بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا

كلية التربيـــة

قسم العلــوم

شعبة الريــاضيــات

بحث تكميلي لنيل درجة البكالريوس مرتبة الشرف بعنوان

الانعكاس في التحويلات الهندسية وتطبيقاتها

Reflection In Remittances Engineering And Its Application

إعداد:

آلاء عبـد الله محمـد أحمد عبد الله

هديـة دفــع الله محمـد الأميـــن

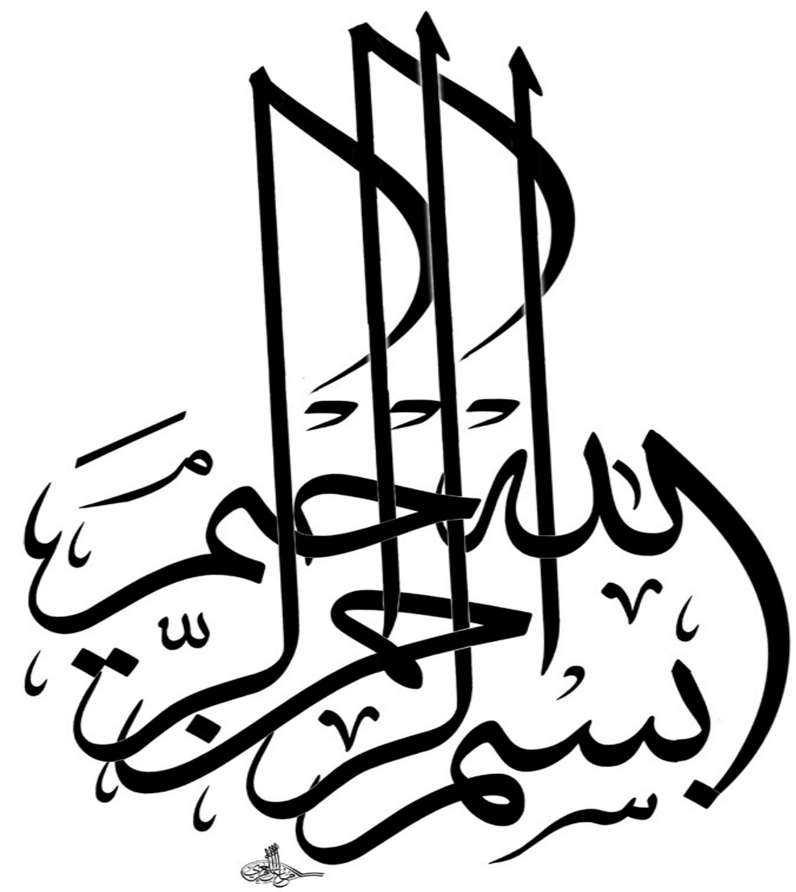
نهـــــى أحمــــد عبــد الواحــد

مرام عبد الرحمن عبد الحليم عبد الله

إشــــراف:

بروفيسر:عمر الفـــاروق حمـــزة

أغسطس 2015م


بسم الله الرحمن الرحيم

الآيــــــــة

قال تعالى:

ـُوا سُبْحَانَكَ لاَ عِلْمَ لَنَا إِلاَّ مَا عَلَّمْتَنَا إِنَّكَ أَنتَ الْعَلِيمُ الْحَكِيمُ"

صدق الله العظيم

سورة البقرة الآية (32)

ا لإ هـد ا ء

إلى أحق الناس بحسن صحابتي
التي أحسب أن دعواها هي الزاد الحقيقي لي
... أطال الله في عمرها ...
تضيء طريقي في الظلام فاستهدي...
فمن كفها كم ذا نعمت بسلسل ...
ومن روحها كم ذا اهتديت إلى رشدي...
أمهاتنا
يا من أتدثر فيكم هاربا من عواصف الوحشة
راكضا إلى حقولكم المشتاقة إليكم
يا نبع المحبة الذي لا ينضب
وأساس الإحساس بالأمان
آبائنا
إلى مصدر فخرنا وإعزازنا
تلك الشموع التي أضاءت دربنا
أخواننا
إليكم يا حملة مشاعل العلم مبددي ظلام الجهل
الشموع التي تحترق لتنير دروب الآخرين
إليكم أساتذتنا الأجلاء
إلى كل من وقف بجانبنا ومد لنا يد العون
نهديكم هذا العمل المتواضع

الشكر والعرفان

الحمد لله أولا وأخيرا الذي أعاننا على إتمام هذا البحث وإلى الذي تتضاءل الأحرف والكلمات في أن ترد إليه بعض ما أعطى لنا وما بذل من أجل أن يكون هذا البحث بحثا علميا بفضل

بروفيسر/ عمر الفـاروق حمــزة

ذلك الطراز الرفيع ذو العلم العزيز والطبع النبيل الذي ما بخل علينا بعنايته وإرشاداته ونعجز عن شكره فله منا كل الاحترام والتقدير.

ونتقدم بالشكر لأسرة مكتبة التربية بجامعة السودان، وأيضا الشكر لزملائنا وأصدقائنا بالكلية.

الفهرس

الفصل الأول

المقدمة

أهداف البحث:

- التعرف على الانعكاس.
- التعرف على خواص الانعكاس.
- استنتاج الانعكاس في الخط المستقيم والمحورين.
- توضيح أهمية مصفوفة الانعكاس والانعكاس الانزلاقي.
- معرفة تطبيقات الانعكاس في الفيزياء والعلوم الأخرى.
- أهمية الانعكاس في حياتنا اليومية.

أهمية البحث:

تلعب التحويلات الهندسية دورا هاما وبالأخص الانعكاس في المثلثات في مرحلة الأساس والثانوي.

ويستفاد من الانعكاس في المقدرة على تحديد بعد الأجسام والأعماق وتحديد أماكن المياه الجوفية وأماكن النفط في باطن الأرض وفي الكشف عن نوع الجنين قبل الولادة وأيضا في الكشف عن عيوب الصناعة.

كما يستخدم في حياتنا اليومية مثل انعكاس الجسم في المرآة أو الماء وغيرها.

مشكلة البحث:

التحويلات الهندسية من الأشياء الرئيسية المهملة في المناهج سواء كان في مرحلة الأساس أو الثانوي أو المرحلة الجامعية فهي مهملة تماما.

المستخلص :

تناولنا في هذا الدراسة ماهية الإنعكاس ف التحويلات الهندسية . وايضاً تناولنا الإنعكاس في المحاور الإحداثية السيني والصادي والاثنين معاً . كما تطرقنا لمصفوفة الإنعكاس والإنعكاس الإنزلاقي . ولأهمية الإنعكاس تحدثنا عن تطبيقاتة في علم الفيزياء في إنعكاس الضوء والصوت ، وإستخداماته في التنقيب عن النفط وتحديد بعد الطائرة بالرادار .

مقدمة:

الانعكاس في الرياضيات هو الدالة التي تحول شكل ما إلى صورة مرآته المعكوسة.

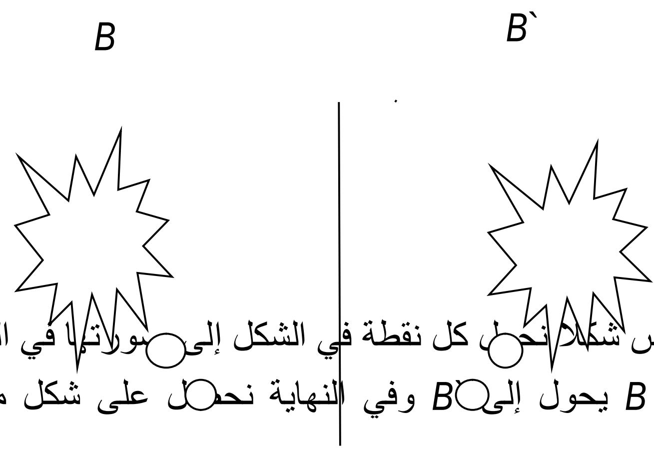
بالمفهوم الهندسي لإيجاد انعكاس لنقطة ما يتم إسقاط خط عمودي على الخط أو المستوى المستعمل كمحور الانعكاس ومن ثم متابعة الخط بشكل مستقيم في الجهة الأخرى وبنفس المسافة. ولتحديد الانعكاس لرسم ما يتم تحديد انعكاسات كل النقاط المؤلفة له.

- الانعكاس بالمستقيم m هو تحويل أو نسخ يحول كل نقطه في المستوى إلى صورتها في المرآة بالنسبة للمستقيم m.

- المستقيم m يسمى خط الانعكاس.

الأشكال تحول أو تنسخ إلى صورتها في المرآة لأنها مركبة من نقاط.

مثال لانعكاس نقاط وأشكال:

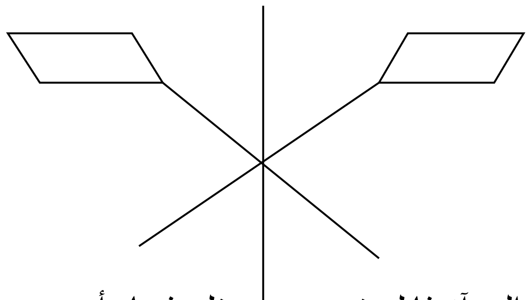


عندما نعكس شكلا نحول كل نقطة في الشكل إلى صورتها في المرآة مثلا A يحول إلى $A`$ و $B$ يحول إلى $B`$ وفي النهاية نحصل على شكل مطابق للشكل الأصلي.

- من المهم أن نشير إلى أن الانعكاس يعمل على جهتي خط الانعكاس في آن واحد.

- بشكل حدسي يمكن النظر إلى الانعكاس على أنه عملية انعكاس في مرآة ثنائية الجانب.

كل جهة من المرآة ينعكس في الجهة الأخرى, والخط الذي تقف عليه المرآة هو خط الانعكاس وهو يبقى في مكانه. مثال:



الانعكاس وعناصره:

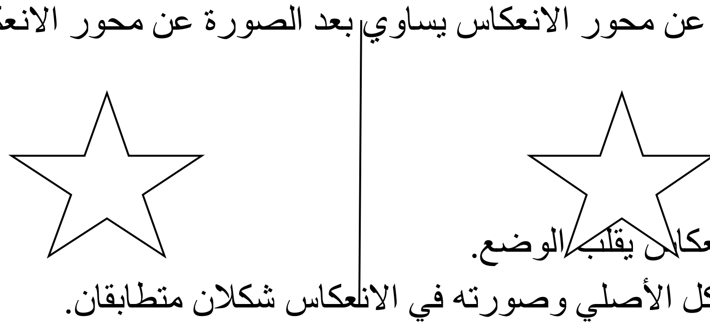
عندما تقف أمام المرآة فإنك ترى صورتك فيها, أو عندما تنظر إلى سطح بحيرة أو بركة فإنك ترى صورتك وصورة الأشجار التي حولك في ماء البحيرة, وكذلك عند النظر في سطح مصقول فإنه يعكس صورتك .

إن ما نشاهده في المرآة أو البحيرة إنما هو الانعكاس ويسمى سطح المرآة بمحور الانعكاس, أما عناصر الانعكاس فهي: الجسم الأصلي, صورة الجسم, محور الانعكاس.

خصائص الانعكاس:

أ- القطعة المستقيمة الواصلة بين الجسم (النقطة) وصورته تكون عمودية على محور الانعكاس.

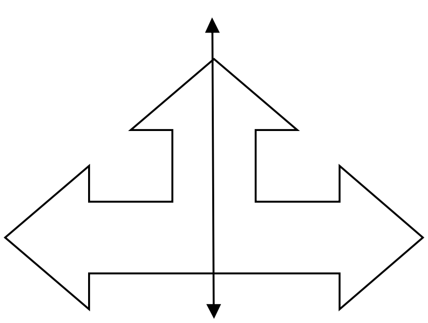
ب- بعد القطعة عن محور الانعكاس يساوي بعد الصورة عن محور الانعكاس.

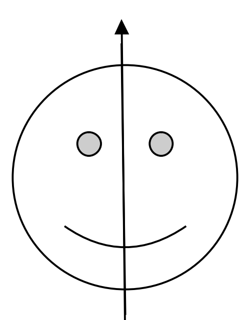


ت- الانعكاس يقلب الوضع.

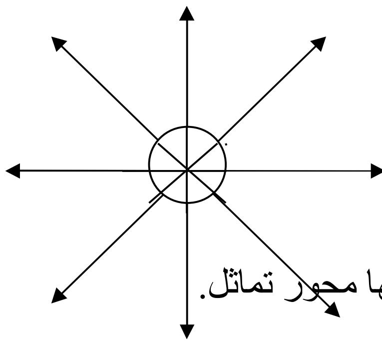
ث- الشكل الأصلي وصورته في الانعكاس شكلان متطابقان.

هناك حالات خاصة للانعكاس وهي: الأشكال المتماثلة حول مستقيم يسمى هذا المستقيم محور تماثل, مثال على ذلك:





وقد يكون للشكل أكثر من محور تماثل واحد, مثال:



وهنالك أشكال لا يوجد لها محور تماثل.

مصطلحات البحث:

التحويلة الهندسية:

الراسم $R_l: R^2 \to R^2$ يسمى تحويلة هندسية إذا كان

(1) $R_l(\vec{a} + \vec{b}) = R_l(\vec{a}) + R_l(\vec{b}), \qquad \forall\, \vec{a}, \vec{b} \in R^2$

(2) $R_l(K\vec{a}) = KR_l(\vec{a}), \qquad \forall\, \vec{a} \in R^2, \qquad K \in R^2 - [0]$

تساوي قياسي:

إذا كان $a, b \in L$ و $a', b' \in L'$ حيث أن L' هو انعكاس للخط L نقول أن الانعكاس تساوي قياسي إذا كان $\overrightarrow{ab} = \overrightarrow{a'b'}$.

محور الانعكاس:

هو الخط المستقيم الذي يمثل مركز الانعكاس بحيث يتوسط الخط بين النقطة وانعكاسها.

زاوية الانعكاس:

هي الزاوية المحصورة بين محور الانعكاس والقطعة المستقيمة الواصلة بين الجسم وصورته.

مصفوفة الانعكاس:

نفرض أن $\underline{L}$ خط مستقيم مار بنقطة الأصل o ويصنع زاوية θ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

لتكن $G'(X',Y')$ هي صورة $G(X,Y)$ بالانعكاس بالنسبة للخط $\underline{L}$ ولتكن النقطة $\underline{K}'$ هي صورة النقطة K التي هي موقع العمود من النقطة G على محور X .

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

تسمى مصفوفة الانعكاس.

الانعكاس الإنزلاقي:

الراسم G_R يسمى انعكاس انزلاقي إذا وجد خط L وقطعة مستقيمة $\overrightarrow{ab}$ موازية للخط L بحيث أن $G_R : T_{ab} o\ R_l$ الخط L يسمى محور الانعكاس الانزلاقي.

الانعكاس:

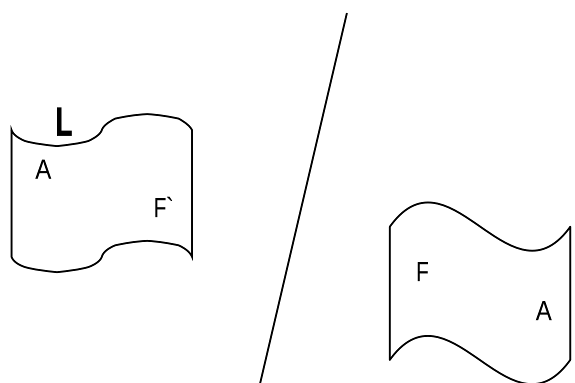
تعريف: يقال لنقطة $A` \in R^2$ أنها صورة إنعكاسية لنقطة $A \in R^2$ بالنسبه للخط $L \in R^2$ إذا تحقق:

i. L عمودي على القطعة المستقيمة $AA`$.

ii. L هو المنتصف العمودي للقطعة المستقيمة $AA`$ وفي هذه الحالة فإن الخط L يسمى محور الانعكاس ***reflection axis*** أو محور التماثل ***of symmetry axis*** ويرمز للانعكاس في الخط L بالرمز R_L ويسمى راسم الإنعكاس.

تعريف: إذا كان F شكل هندسي في المستوى R^2 , $L \in R^2$ فإن المجموعة $F`$ المعرفة كما يلي:

$$F`=\{A` : R_L(A)=A`, \forall\ A \in F\}$$



شكل (1)

تعريف: التحويل المعرف في تعريف (1) يسمى تحويل الانعكاس للمستوى R^2 أي أن

$$R_L : R^2 \longrightarrow R^2$$

وبالتالي فإن الانعكاس تحويل هندسي.

من تعريف الانعكاس والمفاهيم الأساسية التي يعرفها الطالب في الهندسة الأولية يمكن إثبات النظرية الآتية:

نظرية (1): الانعكاس R_L للمستوى R^2 بالنسبه للخط L يحقق ما يأتي:

$$\forall\ A \in L \longrightarrow R_L\ A=A$$

خواص الانعكاس:

الانعكاس تحويلة هندسية مستوية.

1. الانعكاس تساوي قياسي.
2. الانعكاس يحفظ مقياس الزاوية.
3. الانعكاس تحويلة مضادة.
4. الانعكاس يحفظ استقامة النقط, أي أنه يرسم كل مجموعة من النقط المستقيمة فوق مجموعه من النقط المستقيمة.
5. الانعكاس يحفظ البنية. أي أنه إذا كانت *A,B,C* ثلاث نقاط على استقامة واحدة وكانت *C* تقع بين *A,B* وكانت R_L*(A)=A*\` و $R_L$*(B)=B*\` و R_L*(C)=C*\` فإن *C*\` تقع بين *A*\`,*B*\`.
6. جميع نقط الخط *L* صورا لنفسها تحت تأثير راسم الانعكاس R_L فهي تبقى ثابتة أو نقول أن الإنعكاس له نقطه ثابتة على محور الانعكاس.

مثال: إذا كان *A,B* نقطتين في جهة واحدة من خط *L* فأوجد نقطة *C∈L* بحيث يكون $\overline{AC}+\overline{CB}$ أصغر ما يمكن.

الحل:

نفرض أن R_L*(B)=B′*

فإذا كانت *g* إحدى نقط L في

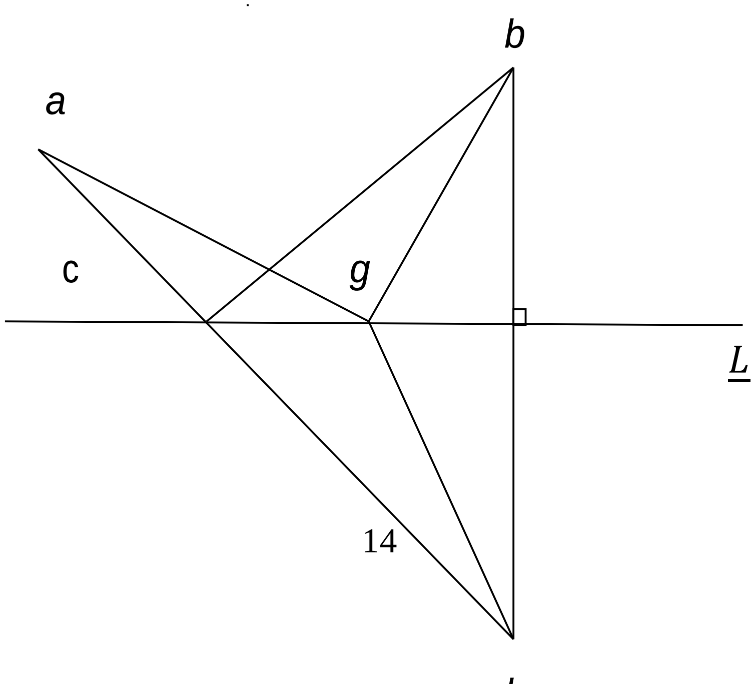
$\overline{ag}+\overline{gb}=\overline{ag}+\overline{gb'} > \overline{ab'}$

لكن $\overline{ac}+\overline{cb}=\overline{ac}+\overline{cb'}=\overline{ab'}$

ومن ثم فإن

$\overline{ag}+\overline{gb} > \overline{ac}+\overline{cb}$

أي أن النقطة *c*=$\overline{ab'}$ ∩ $\underline{L}$ هي التي تجعل $\overline{ac}+\overline{cb}$ أصغر ما يمكن



مثال:

إذا كانت Z هي مجموعة رواسم الانعكاس في مستوى فأثبت أن $(z,0)$ يؤلف زمرة غير إبدالية.

الحل:

1. خاصية الإغلاق:

نفرض أن $R_m , R_L \in R$

$(R_m o R_L)(g)=R_m(R_L(g))=R_m(g')=(g'')$

$\forall\, g\in R^2$

أي أنه يوجد انعكاس وحيد ويرسم g إلى g'' وبديهي أن محور هذا الانعكاس الجديد هو العمود على $\overline{gg''}$ من منتصفه.

2. خاصية الدمج:

نفرض أن $R_n , R_m , R_L \in Z$ ولأي نقطه $g\in R^2$ نفرض أن $R_L(g)=g'$, $R_m(g')=g''$, $R_n(g'')=g'''$ وبالتالي

فإن $(R_n o(R_m o R_L))(g)=R_n((R_m o R_L)(g))=R_n(R_m(R_L(g))$

$=R_n(R_m(g'))=R_n(g'')=g'''$

أيضا

$(R_n o R_m)o R_l))(g)=(R_n o R_m)o(R_L(g))=(R_n o R_m)(g')=R_n(R_m(g'))=R_n(g'')=g'''$

أي أن

$R_n o(R_m o R_L)(g)=((R_n o R_m)o R_L))(g)$

3. خاصية العنصر المحايد:

نفرض أن: $R_L(g)=g'$

$(R_L O R_L)(g)=R_L(R_L(g))=R_L(g)=g=I(g)$

حيث I هو راسم الوحدة أي أن $R_L o R_L=R^2{}_L=I$

وبلغة أخرى فإن راسم الانعكاس $R^2{}_L$ هو التحويلة المحايدة للنظام $(Z,0)$ لأن

$\forall\, R_L \in Z$ $R_L o\, I=I\, o R_L$

4. خاصية المعكوس:

حيث أن $R_L o R_L$=1 فإن R_L=$R^{-1}{}_L$ أي أنه $\forall R_L \in Z$ يوجد معكوس $R^{-1}{}_L \in Z$ بحيث أن $R_L o R^{-1}{}_L = 1 = R^{-1}{}_L o R_L \ ,\forall R_L \in Z$

من الخواص السابقة نستنتج أن النظام يؤلف زمرة.

5. خاصية الإبدال:

لاحظ أن: $R_L o R_m \neq R_m o R_L$ إلا إذا كان *L* عمودي على *m* لذلك فالنظام (z,0) يولف زمرة غير إبدالية.

الفصل الثاني
الانعكاس في المحاور الإحداثية

الانعكاس في محاور الإحداثيات:

نفرض أن محور الانعكاس هو محور x فإن صورة أي نقطة $(x,y)\in R^2$ بالإنعكاس في محور X هي $(X,-Y)$ ويرمز للانعكاس في هذه الحالة بالرمز R_X أي أن:

$$R_X:R^2 \longrightarrow R^2$$

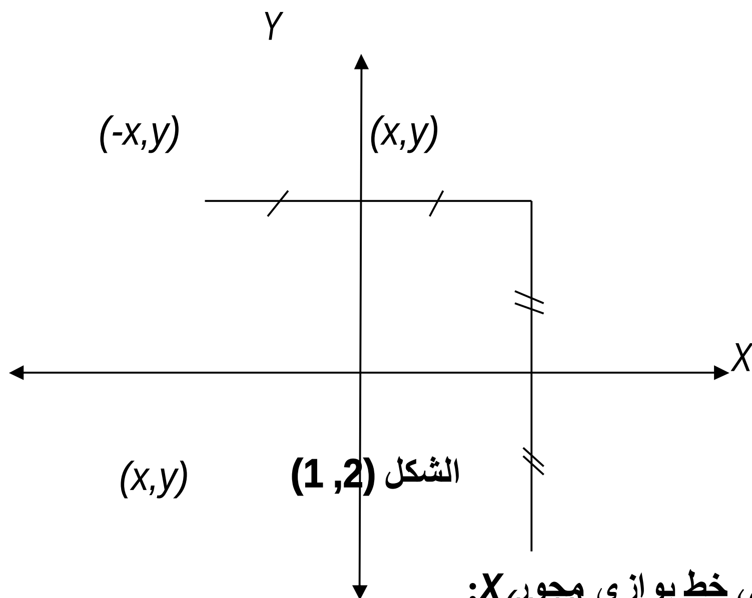
$$R_X(x,y)=(x,-y)$$

بالمثل فإن الانعكاس في محور Y هو R_Y ويعطى بالآتي :

$$R_Y : R^2 \longrightarrow R^2$$

$$R_Y(x,y)=(-x,y)$$

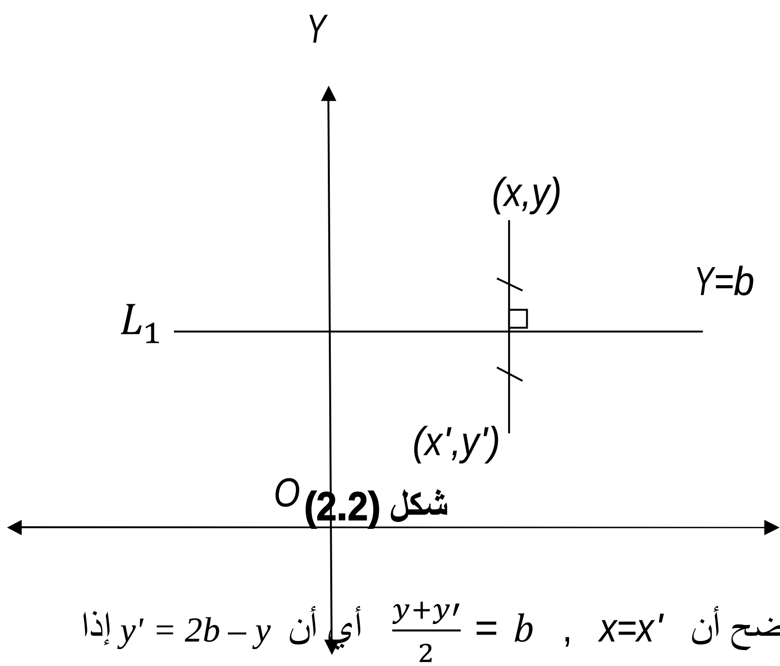
كما هو موضح بالشكل:



الشكل (1 ,2)

الانعكاس في خط يوازي محور X:

نفرض أن L_1 هو محور إنعكاس يوازي محور x ولتكن معادلته $y=b$ ونأخذ نقطة (x,y) في المستوى R^2. من هندسة الشكل (2.2):



شكل (2.2)

يتضح أن $x=x'$, $\frac{y+y'}{2} = b$ أي أن $y' = 2b - y$ إذا

$$R_1(x,y) = (x',y') = (x, 2b - y)$$

مثال:

أوجد صورة النقط التالية تحت تأثير انعكاس محور السينات:

i. $a = (-5,4)$.

ii. $b = (6,2)$.

iii. $c = (-3,-7)$.

الحل:

i. $R_a = (-5,-4)$

ii. $R_b = (6,-2)$

iii. $R_c = (-3,7)$

مثال:

لتكن $R^2 \epsilon g(x,y)$, $R_L(g) = g'$ أوجد $g(x', y')$

إذا كان: $\underline{L} = \{ (x, y): y = b\}$ حيث $a, b \in R$

الحل:

لنفرض أن $g'(x', y') \in R^2$, K هي منتصف القطعة المستقيمة $\overline{g\,g'}$ إحداثيات k هي $(\frac{x+x'}{2}, \frac{y+y'}{2})$ من تعريف الانعكاس نجد أن: $x = x'$

$\therefore$ إحداثيات k هي $(x, \frac{y+y'}{2})$

$\because$ $k \epsilon L$ فان $b = \frac{y+y'}{2}$

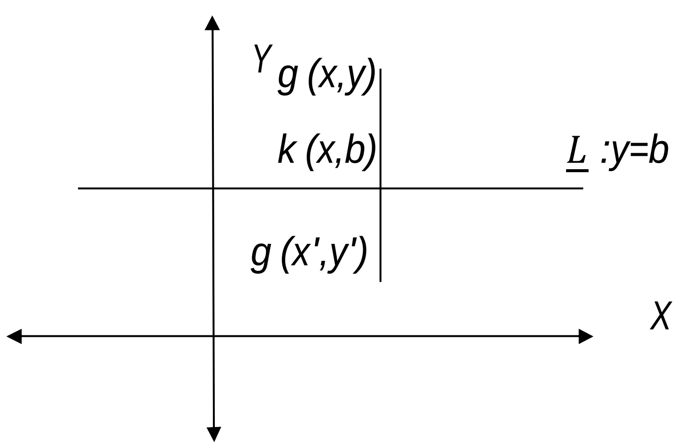
أي أن $y' = 2b - y$

بالتالي فإن

$g'(x, 2b-y)$

وبعبارة أخرى نكتب

$R_{\underline{L}}(x,y) = (x, 2b-y)$



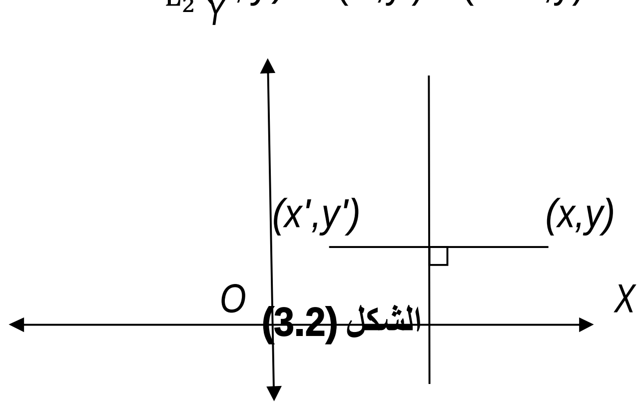
الانعكاس في خط يوازي محور Y:

نفرض أن L_2 هو محور إنعكاس يوازي محور *Y* ولتكن معادلته *x = a* ونأخذ نقطة *(x,y)* في المستوى R^2. من هندسة الشكل (3.2)
Y

يتضح أن: $\frac{x+x'}{2} = a$, y=y'

أي أن x' = 2a-x إذن:

$$R_{L_2}(x,y) = (x',y') = (2a-x,y)$$



الشكل (3.2)

مثال:

أوجد صور النقط التالية تحت تأثير الانعكاس في محور Y :

i. a= (2,6)
ii. b= (-3,8)
iii. c= (-1,0)

الحل:

i. R_a=(-2,6)
ii. R_b=(3,8)
iii. R_c=(1,0)

مثال:

لتكن $g(x,y)\epsilon R^2$, $R_L(g)=g'$

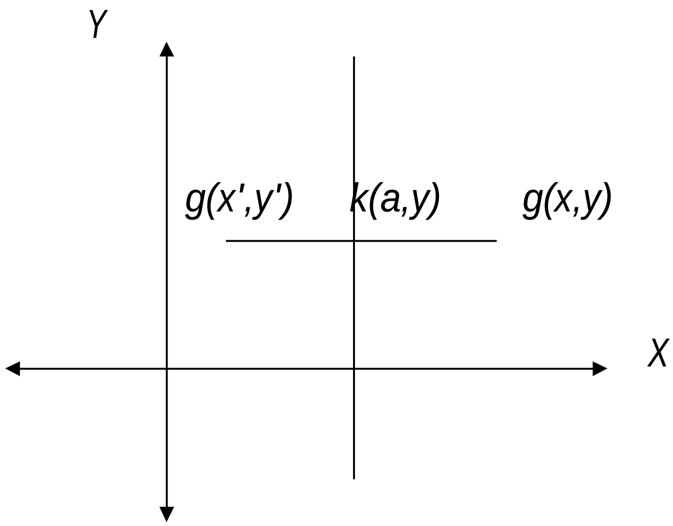
أوجد *g(x',y')* إذا كان: $\underline{L}=\{(x,y):x=a\}$ حيث $a \epsilon R$

الحل:

لنفرض أن $g'(x',y')\epsilon R^2$, *K* هي منتصف القطعة المستقيمة $\overline{gg'}$

إحداثيات *k* هي $(\frac{x+x'}{2} , \frac{y+y'}{2})$

من تعريف الانعكاس $y = y'$, ∴ إحداثيات *k* هي $(\frac{x+x'}{2} , y)$



∵ $k \in \underline{L}$ فإن $a=\frac{x+x'}{2}$

أي أن: $x'=2a-x$, وبالتالي فإن $g'(2a-x , y)$

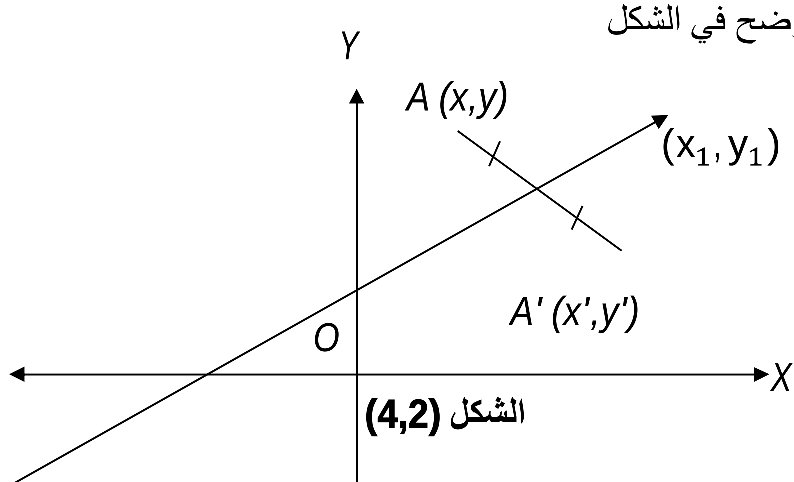
وبعبارة أخرى تكتب

$R_L(x,y)=(2a-x , y)$

الانعكاس في خط مستقيم مائل:

نفرض أن L خط مستقيم معادلته $y=mx+c$ والمطلوب إيجاد صورة النقطة (x,y) بالانعكاس في الخط L ولنفرض أن الصورة هي (X',Y') أي أن $R_L(x,y)=(x',y')$

كما هو موضح في الشكل



الشكل (4,2)

مثال:

أوجد القاعدة التي تعرف الانعكاس في الخط المستقيم L إذا كان $g\ (x,y)\in R^2$,

$R_L(g)=g'$

i. $L = \{ (x,y): y = x \}$

ii. $L=\{ (x, y): y = -x \}$

الحل:

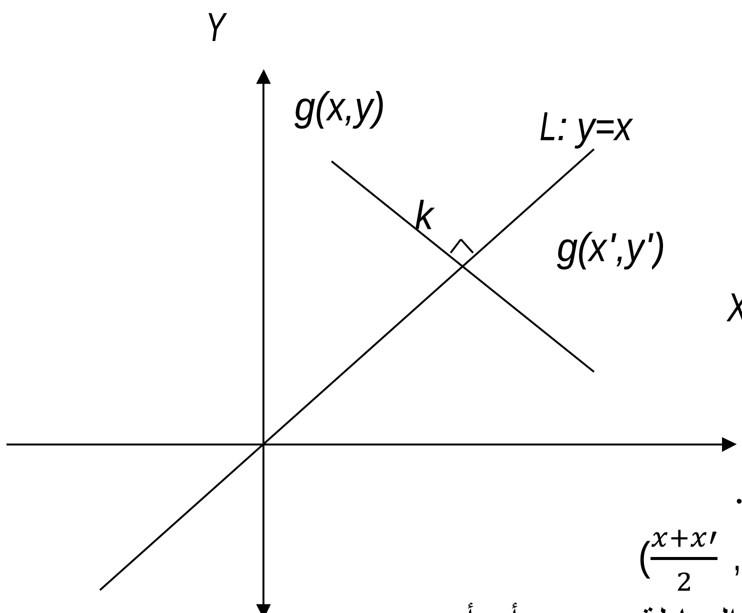
i. نفرض أن $g(x,y) \in R^2$, K منتصف القطعة المستقيمة $\overline{gg'}$ ليكن m_1 هي ميل الخط L

m_2 هي ميل الخط $\overline{gg'}$ بالتالي فإن :

$m_2=\frac{y'-y}{x'-x}$, $m_1=1$, لكن L عمودي على $\overline{gg'}$

$$\therefore \ m_1 m_2 = 1\left(\frac{y'-y}{x'-x}\right) = -1$$

أي أن (i) ________ $y' - y = x - x'$



K هي منتصف القطعة $\overline{gg'}$.

إذن إحداثيات k هي $\left(\frac{x+x'}{2} , \frac{y+y'}{2}\right)$

لتكن $k \in L$ إذن فهي تحقق المعادلة $y=x$. أي أن

$$\frac{x + x'}{2} = \frac{y + y'}{2}$$

أي أن: (ii) $y' + y = x' + x$

من (i) , (ii) نجد أن $y'=x$, $x'=y$

وبالتالي فإن $g'(x ,y)$

وبعبارة أخرى تكتب

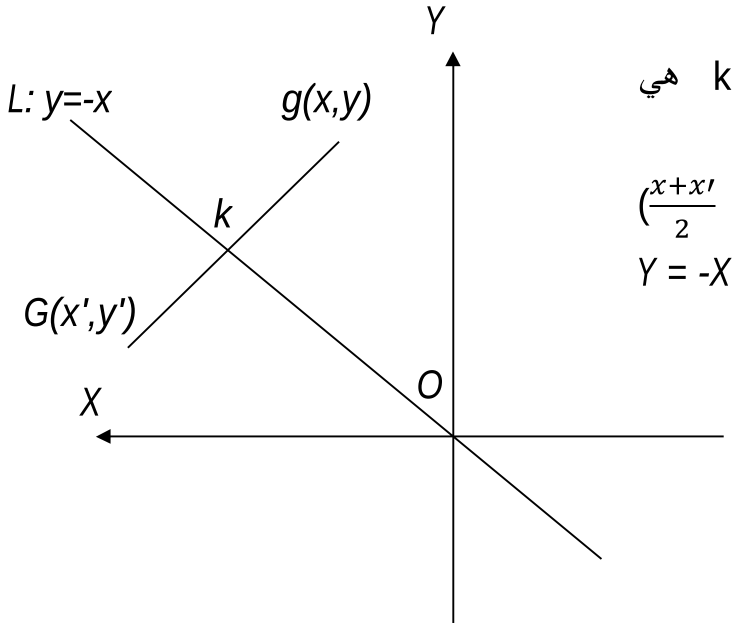
$R_L(x ,y)=(+x ,+y)$

ii. نفرض أن $g(x,y)\epsilon R^2$, منتصف القطعة المستقيمة $\overline{gg'}$ ليكن m_1 هي ميل الخط L m_2 هي ميل الخط $\overline{gg'}$ بالتالي فإن:

m_1=1 , m_2=$\frac{y'-y}{x'-x}$

لكن $\overline{gg'}$ عمودي على $\underline{L}$

$$\therefore m_1 * m_2 = 1\left(\frac{y'-y}{x'-x}\right) = -1$$



أي أن y' – y= x - x' , k هي منتصف $\overline{gg'}$

∴ إحداثيات k هي $(\frac{x+x\prime}{2} \quad , \quad \frac{y+y\prime}{2})$

لكن $k \in \underline{L}$ ∴ فهي تحقق المعادلة $Y = -X$

أي $\frac{Y+Y\prime}{2} = -\left(\frac{X+X'}{2}\right)$

أي أن $y+y' = -(x+x')$

من (i), (ii) نجد أن

$Y' = -x$, $x' = -y$

وبالتالي فإن $g'(-x,-y)$

وبعبارة أخرى $R_L(x,y) = (-x,-y)$

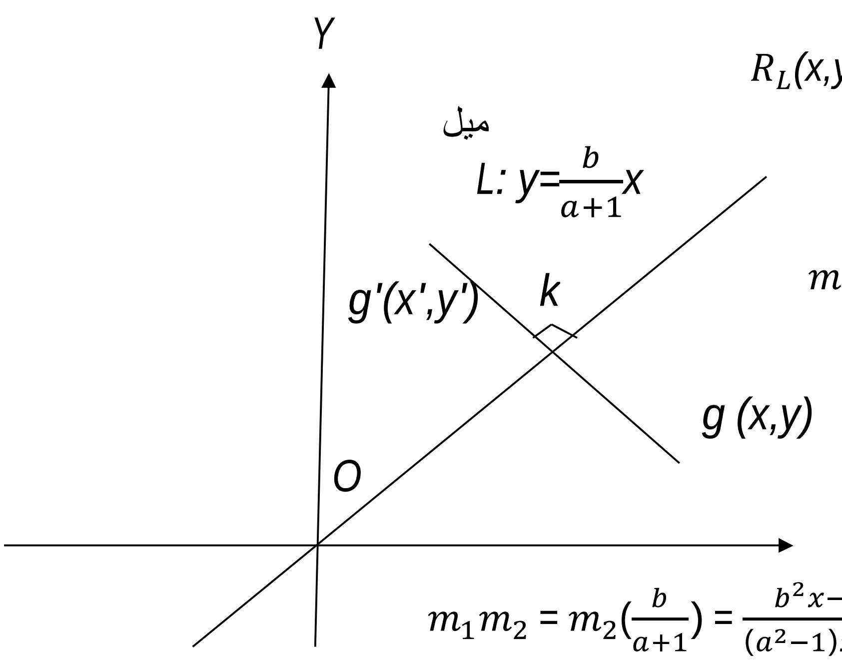
مثال:

إذا كان $\underline{L} = \{(x,y): y=\frac{b}{a+1}x \ , \ a\neq -1 \ , \ a^2 + b^2=1\}$

فأثبت أن:

$$R_L(x,y) = (ax+by \ , \ bx-ay)$$

الحل:



الخط L , $m_1=\frac{b}{a+1}$

ميل الخط $\overline{gg'}$, $m_2= \frac{y'-y}{x'-x}$

g (x,y) $= \frac{(bx-ay)-y}{(ax+by)-x} = \frac{bx-(a+1)y}{(a-1)x+by}$

∴

$$m_1 m_2 = m_2(\frac{b}{a+1}) = \frac{b^2x-(a+1)by}{(a^2-1)x+(a+1)by}$$

أي أن:

$$m_1 m_2 = \frac{b^2x-(a+1)by}{-b^2x+(a+1)by}$$

(لأن $a^2+b^2 = 1$)

بضرب الطرفين في (1-) :

$$-1(m_1 m_2) = \frac{-b^2x+(a+1)by}{-b^2x+(a+1)by}$$

بالتالي فإن $m_1 m_2 = -1$

وهذا يعني أن $\overline{gg'}$ عمودي على $\underline{L}$

ولتحقيق شرط الانعكاس الثاني نفرض أن $k(x^*, y^*)$ هي منتصف $\overline{gg'}$

$$x^* = \frac{x+x\prime}{2} = \frac{x+ax+by}{2} \qquad \text{(i)}$$

$$y^* = \frac{y+y\prime}{2} = \frac{y+bx-ay}{2} \qquad \text{(ii)}$$

بضرب (i) في $\frac{b}{a+1}$ ينتج أن

$$\frac{b}{a+1}x^* = \frac{bx+abx+b^2y}{2(a+1)} = \frac{bx+abx+\left(1-a^2\right)y}{2(a+1)}$$

$$= \frac{bx(a+1)-\left(a^2-1\right)y}{2(a+1)} = \frac{bx(a+1)-(a+1)(a-1)y}{2(a+1)} = y^*$$

أي أن $k \in \underline{L}$. أي أن الخط $\underline{L}$ ينصف القطعة المستقيمة $\overline{gg'}$

مثال:

أوجد قاعدة الانعكاس للخط

$$\underline{L} = \{(x,y): y = \frac{1}{\sqrt{3}}x\}$$

الحل:

من المثال السابق بالمقارنة

$$Y = \frac{b}{a+1}x$$

نجد أن $\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{b}{a+1}$ ومنها:

$$b = \frac{1}{\sqrt{3}}(a+1) \qquad \text{(i)}$$

$$a^2 + b^2 = 1 \qquad \text{(ii)}$$

فبحل (i),(ii) للحصول على قيمتي a , b

بالتعويض من (i) في (ii) نحصل على

$$a^2 + \frac{1}{3}(a+1) = 1$$

أي أن: $2a^2 + a - 1 = 0$

$$(2a-1)(a+1) = 0$$

بالتالي: $a = \frac{1}{2}$, $a = -1$ (مستبعدة)

بالتعويض في (i) عند $a = \frac{1}{2}$ ينتج أن $b = \frac{\sqrt{3}}{2}$

حيث أن قاعدة الانعكاس هي:

$$R_L(x,y) \longrightarrow (ax + by\,,\, bx - ay)$$

إذن:

$$R_L(x,y) \longrightarrow \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y\,,\, \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y\right)$$

وهي قاعدة الانعكاس المطلوبة.

مثال:

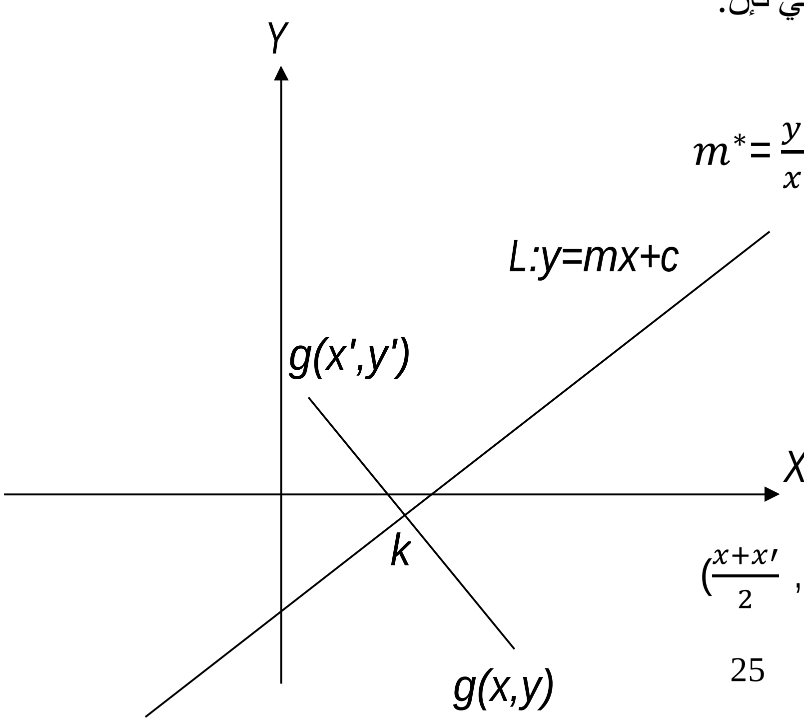
أوجد قاعدة الانعكاس للخط

$$\underline{L} = \{(x,y): y = mx + c\}$$

الحل:

لنفرض أن $g'(x',y') \in R^2$, k منتصف القطعة المستقيمة $\overline{gg'}$ ليكن m هو ميل الخط $\underline{L}$

m^* هو ميل الخط $\overline{gg'}$ بالتالي فإن:



$$m^* = \frac{y'-y}{x'-x}$$

لكن $\underline{L}$ عمودي على $\overline{gg'}$

$\therefore$ m. m^*=

$$m.\left(\frac{y'-y}{x'-x}\right) = -1$$

أي أن

$$m(y'-y) = (x'-x) \quad \text{(i)}$$

k منتصف $\overline{gg'}$

إذن إحداثيات k هي $\left(\frac{x+x'}{2}\,,\, \frac{y+y'}{2}\right)$

لكن $k \in \underline{L}$, إذن فهي تحقق المعادلة $y = mx + c$
أي أن

$$\frac{y+y'}{2} = m\,\frac{x+x'}{2} + c$$

بالضرب في $2m$ نحصل على:

$$m(y+y') = m^2(x+x') + 2mc \qquad \text{(ii)}$$

بطرح (i) من (ii) نجد أن:

$$2my = (m^2-1)x + (m^2+1)x' + 2mc$$

إذن:

$$\therefore\ x' = \frac{1}{1+m^2}[\,(1-m^2)x + 2m(y-c)]$$

بالتعويض عن x' في I :

$$my' = \frac{1}{m^2+1}[(1+m^2)x - (1-m^2)x - 2m(y-c) + m(1+m^2)y]$$

$$= \frac{1}{m^2+1}[m(1+m^2)y + 2m^2x - 2my + 2mc]$$

بالقسمة على m نحصل على :

$$Y = \frac{1}{m^2+1}[y + m^2y + 2mx - 2y + 2c]$$

$$= \frac{1}{m^2+1}[m^2y - y + 2mx + 2c]$$

$$= \frac{1}{m^2+1}[(1-m^2)y + 2mx + 2c]$$

أي أن:

$$g'\left(\frac{1}{m^2+1}[\,(1-m^2)x + 2m(y-c)]\,,\frac{1}{m^2+1}[(m^2-1)y + 2mx + 2c]\,\right)$$

وبالتالي تكون قاعدة الانعكاس بالنسبة للخط المستقيم $\underline{L}$: y=mx+c
هي:

$$R_L(x,y) = \frac{1}{m^2+1}[\,(1-m^2)x + 2m(y-c)\,,\ (m^2-1)y + 2mx + 2c\,]$$

نظرية:

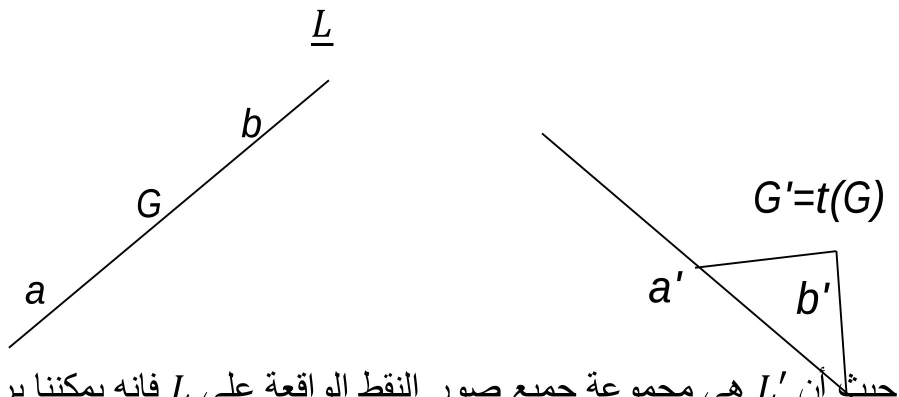
إذا كان t تساوي قياسي, $\underline{L}$CR' فإن $\underline{L} = t(\underline{l})$ يكون خطا في المستوى R^2

البرهان:

دعنا أولا ندخل الخط $\underline{m}$ ونثبت أن $\underline{L} = \underline{m}$ أي أن يجب علينا إثبات أن

$$\underline{L} \subset \underline{m} \quad , \quad \underline{m} \subset \underline{L}$$

نحن نحصل على الخط $\underline{m}$ وذلك بوضع نقطتين $a , b \in \underline{L}$ ويأخذ $\underline{m}$ كخط مار بصور كل من a , b تحت تأثير t بالتالي فإن $\underline{m} = \overleftrightarrow{a'b'}$



حيث أن $\underline{L'}$ هي مجموعة جميع صور النقط الواقعة على $\underline{L}$ فإنه يمكننا برهان أن $\underline{L} \subset \underline{m}$

وذلك بأخذ أي نقطة $G \in \underline{L}$ وإثبات أن $G' \in \underline{m}$ حيث G' صورة G تحت تأثيرات

إذا فرضنا أن G بين a,b , فإن $AG + Gb = ab$

حيث t تساوي قياسي, فإن

$$a'G' + G'b' = a'b'$$

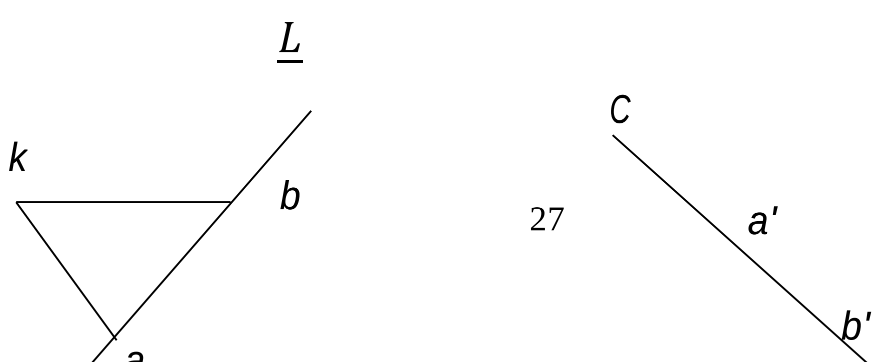
إذا كانت $G' \in m$ فإنه يوجد المثلث $a'G'b'$ الذي فيه

من المتباينة المثلثة $\overline{a'G'} + \overline{G'b'} > \overline{a'b'}$

من هذا التعارض نستنتج أن $G' \in \underline{m}$ إذا وقعت G بين a,b بالتالي فإن $\underline{L'} \subset \underline{m}$.

الآن نثبت أن: $\underline{m} \subset \underline{L}$

نفرض أن $c \in \underline{m}$ المطلوب إثبات أن c هي صورة لنقطة على الخط $\underline{L}$ أي إثبات أن $c \in \underline{L'}$.



بما أن t تساوي قياسي , t تحويلة مستوية (هندسية) .

$\therefore$ توجد نقطه k بحيث أن $t(k) = c$

إذا فرضنا أن $k \in \underline{L}$ فإنه يوجد المثلث akb

باستخدام حقيقة أن

$$ak = a'c \quad , \quad kb = cb' \quad , \quad ab = a'b'$$

وكذلك نستخدم المتباينة المثلثية فإننا نحصل مرة أخرى على تعارض.

نظرية:

إذا كان t تساوي قياسي, فإن

$$\measuredangle abc = \measuredangle a'b'c'$$

البرهان:

بما أن t تساوي قياسي, فإن

$$\overline{ab} = \overline{a'b'} \quad , \quad \overline{ac} = \overline{a'c'} \quad , \quad \overline{bc} = \overline{b'c'}$$

إذن: المثلثان $\triangle abc$, $\triangle a'b'c'$ متطابقان , من هذا ينتج أن:

$$\measuredangle abc = \measuredangle a'b'c'$$

نتيجة: إذا كان t تساوي قياسي , فإن

$\forall\ \underline{L} \subset R^2$, $m \subset R^2$ $\quad \underline{L} \perp \perp \underline{m} \quad , \quad \underline{L'} \perp \perp \underline{m'}$.

حيث :

$\underline{L'} = t(\underline{L}) \quad , \quad m' = t(\underline{m}) \quad , \quad \perp$ (علاقة تعامد)

نظرية:

إذا كان t تساوي قياسي , فإن

$\forall \underline{L} \subset R^2 \; , \quad m \subset R^2 \quad \underline{L} \perp \perp \underline{m} \quad \underline{L' \perp \perp m'}$

حيث: علاقة تعامد $\perp$, $\underline{L'} = t(\underline{L})$, $\underline{m'} = t(\underline{m})$

نظرية:

إذا كان t تساوي قياسي, فإن

$$\underline{L'} \parallel \underline{m'} \Leftrightarrow \underline{L} \parallel \underline{m}$$

حيث $\parallel$ علاقة توازي ، $\underline{m'} = t(\underline{m})$ ، $\underline{L'} = t(\underline{L})$

البرهان:

أولا: نفرض أن $\underline{L}$ $\underline{m}$ إذا كان $\underline{L'}$ لا يوازي $\underline{m'}$ فإنه يوجد نقطة a بحيث أن $a \in \underline{L'}$, $a \in \underline{m'}$ وهذا يؤدي إلى وجود النقط $k \in \underline{m}$, $g \in \underline{L}$ بحيث أن :

$$t(g) = a \quad , \quad t(k) = a$$

حيث أن $\underline{L} \parallel \underline{m}$ فانه $g \neq k$, لكن هذا يعني أن t لا تكون تساوي قياسي .

من هذا التعارض , نستنتج $\underline{L'}$ $\underline{m'}$

ثانيا: نفرض أن $\underline{L'} \parallel \underline{m'}$ إذا كان $\underline{L}$ لا يوازي $\underline{m}$ فإنه يوجد نقطة a بحيث أن $a \in \underline{m}$, $a \in \underline{L}$ وهذا يؤدي إلى وجود النقط $k \in \underline{m'}$, $g \in \underline{L'}$ بحيث أن:

$$t(g) = a \quad , t(k) = a$$

حيث أن $\underline{L'} \parallel \underline{m'}$ فإن $g \neq k$ لكن هذا يعني أن t لا تكون تساوي قياسي.

من هذا التعارض نستنتج $\underline{L}$ $\underline{m}$

مثال: إذا كان: $\underline{m} = \{ (x,y) : y = 2x-3 \}$, $\underline{L} = \{ (x,y) : y = -x \}$

فاوجد معادلة الخط $\underline{m'} = R_L(\underline{m})$

الحل:

النقطتان $b(0,-3)$, $a(\frac{3}{2}, 0)$ واقعتان على الخط $\underline{m}$ حيث أن :

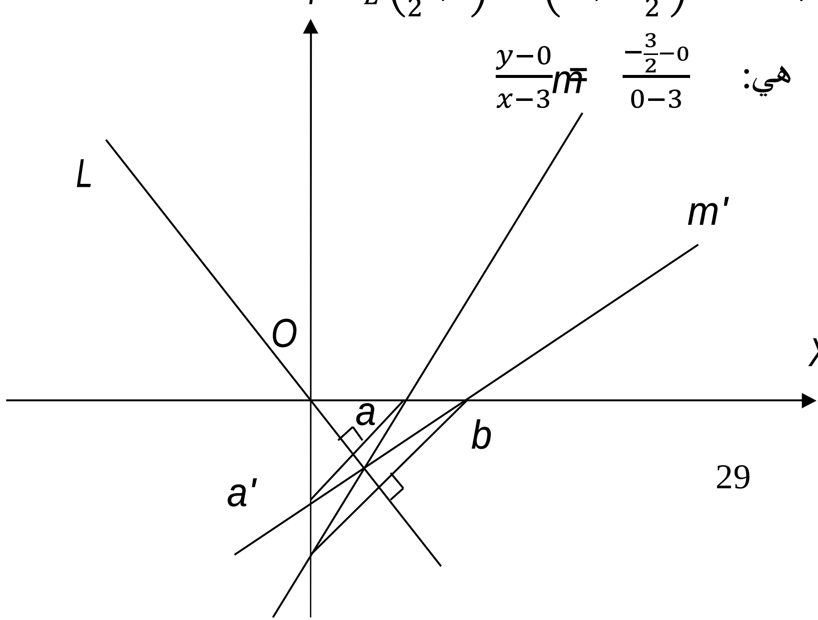
$$R_L(x,y) = (-y,-x) \qquad \forall (x,y) \in R^2$$

$$R_L\left(\frac{3}{2}, 0\right) = \left(0, -\frac{3}{2}\right) \qquad , \qquad R_L(0,-3) = (3,0)$$

$\therefore$ معادلة الخط $\underline{m'}$ هي: $\frac{y-0}{x-3} = \frac{-\frac{3}{2}-0}{0-3}$

أي: $\frac{y}{x-3} = \frac{\frac{3}{2}}{3}$

$$Y = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$$



ملاحظة: إذا كانت b نقطة معطاة

R_L تحويلة مستوية فإنه يمكن إيجاد نقطة c بحيث أن:

$$R_L(c) = b$$

حيث أن R_L تحويلة مستوية, فإنه يوجد ${R_L}^{-1}$

بالتالي:

$$({R_L}^{-1} o R_L)(c) = {R_L}^{-1}(R_L(c)) = {R_L}^{-1}(c)$$

لكن: $({R_L}^{-1} o R_L)(c) = 1(c) = c$

(1 هو راسم الوحدة)

$$\therefore c = {R_L}^{-1}(b)$$

مثال:

ليكن L هو المحور السيني , $m = \{(x,y): y=x\}$

أوجد النقطة c بحيث أن: $(R_L o R_m)(c) = (2,7)$

الحل:

من الملاحظة السابقة نجد أن:

$$c = (R_L\, oR_m)^{-1}(2,7)$$

$\because$ إذا كان $R_{L_1}: x \to y$, $R_{L_2}: y \to z$ راسمي تناظر احادي فإن :

$${R_{L_1}}^{-1} o\, {R_{L_2}}^{-1} \;\; (R_{L_2} o R_{L_1})^{-1} =$$

$$\therefore \quad C = (R_{\underline{m}}^{-1} o R_{\underline{L}}^{-1})(2,7)$$

$$= (R_{\underline{m}} o R_{\underline{L}})(2,7)$$

(لان R_m , R_L رواسم انعكاس)

$$= R_{\underline{m}}(R_{\underline{L}}(2,7))$$

$$= R_{\underline{m}}(2,-7) = (-7,2)$$

مثال:

إذا كان

$$\underline{L} = \{ (x,y): y = 2x-3 \}$$

فاوجد معادلة الخط $\underline{m} = R_L(m)$ حيث :

$$\underline{m} = \{ (x,y): y = 5x - 8 \}$$

الحل:

لتكن $g_1\,(0\,,-8) \in \underline{m}$, $g_2\,\left(\frac{8}{5}\,,0\right) \in \underline{m}$

ولكن من مثال (6) :

R_L(x,y) = $\frac{1}{m^2+1}$[$(1-m^2)x + 2m(y-c)\,,\ (m^2-1)y +$
$2mx + 2c$]

$\therefore\ R_{\underline{L}}(g_1) = R_{\underline{L}}(0,-8) = \frac{1}{5}(-20\,,-30)$ =(-4,-6)

وبالتالي فإن: g_1(-4 ,-6)

أيضا :

$$R_{\underline{L}}(g_2) = R_{\underline{L}}\left(\frac{8}{5},0\right) = \left(\frac{36}{25}\,,\frac{2}{25}\right)$$

وبالتالي فإن:

$$g_2\left(\frac{36}{25}\,,\frac{2}{25}\right)$$

معادلة الخط $\underline{m'}$ الواصل بين النقطتين $g'_1\,,g'_2$ هي:

$$\frac{y+6}{x+4} = \frac{\frac{2}{25}+6}{\frac{36}{25}+4} = \frac{152}{136} = \frac{19}{17}$$

أي أن:

19x -17y – 26 = 0

$\therefore$ *m'={(x,y):19x – 17y – 26 = 0}*

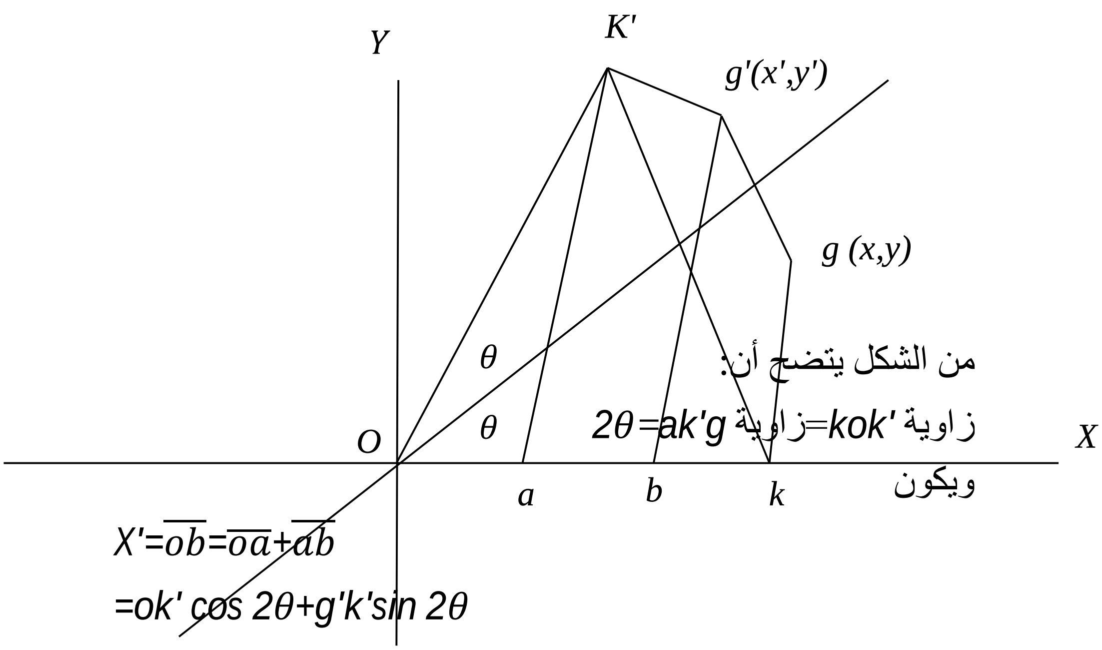
الفصل الثالث

مصفوفة الانعكاس والانعكاس الانزلاقي

مصفوفة الانعكاس:

نفرض أن $\underline{L}$ خط مستقيم مار بنقطة الأصل o ويصنع زاوية θ مع الاتجاه الموجب لمحور السينات.

لتكن $g'(X',Y')$ هي صوره $g(X,Y)$ بالانعكاس بالنسبة للخط $\underline{L}$ ولتكن النقطة $\underline{K'}$ هي صوره النقطة K التي هي موقع العمود من النقطة g على محور X.



من الشكل يتضح أن:

زاوية kok'=زاوية $ak'g$=2θ

ويكون

$X'=\overline{ob}=\overline{oa}+\overline{ab}$

$=ok'\cos 2\theta+g'k'\sin 2\theta$

$=ok'\cos 2\theta+gk\sin 2\theta$ ———— (i)

$=x\cos 2\theta+y\sin 2\theta$

وبالمثل

$Y'=\overline{g'b}=\overline{ca}=\overline{k'g'}-\overline{k'c}$

$=\overline{ok'}\sin 2\theta-g'k'\cos 2\theta$

$=\overline{ok}\sin 2\theta-\overline{kg}\cos 2\theta$

$=X\sin 2\theta-y\cos 2\theta$ ———— (ii)

المعادلتين (i),(ii) يمكن كتابتهما في الصورة المصفوفية التالية

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

المصفوفة

$$\begin{pmatrix} cos\,2\theta & sin\,2\theta \\ sin\,2\theta & -\,cos\,2\theta \end{pmatrix}$$

تسمى مصفوفة الانعكاس

هذه المصفوفة هي مصفوفة تحويل مناظرة لعملية الانعكاس في خط $\underline{L}$ يمر بالنقطه O(0,0) ويصنع زاوية θ مع الإتجاه الموجب لمحور السينات, ويلاحظ هنا أن محدد هذه المصفوفة يساوي (1-) .

ملاحظة:

أ- مصفوفة الانعكاس بالنسبة لمحور السينات:

$$Z_x=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

ب- مصفوفة الانعكاس بالنسبة لمحور الصادات:

$$Z_y=\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

لاحظ أن محدد كل من Z_x, Z_y يساوي (1-)

مثال:

أثبت أن المصفوفة $\begin{pmatrix} a & c \\ c & -a \end{pmatrix}$ تمثل انعكاس لجميع قيم *a,c* وذلك بفرض أن التحويل تساوي قياسي.

الحل:

نفرض أن مربع الوحدة الذي رؤوسه (0,1) , (1,1) , (1,0) , (0,0) صور هذه النقط على الترتيب هي *(b,d) , (a+b,c+b), (a,c) , (0,0)* وذلك تحت تأثير ~~مصفوفة التحويل~~

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \qquad \text{(i)}$$

وتبين أن المربع تحول إلى متوازي أضلاع و *G,Z* فإذا مثلث المصفوفة انعكاسيا فإن أطوال

$\therefore \quad \overline{(OG)^2} = 1$

أي أن $a^2+c^2=1$

وبالمثل

$$(\overline{o'z})^2=b^2+d^2=1$$

وأيضا

$$\overline{(G,Z)^2}=(1-0)^2+(0-1)^2=(a-b)^2+(c-d)^2$$

أي أن $a^2+c^2+b^2+d^2-2ab-2cd=1+1$

$$1+1-2ab-2cd=2$$

أي أن $ab+cd=0$

$\therefore$ $ab=-cd$ أو مثلا $\frac{a}{d}=\frac{c}{b}=ƛ$

$\therefore$ $c=ƛb$, $a=ƛd$

$\because$ $a^2+c^2=1$

$\therefore$ $ƛ^2d^2+ƛ^2b^2=1$

أي $ƛ^2(d^2+b^2)=1$ ومنها $ƛ^2=1$ اي أن $ƛ=\pm 1$

وحيث أن العملية عملية انعكاسية فيجب أن يكون المحدد مساويا (-1)

أي أن: $ad-bc=-1$ و بالتالي تكون $a=ƛ\,d=-d$

$C=-ƛb=b$

وتصبح المصفوفة (i)=

$\begin{pmatrix} a & c \\ c & -1 \end{pmatrix}$ ―――――――― (ii)

وهي النتيجة المراد إثباتها

وبوضع $c=\cos 2\theta$, $a=\sin 2\theta$ في (ii)

نحصل على المصفوفة

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix}$$

ويلاحظ أن هذا التحويل يعكس المستوى x,y في الخط

$\underline{L}: y=(\tan\theta)x$ الذي يصنع زاوية θ مع الاتجاه الموجب لمحور x

مثال:

باستخدام مصفوفة الانعكاس, اوجد قاعدة الانعكاس للخط

$$\underline{L}:\left\{(x,y): y=\frac{1}{\sqrt{3}}x\right\}$$

الحل:

$$\tan\theta=\frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow \theta=30 \Rightarrow 2\theta=60$$

وبالتالي فإن: $\cos 2\theta = \cos 60 = \frac{1}{2}$

$$\sin 2\theta = \sin 60 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

إذن قاعدة الانعكاس

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

أي أن $x' = \frac{1}{2}(x+\sqrt{3}y)$

$$y' = \frac{1}{2}\left(\sqrt{3}x - y\right)$$

مثال:

إذا كان $\underline{L} = \{(x, y): y = -x\}$

فإن $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

أي أن $x' = -y \quad , \quad y' = -x$

وبالتالي فإن

$$R_L(x,y) = (-y,-x)$$

مثال:

باستخدام مصفوفة الانعكاس

$$\underline{L} = \{ (x,y): y = \frac{b}{1+a}x \ , \ a \neq -1 \ , a^2 + b^2 = 1\}$$

أثبت أن

$$R_L(x,y) = (ax+by , bx-ay)$$

الحل:

ميل الخط $\underline{L} = \frac{b}{a+1} = \tan\theta$

من الشكل ينتج أن $\sin\theta = \frac{b}{\sqrt{2(a+1)}}$

$$\cos\theta = \frac{a+1}{\sqrt{2(a+1)}}$$

لكن $\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta$

$$= \frac{b}{\sqrt{2(a+1)}} \times \frac{a+1}{\sqrt{2(a+1)}} = b$$

أيضا $\cos 2\theta = 1 - 2\sin^2\theta$

$$1-2\left(\frac{b^2}{2(a+1)}\right) = 1-\frac{b^2}{a+1} = \frac{(a+1)-b^2}{a+1}$$

$$= \frac{(a+1)-(1-a^2)}{a+1} = \frac{a^2+a}{a+1} = \frac{a(a+1)}{a+1} = a$$

∴ قاعدة الإنعكاس

$$\begin{pmatrix} \cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & -\cos 2\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

أو $\begin{pmatrix} ax+by \\ bx-ay \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

بالتالي $x' = ax+by \quad , \quad y' = bx-ay$

أي أن

$$R_L(x,y) = (ax+by\,, bx-ay)$$

ملاحظة:

إذا كان $\underline{L} = \left\{(x,y): y = \frac{b}{a}x \;, a \neq -1\,, a^2+b^2 = 1\right\}$

فإن مصفوفة الانعكاس هي:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ b & -a \end{pmatrix}$$

هذه المصفوفة هي مصفوفة تحويل مناظره لعملية الانعكاس في الخط $\underline{L}$.

مثال:

نفرض أن $\underline{L} = \{(x,y): y = 3x\}$

إذا كان $G(4,3)$ فاوجد G' حيث $G' = R_L(G)$

الحل:

نضع $\frac{B}{A+1} = 3$

$b = 3a+3$ ________ (i)

$a^2+b^2 = 1$ ________ (ii)

بحل (i) , (ii) ينتج أن : $b = \frac{3}{5}$ $a = \frac{-4}{5}$

من الملاحظة السابقة تكون مصفوفة الانعكاس هي :

$$\begin{pmatrix} \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix}$$

وبالتالي فإن:

$$\begin{pmatrix} \frac{-4}{5} & \frac{3}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\prime \\ y\prime \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{16}{5}+\frac{9}{5} \\ \frac{12}{5}+\frac{12}{5} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\prime \\ y\prime \end{pmatrix}$$

$$x=-\frac{7}{3} \qquad y'=\frac{24}{5}$$

أي أن:

$$R_L(4,3)=(-\frac{7}{5},\frac{24}{5})$$

لاحظ أن مصفوفة الانعكاس هي مصفوفة تحويل مناظرة لعملية الانعكاس في

$\underline{L}$.

مثال:

اوجد قاعدة الانعكاس للخط $\underline{L}=\{(x,y):y=\sqrt{3}\,x\}$

الحل:

$$tan\,\theta=\sqrt{3}$$

$$\therefore \quad \frac{b}{a+1} = \sqrt{3}$$

$$B=\sqrt{3}a + \sqrt{3} \quad \text{———} \quad (i)$$

$$a^2+b^2=1 \quad \text{———} \quad (ii)$$

بحل (ii) , (i) ينتج أن:

$$a=-\frac{1}{2} \quad , \quad b=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

وبالتالي فإن مصفوفة الانعكاس هي:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

وبالتالي فإن:

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y \\ \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

ومن تساوي المصفوفتين ينتج أن:

$$x'=\frac{1}{2}(-x+\sqrt{3}y) \quad , \quad y'=\frac{1}{2}(\sqrt{3}x + y)$$

$$R_{L(x,y)=\frac{1}{2}(-x+\sqrt{3}y\ ,\sqrt{3}x+y)}$$

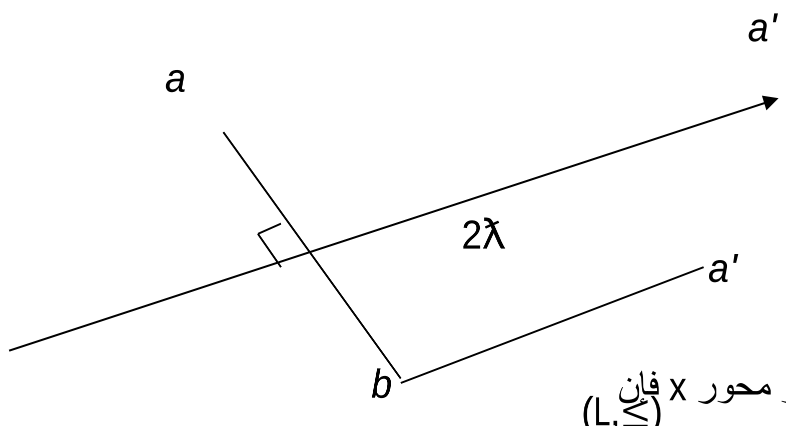
وهي قاعدة الانعكاس للخط $\underline{L}$.

الانعكاس الانزلاقي:

تعريف: إذا انعكست النقطة *a* في خط مستقيم *L* ثم بعد ذلك انتقلت في اتجاه خط مرتب يوازي محور الانعكاس, إلى نقطة جديدة *a'* بانتقال مقياس *2ƛ* فإن *a'* يقال أنها صورة *a* بالتحويل $T_{2ƛ}oR_L$ والذي يسمى إنعكاس إنزلاقي ويرمز له بالرمز G_R. أي أن:

$$G_R = T_{2ƛ}oR_L = R_LoT_{2ƛ}$$

الخط *L* يسمى محور الانعكاس الانزلاقي ومقياس الانتقال يسمى مقياس الانعكاس الانزلاقي كما هو موضح بالشكل:



نأخذ L هو محور x فإن (L,≤)

$$G_R: R^2 \to R^2$$

$$G_R = T_{2\lambda} o R_x = R_x o T_{2\lambda}$$

$$G_R(x,y) = (x+2\lambda\ ,\ -y)$$

وإذا كان L هو محور y فإن:

$$G_R = T_{2\lambda} o R_y = R_y o T_{2\lambda}$$

$$G_R(x,y) = (-x\ ,\ y+2\lambda)$$

مثال:

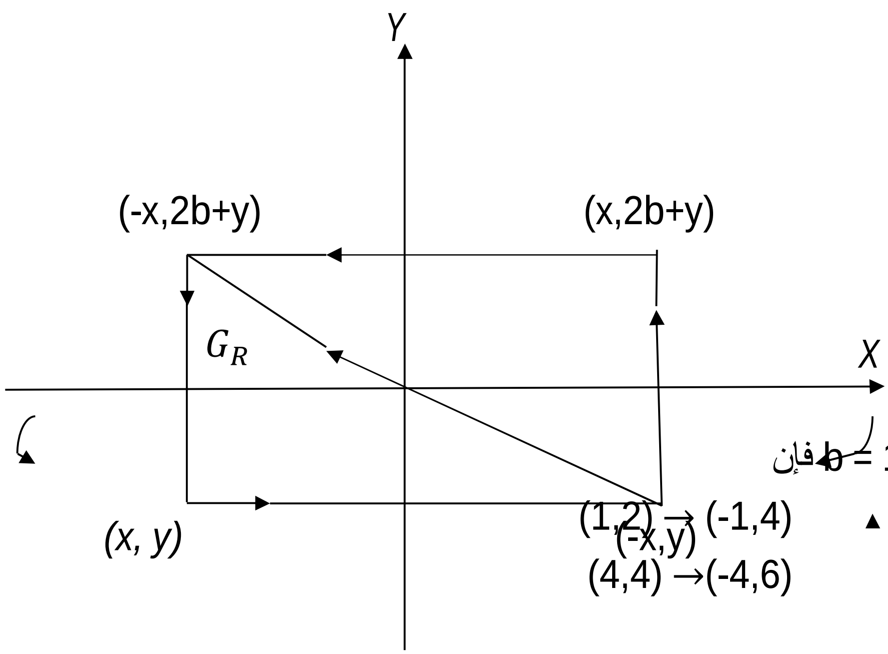
إذا كان G_R انعكاسا انزلاقيا في اتجاه محور *y* مقياسه *2b* فأوجد قاعدة إحداثيات له, ثم أوجد صورة النقط (1,2) , (4,4) بالراسم G_R عند *b*=1

الحل:

$$G_R = R_y o T_{2b}$$

$$G_R:(x,y) \rightarrow (-x\ ,\ 2b+y)$$

كما بالشكل:



عندما *b* = 1 فإن

(1,2) → (-1,4)

(4,4) →(-4,6)

مثال:

أوجد قاعدة إحداثيات للانعكاس الانزلاقي الذي مقياسه *2a* في اتجاه الخط *y=b* ومن ثم اوجد صور النقط (1,1) , (0,0) بالراسم G_R في حالة *a=1*

الحل:

الانعكاس الانزلاقي يكافيء تحصيل انعكاس $R_{y=b}$ بالنسبه للخط y=b وانتقال T_{2a} مقياسه 2a في اتجاه الخط y=b حيث أن:

$$R_{y=b}: (x,y) \rightarrow (x,2b-y)$$

$$T_{2a}: (x,y) \rightarrow (2a+x ,y)$$

$$G_R: T_{2a} o\ R_{y=b}: (x,y) \rightarrow (2a+x , 2b-y)$$

عندما a=1 , b=2 فإن :

$$(1,1) \rightarrow (3,3)$$

$$(0,0) \rightarrow (2,4)$$

خواص الانعكاس الانزلاقي:

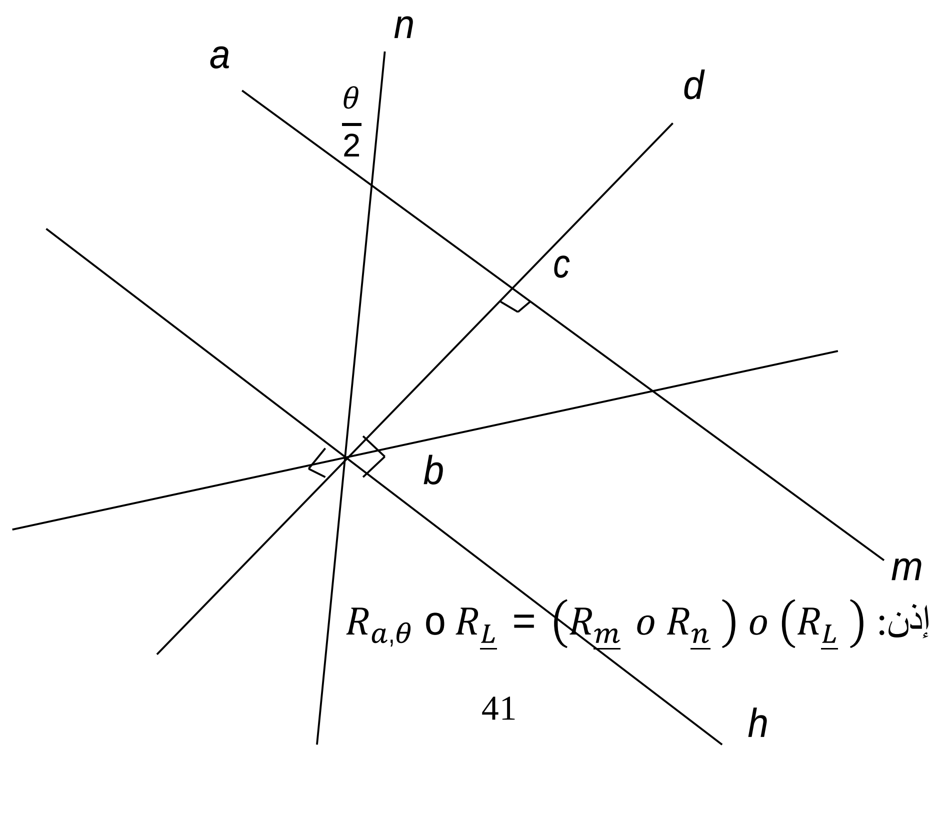
بعض المفاهيم الهامة لمعرفة خواص الانعكاس الانزلاقي:

نظرية:

تحصيل انعكاس دوران يكون انعكاسا انزلاقيا, حيث مركز الدوران لا يقع على محور الانعكاس.

البرهان:

لنفرض أن R , R_L راسمي الدوران الانعكاسي على الترتيب ز لنختار $\underline{n}$, $\underline{m}$ بحيث أن $\underline{n} \perp \underline{m}$ ومقياس الزاوية من n إلىm يكون$\frac{\theta}{2}$



إذن: $R_{a,\theta}\ o\ R_{\underline{L}} = \left(R_{\underline{m}}\ o\ R_{\underline{n}}\right)\ o\ \left(R_{\underline{L}}\right)$

$=R_{\underline{m}}\ (R_{\underline{n}}\ o\ R_{\underline{L}})\ =\ R_{\underline{m}}\ o\ R_{\underline{b}}$

حيث $n \cap L = [b]$

الآن لنأخذ d خط مار بالنقطة b وعمودي على m , ولنأخذ h خط مار بالنقطة b وموازي للخط m .

في هذه الحالة يكون: $R_{\underline{b}}\ =\ R_{\underline{h}}\ o\ R_{\underline{d}}$

بالتالي: $R_{a,\theta}$ o $R_{\underline{L}}\ =\ R_{\underline{m}}\ o\ (\ R_{\underline{h}}\ o\ R_{\underline{b}}\ )$

$=(R_{\underline{m}}\ o\ R_{\underline{h}})\ o\ R_{\underline{d}}$

بما أن $\underline{h} \perp \underline{m}$ فإن $R_{\underline{m}}\ o\ R_{\underline{h}}$ يكون إنتقال

إذن $R_{a,\theta}\ o\ R_L = R_{2ab}\ o\ R_b$

حيث: $\underline{d}\ \cap\ \underline{m} = \underline{c}$

أي أن: $R_{a,\theta}\ o\ R_L$ يكون انعكاسا انزلاقيا إذا كانت $a \notin \underline{L}$

ملاحظة:

إذا كانت $a \in \underline{L}$ فإن $R_{a,\theta}$ oR_L يكون انعكاسا. لتوضيح ذلك, نأخذ الخط $\underline{n}$ مارا بالنقطة a بحيث أن مقياس الزاوية من $\underline{L}$ الى $\underline{n}$ يكون $\frac{\theta}{2}$

إذن: $R_{a,\theta}\ o\ R_{\underline{L}}\ =\ (R_{\underline{n}}\ o\ R_L)$ o$R_L = R_{\underline{n}}\ o\ (R_L\ o\ R_L\ )\ =$

$R_{\underline{n}}\ o\ 1\ =\ R_{\underline{n}}$

نتيجة (1):

إذا كانت $\overline{ab}$ قطعة مستقيمة غير عمودية على خط معطى L , فإن تحصيل انتقال T_{ab} وانعكاسا R_L يكون انعكاسا انزلاقيا.

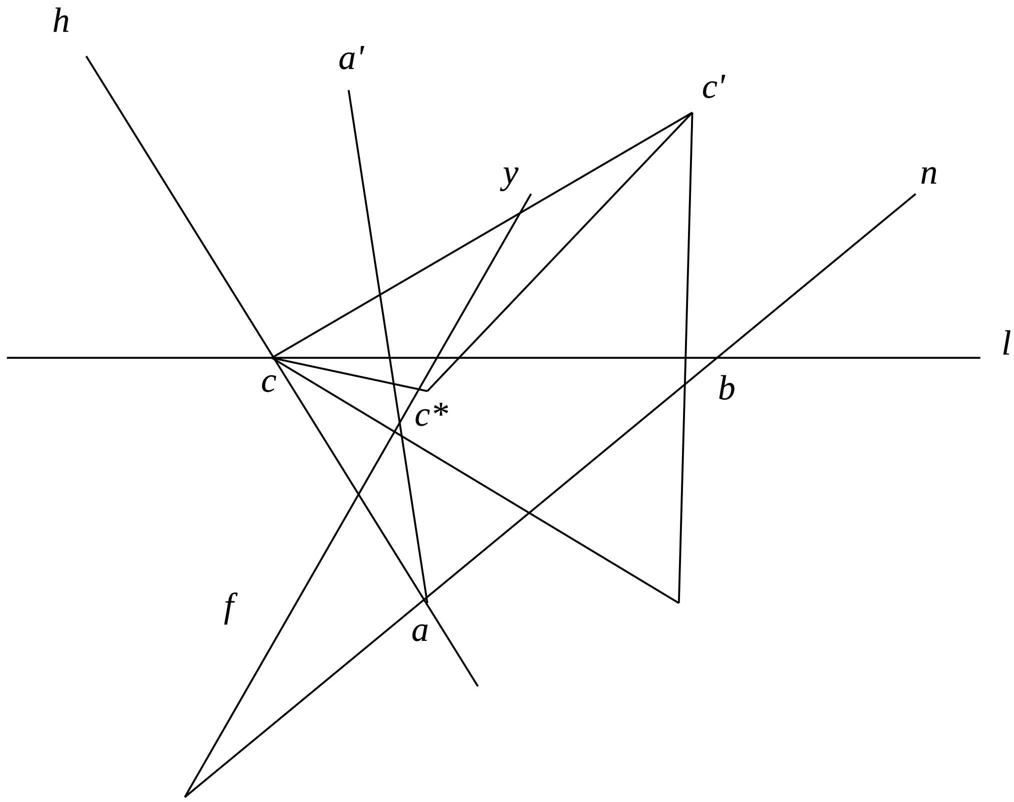
نتيجة (2) :

إذا كان $\underline{L}$, $\underline{n}$, $\underline{h}$ خطوط غير متقاطعة في نقطة واحدة بحيث أن n يوازي L , h لا يوازي L فإن $R_L\ o\ R_n\ oR_h$ يكون انعكاسا انزلاقيا .

- علينا ملاحظة أنه إذا كان R انعكاس انزلاقي , $G' = R(G)$ لأي نقطة G, فإن محور الانعكاس الانزلاقي يحتوي على نقطة المنتصف المستقيمة $\overline{GG'}$.

بناء على ذلك, إذا كان G' , K' صوره للنقط K , G فإن الخط المار بمنتصفات $\overline{KK'}$, $\overline{GG'}$ يكون هو محور الإنعكاس الإنزلاقي.

وعلى سبيل المثال , لنأخذ الراسم $R_L\ o\ R_n\ oR_h$ كما في الشكل أدناه, من السهل تعيين موضع كل من a,b تحت تأثير $R_L\ o\ R_n\ oR_h$ إذا كان m هو الخط المار بالنقط x , y حيث x منتصف $\overline{aa'}$, y منتصف $\overline{cc'}$, فإنه ينتج أن G هو محور الانعكاس الانزلاقي.



وفيما يلي نجمل خواص الانعكاس الانزلاقي:

1) الانعكاس الانزلاقي تحويلة هندسية (مستوية).

2) الانعكاس الانزلاقي تساوي قياسي.

3) الانعكاس الانزلاقي يحفظ مقياس الزاوية.

4) الانعكاس الانزلاقي يحفظ استقامة النقط والبينية والتوازي.

5) الانعكاس الانزلاقي تحويلة مضادة.

6) الانعكاس الانزلاقي ليس له نقطة ثابتة.

الفصل الرابع
تطبيقات الانعكاس

الانعكاس في الفيزياء:

الانعكاس:

هو حدوث تغير في اتجاه الأشعة الضوئية على سطح عاكس مثل المرآة أو الماء.

كما يحدث انعكاسا للموجات الصوتية على الحوائط والحوائل ويتبع تلك الانعكاسات قوانين فيزيائية وتنطبق القوانين الفيزيائية على انعكاس الضوء مثلا سوا كان الانعكاس على مرآة مستوية أو مقعرة.

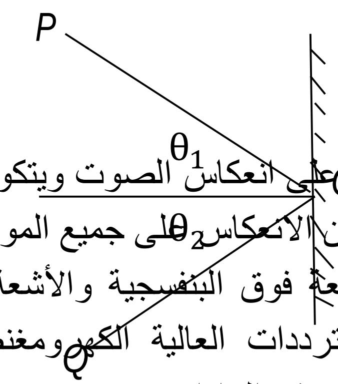
انعكاس الضوء:

الانعكاس هو تغير اتجاه مقدمة موجة ضوئية ساقطة على سطح عاكس, وينص قانون الانعكاس على أن زوايا سقوط الشعاع على السطح العاكس تكون مساوية لزاوية الانعكاس.

(ويوضح الشكل التالي تعريف تلك الزاويتين) حيث تقاس كل زاوية منهما بالنسبة للعمودي على السطح.

الشعاع الساقط على المرآة هو *po* والشعاع المرتد (المنعكس) من المرآة *OQ*.

ونظرا لتساوي زاوية السقوط وزاوية الانعكاس فيمكن أن يكون أيضا الشعاع الساقط Qo والشعاع المنعكس op.



وبتطبيق هذا القانون أيضا على انعكاس الصوت ويتكون الضوء من موجات كهرومغنطيسية وكذلك ينطبق قانون الانعكاس على جميع الموجات الكهرومغنطيسية مثل الأشعة تحت الحمراء والأشعة فوق البنفسجية والأشعة السينية وأشعة جاما ويهتم الخبراء أيضا بانعكاس الترددات العالية الكهرومغنطيسية ***(very high frequency) (V H F)*** لبث الراديو وفي الرادار.

حتى أن الأشعة السينية وأشعة جاما (ذات الطاقة العالية) تنعكس طبقا لهذا القانون إلا أن انعكاسها يكون عند زاوية سقوط صغيرة وذلك بسبب قصر طول موجاتها.

انعكاس الضوء عند سطح مستوي _ المرآة المستوية:

عند سقوط أشعة ضوئية على سطح يفصل بين وسطين فإن قدرا من الطاقة الشمسية يرتد وينعكس في الوسط الذي سقط منه وتتوقف نسبة ما ينعكس من ضوء على طبيعة السطح العاكس.

فسطح الزجاج مثلا يعكس 5% من الأشعة الساقطة ويمتص ما بقى منها. والمرآة التي تستعمل بكثرة في حياتنا اليومية عبارة عن سطح أملس مفضض, يصنع بترسيب طبقه رقيقه من الفضة على السطح الخلفي للوح زجاجي.

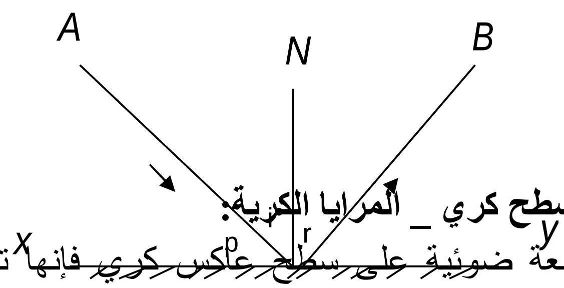
وقد يكون الانعكاس منتظما عند الأسطح المصقولة, بينما يكون غير منتظم عند الأسطح الخشنة, حيث تنتشر الأشعة المنعكسة في جميع الاتجاهات الممكنة لتكون ما يعرف بظاهرة التشتت.

وجدير بالذكر أن جميع الأشياء التي نراها في حياتنا اليومية, كالزهور والكتب والملابس وغيرها من المرئيات, إنما ترى نتيجة لتشتت الضوء الساقط عليها بسبب خشونة السطح, إلا أن زاوية سقوط الأشعة عند نقطة ما تختلف عنها عند نقطه أخرى, بخلاف ما يحدث عند سطح مستوي مصقول.

زاوية السقوط تعرف بالزاوية المحصورة بين الشعاع الساقط والعمود المقام عند نقطة السقوط على السطح الأملس المستوي.

وزاوية الانعكاس تعرف بالزاوية بين الشعاع المنعكس والعمود عند نقطة السقوط. وعلى ذلك يمكن تلخيص قانوني الانعكاس كما يلي:

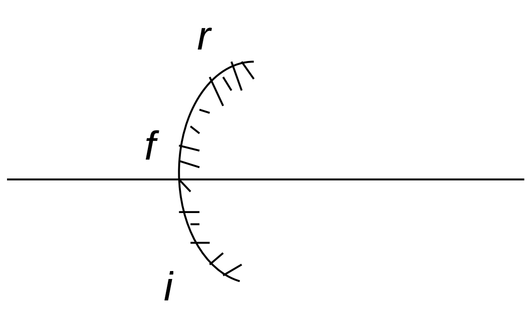
1) زاوية السقوط = زاوية الانعكاس.
2) الشعاع الساقط والشعاع المنعكس والعمود المقام على السطح العاكس من نقطة السقوط تقع جميعها في مستوى واحد عمودي على السطح العاكس.

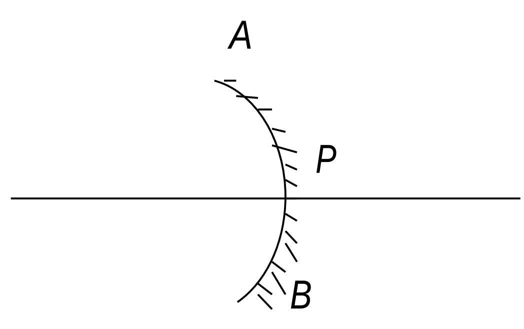


انعكاس الضوء عند سطح كري _ المرايا الكرية:

عند سقوط أشعة ضوئية على سطح عاكس كري فإنها تنعكس عند نقاط السقوط المختلفة وفقا لقانوني الانعكاس.

وتعرف المرايا الكرية بأنها السطح الناتج من تقاطع كره عاكسه بمستوى.وهذه المرآة قد تكون مرآة مقعرة إذا كان سطحها الداخلي هو السطح العاكس, أو تكون مرآة محدبة إذا كان سطحها الخارجي هو السطح العاكس.





(a) المرآة المقعرة   (b) المرآة المحدبة

وتتميز المرايا الكرية بالخواص التي يمكن تلخيصها فيما يلي:

- قطب المرآة, وهي نقطة ارتكاز السطح الكري على مستوى أملس أفقي.
- مركز المرآة, وهو المركز الهندسي للكرة التي تمثل المرآة جزءا منها, والمسافة بينه وبين القطر هو نصف قطر تكور المرآة.
- المحور الرئيسي للمرآة, هو المستقيم الواصل بين قطب المرآة ومركزها ويعرف أيضا بالمحور البصري.
- بؤرة المرآة, وهي نقطة تتجمع عندها الأشعة المنعكسة إذا ما سقطت أشعة متوازية على سطح المرآة. وهذه قد تكون بؤرة حقيقية تستقبل على حائل أمام المرآة في حالة المرآة المقعرة, أو تكون بؤرة تقديرية لا تستقبل على حائل لوجودها خلف المرآة في حالة المرآة المحدبة.
- البعد البؤري للمرآة, وهو الجزء من المحور البصري فيما بين قطب المرآة وبؤرتها.
- البعد البؤري للمرآة الكرية يساوي نصف قيمة قطر تكورها .. بمعنى آخر يكون نصف قطر تكور المرآة مساويا لضعف البعد البؤري.

القانون العام للمرايا الكرية:

هو العلاقة الرياضية التي تربط بين بعد الجسم وبعد الصورة وثابت المرآة (البعد البؤري) وينص على:

$$\frac{1}{v}+\frac{1}{u}=\frac{1}{f}$$

البعد البؤري $\equiv f$ بعد الجسم عن المرآه $\equiv u$

بعد الصورة عن المرآة $\equiv v$

- قوة تكبير المرآة (m) :

قوة التكبير $= \frac{\text{طول الصوره}}{\text{طول الجسم}}$, $m = \frac{v}{u}$

حالات القانون العام للمرايا الكرية:

1) إذا كان الجسم على بعد لا نهائي من المرآة فإن:

$$U = \infty$$

$$\because \frac{1}{v} = \frac{1}{f} - \frac{1}{u}$$

$$\therefore \frac{1}{v} = \frac{1}{f} - \frac{1}{\infty}$$

$$v = f$$

أي أن الصورة تتكون عند البعد البؤري.

2) إذا كان الجسم عند مركز تكور المرآة فإن:

$$u = r = 2f$$

$$\therefore \frac{1}{v} = \frac{1}{f} - \frac{1}{2f} = \frac{1}{2f}$$

$$\therefore v = 2f$$

تكون الصورة عندئذ منطبقة على موضع الجسم عند المركز.

3) إذا كانت الصورة عند بعد يساوي البعد البؤري فإن:

$$u = f$$

$$\therefore \frac{1}{v} = \frac{1}{f} - \frac{1}{f} = 0$$

$$\therefore v = \infty$$

أي تكون الصورة على بعد لا نهائي بأشعة منعكسة وموازية لبعضها البعض.

إذا كانت $u < f$ تتكون صوره تقديريه للمرآة المقعرة.

مثال:

وضع جسم على بعد 10 سم أمام مرآه مقعرة بعدها البؤري 15سم, أوجد موضع الصورة وقوة التكبير.

الحل:

$\because$ المرآة مقعرة

$$f = +15\,cm$$

$\because$ الجسم الحقيقي موضع أمام المرآة

$$u = +10\,cm$$

بالتعويض في العلاقة العامة:

$$\frac{1}{v} + \frac{1}{u} = \frac{1}{f}$$

$$\therefore \frac{1}{v} + \frac{1}{+10} = \frac{1}{+15}$$

$$\therefore \frac{1}{v} = \frac{1}{15} - \frac{1}{10} = \frac{5}{150}$$

$$\therefore v = -30\ cm$$

$\because$ بعد الصورة سالب, فإن الصورة تكون تقديرية وعلى بعد 30cm خلف المرآة وتكون قوة التكبير:

$$m = \frac{v}{u} = \frac{30}{10} = 3$$

أي أن ارتفاع الصورة يساوي 3 مرات قدر ارتفاع الجسم.

مثال:

مرآة محدبة نصف قطر تكورها 24 cm. تكونت خلفها صورة على بعد 4 cm من القلب. أوجد موضع الجسم وأحسب قوة التكبير.

الحل:

أولا نعين البعد البؤري من:

$$r = 2f$$

$$24 = 2f$$

$$f = 12\ cm$$

ولكون المرآة محدبة والصورة الناتجة تقديرية فإن:

$$f = (-12\ cm)$$

$$v = (-4\ cm)$$

وبالتعويض في العلاقة العامة:

$$\frac{1}{v} + \frac{1}{u} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{-4} + \frac{1}{u} = \frac{1}{-12}$$

$$\therefore u = +6\ cm$$

وبذلك يكون الجسم حقيقيا, ويقع أمام المرآة وعلى بعد 6 cm من القطب.

ولحساب قوة التكبير:

$$m = \frac{u}{v} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

أي أن الصورة مصغرة بقدر $\frac{2}{3}$ من طول الجسم.

مثال:

تكونت صورة معتدلة باستخدام مرآة مقعرة نصف قطر تكورها 36 سم. فإذا كانت قوة التكبير تساوي 3 .احسب موضع الجسم

الحل:

نفرض أن بعد الجسم عن قطب المرآة هو $X\ cm$ وحيث إن قوة التكبير m تساوي ثلاثة:

$$\therefore m = \frac{v}{u} = \frac{v}{x} = 3$$

$$\therefore v = 3x$$

فيصبح بعد الصورm في المرآة المقعرة لا تكون الصورة معتدلة إلا إذا كانت تقديرية وعليه فإن:

$$v = -3x$$

$$u = +x$$

$$f = \frac{r}{2} = \frac{36}{2} = +18$$

وبالتعويض في:

$$\frac{1}{v} + \frac{1}{u} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{-3x} + \frac{1}{+x} = \frac{1}{+18}$$

$$\therefore x = +12cm$$

وهو بعد الجسم عن قطب المرآة المقعرة.

انعكاس الصوت:

وينطبق قانون الانعكاس أيضا على انعكاس الصوت ويستخدم انعكاس الصوت في تعين أعماق البحار أو بعد الغواصات.

وللانعكاس أهمية في الجيولوجيا حيث تنعكس موجات الصوت في باطن الأرض على طبقات بحسب كثافة الطبقات الأرضية وكذلك شكلها.

كما يستخدم الانعكاس في تعين مواقع وأعماق الزلازل.

يعرف انعكاس الصوت بانه :

ارتداد الموجات الصوتية نتيجة لاصطدامها بسطح عاكس تحت زاوية معينه طبقا لقانون الانعكاس المعرفة عن الضوء.

وعندما تكون زوايا السقوط عموديا على السطح العاكس, ترتد الموجة على نفسها (حيث تتساوى زاويا السقوط وزوايا الانعكاس) ويعرف ذلك بصدى الصوت, وهو تكرار سماع الصوت الناشيء عن انعكاس الصوت الأصلي. ويستوجب ذلك أن تكون الفترة الزمنية بينهما $\frac{1}{108}$ على الأقل لكي تشعر الأذن البشرية بصدى الصوت.

وبما أن سرعة الصوت في الجو عند 20 درجه مئوية يبلغ 340 متر في الثانية فإنه لكي تشعر الأذن بصدى الصوت يلزم أن يكون الحائل أو الحائط بعيدا عنا على الأقل 17 متر.

استخدامات الانعكاس:

لانعكاس صدى الصوت استخدامات كثيرة ومن أهمها:

المقدرة على تحديد بعد الأجسام والأعماق وتحديد أماكن المياه الجوفية وأماكن النفط في باطن الأرض ويستخدم أيضا في الكشف عن الجنين قبل ولادته عن طريق جهاز السونار وأيضا في الكشف عن عيوب الصناعة مثل سبائك الذهب.

التنقيب عن النفط:

تعطينا المسوحات الزلزالية التي يقوم بها الجيولوجيون صورا للطبقات الصخرية بعدة كيلومترات تحت الأرض.

ويحلل العلماء الجيولوجيون هذه الصور للعثور على مناطق قد تحتوي على النفط أو الغاز حيث تتميز مناطق تواجدها بأشكال خاصة فإذا بدت الصور معبرة عن احتمال وجود النفط, فإننا نستخدم معدات الحفر لحفر بئر في الموقع المرجح تواجد النفط فيه. وبالحفر نتأكد من تواجد النفط في تحت الأرض من عدمه.

الرادار

تعين بعد طائرة بالرادار:

يرسل جهاز الرادار نبضة موجة كرومغنطيسية ويقيس زمن عودتها (الصدى) وبمعرفة سرعة الضوء يمكن حساب المسافة.

كما يستخدم الرادار لتحديد بعد الأجسام وخاصة الطائرات. وقد استخدم الرادار من قبل (وهو موجات كهرومغناطيسية) في تحديد بعد القمر بدقة عن

الأرض. ثم خلفه بعد القمر بطريقة أكثر دقة باستعمال أشعة الليزر, والليزر أيضا موجه كهرومغنطيسية وذلك بقياس شعاع الليزر المنعكس عليه إلى الأرض.

الفصل الخامس

التوصيات:

- نوصي بإدخال مادة التحويلات الهندسية ضمن المناهج وأضعف الإيمان المدرس أن تدرس كجزئية من مادة الهندسة التحليلية.
- نوصي أيضا أن تجرى دراسات في الدوران حول نقطة وحول محور والانتقال ومعتبر البعد.

المراجـع:

1. د. عبد الهادي محمود الأتربي، د. سامي محمد مصطفى، هندسة التحويلات، الطبعة الأولى 2000م، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية ش.م.م للنشر.
2. ف. بوش، ترجمة د. سعيد الجزيري، ود. محمد أمين سليمان، مراجعة الأستاذ الدكتور محمد عبد المقصود النادي، أساسيات الفيزياء، دار ماكجروهيل للنشر، الطبعة العربية الأولى 1982م.
3. أ.د. نصار حسن عبد العال السُلمي، أساسيات الهندسة الإقليدية واللا إقليدية، مكتبة الرشد، الطبعة الأولى 2005م.
4. نصار السلمي، الهندسة التحليلية الفراغية، دار طيبة للنشر والتوزيع، القاهرة، الطبعة الأولى 2003م.
5. فرانك آيرز، المصفوفات، دار ماكجروهيل للنشر، الطبعة الأولى 1974م.

الملاحــق

صور للانعكاس في الطبيعة: