر في عام (1807م-1822م) .

يحتل علم حساب المثلثات الآن منزلة مهمة بين العلوم الحديثة والدوال المثلثية والدوال المثلثية عبارة عن أعداد مركبة وقد أدى هذا إلى جعل مادة حساب المثلثات تطبيق واحد من التطبيقات العملية الكثيرة للأعداد المركبة وأظهر أن القوانين الأساسية للرياضيات مجرد نتائج لحساب هذه الأعداد ففي جميع التحليلات الرياضية في جميع المسائل العلمية في الوقت الحاضر تتضمن معادلات دالة أو أكثر من الدوال المثلثية ويستخدم حساب المثلثات في أغراض السلمية والحربية وقياس الإرتفاعات والإنخفاضات وفي دراسة حركة الصواريخ والأقمارالصناعية والمركبات الفضائية وفي الملاحة والهندسة لكنها تلعب دراً مهماً في الرياضيات البحتة والتطبيقية . [1]

(2-2) بعض علماء علم حساب المثلثات :

هناك عدد كبير من العلماء الذين لهم إسهامات كبيرة في حساب المثلثات سنأخذ بعض منهم على سبيل التمثيل وليس الحصر .

(1-2-2) البتاني :

هو من أعظم العلماء إذ وضع نظريات مهمة في الجبر وحساب المثلثات كما عرف البتاني قانون تناسب الجيوب وإستخدام معادلات المثلثات الكروية الأساسية كما أدخل إصطلاح جيب التمام وتمكن من إيجاد حل رياضي لكثير من العمليات والمسائل مثل تعيين قيم الزوايا بطرق جبرية وهو من استخدم الخطوط المماسية للأقواس وظلال التمام والقواطع وقواطع التمام وإدخالها في حساب الأرباع الشمسية وفي قياس الزوايا والمثلثات كما قام بإيجاد العلاقات ونظم جداول هامة بهذه العلاقات وهو من استنبط القانون الأساسي في إستخراج مساحة المثلثات الكروية كما بسط علم النسب المثلثية وقد استحق بذلك لقب(مؤسس لإكتشافه غالبية النسب المثلثية الأساسية)وقد توصل إلى معرفة القانون الأساسي للمثلثات الكروية.

---

[1] .حساب المثلثات_د.فرانك أيرز – روبرت مويد

جتاأ = جتاب جتاج + جاب جاج جتاأ

(2-2-2) أحمدبن عبدالله المعروف ب(حبش الحاسب) :

ساهم بشكل كبير في إرساء علم المثلثات عند العرب فقد قام بإيجاد جدول الظلال والتمام والظل ومجموعة العلاقات المهمة .

(3-2-2) أبوالوفاء محمد بن حمد بن يحيى البوزجاني (ت 1888 - 998م) :

لقد برع أبوالوفاء بعمله في حساب المثلثات الكروية وهو أول من إستخدم المماسات والقواطع ونظائرها في قياس المثلثات والزوايا وألف كتاب تطرق فيه إلى حساب المثلثات الكروية وإبتكر طريقة جديدة في حساب جداول الجيب وفي تلك الجداول حساب زاوية 30 درجة وكذلك جيب زاوية 15 درجة بطريقة فائقة الدقة صحيحة إلى ثمانية منازل عشرية ،كما عرف لأول مره الصلات في علم حساب المثلثات وهو مايعرف اليوم بالعلاقة جا(أ+ب) وغيرها من الصلات بين الجيب والظل والقاطع ولقد واصل أبو الوفاء بجد وإخلاص فصل علم حساب المثلثات عن علم الفلك بطريقةنظامية لم تؤثر أبداً على تقدم علم الفلك، كما أوجد جداول لجيب الزاوية (جا) وظل الزاوية (ظا) وجيب التمام (جتا) لكل عشر دقائق وقد أوجد أبو الوفاء المتطابقات المثلثية عناية كبيرة وهي التي لها دوراً هاماً في علم حساب المثلثات وقد إبتكر عدداً كبيراً منها كذلك إكتشاف قانون مهماً إضافة للزوايا

جا(س+ص) = جاس جتاص + جتاس جاص

وفي حساب المثلثات الكروية إستعاض عن المثلث القائم الزاويه من الرباعي التام مستعيناً بقاعدةمستعيناً بقاعدة المقادير الأربعة .

(4-2-2) أبو النصر إبن عراف (ت425هـ - 1036م) :

يعتبر من الأوائل الذين إكتشفوا نظرية الجيوب.

(2-2-5) إبن يونس المصري :

برع إبن يونس في المثلثات وقد حل مسائل صعبة في المثلثات الكروية وإخترع حساب المثلثات وهو أول من وضع قانون في حساب المثلثات الكروية كانت له أهمية كبرى عند علماء الفلك قبل إكتشاف اللوغريثمات إذ يمكنه بواسطة ذلك القانون تحويل عمليات الضرب في حساب المثلثات إلى عملية جمع

$$\boxed{\text{جتاأ جتاب} = \frac{1}{2}\,(\text{جا(أ+ ب)} + \text{جا(أ- ب)})}$$

كما إستطاع إيجاد القيمة التقريبية إلى جيب أو درجة وكانت النتيجة التي توصل إليها إلى جانب كبير من الدقة مقارنة بنتائج الجيب في الوقت الحاضر .

(2-2-6) جابر بن افلح :

ترك مجموعة من الكتب الفلكية المهمة كان أولها في المثلثات الكروية التي توصل إليها في إكتشاف قانون الخامس من قوانين السته التي تستخدم في حل المثلثات الكروية القائمة.

(2-2-7) الخواجه الطوسي :

أول من وضع كتاب في المثلثات مستقل عن الفلك فأخرج كتاب فريد إسمه(الشكل القطاع) ترجع أهميته إلى أنه يكون الكتاب الأول الذي يتعامل مع حساب المثلثات في وضعه علماً بان مستقلاً بذاته وقد جاء في الكتاب خمسه مقالات كل منها يتضمن عدداً من الأشكال

والفصول ويتدرج تحتها موضوعات عن شكل القطاع السطحي والقطاع الكروي وأخرى تنوب عن شكل القطاع في معرفة أقواس الدوائر وغيرها من المفردات تنتمي إلى علم المثلثات .[2]

(2) ويكبيديا – الوافي في حساب المثلثات – د. إسلام عبدالرحيم

الفصل الثالث

حساب المثلثات في الحسبان والهندسة التحليلية

(1-3) الحسبان :

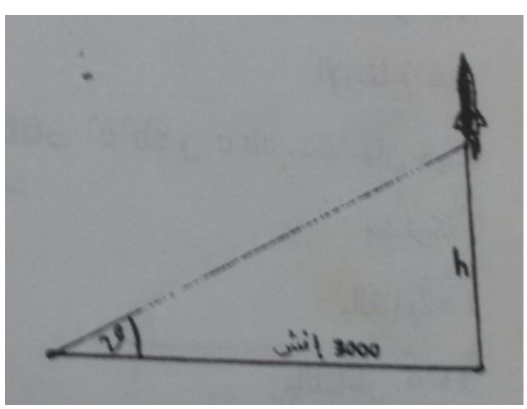
عند حل بعض مسائل الحسبان يجد الطالب بعض الصعوبات عند إستخدام طرق الحل العادية بسبب التعقيد كما هو الحال في التفاضل والتكامل فيلجأ الطالب إلى إستخدام حساب المثلثات لفك طلاسم المسائل مثل إستخدام المتطابقات المثلثية الأساسية أوغيرها من نظريات حساب المثلثات كما هوموضح في هذا الجزء من الفصل .

(1-1-3) التفاضل :

تطبيق (1-1-1-3) :

أطلق صاروخ رأسياً إلى أعلى وروقب من كاميرا تصويرتبعد عن محطة إطلاقه 3000قدم جد معدل سرعة إرتفاع الصاروخ عندما تكون زاوية إرتفاعه $\frac{\pi}{4} = \theta$ ومعدل إزدياد زاوية الإرتفاع 0,2راد/ث

الحل:



$tan\,\theta\ = \frac{h}{3000}$

$$h\ = 3000\,tan\,\theta\ \rightarrow (1)$$

نشتق طرفي المعادلة (1)بالنسبة للزمن

$\frac{dh}{dt} = 3000\,tan\,\theta\,\frac{d\theta}{dt} \rightarrow (2)$

$\theta\ = \frac{\pi}{4} \qquad , \frac{d\theta}{dt} = 0{,}2 rad/s \rightarrow (3)$

بتعويض (3) في (2) نجد

$\frac{dh}{dt} = 3000\,sec^2\frac{\pi}{4} \times 0{,}2 \rightarrow \frac{dh}{dt} = 3000(\sqrt{2})^2 \times \frac{2}{10}$

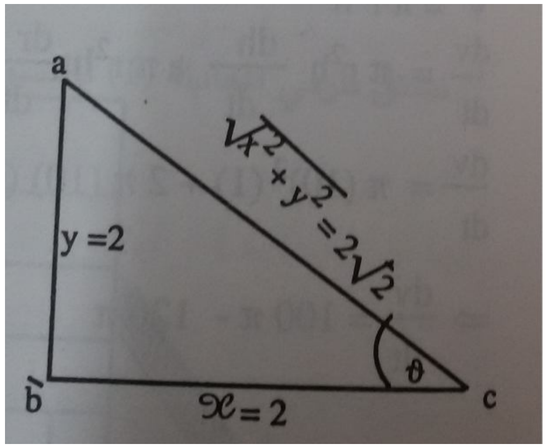
$\frac{dh}{dt} = 1200\,mile/s\ .$ [3]

تطبيق (3-1-1-2) :

لتكن θزاوية حادة في مثلث قائم الزاوية إذا كان x, yضلعي القائمة والمقابلين للزاوية θوإذا كان كل من x, yمتغيرين بالنسبة للزمن t جد معدل التغير في الزاوية θعندما x=2 وتتزايد بمعدل 1وحده/ث وy=2 وتتناقص بمعدل $\frac{1}{4}$وحده/ث هلθ في حالة تزايد أم في حالة تناقص؟

الحل:

[3] أساسيات التفاضل والتكامل – د. خالد قاسم سمور – دار الفكر – الطبعة الثانية 2004 – ص (322-323).



$$tan\,\theta\ =\ y/x\ \ \rightarrow (1)$$

نشتق طرفي المعادلة (1)بالنسبة للزمن t

$$sec^2\,\theta\,\frac{d\theta}{dt} = \frac{x\,\frac{dy}{dt} - y\,\frac{dx}{dt}}{x^2}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{x\,\frac{dy}{dt} - y\,\frac{dx}{dt}}{x^2\,sec^2\,\theta}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2\left(\frac{-1}{4}\right) - 2(1)}{2^{2\,sec^2\frac{\pi}{4}}} \quad ,\theta\ =\ \frac{\pi}{4}$$

حيث المثلث a b c متساوي الساقين وقائم الزاوية

$$s\,\frac{dy}{dx} = \frac{-\left(\frac{1}{2}\right)\times -2}{4(\sqrt{2})^2} = \ \frac{\frac{-5}{2}}{8} \rightarrow \ \frac{d\theta}{dt} = \frac{-5}{16}rad/ec$$

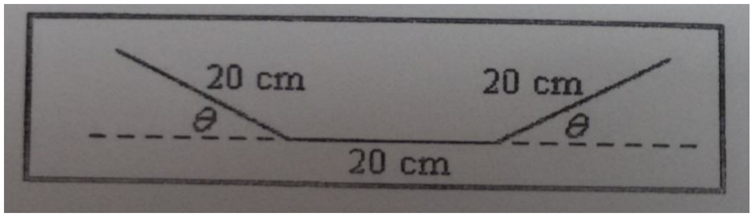
∴ في θ حالة تناقص [4]

تطبيق (3-1-1-3) :

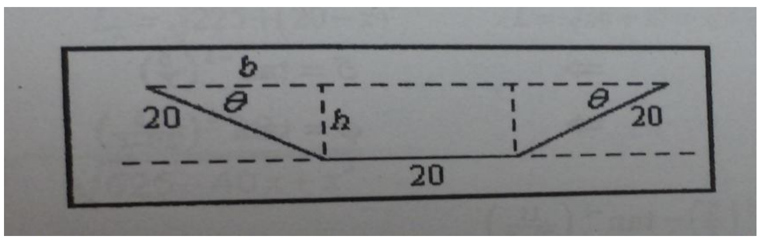
---

[4] أساسيات التفاضل والتكامل (مرجع سابق)

صنع وعاء للماء وكما هو مبين في الشكل التالي حدد الزاوية التي تحقق أكبر حجم للماء يمكن وضعه في الوعاء .



الحل:



$B = 20\cos\theta \qquad\qquad h = 20\sin\theta$

$$A = 20h + 2(\frac{1}{2}bh) = 400\sin\theta + (20\cos\theta)(20\sin\theta)$$

$$= 400(\sin\theta + \sin\theta\cos\theta)$$

$$A^{\backslash}(0) = 400(\cos\theta + \cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$= 400(\cos\theta + \cos^2\theta - (1 - \cos^2\theta)$$

$$= 400(2\cos^2\theta + \cos\theta - 1) = 400(2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1)$$

$$2\cos\theta - 1 = 0 \rightarrow \cos\theta = \frac{1}{2} \rightarrow \theta = \frac{\pi}{3}$$

$$\cos\theta + 1 = 0 \rightarrow \cos\theta = -1 \rightarrow \theta = \pi$$

$A(0) = 0 \qquad a(\pi/3) = 519{,}6152$

$A(\frac{\pi}{2}) = 400$

$\therefore\ \theta = \frac{\pi}{3}$ [5] .

تطبيق (3-1-1-4) :

مثلث طول ضلعيه 6سم ،10سم والزاوية المحصورة بينهما °60 جد محيط المثلث .

الحل:

محيط المثلث =طول الضلع الأول +الضلع الثاني +الضلع الثالث

ولكن يوجد لدينا ضلعين فقط فنخرج قيمة الضلع الثالث عن طريق قانون ال $\cos$ كالاتي

$l^2 = x^2 + y^2 - 2xy\cos\theta$

$10^2 + 6^2 - 2 \times 6 \times 10 \times \frac{1}{2}\,(\cos 60° = \frac{1}{2})$

$l^2 = 136 - 60 = 76$

$\therefore l = \sqrt{76}$ [6]

(3-1-2) التكامل :

في التكامل توجد بعض العمليات الحسابية التي يتم الإنتقال إلى حساب المثلثات لحلها. وهنالك صيغ عامة يمكن تطبيقاتها في إيجاد حلول المسائل منها :

---

(5) التفاضل والتكامل – د.مصباح جمعة عقل – محمد خليل أبوزلطة – زياد عبدالكريم – دار النشر – الطبعة الأولى – ص(292).
(6) أساسيات التفاضل – د. بدرالدين محمد – عمان –الاردن –الطبعة الاولى – ص(272).

(3-1-2-1) الصيغ العامة لإيجاد تكامل بعض الدوال المعقدة :

(3-1-2-1-1) التعويضات المثلثية :

نستخدم التعويضات المثلثية في التكاملات التي تحتوي على $\sqrt{x^2 \pm a^2}$ و $\sqrt{a^2 \pm x^2}$ لتبسيط العمليات الحسابية .

(3-1-2-1-1) إذا كان التكامل يحتوي على $\sqrt{a^2 - x^2}$ فإننا نعوض

$$X = a \sin u$$

(3-1-2-1-2) إذا كان التكامل يحتوي على $\sqrt{a^2 + x^2}$ فإننا نعوض

$$X = a \tan u$$

(3-1-2-1-3) إذا كان التكامل يحتوي على $\sqrt{x^2 - a^2}$ فإننا نعوض

$$X = a \sec u$$

تطبيق (1) :

جد تكامل الآتي $\int \sqrt{9 + x^2}\, dx$

الحل

$$x = 3 \tan u \quad , \qquad dx = 3 \sec^2 u\, du$$

$$\int \sqrt{9 + x^2}\, dX = \int \sqrt{9 + 9 \tan^2 u}\;\; 3 \sec^2 u\, du$$

$$= \int 3\sqrt{1 + \tan^2 u}\;\; 3\; \sec^2 u\, du = 9 \int \sec\; u \sec^2 u\, du$$

$$= \int sec\,u(1 - tan^2 u)\, du$$

$$= 9 \int sec\,u - sec\,u\,tan^2 u)du \rightarrow (1)$$

$$= 9\sec u \tan u + 9(\sec u + \int \sec^3 u\, du)$$

$$\Rightarrow \int \sec^3 u\, du = 9[\sec u \tan u + \ln|\sec u + \tan u|]$$

$$\int \sec^3 u\, du = \frac{1}{2}\left[\sec u \tan u + \ln\sqrt{\sec u + \tan u}\right] \longrightarrow (2)$$

بتعويض (2)في (1) نجد

$$\int \sqrt{9 + x^2}\ dx = 9 \int \sec^3 u\, du$$

$$= \frac{9}{2} sec\,u\, tan\,u + 9\, ln\sqrt{sec\,u + tan\,u} + c$$

(2-2-1-3) التكاملات التي هي على صورة

$$\int sin^m x\, cos^n x\ \ dx$$

لكي نكامل مثل هذه الإقترانات هنالك عدة حالات

الحالة الأولى :

m عدد فردي أوزوجي و n عدد فردي.في مثل هذه الحالة نتبع الأسس التالية لتبسيط العمليات الحسابية والخروج من النهاية المسدودة

(1) نحول التكامل على الصورة

$$\int sin^m x\, cos^n x = \int sin^m x\, cos^{n-1} x\;\; cos\, x\, dx$$

(2)وحيث أن n عدد فردي إذن $n-1$ عدد زوجي إذن نستطيع أن نكتب التكامل السابق على الصورة:

$$\int sin^m x\, cos^n x\;\; dx = \int sin^m x\, (cos^2 x)^{\frac{n-1}{2}}\, cos\, xdx$$

(3)وحيث أن $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ فإن التكامل يصبح على الصورة :

$$\int sin^m x\, (1 - sin^2 x)^{\frac{n-1}{2}}\, cos\, x\, dx$$

(4) نكامل .

الحالة الثانية :

n عدد فردي أوزوجي و m عدد فردي في مثل هذه الحالة نتبع الأسس التالية :

(1)نضع التكامل على الصورة

$$\int \sin^{m} x \cos^{n} x\;\; dx = \int \cos^{n} x \sin^{m-1} x \sin x\; dx$$

(2)وحيث أن m عدد فردي إذن m-1 عدد زوجي إذن نستطيع أن نكتب التكامل السابق على الصورة

$$\int sin^m x \, cos^n x \; dx = \int cos^n x \, (sin^2 x)^{\frac{m-1}{2}} sin \, x \, dx$$

(3)يكتب التكامل السابق على الصورة التالية

$$\int sin^m x \, cos^n x \; dx = \int cos^n x \, (1 - cos^2 x)^{\frac{m-1}{2}} \, sin \, x \, dx$$

(4) نكامل .

الحالة الثالثة :

m, n أعداد زوجية .

تطبيق (2) :

جد تكامل

$\int sin^{22} 4\, x \, cos^3 4\, x \; dx$

الحل

$$\int sin^{22} 4x \, cos^3 4x \, dx = \int sin^{22} 4x \, cos^2 4x \, cos \, 4x \;\; dx$$

$$= \int sin^{22} 4x \, (1 - sin^2 4x) \, cos \, 4x \, dx$$

$$= \int sin^{22} 4x \, cos \, 4x \, dx - \int sin^{24} 4x \, cos \, 4x \, dx$$

$$= \frac{1}{92} sin^{23} 4x - \frac{1}{100} sin^{25} 4x + c$$

(3-2-1-3) التكاملات التي هي على الصورة

$$\int tan^m x\, sec^n x\, dx$$

لكي نكامل مثل هذه التكاملات هنالك عدة حالات:

الحالة الأولى:

Mعدد فردي أو زوجي وnعدد زوجي ففي مثل هذه الحالة ولتبسيط التكامل نتبع الأسس التالية:

$$\int \tan^m x \sec^n x \ dx = \int \tan^m x \, (\sec^{n-2} x \sec^2 x)\ dx$$

$$= \int tan^m x\, sec^{n-2} x\, (tan^2 x + 1)\ dx$$

الحالة الثانية:

إذا كان mعدداً فردياً وnعدداً زوجياً ،ففي مثل هذه الحالة ولتبسيط التكامل نتبع الأسس التالية:

(1) $\int tan^m x\, sec^n x\ dx = \int tan^{m-1} x\, sec^{n-1} x\, sec\, x\, tan\, x\ dx$

(2) $\int tan^m x\, sec^n x\ dx = \int (tan^2 x)^{\frac{m-1}{2}} sec^{n-1} x\, sec\, x\, tan\, x\, dx$

(3) $\int tan^m x\, sec^n x\ d \ = \int (sec^2 x - 1)^{\frac{m-1}{2}} sec^{n-1} x\, sec\, x\, tan\, x\ dx$

الحالة الثالثة:

إذا كان m, n أعداد فردية ففي مثل هذه الحالة ولتبسيط التكامل نتبع الأسس التالية:

$$\int tan^m x\, sec^n x\ \ dx = \int tan^{m-1} x\, sec^{n-1} x\, sec\, x\, tan\, x\, dx$$

$$= \int (tan^2)^{\frac{m-1}{2}} sec^{n-1} x\, sec\, x\, tan\, x\, dx$$

$$= \int (sec^2 x - 1)^{\frac{m-1}{2}} sec^{n-1} x\, sec\, x\, tan\, x\, dx$$

تطبيق (3) :

جد التكامل الآتي

$$\int tan^3 x\, sec\, x\, dx$$

الحل

$$\int tan^3 x\, sec\, x\, dx = \int tan^2 x\, tan\, x\, sec\, x\, dx$$

$$= \int tan\, x\, sec\, x\, (sec^2 x - 1) dx$$

$$\therefore \int \tan^3 x \sec x\, dx = \frac{1}{3} sec^3 x - sec\, x + c$$

(4-2-1-3) التكاملات التي على الصورة

$$\int tan^m x\, dx$$

في هذه الحالة ولتبسيط التكامل نتبع الأسس التالية

$$\int tan^m x \ dx = \int tan^{m-2} x \, tan^2 x \, dx$$

$$= \int tan^{m-2} x \, (sec^2 x - 1) dx$$

$$= \int tan^{m-2} x \, sec^2 x \, dx - \int \tan^{m-2} x \, dx$$

تطبيق (4) :

جد التكامل الآتي

$$\int tan^7 x \, dx$$

الحل

$$\int tan^7 x \, dx = \int (tan^5 x \, tan^2 x) \, dx$$

$$= \int tan^5 x \, (sec^2 x - 1) dx$$

$$= \int (tan^5 x \, sec^2 x - tan^5 x) dx$$

$$= \int tan^5 x \, sec^2 x \ dx - \int tan^3 x \, (sec^2 x - 1) dx$$

$$= \int tan^5 x \, sec^2 x \ dx - \int tan^3 x \, sec^2 x \, dx + \int tan^3 x \, dx$$

$$= \int tan^5 x \, sec^2 x \, dx$$

$$- \int tan^3 x \, sec^2 x \, dx + \int tan \, x \, sec^2 x \ dx - \int \tan x \, dx$$

$$\therefore \ \int \tan^7 x \ dx = \frac{1}{6} tan^6 x - \frac{1}{4} tan^4 x - \frac{1}{2} tan^2 x - ln \, | \, cos \, x | + c$$

(5-2-1-3) التكاملات التي على الصورة

$$\int cot^m x \ dx$$

لتبسيط التكامل من هذا النوع نتبع الأسس التالية

$$\int cot^m x \ dx = \int cot^{m-2} x \, cot^2 x \, dx$$

$$= \int cot^{m-2} x \, (cosec^2 - 1) dx$$

$$= \int cot^{m-2} x \ cosec^2 x \, dx - \int cot^{m-2} x \ dx$$

تطبيق (5) :

جد التكامل الآتي

$$\int cot^6 3x \ dx$$

الحل

$$\int cot^6 3x \, dx = \int cot^4 3x \, cot^2 3x \, dx$$

$$= \int cot^4 3x \, (cosec^2 3x - 1) dx$$

$$= \int (cot^4 3x \ cosec^2 3x - cot^4 3x) dx$$

$$= -\frac{1}{15} cot^5 3x - \int cot^2 3x \, (cosec^2 3x - 1) dx$$

$$= -\frac{1}{15}cot^5 3x - \int cot^2 3x\ cosec^2 3x\, dx - \int cot^2 3x\, dx$$

$$= -\frac{1}{15}cot^5 3x + \frac{1}{9}cot^3 3x - \int (cosec^2 3x - 1)dx$$

$$\therefore\ \int \cot^6 3x\ dx = -\frac{1}{15}cot^5 3x + \frac{1}{9}cot^3 3x - \frac{1}{3}cot^3 3x - x + c$$

(6-2-1-3) التكاملات بواسطة الضرب بالمرافق

يلجأ الطالب لهذه الطريقة إذا كان التكامل على الصورة التالية

$$\int \frac{1}{1 \pm cos\, x}dx, \qquad \int \frac{1}{1 \pm sin\, x}dx \qquad ,\int \frac{1}{1 \pm tan\, x}dx$$

تطبيق (6) :

جد التكامل الآتي

$$\int \frac{1}{1 - tan\, x}\ dx$$

الحل

$$\int \frac{1}{1 - tan\, x}dx = \int \frac{1}{1 - tan\, x} \times (1 + tan\, x)/(1 + tan\, x\ )$$

$$= \int \frac{1 + tan\, x}{1 - tan\, x}\ dx = \int \frac{1 + \frac{sin\, x}{cos\, x}}{1 - \frac{sin^2\, x}{cos^2\, x}}\ dx$$

$$\int \frac{\frac{cos\, x\ + sin\, x}{cos\, x}}{\frac{cos^2\, x - sin^2\, x}{cos^2\, x}}\ dx = \int \frac{cos^2\, x\ + sin\, x\, cos\, x}{cos^2\, x - sin^2\, x}dx$$

$$= \frac{1}{2}\int \frac{1 + cos\,2x + sin\,2x}{cos\,2x}\;dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (sec\,2x + tan\,2x + 1)dx$$

$$= \frac{1}{2}\int (1 + tan\,2x + sec\,2x)dx$$

$$= \frac{1}{2}[x - \frac{1}{2}ln(\,cos\,2x) + \frac{1}{2}\;ln(sec\,2x + tan\,2x) + c$$

$$= \frac{1}{2}\left[x + \ln\sqrt{\frac{\sec 2x+\tan 2x}{\cos 2x}}\;\right] + c$$

$$\therefore\;\int \frac{1}{1-\tan x}\;dx = \frac{1}{2}x + \ln\sqrt[4]{\frac{\sec 2x+\tan 2x}{\cos 2x}} + c$$ (7)

(2-3) الهندسة التحليلية :

تهتم الهندسة التحليلية بالمواضيع ذاتها التي تهتم بها الهندسة التقليدية غير أنها تتيح طرق أيسر لبرهان العديد من النظريات ،وتلعب دوراً مهماً في حساب المثلثات عند حل بعض المسائل المعقدة مستخدماً في ذلك المتطابقات أو النظريات كما هو موضح في هذا الجزء من الفصل.

مثلاً عند كتابة المعادلة الكارتيزية المناظرة لكل من المعادلات

(1) $r = a\sin\theta$ (2) $r^2\,sin\,2\theta = 16$

ففي مثل هذا النوع من المسائل يجب تحقيق متطلبات العلاقة القياسية

(7) أساسيات التفاضل والتكامل (مرجع سابق).

$r^2 = x^2 + y^2 \qquad , tan\,\theta = \frac{y}{x} \qquad , x = r\,cos\,\theta \qquad , y = r\,sin\,\theta$

قبل إستخدامها ،بمعنى أن نحقق مايلي:

1- جميع الدوال المثلثية في المسألة يجب أن تكون على صورة $r\cos\theta$ أو $r\sin\theta$.

2- كل r^2 تستبدل ب $x^2 + y^2$ أوكل r تستبدل ب $\sqrt{x^2 + y^2}$.

في المعادلة(1)

نضرب طرفي المعادلة $r = a\sin\theta$ في r

$$r^2 = ar\,sin\,\theta$$

بإستخدام العلاقة القياسية نجد

$$r^2 = ar\,sin\,\theta \Longrightarrow x^2 + y^2 = ay$$

وهي الصورة الكارتيزية للمعادلة المزكورة .

في المعادلة(2) بإستقلال العلاقة المثلثية

$$sin\,2\theta = 2\,sin\,\theta\,cos\,\theta$$

نجد أن

$$r^2(2\,sin\,\theta\,cos\,\theta) = 16 \Longrightarrow 2\big((r\,sin\,\theta)(r\,cos\,\theta)\big) = 16$$

$$\therefore\; 2(x\,y) = 16 \Longrightarrow x\,y = 8$$

(1-2-3) معادلة الخط المستقيم:

في الإحداثيات الكارتيزية

$$Ax + by + c = 0$$

بإستخدام $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$ في المعادلة العامة للخط المستقيم نحصل على المعادلة القطبية

$$R\,(a\cos\theta + b\sin\theta) + c = 0$$

إذا كان bهو طول البعد العمودي النازل من نقطة الأصل على المستقيم

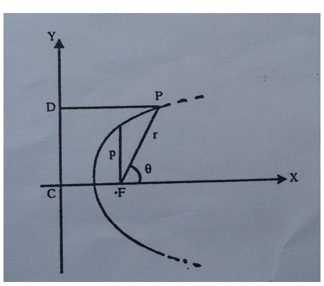
$$B = \left|\frac{c}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right|$$

بوضع α مع المحور السيني نجد أن

$$R\,(\cos(\theta - \alpha)) = p, \tan\alpha = \frac{a}{b}$$

وهي الصورة العامة للخط المستقيم في الإحداثيات القطبية

(3-2-2) المعادلة القطبية للقطع المخروطي :



نحدد مجموعة الإحداثيات القطبية بحيث تكون البؤرة (f)منطبقة على القطب والخط القطبي منطبقاً على محور القطع cx فإن المعادلة للقطع هي

$$R = \frac{p}{1 - e\cos\theta}$$

وهذه هي معادلة القطبية للقطع المخروطي منسوبة إلى البؤرة كنقطة أصل ومحور القطع كخط قطبي حيث (p)هو نصف طول الوتر البؤري العمودي و(e)الإختلاف المركزي .

ملاحظة :

إذا كان $e > 1$ أي في حالة القطع الزائد فإن المعادلة تمثل فرع واحد فقط من فروع القطع الزائد وشرط ذلك هو

$$\cos\theta < \frac{1}{e} \quad \text{أو} \quad 1 - e\cos\theta > 0$$

فإذا أخذنا الدليل البعيد عن القطب نستنتج أنه

$$R = \frac{p}{1+e\cos\theta}$$

عندما يكون الخط القطبي عمودي

أما إذا كان موازياً للخط القطبي أي أنه مر بالدليل بالنقطة $(p/e, \frac{\pi}{2})$أو $(p/e, \frac{3\pi}{2})$ فإن المعادلة هي

$$R = \frac{p}{1 \pm e\sin\theta}$$

وقد نحتاج لدراسة المنحنيات بإستخدام الإحداثيات الكارتيزية عند النقطة (x, y)على المنحنى كدالة ،فمثلاً نأخذ

$$Y = \sinh\theta \qquad ,x = \cosh\theta$$

مستخدمين العلاقة

$$\cosh^2\theta - \sinh^2\theta = 1$$

نحصل على

$$x^2 - y^2 = 1$$

وهي معادلة قطع زائد

تطبيق (7) :

جد المعادلة القطبية للقطع المكافئ الذي بؤرته في القطب وتبعد عن الدليل مسافة 5سم والدليل عمودي على المحور القطبي ويقع إلى يسار البؤرة.

الحل

الإختلاف المركزي للقطع المكافئ $e = 1$،وقيمة $d = 5$

$$R = \frac{ed}{1-e\cos\theta} \Longrightarrow r = \frac{5}{1-e\cos\theta}$$

بتحويل المعادلة السابقة إلى الصورة الديكارتية نجد أن

$$R - r\cos\theta = 5 \Longrightarrow \sqrt{x^2 + y^2} - x = 5$$

$$\sqrt{x^2 + y^2} = x + 5 \Longrightarrow x^2 + y^2 = (x + 5)^2$$

$$x^2 + y^2 = x^2 + 10x + 25$$

$$\therefore y^2 = 10x + 25$$

تطبيق (8) :

صنف القطع المخروطي $r = \frac{7}{3-4\cos\theta}$ ثم جد معادلته

الحل

$R = \frac{ed}{1-e\cos\theta} \Longrightarrow r = \frac{\frac{7}{3}}{1-\frac{4}{3}\cos\theta}$

$E = \frac{4}{3} > 1$

∴ القطع زائد

ولإيجاد معادلته

$\frac{7}{3} = ed = \frac{3}{4}d \Longrightarrow 12d = 21 \Longrightarrow d = \frac{7}{4}$

$$R = \frac{\frac{7}{3}}{1-\frac{4}{3}\cos\theta} \Longrightarrow r - \frac{4}{3}r\cos\theta = \frac{7}{3}$$

$\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{4}{3}x = \frac{7}{3} \Longrightarrow x^2 + y^2 = (\frac{4}{3}x - \frac{7}{3})^2$

$= \frac{16}{9}x^2 - \frac{56}{9}x - \frac{49}{9}$

$y^2 = \frac{7}{9}x^2 - \frac{56}{9}x - \frac{49}{9}$

$\therefore\ 9y^2 = 7x^2 - 56x - 49$

تطبيق (9) :

صنف القطع المخروطي $r = \frac{5}{4-\cos\theta}$ ثم جد معادلته

الحل

$$R = \frac{ed}{1 - e\cos\theta} \Rightarrow r = \frac{\frac{5}{4}}{1 - \frac{1}{4}\cos\theta}$$

$$E = \frac{1}{4} < 1$$

القطع ناقص.:.

ولإيجاد معادلته

$\frac{5}{4} = ed = \frac{1}{4}d \Rightarrow 4d = 20 \Rightarrow d = 5$

$$R = \frac{\frac{5}{4}}{1 - \frac{1}{4}\cos\theta} \Rightarrow r = \frac{1}{4}r\cos\theta = \frac{5}{4}$$

$\sqrt{x^2 + y^2} - \frac{1}{4}x = \frac{5}{4} \Rightarrow x^2 + y^2 = (\frac{1}{4}x + \frac{5}{4})^2$

$$= \frac{1}{16}x^2 + \frac{5}{16}x + \frac{25}{16}$$

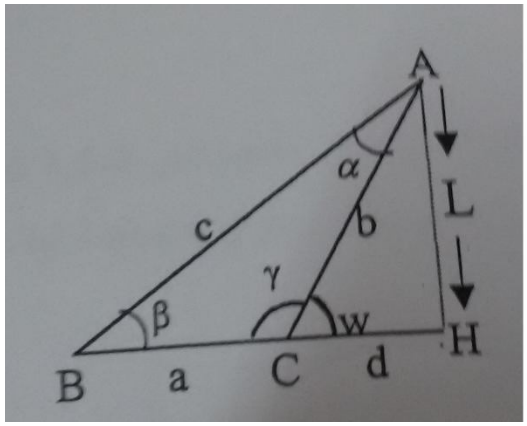
$y^2 = \frac{-15}{16}x^2 + \frac{5}{16}x + \frac{25}{16}$

$\therefore 16y^2 = -15x^2 + 5x + 25$

(3-2-3) علاقات الجيوب وجيوب التمام في مثلث :

نظرية (1) :

إذا كان abc مثلث أطوا ل أضلاعه a, b, cومقاسات زواياه هي: α β γ



$$|bh| = a + d$$

فإن

$$\left.\begin{array}{l} c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma \\ a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\, cos\,\alpha \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\, cos\,\beta \end{array}\right\} \Longrightarrow$$

علاقات جيوب التمام في المثلث

البرهان

نسقط من a عموداً على الضلع المقابل فيقطعه عند h

لنضع

$$|ch| = d \text{ , } |ah| = l$$

من الملاحظ في المثلث القائم $a\ h\ b$ أن:

$$c^2 = l^2 + (a + b)^2 = b^2 - d^2 + a^2 + 2ad + d^2$$

(لأن: $l^2 = b^2 - d^2$ في المثلث القائم ahc)

$c^2 = a^2 + b^2 + 2ab$

لكن $d = b\cos w = -b\cos y$ (لاحظ أن w مكملة y)

$\therefore\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos y$

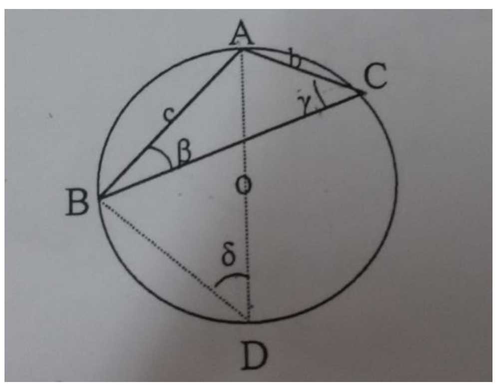
وهو المطلوب إثباته

نظرية (2) :

إذا كان a b c مثلثاً أطوال أضلاعه a, b c وقياس زواياه α β γ فإن

$a / \sin\alpha = b / \sin\beta = c / \sin\gamma \}$

(علاقات الجيوب في مثلث)



البرهان

ندعو هذه العلاقات بعلاقات الجيوب في مثلث a b cنصل a إلى o مركز الدائرة المارة بروؤس المثلث لا a b cيقطع نصف المستقيم a o الدائرة عند النقطة d .لاحظ أن قياس الزاوية b d, b a يساوي $\frac{\pi}{2}$ لأن [ad]قطر في الدائرة.

من الملاحظ أيضاً أن $\delta = y$ لأنهما محيطيتان تحصران القوس a b نفسه

$$\sin\delta = \sin\delta = \sin\gamma = \frac{c}{2r} \Longrightarrow \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$$

(rطول نصف القطر للدائرة المارة برووس المثلث)

بالمثل نجد

$$\frac{b}{\sin\beta} = 2r \qquad , \frac{a}{\sin\alpha} = 2r$$

$$\therefore \frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$$

وهذه العلاقة تسمح بحساب طول نصف قطر الدائرة المارة برووس مثلث إذا علمنا طول ضلع من أضلاعه وقياس الزاوية المقابلة لهذا الضلع .[8]

[8] حساب التفاضل والهندسة التحليلية – د. ابراهيم ديب سرميني - الرياض

الفصل الرابع

حساب المثلثات في التحليل المركب وتحليل المتجهات

(1-4) مقدمة :

هناك علاقة وثيقة بين حساب المثلثات وكل من تحليل المتجهات والتحليل المركب ففي التحليل المركب إستعنا بحساب المثلثات في التحويل بين الاحداثيات القطبية والكارتزية لتسهيل حل المسائل مثل معادلتا كوشي-ريمان القطبية إما فى تحليل المتجهات نجد ان حساب المثلثات يساعد في حل كثير من المبرهنات مثل مبرهنة استوكس.والتى سنتطرق إليها بالتفصيل في هذا الفصل.

(2-4) التحليل المركب :

يتم إستخدام حساب المثلثات في كثير من مسائل التحليل المركب والبراهين لذلك نريد ان نقف على هذه الإستخدامات .

(1-2-4) معادلتا كوشي-ريمان في الصورة القطبية :

معادلتا كوشي-ريمان في الصورة القطبية هما

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \qquad , \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{-1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

البرهان :

ضع

$$x = r\cos\theta \qquad , y = r\sin\theta$$

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad , \ \theta = \tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \times \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \times \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{y}{(x^2+y^2)}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\sin\theta \implies (1)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial r} \times \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \times \frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{x}{(x^2+y^2)}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

$$= \frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\cos\theta \implies (2)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r} \times \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \times \frac{\partial \theta}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r}\left(\frac{x}{r}\right) + \frac{\partial v}{\partial \theta}\left(\frac{-y}{r^2}\right)$$

$$= \frac{\partial v}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta}\sin\theta \implies (3)$$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial v}{\partial r} \times \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \times \frac{\partial \theta}{\partial y}$$

$$= \frac{\partial v}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial v}{\partial \theta}\left(\frac{1}{r}\right)\cos\theta \rightarrow (4)$$

بالتالي فإن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta - \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\sin\theta = \frac{\partial v}{\partial r}\sin\theta + \frac{\partial v}{\partial \theta}\frac{1}{r}\cos\theta$$

$$\therefore \ \frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \qquad , \ \therefore \ \frac{\partial v}{\partial r} = \frac{-1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$$

تطبيق (10) :

أثبت أن $w = z^n$ دالة تحليلية . حيث $n \in N^+$

الحل

نلاحظ أنه إذا إستعملنا الصورة الكارتيزية $z = x + iy$ فإن فك المقدار $(x + iy)^{\mathrm{n}}$ والحصول على u,v أمر صعب ولكن بإستعمال الصورة القطبية فإن الأمر أيسر بكثير حيث $z = r\, e^{i\theta}$.

$$z^n = r^n\, e^{in\theta} = r^n\,(cos\, n\theta + i\ \ sin\, n\theta\,)$$

$$u = r^n\ \cos n\theta \qquad , v = r^n\ \sin n\theta$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = n\, r^{n-1}\ \cos n\theta \qquad , \frac{\partial u}{\partial \theta} = -n\, r^n\ \sin n\theta$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = n\,(\,n-1\,)\, r^{n-2}\ \cos n\theta$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} = -n^2\, r^n\ \cos n\theta$$

$$\therefore\ u_{rr} + \frac{1}{r}\, u_r + \frac{1}{r^2}\, u_{\theta\theta}$$

$$= n(n-1)r^{n-2}\ \cos n\theta + \ n\, r^{n-2}\ \cos n\theta - n^2\, r^{n-2}\ \cos n\theta\ = 0$$

$$\therefore\ \nabla^2 u = 0$$

وكذلك

$$\frac{\partial v}{\partial r} = n\, r^{n-1}\ \sin n\theta \qquad ,\frac{\partial v}{\partial \theta} = n\, r^n\ \cos n\theta$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} = n\,(\,n-1)r^{n-2}\ \sin n\theta$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2} = -n^2\, r^n\ \sin n\theta$$

$$v_{rr} + \frac{1}{r}\, v_r + \frac{1}{r^2}\, v_{\theta\theta}$$

$$= n(n-1)r^{n-2} \sin n\theta + n\, r^{n-2} \sin n\theta - n^2\, r^{n-2} \sin n\theta = 0$$

$$\therefore \nabla^2 v = 0$$

$\therefore u , v$ دوال توافقية

$\therefore w = z^n$ دالة تحليلية

تطبيق (11) :

أثبت أنه إذا كان $f(z) = u(r,\theta) + i\, v(r,\theta)$ دالة تحليلية

فإن

$$\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dz}} = \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \mathrm{r}} \cos\theta - \frac{\partial \mathrm{f}}{\partial \theta} \frac{\sin\theta}{\mathrm{r}}$$

الحل

بإستعمال

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\, \frac{\partial v}{\partial x}$$

فإن

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial r} \times \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial \theta} \times \frac{\partial \theta}{\partial x} = u_r \cos\theta - \frac{1}{r}\, u_\theta \sin\theta$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial r} \times \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial \theta} \times \frac{\partial \theta}{\partial x} = v_r \cos\theta - \frac{1}{r}\, v_\theta \sin\theta$$

$$\therefore \frac{df}{dz} = u_x + i v_x = (u_x + i\, v_x)\cos\theta - \frac{1}{r}\,(u_\theta + i\, v_\theta) \sin\theta$$

$$= \frac{\partial f}{\partial r} \cos\theta - \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\sin\theta}{r}$$

تطبيق (12) :

أوجد $\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{dz}}$ إذا كان $f(z) = z^n$ حيث $n \in N^+$

الحل

$$f(z) = r^n \cos n\theta + i\, r^n \sin n\theta$$

$$\frac{\partial f}{\partial r} = n\, r^{n-1} \cos n\theta + i\, n\, r^{n-1} \sin n\theta$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -n\, r^n \sin n\theta + i\, n\, r^n \cos n\theta$$

بإستعمال الصيغة

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial r} \cos\theta - \frac{\partial f}{\partial \theta} \frac{\sin\theta}{r}$$

نجد أن

$$\frac{\mathrm{df}}{\mathrm{dz}} = (n\, r^{n-1} \cos n\theta + i\, n\, r^{n-1} \sin n\theta) \cos\theta - (-n\, r^n \sin n\theta + i\, n\, r^n \cos n\theta) \frac{\sin\theta}{r}$$

$$= n\, r^{n-1} (\cos n\theta + i \sin n\theta) \cos\theta - n r^{n-1} (-\sin n\theta + i \cos n\theta) \sin\theta$$

$$= n\, r^{n-1} e^{in\theta} \cos\theta - n\, r^{n-1} i(\cos n\theta + i \sin n\theta) \sin\theta$$

$$= n\, r^{n-1} e^{in\theta} \cos\theta - n r^{n-1} e^{in\theta}\, i \sin\theta$$

$$= n\, r^{n-1} e^{in\theta} (\cos\theta - i \sin\theta)$$

$$\frac{df}{dz} = n\, r^{n-1} e^{in\theta} e^{-i\theta} = n\, r^{n-1} e^{i(n-1)\theta} = n\, z^{n-1} \qquad (9)$$

$$\boxed{\frac{d}{dz}(z^n) = n\, z^{n-1}}$$

---

(9) علم التحليل المركب _ أ.د. مجدي الطويل _ص(60-65)

(3-4) تحليل المتجهات :

يستخدم حساب المثلثات في تحليل المتجهات أيضاً حيث أنه يساعد في تحويل المتجهات من صوره إلى صوره أخرى وأيضاً يستخدم في تيسير البراهين .

(1-3-4) الإحداثيات الإسطوانية :

هي الإحداثيات التي يتعين فيها موضع النقطة p في الفراغ بالإحداثيات (r , θ , z) .

(1-1-3-4) العلاقة بين الإحداثيات الإسطوانية والإحداثيات الكارتيزية :

للتحويل من نظام الإحداثيات الكارتيزية إلى نظام الإحداثيات الإسطوانية نستخدم الصيغ التالية

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} \qquad , z = z$$

$$\theta = \begin{cases} arc \ \tan\frac{y}{x} & , if \ 0 \leq x; \\ \pi - arc \ \tan\frac{y}{x} & , if \ 0 > x; \end{cases}$$

تطبيق(14) :

حول الإحداثيات الكارتيزية $(\frac{1}{2} , \frac{-1}{2} , 0) = (x , y , z)$ إلى إحداثيات إسطوانية

الحل

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{(0)^2 + (\frac{-1}{2})^2} = \frac{-1}{2}$$

$$\theta = arc \ \tan\frac{y}{x} = arc \ \tan\frac{\frac{-1}{2}}{0} = \frac{3\pi}{2}$$

$$z = \frac{1}{2}$$ (10)

---

(10) المتجهات والممتدات التطبيقية _ د. صفوت السيوفي _ الطبعة الأولى _ القاهرة _ دار الكتب العلمية للنشر والتوزيع _ ص(20-24)

(4-2-2) الإحداثيات الكروية :

يتم تعيين موضع نقطة مادية متحركة أوثابتة في الفراغ ذي الثلاثة أبعاد بالإحداثيات

$(r, \theta, \emptyset)$ *والتي تسمى بالإحداثيات الكروية .*

(4-2-2-1) العلاقة بين الإحداثيات الكروية والإحداثيات الكارتيزية :

للتحويل من نظام الإحداثيات الكارتيزية إلى نظام الإحداثيات الكروية نستخدم الصيغ التالية :

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \qquad , \theta = arc\ \tan\frac{y}{x}$$

$$\emptyset = arc\ \cos\frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

تطبيق(15) :

حول المعادلات الكارتيزية التالية إلى نظام كروي

$$z^2 = x^2 \mp y^2$$

الحل

$$x = r\ \sin\emptyset\ \cos\theta \qquad , x^2 = r^2\ \sin^2\emptyset\ \cos^2\theta$$

$$y = r\ \sin\emptyset\ \sin\theta \qquad , y^2 = r^2\ \sin^2\emptyset\ \sin^2\theta$$

$$z = r\ \cos\theta \qquad , z^2 = r^2\ \cos^2\theta$$

بإستخدام العلاقات السابقة تتحول المعادلة $z^2 = x^2 - y^2$ *إلى الشكل التالي في نظام*

الإحداثيات الكروية

$$\cos^2\emptyset = \sin^2\emptyset\ \cos^2\theta - \sin^2\emptyset\ \sin^2\theta$$

$$= \sin^2\emptyset\ (\cos^2\theta - \sin^2\theta)$$

$$= \sin^2\emptyset\ \cos 2\theta$$

$\frac{\cos^2 \emptyset}{\sin^2 \emptyset} = \cos 2\theta \implies \cot^2 \emptyset = \cos 2\theta$

$\therefore \cos 2\emptyset - \cos 2\theta = 0$ [11]

بالمثل المعادلة $z^2 = x^2 + y^2$ تتحول إلى الشكل التالي في الإحداثيات الكروية

$\cos^2 \emptyset = \sin^2 \emptyset \cos^2 \theta + \sin^2 \emptyset \sin^2 \theta$

$= \sin^2 \emptyset (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \sin^2 \emptyset$

$\therefore \cos^2 \emptyset - \sin^2 \emptyset = 0 \rightarrow \cos 2\emptyset = 0$

(3-3-4) مبرهنة ستوكس :

دوران المتجه A حول المنحنى L هو :

$$\oint_c A \ dr = \iint_s curl\, A \,.n\, ds$$

تحول هذه المبرهنة التكامل الخطي لحقل متجهي حول المنحنى المغلق c إلى تكامل ثنائي لسطح محدود بالمنحنى C .

A متجه ، C منحنى مغلق ، S السطح المحصور أو المحدود بالمنحنى C ،

n متجه الوحدة لجزء السطح ds و

$$dr = dx\, i + dy\, j + dz\, k$$

(المنحنى c هو المنحنى المحيط بالسطح S)

تطبيق (16) :

نفرض s هي نصف كره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ و $z \geq 0$ والمتجه A هي :

$$\vec{A} = (2x - y)i - y\, z^2\, j - y^2\, z\, k$$

[11] المتجهات والممتدات التطبيقية (مرجع سابق) – ص(25-30).

المطلوب تحقيق صحة مبرهنة ستوكس

الحل

المنحنى c هو دائرة معادلتها $x^2 + y^2 = 1$ ومعادلة هذه الدائرة هي كذلك :

$$x = \cos t \qquad , y = \sin t$$

$$A \,.\, dr = [(2x - y)i - y\,z^2\,j - y^2\,z\,k][dxi + dyj + dzk]$$
$$= (2x - y)\,dx - y\,z^2\,dy - y^2\,z\,dz$$

$$\oint_c A \,.\, dr = \oint_c (2x - y)dx - yz^2\,dy - y^2 z\,dz$$

$$= \int_0^{2\pi} (2\cos t - \sin t\,)\,(-\sin t)\,dt = \pi$$

$$\therefore \oint_c A \,.\, dr = \pi$$

$$curl\,A = \nabla \times \vec{A} = \begin{bmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x - y & -yz^2 & -y^2 z \end{bmatrix} = k$$

$$\iint_s curl\,A \,.\, n\;ds = \iint_s k \,.\, n\;ds = \iint_s ds$$

$$k \,.\, n = 1$$

التكامل الأخير $\iint_s dx$ هو مساحة الدائرة المحدودة بالمنحنى C والذي كان الدائرة

$$x^2 + y^2 = 1$$

$$\therefore \iint_s curl\,A \,.\, n\;ds = \pi$$

تساوي هذه النتيجتين تأكد صحة مبرهنة ستوكس لهذه المتجهه وهذا السطح[12] .

(4-3-4) الفيض :

[12] تحليل المتجهات _ جلال الحاج _ ص(32-33).

تصور متجه تنفذ من سطح خاص ، يمكن أن تكون تلك المتجه سرعة مائع أو تشعشع حراري أو مغناطيسي ، الفيض المتجهي df للمتجه A النافذ من جزء السطح $d\sigma$ هي :

$$df = A \,.\, d\sigma = A \,.\, n\, ds \;\rightarrow df = A \cos\theta \;ds$$

(n متجه الوحده)

تطبيق (17) :

الفيض على إسطوانة نصف قطرها R وإرتفاعها H ومركز القاعدة السفلي منطبق على مركز الإحداثي .

$$r_1 = R \;\rightarrow\; a_1 \,.\, n = \; r_1 \;\cos\frac{\pi}{2} = 0$$

$$r_2 = \;\frac{R}{\cos\beta} \;\rightarrow\; a_2 \,.\, n = \; r_2 \;\cos\beta \;= R$$

$$r_3 = \;\frac{H}{\cos\theta} \;\rightarrow\; a_3 \,.\, n = \; r_3 \;\cos\theta \;= H$$

$$\oiint_s \; a \;\; d\sigma = \iint_{s1} a \;\; d\sigma + \;\iint_{s2} a \;\; d\sigma + \;\iint_{s3} a \;\; d\sigma$$

سطح الإسطوانة S يساوي مجموع سطح القاعدة العليا S_3 والسطح الجانبي S_2 وسطح القاعدة السفلى S_1 .

$$\therefore \oiint_s \; a \;\; d\sigma = \;\iint_{s1} a_1 \,.\, n \;\; ds + \;\iint_{s2} a_2 \,.\, n \;\; ds + \;\iint_{s3} a_3 \,.\, n \;\; ds$$

$$\oiint a \;\; d\sigma = 0 + R \iint_{s2} ds + \;H \iint_{s3} ds$$

$$\oiint a \;\; d\sigma = R\;(2\pi RH) + \;H\;(\pi R^2) = \;3H\pi R^2$$

∴ الفيض على سطح الإسطوانة يساوي $3H\pi R^2$. [13]

---

(13) تحليل المتجهات (مرجع سابق)- ص(32-33).

الفصل الخامس

النتائج والتوصيات

(1-5) تمهيد :

بعد أن تناول الباحثون في الفصول السابقة دراسة علم حساب المثلثات وعلاقته بالحسبان والهندسة التحليلية والتحليل المركب وتحليل المتجهات .

نصل إلى نهاية هذا البحث ممثلاً في فصله الخامس والذي يتضمن النتائج والتوصيات .

(2-5) النتائج :

1- هنالك أهميه لعلم المثلثات في دراسة الحسبان وذلك بتبسيط حل مسائل التفاضل والتكامل عن طريق المتطابقات الأساسية.

2- وجد الباحثون دور لعلم المثلثات في دراسة الهندسة التحليلية وذلك في التحويل بين الإحداثيات من كارتيزية إلى قطبية والعكس .

3- إستفاد الباحثون من علم المثلثات في تحليل المتجهات في برهنة بعض المبرهنات مثل مبرهنة ستوكس وفي التحليل المركب في معادلتي كوشي ريمان القطبية .

4- وجد الباحثون أهمية لدراسة علم المثلثات كعامل مساعد في فروع الرياضيات المختلفة وحل المسائل المعقدة.

(3-5) المقترحات والتوصيات :

1- من خلال الدراسة يوصي الباحثون بدراسة شاملة لعلم المثلثات وذلك لإرتباط عدد من العلوم به .

2- يوصي الباحثون بدراسة تطبيقات علم المثلثات مثل إستخدامها في بناء الإهرامات .

3- يوصي الباحثون أيضا بدراسة شامله للزوايا الحافظة .

المراجع :

1- أساسيات التفاضل والتكامل – د.خالد قاسم سمور – الطبعة الثانية 2004 – دار الفكر .

2- أساسيات التفاضل – د.بدر الدين محمد – الطبعة الاولى (2011م-1432ه) – عمان – الأردن .

3- التحليل المتجهي (p d f) – د.جلال الحاج .

4- التفاضل والتكامل – د. مصباح جمعه – د.محمد خليل ابوزلطه – د.زياد عبد الكريم القاضي – الطبعة الأولى (2009م-1430ه) – عمان – مكتبة المجتمع العربي 2008 .

5- حساب المثلثات – د.فرانك ابرز – د. روبرت موتر .

6- مقدمة في علم التحليل المركب – د.مجدي الطويل (أستاذ الرياضيات بقسم الرياضيات الهندسية – كلية الهندسة – جامعة القاهرة) .

7- ويكيبيديا – أساسيات حساب المثلثات – د.إسلام عبد الرحيم .