الفصل الأول

الدول والنهايـــات

(١-١) مقدمـــة:

إن من أهم أساسيات علم الرياضيات التي يجب دراستها وفهمها فهماً جيداً وتعتمد عليها كثير من فروع علم الرياضيات هي الدوال وذلك لأن المتغيرات والدوال تعتبر حجر الزاوية في بناء علم الرياضيات والدوال أنواع كثيرة ومتعددة كذلك فإن لكل دالة منحنى يعبر عن خصائصها الرياضية ويرسم شكلها وحساب التفاضل يركز على مضمونين أساسيان هما الدالة والنهايات.

(١-٢) الثوابت والمتغيرات *Constants and Variables*:

يدخل في أية عملية رياضية نوعان من الكميات. الأولى منها هي الكميات الثابتة ***Constants*** وهي التي تأخذ قيمة واحدة فقط ولا تتغير هذه القيمة عند إجراء العمليات الرياضية.

أما النوع الثاني فهي الكميات المتغيرة ***Variables*** وهي التي يمكن إعطاؤها عدد غير محدود من القيم.

(١-٣) الدوال *Function*:

(١-٣-١) مفهوم الدوال :

بصيغة عامة أي دالة هي عبارة عن علاقة رياضية أو قاعدة بين متغيرين أو أكثر يسمى إحداهما المتغير التابع والآخر المتغير المستقل إذا أخذنا

$$y = F(x) \qquad\qquad (1-1)$$

يسمى y المتغير التابع و x مستقل.

لتكن A, B مجموعتان غير خاليتان إذا وفقط كل عنصر من عناصر المجموعة الأولى A عنصراً وحيداً من المجموعة الثانية B عند ذلك نقول أننا عرفنا دالة F

من المجموعة A إلى المجموعة B وتكتب

$$F:A\rightarrow B$$

تعريف الدالة (الدالة في متغير):

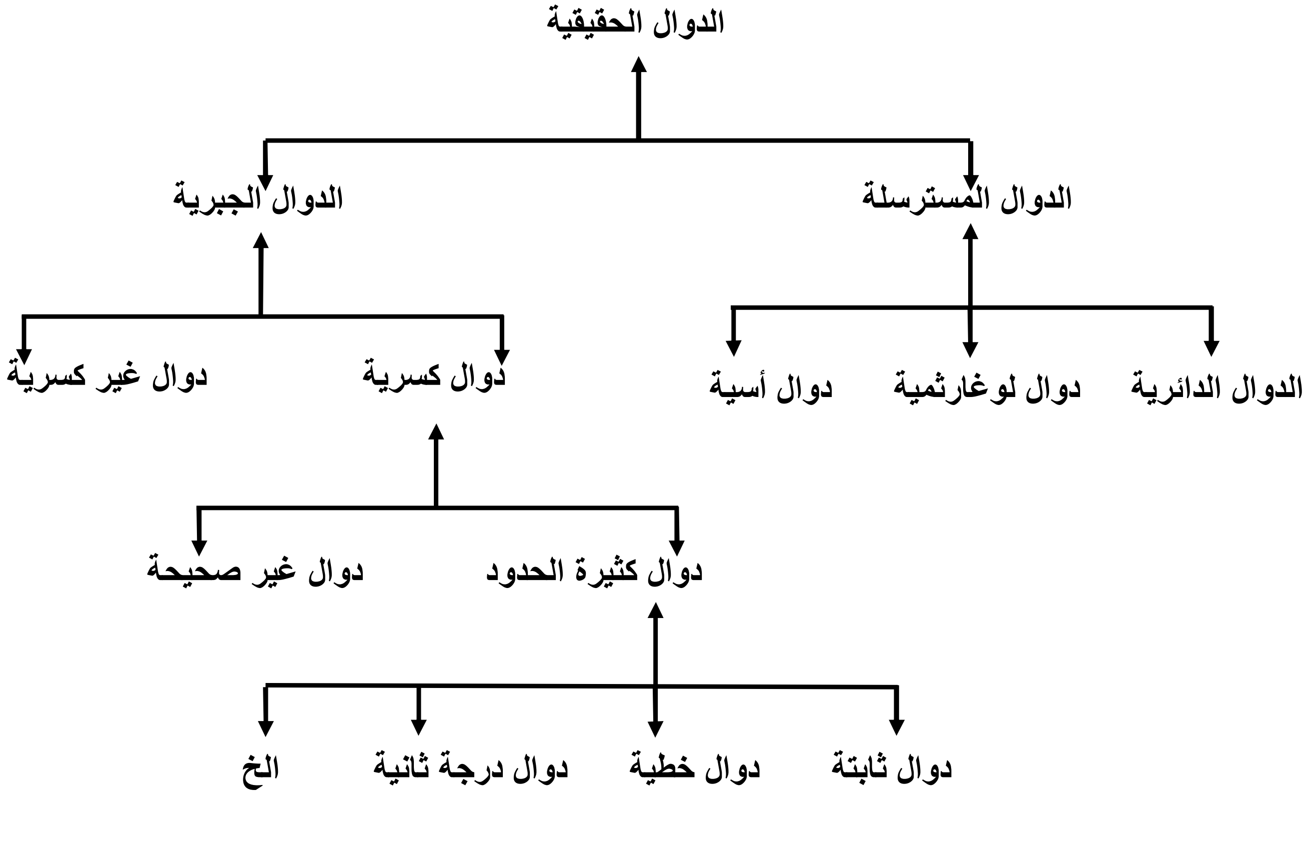
الدالة F هي اقتران بين عناصر مجموعتين غير خاليتين A,B بحيث يوافق كل عنصر من المجموعة A عنصراً وحيداً من المجموعة B.

أو بطريقة أخرى

الدالة f عبارة عن علاقة بحيث أن لكل قيمة يأخذها المتغير x توجد قيمة واحدة فقط للمتغير Y ويرمز لها بالرمز

$$F= (x,y): x,y\epsilon R, y = F(x) \qquad (1-2)$$

من التعريف نلاحظ أنه إذا كانت $(x,y_1),(x,y_2)$ عنصرين من عناصر الدالة f فإنه يجب أن تكون $y_1=y_2$ ولذا إذا تحقق هذا الشرط في أي علاقة صارت العلاقة دالة.



الشكل (١-١)

(١-٣-٢) أنواع الدوال

١- دوال كثيرات حدود تعرف كالآتي:-

$$W=a0z^{n}+a1z^{n-1}+\dots\dots\dots+a_{n-1}Z+a_{n}=p(z) \qquad (1\text{-}3)$$

حيث $_0\neq 0, a_1, a_2 \dots\dots a_n$ ثوابت مركبة. n عدد صحيح موجب يسمى بدرجة كثيرة الحدود. $P(z)$ يسمي التحويل. $W = a_z + b$ بالتحويل الخطي.

٢- الدوال الجبرية الجذرية تعرف كالآتي:-

$$W = \frac{p(z)}{Q(z)} \qquad (1-4)$$

حيث $Q(z),P(z)$، كثيرات حدود في بعض الأحيان تسمى بالتحويل الجذري.

الحالة الخاصة

$$w = \frac{az+b}{cz+d}$$

حيث: $Ad - bc \neq v$

تسمى غالباً بالتحويل الخطي الثاني أو الكسري.

٣-الدوال الآسية: تعرف كالآتي

$$w = e^{z} = e^{x+iy} = e^{x}(\cos y + i \sin y) \qquad (1-5)$$

حيث $e = 2.71228$ هو الأساس الطبيعي للوغاريثمات. إذا كان a حقيقين و موجباً فإننا نعرف

$$a^{z} = e^{z \ln a} \qquad (1-6)$$

حيث $\ln a$ هو اللوغاريثم الطبيعي للعدد a.هذه المعادلة تؤول إلى (1-6) إذا كان $a = e$

٤- الدوال المثلثية:

تعرف الدوال المثلثية أو الدائرية

وهي تعرف كالآتي

$$sin\, x\,, cos\, x\,, tan\, x \ldots\ldots\ldots\ldots$$

٥- الدوال الزائدية : تعرف كالآتي:

$$sin\, hx = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \qquad (1-7)$$

$$\cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2} \quad , \operatorname{sech} x\,, \operatorname{csch} x \ldots$$

٦-الدوال اللوغاريثمية

إذا كان

$$y = e^x \qquad (1-8)$$

فإننا نكتب $x = ln\, y$ وتسمي اللوغاريثم الطبيعي للعدد y. إذن الدالة اللوغارثمية تكون دالة عكسية للدالة الأسية ويمكن أن تعرف كالآتي:

$$x = ln\, y$$

٧- الدوال المثلثية العكسية:

إذا كان $Y= sin\, x$ فإن $X= sin^{-1} y$ تسمى بعاكس الدالة $sin\, x$ أو $arc\, sin\, x$ وبالمثل تعرف الدوال المثلثية أو الدوال الدائرية الأخرى .... $tany^{-1}, cosy^{-1}$

٨-الدوال الزائدية العكسية :

إذا كان $y=sin\, hx$ فإن $x=sinhy^{-1}$ تسمى بعاكس $sin\, hx$ وبالمثل لبقية الدوال الزائدية $tany^{-1}\, , cosy^{-1}$.

٩- الدوال الجبرية المتسامية:

إذا كان y هو حل معادلة كثيرة الحدود

$$p_0(x))y^n + p_1(x)y^{n-1} + \dots\dots\dots p_{n-1}(x)y + p_n(x)=0 \qquad (1\text{-}9)$$

حيث $p_{n(x)}$ .... $p_0 \neq 0, p_1$ هي كثيرة حدود في x و n عدد صحيح موجب فإن $y=f(x)$ أي يمكن التعبير عنها كحل لمعادلة (1-9) تسمى بدالة متسامية.

١٠- الدوال الصريحة و الدوال الضمنية:

الدوال الصريحة وتعرف كالآتي:

$$F=\{(x,y):y=f(x)\} \qquad (1\text{-}10)$$

الدوال الضمنية تعرف كالآتي:

$$F=\{(x,y): y + x\cos y=0\} \qquad (1\text{-}11)$$

حيث يظهر المتغير x, y في طرف واحد مثل هذه تسمى دوال ضمنية.

(١-٣-٣) الدوال الوحيدة والمتعددة القيمة

إذا وجدت لكل قيمة للمتغير المستقل z قيمة واحدة فقط للمتغير التابع w فإننا نقول أن w دالة وحيدة القيمة للمتغير z أو أن $f(z)$ وحيدة القيمة.

إذا وجد لكل قيم لمتغير z أكثر من قيمة واحدة لمتغير w, فإننا نقول ان w دالة متعددة القيم او كثيرة القيم للمتغير z .

ملحوظة:

يمكن اعتبار الدالة المتعددة القيمة كتجميع لدوال وحيدة القيمة. ويسمى كل عضو فيها بفرع للدالة. نعتبر عضواً خاص منها كفرع رئيسي لدالة المتعددة القيمة. وقيمة الدالة المناظرة لهذا التفرع كقيمة رئيسية.

تعريف:

نقول أن الدالة f المعرفة بالقاعدة $y=f(x)$ هي

A. دالة زوجية إذا تحقق لكل x من مجال الدالة $f(x)=f(-x)$ وهذا يستوجب أن يكون $-x$ في مجال الدالة.

B. دالة فردية: إذا تحقق لكلx في مجال الدالة $f(-x)=-f(x)$ وهذا يستوجب أيضا أن تكون $-x$ في مجال الدالة.

C. دالة دورية: إذا تحقق لكل x من مجال الدالة:

$$f(x+a)=f(x) \qquad (1\text{-}12)$$

حيث a أقل عدد موجب يحقق هذه الخاصية. تسمى a بدور الدالة.

(١-٣-٤) دوال المتغيرين:

قد أخذنا دوال المتغير الواحد وسوف نتطرق لدوال المتغيرين والمتغيرات العديدة.

إذا كانت $z= f(x, y)$ فإنه يقال أن z متغير تابع وان كل من(x, y) متغير مستقل ويقال أن الدالة f وحيدة القيمة ***single valued*** إذا ناظر كل زوج مرتب (x, y) قيمة واحدة لمتغير z يقال أن f دالة متعددة القيمة ***multiple***. إذا كان لمتغير z أكثر من قيمة مناظرة للزوج المرتب (x, y).

(١-٣-٥) دوال المتغيرات الثلاث:

يمكن تعريف دالة ذات ثلاث متغيرات مستقلة $u=(x, y, z)$ كما في تعريف دوال المتغيرين ما عدا النطاق الذي يكون هو فئة الأعداد المرتبة ثلاثياً (x, y, z) ويرمز

لقيمf بالرمز $f(x ,y, z)$ التي تقرن العدد المرتب ثلاثياً (x, y, z) بعدد وحيد u ويكون النطاق هو مجموعة جزئية$T⊆R,,D⊆R^3$.

(١-٣-٦) دوال المتغيرات العديدة:

يمكن تعميم التعريف السابق لدالة u في المتغيرات المستقلة $x, y, z,……t$ وعددها n إذا وجدت قاعدة تقرن بكل عدد مرتب نونياً على الصورة $(x, y, z……t)$ عدد وحيد u وعلية فإن$T⊆R,D⊆R^n$.

(١-٤) متسلسلة تايلور لدوال في متغيرين:

يمكن تعميم الفكرة المستخدمة في متسلسلة تايلور لمتغير واحد فمثلا يمكن كتابة متسلسلة تايلور لدالة $F(X,Y)$ حول $X=a$, $Y=b$ على النحو التالي

$$F(x,y) = f(a,b) + f_x(a,b)(x-a) + f_y(a,b)(y-b) + \frac{1}{2!}\left[f_{xx}(a,b)(x-a)^2 + 2f_{xy}(a,b)(x-a)(y-b) + f_{yy}(a,b)(y-b)^2\right] + \ldots \qquad (1\text{-}13)$$

(١-٥) النهايـــات:

(١-٥-١) المقدمة:

لنفرض أن الدالة f_x مثلا غير معرفه عند نقطه $y = 0$ بمعني أن النقطة لا تنتمي إلى نطاق الدالة وبالتالي فإننا لا نعرف قيمتها للدالة f_x عند النقطة (a) أي أن القيمة الدالية $f(x)$ ليس لها وجود فهل يمكن الحصول علي قيمة للدالة عند $x = a$ تكون قريبه من القيمة $f(x)$؟ أي أن السؤال الذي يفرض نفسه الآن هو كيف يمكن الحصول علي قيمه للدالة عند نقطة تكون الدالة عندها غير معرفه؟ وهذا ما سوف نجيب عنه.

(١-٥-٢) مفهوم نهاية الدالة:

لنفرض أن النقطة x قد اقتربت من القيمه (a) وبشرط $x \neq a$ فهل الدالة $f(x)$ غير معرفه عند $x = a$ في هذه الحالة تقترب هي ايضا من اي عدد حقيقي L؟ إذا

كانت الإجابة نعم فهذا يعني انه يوجد للدالة قيمه تسمي نهاية الدالة عندما تقترب النقطة x من القيمة a وتكتب رياضيا في الصورة $lim_{X\to a}F(X)=L$

حيث ترمز $lim_{x\to a}f(x)$ لنهاية الدالة $f(x)$ عندما تقترب النقطه (x) من القيمه (a) ويرمز لهذا الاقتراب $x\to a$ بهذه الفكره يمكن التغلب علي مشكله عدم وجود قيمه للدالة عند نقطه ما تكون الدالة غير معرفه وهكذا يمكن أن نحدد هنا المفهوم في التعريف التالي.

تعريف:

لتكن f داله معرفه علي فتره $(a\,,b)$ لا تحوي إحدا نقاطها c نقول الداله f تنتهي نحو العدد L عندما تؤول إلى c ونرمز لذالك بالرمز:

$$lim_{x\to c}F(X)=L$$

إذا وجد لكل عدد موجب $0<\varepsilon$, عدد $0<\delta$ بحيث يكون

$$0<|x-c|\Rightarrow|F(x)-l|<\varepsilon$$

(١-٥-٣) النهايات اليمني واليسرى:

عندما نتعامل مع نهاية الدالة فإننا نتعرض للدالة $x\to a$ والذي يعني أن x تقترب من (a) دون ان نشير الي كيفيه هذا الاقتراب هل هو خلال قيم أكبر من العدد (a) نفسه أم من خلال قيم أصغر منه؟

في الحقيقة أن الإجابة علي هذا السؤال يدفعنا إلى تعريف ما يسمى النهايات من جهة واحدة.

في الواقع فإنه إذا اقتربت النقطة *(x)* من القيمة *(a)* من خلال قيم أكبر من *(a)* ذاتها حيث يرمز لهذه العملية بالرمز $x\to +a$ فعندئذ تسمي بالنهاية اليمني ويرمز لها بالرمز

$$\lim_{x \to +a} F(x)$$

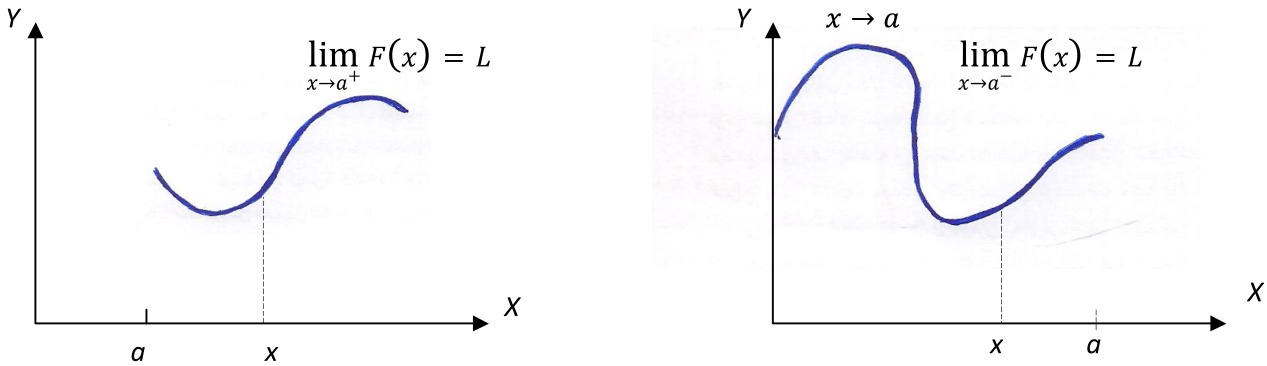
وإذا اقتربت النقطة x القيمة (a) من خلال قيم أصغر من القيمة (a) نفسها $x \to -a$ فعندئذ تسمي النهاية اليسرى.

ويرمز لها بالرمز $\qquad lim_{x \to -a} f(x)$

إذا انتهت الدالة نحو العدد Lعندما $x \to c$ وذلك بقيم تكبر العدد c, عند ذلك نرمز للنهاية بالرمز

$$\lim_{x \to ct} f(x) = L \qquad\qquad (1-14)$$

ويصبح التعريف علي الشكل:



النهاية اليسرى **النهاية اليمنى**

الشكل (١-٢)

تعريف:

لتكن f دالة معرفه علي الفترة $(a\,, c)$ نقول أن الدالة f تنتهي نحو العدد $x \to c +$ (بقيم تكبر العدد c ونكتب

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

إذا وجد لكل عدد موجب $\varepsilon > 0$ عدد موجب $\delta > 0$ بحيث يحقق:

$$0 < x - c < \delta \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon \qquad (1-15)$$

وبالأسلوب نفسه، نجد التعريف التالي لنهاية دالة fعندما تنتهي xنحو العدد cبقيم تصغره.

تعريف:

لتكن f دالة معرفه علي الفتره نقول أن الدالة f تنتهي نحو العدد Lعندما $x\rightarrow -c$ (بقيم تصغر العدد c) وتكتب $lim_{x\rightarrow -c}\, f(x)$

إذا وجد لكل عدد موجب $\varepsilon > 0$ عدد موجب $\delta > 0$ بحيث يحقق الاقتضاء $0< c\text{-}x < \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$ وإذا دققنا النظر في تعريف النهايات السابق لدراسة نهاية الدالة $f(x)$ عندما تؤول x إلى $-a$ نجد أنهما متساوين وكل منهما يساوي نهاية الدالة عندما تؤول x إلى العدد a ومن هذا ينتج انه إذا كان $lim_{x\rightarrow a}\, f(x)$

فإن:

$$\lim_{x\rightarrow -a} f(x) = A\, , \lim_{x\rightarrow +a} f(x) = A \qquad (1-16)$$

والعكس صحيح.

نظرية (١):

إذا كان للدالة $F(x)$ نهاية A عندما تقترب x من a فإن هذه النهاية يجب أن تكون وحيده القيمة, أي ذات قيمه واحده فقط أي انه إذا كانت $lim_{x\rightarrow a}(x) = A_1\, , lim_{x\rightarrow a}\, f(x) = A_2$

فإنه يجب أن يكون $A=A_1=A_2$

البرهان:

١. $lim_{x\rightarrow a}\, f(x) = A_1$

.٢ $lim_{x\to a} f(x) = A_2$

حيث $_1 \neq A_2$ أي أن $|A_1 - A_2| > 0$ ونفرض أن $|A_1 - A_2|$ $\varepsilon = \frac{1}{2}$ نطبق الآن تعريف النهايات علي كل من ١ و٢ فنحصل علي

$$|f(x) - A_2| < \varepsilon_2, |f(x) - A| < \varepsilon_1$$

حيث أن كلا من ١، ٢ أقل من ولكن:

$$|A_1 - A_2| = \left|\left(A_1 - f(x)\right) + (f(x) - A_2)\right|$$

وباستخدام قواعد القيمة المطلقة نجد أن

$$|A_1 - A_2| \le |A_1 - f(x)| + |f(x) - A_2| \le \varepsilon 1 + \varepsilon 2 < 2\varepsilon = |A_1 - A_2|$$

وحيث أن $A_1 \neq A_2$ فإن هذا يؤدي إلى تناقض , ولذا فلابد أن $A_1 = A_2$ وهو المطلوب إثباته.

(١-٥-٤) النهاية في متغيرين:

تعريف:

لتكن f دالة معرفة على الفترة (a, b) لا تحوي إحدى نقاطها c. نقول أن الدالة f تنتهي نحو العدد l عندما x, y تؤول إلى c. ونرمز لذلك بالرمز:

$$\lim_{x,y\longrightarrow c} f(x, y) = l \qquad (1 - 17)$$

إذا وجد لكل عدد موجب $\varepsilon > 0$ عدد $\delta > 0$ بحيث يكون:

$$0 < |x - c|, 0 < |y - c| \Rightarrow |f(x, y) - l| < \varepsilon$$

(١-٥-٥) الاتصال في متغيرين:

تعريف:

نقول أن الدالة f المعرفة على الفترة (a, b) متصلة عند $c \in (a, b)$ إذا كانت النهايتان اليمنى واليسرى لهذه الدالة عندما $(x, y) \longrightarrow c$ موجودتين ومتساويتين

وتساويان قيمة الدالة باختصار أن تكون نهاية الدالة عندما $(x,y) \to c$ تساوي قيمتها عند c $\lim_{x,y\to c}(x,y) = f(c)$ وهذا هو الشرط أن تكون f معرفة عند c وأيضا أن تكون قيمة النهاية تساوي $f(c)$ أي تحقق

$$\lim_{x,y\to c} f(x,y) = \lim_{x,y\to c} f(x,y) = f(c) \qquad (1-18)$$

شروط الاتصال:

١- أن تكون الدالة معرفة على الفترة.

٢- أن تكون النهاية موجودة.

٣- النهاية اليمنى تساوي النهاية اليسرى.

(١-٦) متوسط التغير للدالة:

لقد عرفنا فيما سبق أن الدالة تربط عناصر المجموعة x بعناصر المجموعة y في هذا الترتيب يمكن الرمز لها بالرمز $y=f(x)$ حيث $x \in X$عباره عن المتغير المستغل و $y \in Y$ عبارة عن المتغير التابع.

تعريف متوسط التغير للدالة:

إذا كانت$y=f(x)$ دالة وحدث تغير علي المتغير المستغل x فيها وكان هذا التغير من x إلى $\circ$ فإن متوسط التغير في هذه الدالة هو

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} = \frac{f(x_\circ) - f(x)}{x_\circ - x} \qquad (1-19)$$

أما المعني الهندسي لمتوسط التغير في دالة هو عبارة عن ميل الخط المستقيم الواصل بين النقطتين $(x_\circ, f(x_\circ))$ $(x, f(x))$ حسب مفهوم ميل الخط المستقيم.

(١-٧) مفهوم الاشتقاق:

هو نهاية متوسط معدل التغير.

(١-٧-١) تعريف المشتقة:

إذا أمكن إيجاد النهاية

$$F'(x) = lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

فإنها تسمي مشتقه الدالة $y = f(x)$ الأولي عند $x \to a$ ويرمز لها بالرمز $F'(a)$

و بطريقه أخري:

$$F'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x} \qquad (1-20)$$

يعني تفاضل الدالة المشتقة الأولي للدالة $F(x)$ كما يقال إنها قابله للاشتقاق عند x

أي أنه إذا أردنا أن نفاضل y بالنسبة ل x فإننا نوجد $\frac{dy}{dx}$ ويمكن النظر الي $\frac{dy}{dx}$ علي إنها دالة جديده للمتغير المستغل x ويرمز لها بأحد الرموز التالية

$F'(x)$ أو $\frac{dy}{dx}$ أو Y'.

(١-٧-٢) المشتقة اليمني واليسرى للدالة:

المشتقة اليمني للدالة $F(X)$ عند $x = x_\circ$ تعرف بإنها

$$F'_{+}(x_\circ) = lim_{h \to 0} \frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h} \qquad (1-21)$$

أما المشتقة اليسرى للدالة $F(x)$ عند $x = x_\circ$ تعرف بأنها

$$F'_{-}(x_\circ) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_\circ+h)-f(x_\circ)}{h} \qquad (1-22)$$

إذا كانت النهاية موجودة في هذه الحالة h تكون محدده بقيم سالبه عندما تقترب من الصفر.

(١-٧-٣) قواعد التفاضل:

القاعدة الأولي:

إذا كانت ^{n} $y=c$ حيث c ثابت فإن

$$y' = c\, n\, x^{n-1} \qquad (1-23)$$

القاعدة الثانية:

تفاضل حاصل جمع دالتين أو أكثر يساوي حاصل جمع تفاضلهما أي أن

$$\frac{d}{dx}(f(x)+g(x)) = \frac{d}{dx}(f(x)) + \frac{d}{dx}\left(g(x)\right) \qquad (1-24)$$

القاعدة الثالثة:

تفاضل باقي طرح دالتين يساوي باقي طرح كل منهما أي أن

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{dx}}\left(F(x)-g(x)\right) = \frac{df(x)}{dx} - \frac{dg(x)}{dx} \qquad (1-25)$$

القاعدة الرابعة:

تفاضل حاصل ضرب دالتين يساوي الدالة الأولي * تفاضل الدالة الثانية + تفاضل الثانية * تفاضل الدالة الأولي أي أن

$$\frac{d}{dx}\left(f(x) * g(x)\right) = f(x) * \frac{dg(x)}{dx} + g(x) * \frac{df(x)}{dx} \qquad (1-26)$$

القاعدة الخامسة:

إذا كانت $H(X) = \frac{f(x)}{g(x)}$

$$H'(x) = \frac{g(x) * f'(x) - f(x) * g'(x)}{g^2(x)} \qquad (1-27)$$

القاعدة السادسة:

إذا كانت $y = f(w)$ و $w = g(x)$ فإن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dw}\,\frac{dw}{dx} \qquad (1-28)$$

ويعرف بقانون التسلسل وهو يسهل عمليات التفاضل للمقادير الجبرية المعقدة.

(١-٧-٤) الدالـــة الضمنية وتفاضلها:

تعريف الدالة الضمني:

إذا كانت f عبارة عن دالة تربط عناصر المجموعة x بعناصر المجموعة y وكان هذا الترابط في صوره معادلة غير معلومة بالنسبة للمتغير y فإن الدالة f تسمي

دالة ضمنيه أما إذا أمكننا وضع y بدلاله x تسمي الدالة صريحة وفي بعض الأحيان يمكن تحويل الدالة الضمنية إلى دالة صريحة.

(١-٧-٥) تفاضل الدوال الدائرية والمثلثية:

في هذا البند سنتعرض للمشتقات الأولي للدوال الدائرية التي تعرضنا لتعريفها في السابق.

نظرية (٢):

إذا كانت $y = si\ x$ فإن $\frac{dy}{dx} = \cos x$

البرهان:

من تعريف الدالة$f(x)$ أي

$$F(x_\circ) = lim_{x\to x_\circ}\frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ}$$

$$\therefore \frac{f(x)-f(x_\circ)}{x-x_\circ} = \frac{\sin x - \sin x_\circ}{x - x_\circ}$$

لجميع قيم x حيث $x \neq x_\circ$ ولكن

$$\sin x - \sin x_\circ = 2 * \cos\frac{(x+x_\circ)}{2} * \sin\frac{(x-x_\circ)}{2}$$

ومنه ينتج أن

$$\frac{\sin x - \sin x_\circ}{x - x_\circ} = 2\cos\frac{x - x_\circ}{2} * \sin\frac{\left(\frac{x-x_\circ}{2}\right)}{x - x_\circ}$$

$$= \cos\frac{x - x_\circ}{2} * \frac{\sin\left(\frac{x-x_\circ}{2}\right)}{x - x_\circ}$$

وباستخدام نظريات النهايات نجد أن

$$y' = \cos x$$

(١-٧-٦) تفاضل معكوس الدالة الدائرية (المثلثية):

نتعرض في هذا البند لإيجاد مشتقه الدالة العكسية عموما ويلي ذلك نوجد المشتقات الأولي للدوال العكسية.

نظرية (٣):

إذا كان للدالة f دالة عكسية g وأن f قابله للاشتقاق لجميع قيم x وأن $0 \neq (x)'$ فإن الدالة العكسية g تكون قابله للاشتقاق عند $f(x)$ وأن

$$g'f(x) = 1/f'(x) \qquad (1-29)$$

وهذه المعادلة نأخذ الصورة

$$dy/dx = 1/\frac{dx}{dy}$$

ملاحظات:

١. لإيجاد مشتقه الدالة العكسية يجب معرفه x و $f(x)$ و $f'(x)$.

٢. الصيغة ١ تتطلب إيجاد f' عند x , وإيجاد g' عند $f(x)$.

٣. إذا كانت $'$ فإن g غير قابله للاشتقاق عند $f(x)$.

نظرية (٤):

إذا كانت $Y=si^{-1}x$ فإن

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{x-x^2}}\,, (|x| < 1)$$

البرهان:

من تعريف الدالة العكسية إذا كان

$$Y=sin^{-1}x = arc\ sin\ x$$

فإن:

$X = \sin y \qquad |x| < 1\ , 0 < \frac{\pi}{2}$

بتفاضل طرفي المعادلة الأخيرة باستخدام النظرية (٣)

$١ = \cos y * \frac{dy}{dx}$

$\therefore \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\cos y} = \frac{1}{\sqrt{1-\sin^2 y}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ , |x| < 1.$

نظرية (٥):

إذا كان $Y = co^{-1}x$ فإن $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

نظرية (٦):

إذا كان $y = \ tanx^{-1}$ فإن $\frac{dy}{dx} = \ \frac{1}{1+x^2}$

نظرية (٧):

إذا كانت $y = a\ r\ c\ co\ x$ فإن

$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{1+x^2} \ \ , x \in R$

نظرية (٨):

إذا كانت $y = a\ r\ se\ x$ فإن

$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x\sqrt{x^2-1}} \ \ ,(|x| > 1)$

نظرية (٩):

إذا كان $y = cscx^{-1}$ فإن

$\frac{dy}{dx} = \frac{-1}{x\sqrt{x^2-1}} \ \ ,(|x| > 1)$

(١-٧-٧) تفاضل الدوال الأسية واللوغرثمية والبارامترية:

أولا : تفاضل الدالة الأسية:

إذا كانت $y = e^x$ فإن

$$\frac{dy}{dx} = e^x \qquad (1-30)$$

ثانيا:

تفاضل الدالة اللوغرثمية:

نظرية (١٠):

إذا كانت $y = l\,x$ فإن $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{x}$

ثالثا:

تفاضل الدالة البارمترية:

نفرض أن الدالة $y = y(x)$ معطاة بالمعادلتين البارمتريتين

$$Y = f(x) \quad , \quad x = g(t)$$

حيث أن t هو البارامتر وتنتج العلاقة $y = g(x)$ بحذف t من المعادلتين نفرض لهاتين الدالتين g , f مشتقتان وأن الدالة $x = g(x)$ لها دالة عكسية $t = h(x)$ والدالة h مشتقه كذلك عندئذ يمكننا اعتبار الدالة $y = y(x)$ المعطاة بالمعادلتين البارامتريتين دالة الدالة

$$Y = f(x) \quad , \quad t = h(x)$$

حيث t هو متغير وسيط وبتطبيق القاعدة السادسة

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt} * \frac{dt}{dx} \qquad (1-31)$$

(١–٨) مشتقة الدوال المثلثية الزائدية

نظرية (١١): تعطي المشتقة الأولي للدوال المثلثية الزائدية علي النحو التالي :

(1) $\frac{d}{dx}(\sinh x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x})\right) = \frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x}) = \cosh x$

(2) $\frac{d}{dx}(\cosh x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{1}{2}(e^{x} + e^{-x})\right) = \frac{1}{2}(e^{x} - e^{-x}) = sinhx$

(3) $\frac{d}{dx}(\tanh x) = sech^{2}x$

البرهان:

$$\frac{d}{dx}(\tanh x) = \frac{\cosh x \frac{d}{dx}(\sinh x) - \sinh x \frac{d}{dx}(\cosh x)}{\cosh^{2} x}$$

$$\frac{\cosh^{2} x \sinh^{2} x}{\cosh^{2} x}$$

$$= \frac{1}{\cosh x} = sech^{2}x \quad \neq$$

(4) $\frac{d}{dx}(\coth x) = -\, cosech^{2}\, x$

(5) $\frac{d}{dx}(sech\, x) = \ -sech\, x\, tanhx$

(6) $\frac{d}{dx}(cosech\, x) = \ cosech\, x\, cothx$

(١–٨–١) خصائص الدوال المثلثية الزائدية :

(1) $\cosh^{2} t - \ \sinh^{2} t = 1$

(2) $\sinh(t + s) = \sinh t\, .\cosh s + cosht \sinh s$

(3) $\cosh\,(t - s) = \cosh\ t\ \cosh s + \sinh t \sinh s$

(4) $\sinh 2t\ = 2\sinh t\ \cosh t$

(5) $\cosh 2t\ = \cosh^{2} t + \ \sinh^{2} t$

البرهان:

1) $\cosh^2 t - \sinh^2 t = 1$

$$\sinh t = \frac{e^t - e^{-t}}{2}$$

$$\cosh t = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

فان :

$$\cosh^2 t - \sinh^2 t = \left(\frac{e^t + e^{-t}}{2}\right)^2 - \left(\frac{e^t - e^{-t}}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4}[e^{2t} + 2 + e^{-2t} - e^{2t} + 2 - e^{-2t}]$$

$$= \frac{1}{4}(4) = 1$$

$$\sinh(t+s) = \frac{1}{2}(e^{t+s} - e^{-t-s})$$

$$\sinh t \cosh t + \cosh t \sinh t = \frac{1}{4}(e^t - e^{-t})(e^s + e^{-s})$$

$$+\frac{1}{4}(e^t + e^{-t})(e^s - e^{-s})$$

$$= \frac{1}{4}\left[\left(e^{t+s} + e^{t-s} - e^{s-t} - e^{-(t+s)}\right) + e^{t+s} - e^{t-s} + e^{s-t} - e^{-t-s}\right]$$

$$= \frac{1}{4}[2e^{t+s} - 2e^{-t-s}]$$

$$= \frac{1}{2}[e^{t+s} - e^{-t-s}] = \sinh(t+s)$$

(١-٩) الدوال المثلثية الزائدية العكسية :

تعريف : تعرف الدوال المثلثية الزائدية :

1) $y = \sinh^{-1} n$ هو الدالة العكسية للدالة $y = \sinh n$

2) $y = \cosh^{-1} n$ هو الدالة العكسية للدالة $y = \cosh n$

3) $y = \tanh^{-1} n$ هو الدالة العكسية للدالة $y = \tanh n$

نظرية (١٢):

1) $\sinh^{-1} n = log\left(n + \sqrt{n^2+1}\right) \qquad , \qquad n \in R$

2) $\cosh^{-1} n = log\left(n + \sqrt{n^2-1}\right) \qquad , \qquad n \geq 1$

3) $tanh^{-1} n = \frac{1}{2} log\left[\frac{1+n}{1-n}\right] \qquad , \qquad |n| < 1$

البرهان:

١) ضع : $n = sinh\, y \quad y = sinh^{-1} n ,$ و ١ منه

$$n = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$$

$$2n = (e^y - e^{-y}) \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} (1)$$

وبضرب طرفي المعادلة (١) في e^y ينتج أن :

$$e^{2y} - 2ne^y - 1 = 0 \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} (2)$$

وبحل المعادلة

$$(e^y)^2 - 2ne^y - 1 = 0 \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} (2)$$

$$e^y = \frac{2n \pm \sqrt{4n^2+4}}{2} = n \pm \sqrt{n^2+1}$$

وبما أن : $e^y > 0$ دائما فان :

$$e^y = n + \sqrt{n^2+1}$$

وباخذ قيم لوغريثم الطرفين

$$y = log(n + \sqrt{n^2+1})$$

٢) ضع : $y = cosh^1 n \leftarrow n = cosh\, y$

$$n = \frac{1}{2}(e^y - e^{-y})$$

$$e^y - 2n + e^{-y} \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} (1-32))$$

وبضرب المعادلة (1-32) في e^y ينتج أن :

$$e^y - 2n + e^{-y} = 0 \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} (1-33)$$

وبضرب المعادلة (1-33) في e^y ينتج أن:

$$e^y = n \pm \sqrt{n^2 - 1}$$

وبما أن : وبما أن$0 < e^y$ دائما فان

$$e^y = n \pm \sqrt{n^2 - 1} \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} (1-34)$$

وباخذ قيم لوغريثم الطرفين في (1-34) ينتج

$$y = log(n + \sqrt{n^2 - 1})$$

حيث $n > 1$

٣) ضع : $y = tanh^{-1} n, \quad n = tanh\, y$

$$n = \frac{e^y - e^{-y}}{e^y + e^{-y}}$$

ومنها:

$$n(e^y + e^{-y}) = e^y - e^{-y} \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} (1-35)$$

وبضرب طرفي المعادلة (1-35) في e^y ينتج أن :

$$n(e^{-2y} + 1) = e^{2y} - 1$$

$$(n-1)e^{-2y} = -(n+1)$$

ومنها :

$$e^{2y} = \frac{1+n}{1-n} \text{\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_} (1-36)$$

وباخذ قيم الوغريثم الطبيعي الطرفين في (1-36) ينتج

$$y = \frac{1}{2} log\left[\frac{1+n}{1-n}\right] \quad , \qquad |n| < 1 \qquad (1-37)$$

الفصـــل الثــــانـــي

المشتقات الجزئيـــة

(٢–١) المشتقات الجزئية:

تعريف:

تسمي المشتقة الجزئية للدالة $f(x\ ,\ y)$ (المعرفة في المنطقة D) بالنسبة للمتغير المستغل x مع إبقاء المتغير المستغل الآخر y ثابتا بالمشتقة الجزئية للدالة f بالنسبة إلي x ويرمز له بالرمز $\frac{\partial f}{\partial x}$ أو f_x أو $f_x\,(x\,,y)$ بينما يرمز للمشتقة الجزئية للدالة $f\ (x\ ,\ y)$ بالنسبة إلي y بأحد الرموز $\frac{\partial f}{\partial y}$ أو f_y أو $f_y(x\,,y)$ ويصاغ رياضيا كلأتي:

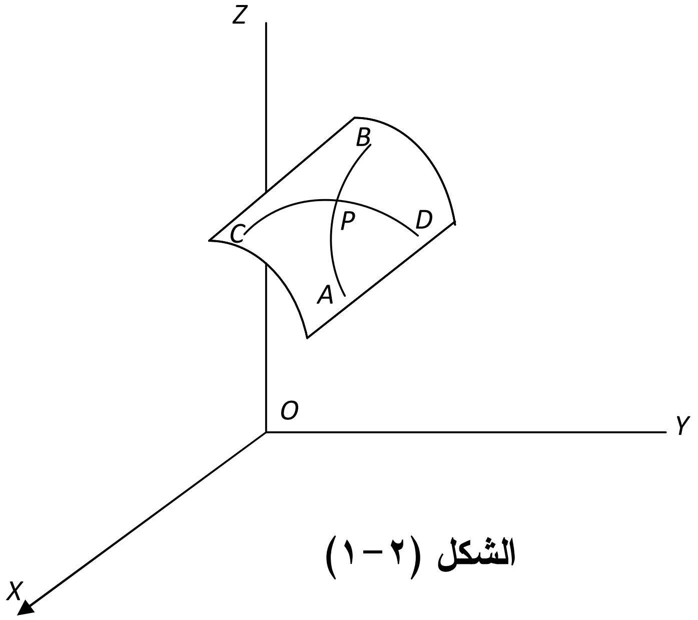
$$\frac{\partial f}{\partial x} = lim_{h\to 0}\frac{f(x+h,y)-f(x\,,y)}{h} \qquad (2-1)$$

بينما

$$\frac{\partial f}{\partial y} = lim_{k\to 0}\frac{f(x\,,y+k)-\,f(x\,,y)}{k} \qquad (2-2)$$

(٢–٢) المعني الهندسي للمشتقة الجزئية:

نعتبر السطح $z=\ f(x\ ,\ y)$ ونفرض وجود مستويين مارين بالنقطة P ويوازيان $xoz\ ,\ yoz$ ويقطعان هذا السطح في المنحنيين ($APB\ ,CPD$ كما في الشكل) . بينما تتغير x بينما تكون y ثابتة فإن P تتحرك علي المنحني APB وعليه فإن المقدار $\frac{\partial f}{\partial x}$ عند النقطة



الشكل (٢–١)

يساوي ميل المماس للمنحني APB عند P وبالمثل عندما تتغير y مع ثبوت x فإن P تتحرك علي المنحني CPD وتكون قيمه $\frac{\partial z}{\partial y}$ عند النقطة P تساوي ميل المماس للمنحني CPD عند النقطة P .

ملاحظات:

١. إذا كان للدالة $f(x, y)$ المشتقتين f_y, f_x وكانتا متصلتين في المنطقة D فإن الدالة $f(x, y)$ تكون متصلة في هذه المنطقة.

٢. وجود المشتقة الجزئية عند نقطة ما في المنطقة D لا يضمن اتصال الدالة $f(x, y)$ عند هذه النقطة.

(٢−٣) المشتقات الجزئية من رتب أعلى:

إذا كانت الدالة $f(x, y)$ لها مشتقات جزئية من الرتبة الأولي عند كل نقطة (x, y) في المنطقة D فإن كلا من f_y, f_x تكون دالة في متغيرين x, y وهذه الدوال يكون لها أيضا مشتقات جزئية أولي ومن ثم فإنها تكون مشتقات جزئية من الرتبة الثانية للدالة F ويرمز لها كالآتي:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}\right] = \frac{\partial f}{\partial x^2} = f_{xx}, \frac{\partial}{\partial y}\left[\frac{\partial f}{\partial y}\right] = f_{yy} \qquad (2-3)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\partial}{\partial y}\right] = \frac{\partial f}{\partial x \partial y} = f_{xy}, \frac{\partial f}{\partial y \partial x} = f_{yx} \qquad (2-4)$$

وبطريقه مماثله يمكن تعريف المشتقات الجزئية من رتب أعلي, فمثلا

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y} f_{xxy}$$

والتعريف الرياضي للمشتقات الجزئية من الرتبة الثانية المعطاة في

١. عند النقطة $(x_\circ, y_\circ)$ يكون علي الصورة

$$f_{xx}(x_\circ, y_\circ) = \lim_{h\to 0} \frac{f_x(x_\circ + h , y_\circ) - f_x(x_\circ , y_\circ)}{h} \qquad (2-5)$$

$$f_{xy}(x_\circ , y_\circ) = \lim_{h\to 0} \frac{f_y(x_\circ + h , y_\circ) - f_x(x_\circ , y_\circ)}{h} \qquad (2-6)$$

$$f_{yx}(x_\circ, 0) = \lim_{k\to 0} \frac{f_x(x_\circ , y_\circ + k) - f_x(x_\circ , y_\circ)}{k} \qquad (2-7)$$

$$f_{yy}(x_\circ, y_\circ) = \lim_{k\to 0} \frac{f_x(x_\circ , y_\circ + k) - f_y(x_\circ , y_\circ)}{k} \qquad (2-8)$$

في وجود هذه النهايات.

نظرية (١):

إذا كانت *f(x , y)* معرفة في المنطقة *D* وكانت كل من المشتقات $f_{yx}, f_{xy}, f_{yy}, f_{xx}$ موجودة و متصله في جوار النقطة $(y_\circ, x_\circ)$ فإن $f_{xy} = f_{yx}$ عند هذه النقطة.

البرهان:

لتكن

$$G = f(x_\circ + h, y_\circ + k) - f(x_\circ , y_\circ + k) - f(x_\circ + h , k) - f(x_\circ, y_\circ)$$

نعرف الدالتين

$$\begin{aligned} \emptyset = (x , y) &= f(x + h , y) - f(x , y) \quad , \varphi(x , y) \\ &= f(x , y + k) - f(x , y) \end{aligned}$$

فإن:

$$G = \emptyset\left(x_\circ , y_\circ + k\right) - \emptyset(x_\circ, y_\circ) \, , \; G = \varphi\left(x_\circ + h , y_\circ\right) - \varphi(x_\circ, y_\circ) \quad - *$$

وبتطبيق نظرية القيمة المتوسطة في متغير واحد للمعادلتين(*) نحصل علي

$$\begin{aligned} G &= K \;\; \emptyset_y(x_\circ, y_\circ + \theta_1 k) \\ &= k\{f_y(x_\circ + h , y_\circ + \theta_1 k) - f_y(x_\circ, y_\circ + \theta_1 k) \ldots \quad (1)\} \end{aligned}$$

$$G = h\,\varphi_x(x_\circ + \theta_2 h, y_\circ)$$
$$= h\{f_x(x_\circ + \theta_2 h, y_\circ + h) - f_x(x_\circ + \theta_2 h, y_\circ) \ldots \quad (2)\}$$

حيث $١ > \theta_1 > ٠ \;,\; ١ > \theta_2 > > ٠$

وبتطبيق نظرية القيمة المتوسطة مره أخرى للمعادلتين (١) و (٢) نحصل علي

$$G = hkf_{xy}(x_\circ + \theta_3 h\,, y_\circ + \theta_1 k), 0 < \theta_1 < 1, 0 < \theta_3 < 1 \qquad (3)$$

$$G = hkf_{yx}(x_\circ + \theta_2 h\,, y_\circ + \theta_4 k), 0 < \theta_2 < 1, 0 < \theta_4 < 1 \qquad (4)$$

من المعادلتين (٣) و (٤) نحصل علي

$$f_{xy}(x_\circ + \theta_3 h, y_\circ + \theta_1 k) = f_{yx}(x_\circ + \theta_2 h, y_\circ + \theta_4 k)$$

وبأخذ النهايات للمعادلة الأخيرة عندما $h \to 0\,, k \to 0$

[وبفرض أن $f_{yx}\,, f_{xy}$ متصلتان عند النقطة $(x_\circ, y_\circ)$] نحصل علي

$f_{xy}(x_\circ, y_\circ) = f_{yx}(x_\circ, y_\circ)$ وهو المطلوب إثبات

ملحوظة:

إذا تحققت شروط النظرية عند جميع نقاط المنطقة D فإن $_{xy} = f_{yx}$ تتحقق عند جميع نقاط D .

(٢-٤) التفاضلة:

لتكن $z=f(x\,,\,y)$ و $\Delta x = dx$ و $\Delta y = dy$ هما الزيادة في كل من $x\,,\,y$ علي الترتيب وعليه فإن الزيادة في Δz في z تعطي بالعلاقة

$$\Delta z = f(x + \Delta x\,, y + \Delta y) = f(x\,, y) = \Delta f \qquad (2-9)$$

إذ كانت للدالة $f(x, y)$ المعرفة في المنطقة D مشتقات جزئية متصلة في D فإن

$$\Delta z = f(x + \Delta x, y + \Delta y) - f(x\,, y)$$

$=f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x+\Delta x, y)+f(x, y+\Delta y)-f(x\,,y)$ (2 − 10)

وباستخدام نظرية القيمة المتوسطة (بند) نحصل علي

$$\Delta z=\frac{\partial f}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial f}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y \qquad (1\text{-}11)$$

وبتعريف $\Delta x=dx$ و $\Delta y=dy$ فيكون

$$\Delta z=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy+\varepsilon_1 dx+\varepsilon_2 dy=\Delta f \qquad (1\text{-}12)$$

حيث تقترب كل مره من $_1$ و ε_2 من الصفر عندما

(٢–٤–١) تعريف التفاضلة:

يسمي التعبير

$$dz=\frac{\partial z}{\partial x}dx+\frac{\partial z}{\partial y}dy \text{ أو } df=\frac{\partial f}{\partial x}dx+\frac{\partial f}{\partial y}dy$$

بالتفاضلة أو التفاضل الكلي للدالة f.

نلاحظ أن $\Delta f\neq df$ إذا كانت $\Delta x=dx$, $\Delta y=dy$ كميتين صغيرتين فإن df تعتبر تقريبا مناسبا ل Δf ويسمي كل منت dy, dx بـــ تفاضله $x\,,y$ علي الترتيب.

(٢–٤–٢) نظريات على التفاضلات:

نفرض أن الدوال التالية ذكرها هي دوال متصلة ولها مشتقات جزئية متصلة في المنطقة D فإن:

إذا كانت $f(x\,,y)$ قابله للتفاضل عند النقطة $(x\,,y)$ فتكون متصله عند هذه النقطة حيث $(x\,,y)\in D$.

إذا كانت $z=f(x_1,x_2,\dots,x_n)$ فإن

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \qquad (1-13)$$

إذا كانت $f(\quad_1, x_2, \dots.., x_n) = c$ حيث c ثابت ما فإن $df = 0$ (يلاحظ في هذه الحالة أن المتغيرات $\quad_1, x_2, \dots, x_n$ لا يمكن أن تكون كلها متغيرات مستغلة .

نظرية (٢):

الشرط الضروري والكافيء لكي يكون التعبير $M(x\,,y)dx + N(x\,,y)dy$ تفاضل كلي (تام) للدالة f هو

$$\frac{\partial M}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$$

البرهان:

الشرط الضروري نفرض أن $Mdx + Ndy$ تفاضل كلي للدالة f وعليه فإن

$$Mdx + Ndy = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy = df$$

أي أن $M = \frac{\partial f}{\partial x}\,, N = \frac{\partial f}{\partial y}$ وبفرض أن الدالة ومشتقاتها الجزئي f_{yx}, f_{xy}, f_y, f_x دوال متصلة فإن

$$f_{xy} = f_{yx}$$

الشرط الكافيء:

نفرض أن $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial N}{\partial x}$ ومنها نجد أن

$$f(x\,,y) = \int_{x_\circ}^{x} M(x\,,y)dx + \int_{y_\circ}^{y} N(x\,,y)dy \qquad (2-14)$$

حيث $y_\circ, x_\circ$ ثابتان إختياريان نلاحظ أن

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \int_{x_\circ}^{x} \frac{\partial M}{\partial Y} dx + N(x_\circ\,,y) = \int_{x_\circ}^{x} \frac{\partial N}{\partial x} dx + N(x_\circ\,,y)$$

$$= N(x\,,y) - N(x_\circ\,,y) + N(x_\circ\, y) = N(x\,,y)$$

وبطريقة مماثلة يمكن أن نثبت أن $\frac{\partial}{\partial x} = M(x\,,y)$ ومن ذلك نجد أنه يمكن كتابه $Mdx + Ndy$ علي الصورة

$$Mdx + Ndy = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy \qquad (2-15)$$

وهذه هي صوره التفاضل التام.

(٢–٥) الاشتقاق الجزئي لدالة الدالة:

نظرية (٣):

نفرض أن الدالة $f(x\,,y)$ قابلة للتفاضل بالنسبة إلي المتغيرين $x\,,y$ واللذين بدورهما دالتين في $u\,,v$ وقابلتان للتفاضل بالنسبة لـــ $u\,,v$ أي أن الدالة f دالة في متغيرين $u\,,v$ فيكون

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} * \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} * \frac{\partial y}{\partial u} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} * \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} * \frac{\partial y}{\partial v} \qquad (2)$$

البرهان:

لتكن $x = \emptyset(u\,,v), y = \varphi(u\,,u), z = f(x\,,y)$ وحيث أن كل من $f\,,\varphi\,,\emptyset$ قابلة للاشتقاق وكما سبق أن أثبتنا في البند ( ) أن

$$\Delta f = \frac{\partial f}{\partial x}\Delta x + \frac{\partial f}{\partial y}\Delta y + \varepsilon_1\Delta x + \varepsilon_2\Delta y \qquad (3)$$

حيث $\varepsilon_2, \varepsilon_1$ تؤول إلي الصفر عندما تؤول كل من $\Delta y\,, \Delta x$ إلي الصفر وعلي ذلك فإن

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta u} = \lim_{\Delta u \to 0} \left\{\frac{\partial f}{\partial x} * \frac{\Delta x}{\Delta u} + \frac{\partial f}{\partial y} * \frac{\Delta y}{\Delta y} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta u} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta u}\right\}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x} * \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} * \frac{\partial y}{\partial u}$$

وبالمثل يمكن برهنه (٢) بنفس الطريقة وذلك بوضع Δv بدلا Δu وبفرض $\Delta v = 0$.

نتيجة:

في النظرية السابقة إذا كانت $x = \emptyset(t), y = \varphi(t), f(x , y)$ حيث الدوال $\emptyset, \varphi , f$ قابلة للتفاضل فإن:

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} * \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} * \frac{dy}{dt} \qquad (2-16)$$

ويسمي $\frac{d}{dt}$ بالمعامل التفاضلي الكلي للتميز بينه وبين $\frac{\partial f}{\partial x}$و $\frac{\partial x}{\partial y}$ (لأحظ أن التفاضل بالنسبة إلي t ليس جزئياً).

البرهان:

باستخدام المعادلة (٣) نجد أن

$$\frac{df}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta f}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \left\{ \frac{\partial f}{\partial x} * \frac{\Delta x}{\Delta t} + \frac{\partial f}{\partial y} * \frac{\Delta y}{\Delta t} + \varepsilon_1 \frac{\Delta x}{\Delta t} + \varepsilon_2 \frac{\Delta y}{\Delta t} \right\}$$
$$= \frac{\partial f}{\partial x} * \frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial y} * \frac{\partial y}{\partial t}$$

ملاحظات:

تسمي هذه النتائج غالباً بقواعد السلسلة (التسلسل) وهي ذات أهمية في تحويل المشتقات من مجموعة متغيرات إلي مجموعة متغيرات أخري ويمكن الحصول علي المشتقات الأعلى رتبة بالتطبيق التكرر لقواعد السلسلة (التسلسل).

(٢-٦) قوانين الاشتقاق الجزئي:

1. $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\overrightarrow{A}.\overrightarrow{B}\right) = \vec{A}.\frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial A}{\partial x}.\vec{B} \qquad (2-17)$$

2. $$\frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{A} \times \vec{B}\right) = A \times \frac{\partial B}{\partial x} + \frac{\overrightarrow{\partial A}}{\partial x} \times B \qquad (2-18)$$

3. $$\frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x}\left(\vec{A}.\vec{B}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\vec{A}.\vec{B}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left[\vec{A}.\frac{\overrightarrow{\partial B}}{\partial x} + \frac{\overrightarrow{\partial A}}{\partial x}.\vec{B}\right] = \vec{A}.\overrightarrow{\frac{\partial^2 B}{\partial y \partial x}} +$$
$$\frac{\overrightarrow{\partial B}}{\partial x} + \frac{\overrightarrow{\partial A}}{\partial x}.\frac{\overrightarrow{\partial B}}{\partial y} + \overrightarrow{\frac{\partial^2 A}{\partial y \partial x}}.\overrightarrow{B} \qquad (2-19)$$

(٢-٧) التفاضلات الكلية:

لقد سبق وعرفنا التفاضلين dy و dx لدالة $y = f(x)$ في المتغير المستغل الوحيد x بالشكل

$$dx = \Delta x \text{ و } dy = f'(x)dx = \frac{dy}{dx}dx \qquad (2-20)$$

لتعتبر الدالة $z = f(x, y)$ في المتغيرين المستقلين x و y ولتعرف $dx = \Delta x$ و $dy = \Delta y$ فإذا جعلنا x تتغير وتركنا y ثابتة فإن z دالة في x فقط والتفاضل الجزئي لـــ z بالنسبة x يعرف ب

$$d_x z = f_x(x, y)dx = \frac{\partial z}{\partial x}dx$$

وبشكل مماثل تعرف التفاضل الجزئي لـــz بالنسبة لـــ y على انه

$$d_y z = f_y(x, y)dy = \frac{\partial z}{\partial y}dy$$

ويعرف التفاضل الكلي dz على انه مجموع التفاضلين الجزئيين أي

$$dz = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\partial y}dy \qquad (2-21)$$

ويعرف التفاضل الكليdw لدالة $w = (x, y, z, \dots \dots . t)$ بـــ

$$dw = \frac{\partial w}{\partial x}dx + \frac{\partial w}{\partial y}dy + \frac{\partial w}{\partial z}dz + \cdots \frac{\partial w}{\partial t}dt \qquad (2-22)$$

وكما في حالة دالة لمتغير واحد فإن التفاضل الكلي لدالة لعدة متغيرات تعطى تقريبا جيدا لتزايد الكلي الذي يطرأ على الدالة عندما تكون تزايدات المتغيرات المستقلة المتعددة صغيرة.

(٢–٨) قاعدة السلسلة:

(٢–٨–١) مقدمة:

مع أننا يمكننا إيجاد مشتقة $(x^2+1)^7$ بفك المقدار الجبري، لكن المشروع ليس سارياً. وأيضا لا يمكننا إيجاد المشتقة بطريقة قاعدة القوة إذا إن المقدار الجبري هو قوة الدالة في x وليس قوة لــ x نحتاج إلى تعميم لقاعدة القوة إلى مقدار جبري على الصورة $g^n(x)$ سنحصل على مثل هذه القاعدة إذا ما اعتبرنا $g^n(x)$ كدالة تركيبية لدوال. لكن نحتاج أولا إلى قاعدة مشابهة لقاعدتي حاصل الجمع وحاصل الضرب. يمكننا إيجاد مشتقة الدالة التركيبية $F(g(x))$ لدالتين بدلالة مشتقتي g و f.

(٢–٨–٢) قاعدة السلسلة:

دع $f(x) = f(g(x))$ وضع $z = g(x)$ إذا كانت g لها مشتقة عند x وكانت f لها مشتقة عند x، فإن f يكون لها مشتقة عند x ويكون

$$f'(x) = D_x f\big(g(x)\big) = f'(z)g'(x) = f'\big(g(x)\big)g'(x) \qquad (2-22)$$

الدليل x يظهر في رمز المشتقة D_x ليذكرنا بان $f(g(x))$ هي دالة في x.

إن قاعدة السلسلة ستمكننا من تعميم كثير من قواعد التفاضل الأساسية مما يوسع كثيراً مدى تطبيقها.

(٢–٨–٣) إيجاد المشتقة لــ $g^n(x)$:

$$Dg^n(x) = ng^{n-1}(x)Dg(x) \qquad (2-23)$$

حيث n عدد صحيح.

ليكن ذلك صحيحاً. لاحظ أن القاعدة (2-23) تختزل إلى قاعدة القوة عندما تكون x قابلة للتفاضل عند g من الطبيعي يجب أن يكون $g(x) = x$.

البرهان:

إذا وضعنا $z = g(x)$ وكتبنا $f(z) = z^n$ فإن $g^n(x)$ يمكن اعتبارها كالدالة التركيبية ل f ب g

$$g^n(x) = f\big(g(x)\big)$$

بما أن $'(z) = nz^{n-1}$ فيكون لدينا بقاعدة السلسلة

$$Dg^n(x) = D_x f\big(g(x)\big) = f^{'}(z)g^{'}(x) = nz^{n-1}g(x) = ng^{n-1}(x)g'(x)$$

(٢–٨–٤) قاعدة السلسلة لدوال الدوال:

إذا كانت $z = f(x,y)$ دالة متصلة في المتغيرين y و x ولها مشتقتان جزئيتان $\partial z/_{\partial x}\,, \partial z/_{\partial y}$ وإذا كانت y و x دالتين قابلتين للاشتقاق $z = g(t) = h(t)$ والمتغير t يكزن z دالة في t ويعطى $\frac{dz}{dt}$ الذي نسميه المشتقة الكلية لــ z بالنسبة لــ t بــ

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y}\frac{dy}{dt} \qquad (2-24)$$

وبشكل مماثل إذا كانت الـ ـــ $w = f(x,y,z,\ldots.)$ دالة متصلة في المتغيرات... ... $x,y,z,\ldots$ دالة قابلة للاشتقاق في المتغير t فإن المشتقة الكلية لـــ w بالنسبة لــ t تعطى بــ

$$\frac{dw}{dt}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{dz}{dt}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{dy}{dt}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{dz}{dt}+\cdots \qquad (2-25)$$

إذا كانت $z=f(x,y)$ دالة متصلة في المتغيرين y و x وكانت مشتقتها الجزئية $dz/dx\,,dz/dy$ متصلة واذا كانت x و y دالتين متصلتين في المتغيرين المستقلين s و r أي أن

$$x=g(r,s) \text{ و } y=h(r,s)$$

فإن x دالة في r و s وإن:

$$\frac{\partial z}{\partial s}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}$$

و

$$\frac{\partial z}{\partial r}=\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial z}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

وبشكل مماثل إذا كانت $w=f(x,y,z,\dots)$ دالة متصلة في n متغير $x,y,z,\dots$ وكانت مشتقاتها الجزئية

$$\frac{\partial w}{\partial x},\frac{\partial w}{\partial y},\frac{\partial w}{\partial z},\dots\dots$$

متصلة وإذا كانت x,y,z .... دوال متصلة في m متغير مستقلاً $r, s, t,..$ فإن

$$\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}+\cdots \qquad (2-26)$$

$$\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}+\cdots \qquad (2-27)$$

وهكذا....

(٢-٩) قاعدة القوة المعممة:

إذا كانت $g(x)$ لها مشتقة عند x فكذلك تكون $g^r(x)$ لكل r الكسرية ويكون

$$Dg^r(x) = rg^{r-1}(x)Dg(x) \qquad (2-28)$$

بالطبع $g(x)$ يجب أن تختلف عن الصفر إذا كانت $r < 1$ لكي يكون هذا صحيحاً.

البرهان:

د ع $z = g(x)$ و $f(z) = z^r$ فيكون $g^r(x) = f\big(g(x)\big)$ بما ان $f'(z) =$ rz^{r-1} فيكون لقاعدة السلسلة أن

$$Dg^r(x) = D_x f\big(g(x)\big) = f'(z)g'(x) = rz^{r-1}g'(x) = rg^{r-1}(x)g'(x)$$

$$= rz^{r-1}g'(x) = rg^{r-1}(x)g'(x)$$

(٢-١٠) نظرية الدالة الضمنية:

تعرف المعادلة $f(x, y, z)$متغير واحد وليكن z كدالة في المتغيرين y , x ولذلك تسمي z دالة ضمنية في المتغيرين لتميزها عن الدالة الصريحة x , y بحيث أن$f(x, y, z) , g(x, y) = 0$ وتفاضل الدالة الضمنية ليس صعبا شريطة أن تكون متيقظين للمتغيرات المستقلة .

ليكن لدينا المعادلتين :

$$f_1(x, y, z) = 0 \text{ ——————————— } (2-29)$$

$$f_2(x, y, u , v) = 0 \text{ ——————————— } (2-30)$$

ونفرض أن الدالتين f_2, f_2 وكل مشتقاتها الجزئية من الرتبة الأولي متصلة عند النقطة (x , y) في منطقة ما D وان المحددة :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \end{bmatrix} \qquad \neq 0 \;\; (x\,,y) \in D$$

فان المعادلتين (2-29) و (2-30) تعرفان ضمنيا دالتين (y , x) في المتغيرين (v , u) فاذا فاضلنا المعادلتين (2-29) و (٢-٣٠) بالنسبة ل v , u وباستخدام قاعدة السلسلة فنحصل علي :

$$\frac{\partial f_1}{\partial u} + \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial v} + \frac{\partial f_1}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f_1}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial u} + \frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = 0$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial v} + \frac{\partial f_2}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f_2}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial v} = 0$$

ويمكن كتابة المعادلات في صيغة مصفوفات كالآتي :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = 0 \qquad (2-31)$$

وبحل هذه المصفوفة الأخيرة مع اعتبار الشرط (٣) نحصل علي :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{vmatrix} \qquad (2-32)$$

وهذا العرض يقودنا إلي النظرية الآتية:

يكن لدينا الدالتين (١) $f_1(x,y,u,v)=0$ و (٢) $f_2(x,y,u,v)=0$

وان جميع مشتقاتها الجزئية بالنسبة للمتغيرات x, y, u, v عند أي نقطة D متصلة وان المحددة :

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix} \neq 0 \quad , \quad (x, y) \in D$$

فان المعادلتين (١) و (٢) يعرفان $x = {}_1(u,v)\ ,y= g_2(u,v)$

بحيث

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = -\begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{vmatrix} \qquad (2-33)$$

ملاحظة : يمكن تعميم هذه النظرية علي عدد K من المعادلات في عدد n من المجاهيل بشرط $n \geq k$

حالات خاصة:

عندما $k = 1$ و $n = 2$ ايأن يكون لدينا $f(x, y) = 0$ و $\frac{\partial f}{\partial x} \neq 0$ وان $y = y(x)$ فان العلاقة (٤) تؤول إلي $\frac{dy}{dx} = -\frac{\partial f/\partial x}{\partial f/\partial y}$

(٢-١١) محددة جاكوبيا أوجاكوبيان:

تعريف:

اذا كانت الدالتان $f(u ,v)$ و $g(u ,v)$ قابلتين للتفاضل في منطقة ما فان محددة جاكوبي $J\left|\frac{FG}{uv}\right|$ لهما بالنسبة إلي V, U تعرف كالاتي :

$$J\left[\frac{FG}{uv}\right]=\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix}F_u & F_v\\ G_u & G_v\end{vmatrix} \qquad (2-34)$$

أما في حالة دوال ثلاث متغيرات $F(u,v,w)$ و $G(u,v,w)$ و $H(u,v,w)$ فتعرف محددة جاكوبي بالنسبة إلي w, v, u كالاتي :

$$J=\left[\frac{F,G,H}{u,v,w}\right]=\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(u,v,w)}=\begin{vmatrix}F_u & F_v & F_w\\ G_u & G_v & G_w\\ H_u & H_v & H_w\end{vmatrix} \qquad (2-35)$$

ويظهر هذا المحدد عادة عند تبديل المتغيرات للدوال ذات الاكثر من متغير في ايجاد العلاقة بين التفاضلات .

(٢-١٢) المشتقات الجزئية باستعمال جاكوبيان:

جاكوبيان عادة يبرهن فائدته في الحصول علي المشتقات الجزئية للدوال الضمنية . فمثلا اذا كان لدينا المعادلات الاتية :

$$F(x,y,u,v)=0\ ,\ G(x,y,u,v)=0$$

عموما يمكن اعتبار أن u , v دالتان لمقدارين x ,y وفي هذه الحالة يكون عندنا:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} \text{ و } \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}}{\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)}} \qquad (2-36)$$

الأفكار السابقة يمكن امتدادها بسهولة فمثلا اعتبرنا المعادلات الاتية :

$$F(u,v,w,x,y)=0\ ,\ G(u,v,w,x,y)=0\ ,\ H(u,v,w,x.y)=0$$

فمثلا يمكننا اعتبار أن u, v, w كدوال للمقادير y, x في هذه الحالة :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=-\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,v,w)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(x,v,w)}} \text{ و } \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(y,v,w)}}{\frac{\partial(F,G,H)}{\partial(y,v,w)}}$$

نتائج متشابهة لبقية المشتقات الجزئية

(٢-١٢-١) نظريات علي محددة جاكوبي:

١) اذا كانت $F(u,v,x,y)$ و $G(u,v,x,y)$ دالتين قابلتين للتفاضل في منطقة فان : $\frac{\partial(F,G)}{\partial(u,v)} \neq 0$ يعطي شرطا ضروري وكافي لحل المعادلتين المذكورتين لتعيين v, u (علي سبيل المثال) وتكون النتائج صحيحة لمعادلات عددها m في متغيرات عددها n حيث $m<n$

٢) اذا كانت $X=X(u,v)$ و $y=y(u,v)$ وبحل هاتين المعادلتين نحصل علي $u=u(x,y)$ و $v=v(x,y)$ ويكون لدينا

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} \text{ و } \frac{\partial(u,v)}{\partial(x,y)}$$

وكلاهما مقلوب الآخر .

٣) اذا كانت g ,x دالتين في المتغيرين v , u بينما v , u دالتين في المتغيرين s , r فان :

1)

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(r,s)}=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\frac{\partial(u,v)}{\partial(r,s)}$$

وهذا هو مثال قاعدة السلسلة لمحددة جاكوبي

٤) اذا كانت $F(x,y)$ و $v=g(x,y)$ فان الشرط الضروري والكافي لوجود العلاقة الدالية $\emptyset(u,v)=0$ هو أن تكون $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=0$ تطابقيا .

٥) اذا كانت الدوال $u\ (x, y, z)$ و $v(x, y, z)$ و $w\ (x, y, z)$ دوال مستقلة خطيا وكانت المتغيرات z, y, x غير مستقلة خطيا فان :

$$\frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} = 0$$

(٢-١٣) نظرية معكوس الراسم:

ليكم لدينا الدالتان : $F_2 = F_2\ (x, y, u, v)$ و $F_1 = F_1\ (x, y, u, v)$ وبإعادة كتابتها علي الصورة

$$F_1\ (x, y, u, v) - F_1 = 0$$

وباستخدام نظرية الدالة الضمنية نحصل علي تفاضل y , x بدلالة تفاضلات $v,$ u علي الشكل:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{bmatrix}^{-1}$$

وهذا يقود إلي النظرية التالية : نظرية : ليكن لدينا الداللتين $f_1\ (x, y, u, v)$ و $f_2\ (x, y, u, v)$ وبفرض أن مشتقاتها من الرتبة الأولي متصلة عند اي نقطة $p(x_0, y, u_0, v_0)$ وان المحددة

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}_p \neq 0$$

فان:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}_p = \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} \end{vmatrix}_p^{-1}$$

الفصل الثالث

تطبيقـــات في المشتقـــات الجزئيـــة

(٣–١) تطبيقات في الهندسة:

(٣–١–١) المستوى المماس لسطح:

إذا فرضنا $F(x,y,z)$ هي معادلة السطح s سنعتبر أن الدالة f تفاضلية مستمرة نفرض أننا نريد إيجاد معادلة المستوى المماس للسطح s عند النقطة $P(x_0,y_0,z_0)$ العمود المتجه على السطح s عند هذه النقطة $N_0 = \nabla F|_P$ الرمز الدليل السفلي وهو P يشير إلى أن معدل التغير العمودي يحسب عند النقطة $P(x_0,y_0,z_0)$.

إذا كان r, r_0 هما المتجهين المرسومين على الترتيب من النقطة Q في المستوى فإن معادلة المستوى هي

$$(r - r_0)N_0 = (r - r_0)\nabla F|_P \qquad (3-1)$$

بما أن $r - r_0$ عمودي على N_0 في الصورة العمودية هذا سيكون

$$\frac{\partial F}{\partial x}|_r(x - x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}|_r(y - y_0) + \frac{\partial F}{\partial z}|_r(z - z_0) = 0 \qquad (3-2)$$

وفي حالة إعطاء معادلة السطح بإحداثيات منحنى الأضلاع العمودي على الصورة $f(u_1,u_2,u_3) = 0$.

(٣–١–٢) الخط العمودي على السطح:

نفرض أننا نريد معادلات الخط العمودي على السطح s عند النقطة $P(x_0,y_0,z_0)$

إذا فرضا أن r هو المتجه المرسوم من النقطة $Q(x,y,z)$ على العمود N_0 فنجد

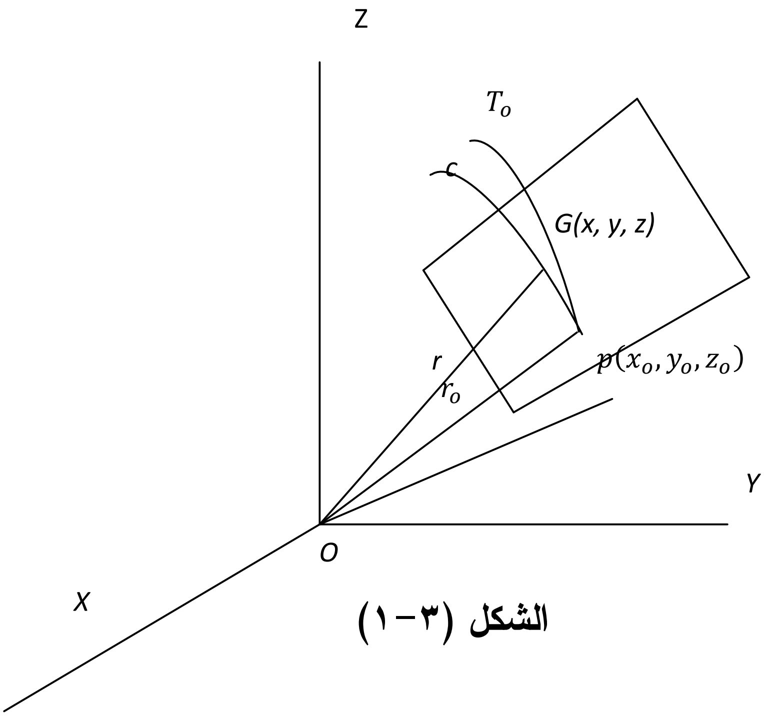
أن الـــ $r - r_0$ في نفس الخط مع $N_0(r - r_0) \times N_0 = (r - r_0) \times \nabla F|_P$ وفى الصورة العمودية فإن هذا سيكون

$$\frac{r - r_0}{\frac{\partial F}{\partial x}|_P} = \frac{y - y_0}{\frac{\partial F}{\partial y}|_P} = \frac{z - z_0}{\frac{\partial F}{\partial z}|_P} \qquad (3-3)$$

ويوضع كل هذه النسب مساويا لبارامتر (متغير) (مثل u أو t) وبالحل لايجاد قيم z ,y ,x تعطينا المعادلات البارامتريه للخط.

(٣-١-٣) خط التماس المنحنى:

نفرض أن المعادلات البارمترية للمنحنى c في الشكل هي $x =$ و $y = g(u)$ و $z = h(u)$ $f(u)$ حيث سنفترض أن f, g, h دوال تفاضلية مستمرة ما لم يذكر غير ذلك. نريد أن نوجد المعادلات لخط التماس للمنحنى c عند النقطة $p\ (x_0, y_0, z_0)$ حيث $u = u_0$



الشكل (٣-١)

إذا كانت

$$R = f(u)\underline{i} + g(u)\underline{j} + h(u)\underline{k} \qquad (3-4)$$

متجهاً مماساً للمنحنى c عند النقطة p يعطى بالعلاقة

$$T_0 = \frac{dR}{du}|_r \qquad (3-5)$$

وإذا كانت r, r_0 يدلان على المتجهين المرسومين على الترتيب من O إلى النقطة $P(x_0, y_0, z_0)$ والنقطة $Q(x, y, z)$ على خط التماس، حينئذ بما أن $r - r_0$ في نفس الخط مع T_0 فيكون لدينا

$$(r - r_0).T_0 = (r - r_0).\frac{dR}{du}|_P = 0 \qquad (3-6)$$

وفي الصورة العمودية هذا يصبح

$$\frac{x - x_0}{f'(u_0)} = \frac{y - y_0}{g'(u_0)} = \frac{z - z_0}{h'(u_0)} \qquad (3-7)$$

الصورة البارمترية يمكن الحصول عليها بوضع كل نسبة مساوية لمقدار u

إذا كان المنحنى c معطى كتقاطع سطحين معادلتهما

$$F(x, y, z) = 0 \,, G(x, y, z) = 0$$

فإن المعادلات المناظرة لخط التماس هي

$$\frac{x - x_0}{\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}_P} = \frac{y - y_0}{\begin{vmatrix} f_z & f_x \\ g_z & g_x \end{vmatrix}_P} = \frac{z - z_0}{\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}_P} \qquad (3-8)$$

لاحظ أن المحددات في المعادلات هي جاكوبيا. يمكن إيجاد نتيجة مشابهة في حالة إعطاء السطحين بدلالة إحداثيات منحنى الأضلاع.

(٣-١-٤) المستوى العمودي على المنحني

نفرض أننا نريد إيجاد معادلة للمستوى العمودي للمنحنى c عند النقطة $P(x_0, y_0, z_0)$ (أي ان مستوى عمودياً على خط التماس للمنحنى c عند هذه النقطة). بأخذ r هو المتجه من O إلى أي نقطة (x, y, z)على هذا المستوى، ويترتب على ذلك آن $r - r_0$ تكون عمودية على T_0 إذن المعادلة المطلوبة هي

$$(r - r_0) \times T_0 = (r - r_0) \times \frac{dR}{du}|_r = 0 \qquad (3-9)$$

في الصورة العمودية هذه تصبح

$$F'(u_0)(x-x_0)+g'(u_0)(y-y_0)+h'(u_0)(z-z_0)=0 \qquad (3-10)$$

عند وجود المنحى بصور المعادلات البارامترية وهي

$$z=h(u)\,,y=g(u)\,,x=F(u)$$

عند تعريف المنحنى بالدالتين $G(x,y,z)=0\,,f\,(x,y,z)=0$ فإن الصورة العمودية تصير

$$\begin{vmatrix} f_y & f_z \\ g_y & g_z \end{vmatrix}_P (x-x_0)+\begin{vmatrix} f_z & f_x \\ g_z & g_x \end{vmatrix}_P (y-y_0)+\begin{vmatrix} f_x & f_y \\ g_x & g_y \end{vmatrix}_P (z-z_0) = 0 \qquad (3-11)$$

(٣-٢) الأغلفة:

إذا كانت $\emptyset(x,y,\propto)$ هي أسرة متغير واحد من المنحنيات في المستوى $x\,y$ يوجد منحى E الذي يكون مماساً عند كل نقطة لعضو ما في الأسرة وبحيث أن كل عضو من المجموعة يكون مماساً للمنحى E . إذا وجد المنحى E فمعادلته يمكن إيجادها بحل المعادلات الآتية انيناً

$$\emptyset(x,y,\propto)=0\,,\emptyset_{\propto}(x,y,\propto)=0$$

و E يسمى غلاف المجموعة (الأسرة).

يمكن امتداد النتيجة لتعين الغلاف الأسرة ذات متغير واحد للسطوح $\emptyset(x,y,z,\propto)$ هذا الغلاف يمكن إيجاده من

$$\emptyset(x,y,z,\propto)=0\,,\emptyset_{\propto}(x,y,z,\propto)=0$$

وامتداد ذلك على أُسر ذات متغيرين أو أكثر (برامترات) يمكن إجراؤها.

(٣-٣) المشتقات الاتجاهية:

تعريف:

إذا كان $\overrightarrow{\ }$ متجه يعتمد على أكثر من متغير بحيث أن $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z)$ فإن

$$\frac{\overrightarrow{dA}}{dx} = \lim_{h\to 0} \frac{A(x+h, y, z) - A(x, y, z)}{h}$$
$$\frac{\overrightarrow{dA}}{dy} = \lim_{h\to 0} \frac{A(x, y+h, z) - A(x, y, z)}{h}$$
$$\frac{\overrightarrow{dA}}{dz} = \lim_{h\to 0} \frac{A(x, y, z+h) - A(x, y, z)}{h}$$

والمشتقات العليا للاشتقاق يمكن أن تعرف كما عرفت في التفاضل وعلى سبيل التوضيح نأخذ:

الاشتقاق الجزئي الثاني, الأول بالنسبة ل x والثاني بالنسبة ل x

$$\frac{\overrightarrow{\partial^2 A}}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\overrightarrow{\partial A}}{\partial x}\right] \qquad (3-11)$$

الاشتقاق الجزئي الثاني . الأول بالنسبة ل x والثاني بالنسبة لy

$$\frac{\overrightarrow{\partial^2 A}}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{\overrightarrow{\partial A}}{\partial x}\right] \qquad (3-12)$$

(٣-٤) الانحدار أو الميلان:

تعريف:

ليكن $\emptyset(x, y, z)$ معرف وقابل للانشقاق لكل نقطة تنتمي الى مستوى محدد في الفضاء فإن انحدار $\emptyset$ الذي يرمز له بالرمز $\emptyset\nabla$

يعطى حسب العلاقة التالية

$$\nabla\emptyset = \frac{\partial\emptyset}{\partial x}\underline{i} + \frac{\partial\emptyset}{\partial y}\underline{j} + \frac{\partial\emptyset}{\partial z}\underline{k} \qquad (3-13)$$

ملاحظة: $\nabla\emptyset$ متجه.

ملاحظة:

مركب المتجه $\nabla\emptyset$ في اتجاه وحدة المتجه $\overrightarrow{}$ يعطى حسب العلاقة التالية $\vec{A}\,.\nabla\emptyset$ ويسمى بالمشتقة المتجه ل $\emptyset$ في اتجاه $\vec{A}$.

قاعدة:

إذا كان φ و $\emptyset$ كل منها اقتران غير متجه وقابل للاشتقاق فإن

$$\nabla(\emptyset+\varphi)=\nabla\emptyset+\nabla\varphi$$

(٣-٥) النهاية العظمى والنهاية الصغرى:

النقطة (x_0,y_0) تسمى نقطة عظمى نسبية أو نقطة صغرى نسبية للدالة $f(x,y)$ على الترتيب طبقاً لما إذا كانت القيمة $F(x_0+h,y_0+k)\geq f(x_0,y_0)$ أو القيمة $F(x_0+h,y_0+k)\leq\ f(x_0,y_0)$ لكل h,k بحيث $0<|h|<\delta, 0<|k|<\delta$ عندما تكون δ عدداً موجباً صغيراً صغراً كافياً.

الشرط اللازم لكي تكون $f(x,y)$ لها نهاية عظمى نسبية أو نهاية صغرى نسبية هو

$$\frac{\partial F}{\partial x}=0 \qquad , \qquad \frac{\partial F}{\partial y} \quad \rightarrow \qquad (3-14)$$

إذا كانت النقطة (x_0,y_0) تحقق معادلات (3-14) (تسمى نقطة حرجة) وإذا كانت Δ معرفة بالمقدار

$$\Delta=\left(\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\right)\left(\frac{\partial^2F}{\partial y^2}\right)-\left(\frac{\partial^2F}{\partial x\partial y}\right)^2\Bigg|_{(x_0,y_0)} \qquad (3-15)$$

فإن

١. (x_0,y_0)هي نقطه عظمى نسبه إذا كانت $0<\Delta$

$\frac{\partial^2F}{\partial x^2}\Big|_{(x_0,y_0)}<0$، أو$\frac{\partial^2F}{\partial y^2}\Big|_{(x_0,y_0)}<0$

٢. (x_0,y_0)هي نقطه صغرى نسيه اذا كان$0<\Delta$

$$\left.\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right|_{(x_0,y_0)} > 0 \text{ أو } \left.\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}\right|_{(x_0,y_0)} > 0$$

٣. (x_0, y_0) ليست نقطة عظمى نسبية وليست نقطة صغرى نسبية إذا كانت $\Delta < 0$ فإن النقطة (x_0, y_0) احياناً تسمى نقطة راكبة.

٤. إذا كانت $\Delta = 0$ فلا يمكن الحصول على أية معلومات (في هذه الحالة يكون من الضروري إجراء بحث أكثر تقدما).

(٣-٥-١) طريقه مضروبات لاجرانج للنهايات العظمى والصغرى :-

طريقة للحصول على القيم العظمى أو القيم الصغرى النسبية للدالة $f(x, y, z)$ معرضة لشروط مفيدة $\emptyset(x, y, z)$

تتكون من تكوين الدالة المساعدة

$$G(x, y, z) = F(x, y, z) + \boldsymbol{\lambda}\emptyset(x, y, z) \qquad (3-16)$$

المعرضة للشروط الآتية

$$\frac{\partial G}{\partial x} = 0\,, \frac{\partial G}{\partial y} = 0\,, \frac{\partial G}{\partial z} = 0$$

وهذه الشروط ضرورية للنهايات العظمى والصغرى النسبية. البارامتر (المقدار المتغير القيمة)$\boldsymbol{\lambda}$(المستقل عن القيم *X,Y,Z*)تسمى مضروب لاجرانج.

- يمكن تصميم الطريقة .فإذا أردنا أن نوجد القيم العظمى والقيم الصغرى النسبية لدالة $f(x_1, x_2, x_3, \dots\dots x_n)$ تحت الشروط المفيدة

$$\emptyset_1(x_1, \dots\dots\dots x_n) = 0\,, \emptyset_2(x_1, \dots\dots\dots x_n) = 0 \dots\dots\dots \emptyset_k(x_1, \dots\dots\dots x_n) = 0$$

$$G(x_1, x_2, x_3, \dots\dots x_n) = F + \boldsymbol{\lambda_1\emptyset_1} + \boldsymbol{\lambda_2\emptyset_2} + \cdots + \boldsymbol{\lambda_k\emptyset_k}$$

تحت الشروط

$$\frac{\partial G}{\partial x_1} = 0\,, \frac{\partial G}{\partial x_2} = 0\,, \dots\dots\dots, \frac{\partial G}{\partial x_n} = 0$$

حيث $_1, \lambda_2, \dots\dots\dots \lambda_k$ المستقلة عن $_1, x_2, \dots\dots\dots x_n$ هي مضروبات لاجرانج.

الفصل الرابع

تطبيقـــــات

(٤-١) مثـــــال:

إذا كانت

$$f(x) = x^2 + 3$$
$$g(x) = 3x^2 - 2$$

جد:

(1) $f(3) \qquad = (3)^2 + 3 = 12$

(2)$f(3L)$

$= (3L)^2 + 3 = 9L^2 + 3$

(3) $f\big(g(x)\big)$

$= f(3x^2 - 2)$

$= (3x^2 - 2)^2 + 3$

$= 9x^4 - 12x^2 + 4 + 3$

$= 9x^4 - 12x^2 + 7$

(٤-٢) مثال:

إذا كانت $f(x) = (3x^2 + 4x)$ و $g(x) = (4x^2 + 15)$ فاوجد:

1/ $D[f(x) + g(x)]$

$D[3x^2 + 4x + 4x^2 + 15]$

$= 6x + 4 + 8x + 0$

2/ $D[f(x) - g(x)]$

$= D[3x^2 + 4x - 4x^2 - 15]$

$= 6x + 4 - 8x - 0$

$3/\ D[f(x).g(x)]$

$= (3x^2 + 4x).8x + (4x^2 + 15).(6x + 4)$

$= 24x^3 + 32x^2 + 24x^3 + 16x^2 + 90x + 60$

$4/\ D\frac{[f(x)]}{[g(x)]} = \frac{3x^2+4x}{4x^2+15}$

$$= \frac{(4x^2 + 15).(6x + 4) - (3x^2 + 4x).8x}{(4x^5 + 15)^2}$$

$$= \frac{90x + 60 - 8x^2}{(4x^2 + 15)^2}$$

(٤-٣) مثـــــال:

اوجد نهاية

$a]\quad \lim_{x\to 10}\left(-\frac{3}{4}\right) = -\frac{3}{4}$ $\qquad\qquad b]\quad \lim_{x\to(-3)} 6.5 = 6.5$

(٤-٤) مثـــــال: جد نهاية كل مما يأتي

$a]\quad \lim_{x\to -2}(x^4 - 2x^3 + 5x^2 + 3x - 3)$

$= (-2)^4 - 2(-2)^3 + 5(-2)^2 + 3(-2) - 3$

$16 + 16 + 20 - 6 - 3 = 43$

$b]\quad \mathrm{l}\lim_{\mathrm{x}\to 0}(3x^3 - 5x^2 + 10) = 3(0)^3 - 5(0)^2 + 10 = 10$

(٤-٥) مثـــــال: جد نهاية كل مما يأتي

$$a]\quad \lim_{x\to 10}\frac{(x-10)^2}{x+10} = \frac{(10-10)^2}{10+10} = \frac{0}{20} = 0$$

$$b]\quad \lim_{x\to -2}\frac{(x^5+1)^2}{x^4} = \frac{(-32)+1}{(-2)^4} = \frac{-31}{16}$$

$$c]\quad \lim_{x\to 4}\frac{x^2+2x+3}{x+4} = \frac{16+8+3}{4+4} = \frac{27}{8}$$

$$d] \quad \lim_{x\to 2}\frac{x^3-8}{x-2}=\lim\frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2}$$

$$=\lim(x^2+2x+4)=4+4+4=12$$

(٤−٦) مثـــال: جد نهاية

$$\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$$

باستخدام طريقة التحليل؟؟؟

$$\frac{9-9}{\sqrt{9}-3}=\frac{0}{0}$$

$$\Rightarrow \lim_{x\to 3}\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}=\frac{\lim_{x\to 9}\left(\sqrt{x}-3\right)\left(\sqrt{x}-3\right)}{\sqrt{x}-3}=\lim_{x\to 9}\sqrt{x}+3$$

$$=\sqrt{9}+3=6$$

جد نهاية

$$\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}$$

الحــل:

باستخدام طريقة الضرب في المرافق

$$\lim_{x\to 9}\frac{x-9}{\sqrt{x}-3}\times\frac{\sqrt{x}+3}{\sqrt{x}+3}=\lim_{x\to 9}\frac{(x-9)\left(\sqrt{x}+3\right)}{x-9}=\lim_{x\to 9}\left(\sqrt{x}+3\right)$$

$$\sqrt{9}+3=6$$

(٤−٧) مثـــال: جد نهاية كل مما يأتي

$$a] \quad \lim_{x\to\infty}3x^9=3\lim_{x\to\infty}x^9=3(\infty)=\infty$$

$$b] \quad \lim_{x\to\infty}|-11x^{12}|=-11\lim x^{12}=-11(\infty)-\infty$$

$c] \quad \lim_{x \to -\infty} 3x^9 = 3 \lim x^9 = 3(-\infty)^9 = -\infty$

(٤-٨) مثـــال: جد نهاية كل من الاقترانات عند قيم x ؟؟؟

$$a] \quad F(x) = |2x - 5| \qquad\qquad x = \frac{5}{2}$$

الحل:

$$\lim_{x \to (2.5)^-} F(x) = \lim -2x + 5 = -2\left(\frac{5}{2}\right) - 5 \Longrightarrow \lim F(x) = 5 - 5 = 0$$

(٤-٩) مثـــال: جد نهاية كل من

$$\mathrm{i}]\lim_{x \to \frac{5}{2}} |2x - 5| = \left|2 \times \frac{5}{2} - 5\right| = 0$$

$$ii] \quad \lim_{x \to 3} |x^2 - 9x + 18| = |9 - 27 + 18| = 0$$

$$iii] \quad \lim_{x \to 6} |x^2 - 9x + 18| = |36 - 54 + 18| = 0$$

(٤-١٠) مثـــال: ابحث عن اتصال كل من

$$a] \quad a(x) \frac{x - 3}{|x| - 3} \qquad\qquad b] \quad \frac{x^2 + 3x}{x + 3}$$

الحل:

كثير الحدود من الدرجة الأولى متصل $\qquad g(x) = x - 3$

متصل على R $\qquad h(x) = |x| - 3$

(٤-١١) مثـــال:

اوجد المشتقة الأولى للدالة $\qquad x = y\sqrt{1 - y^2}$

الحل:

بتربيع الطرفين ينتج أن $x^2 = y^2(1 - y^2)$ ومنها يكون $x^2 = y^2 - y^4$

$$2x = 2y \frac{dy}{dx} - 4y^3 \frac{dy}{dx} \qquad\qquad \therefore \frac{dy}{dx}[2y - 4y^3] = 2x$$

$$\therefore \quad \frac{dy}{dx} = \frac{2x}{2y - 4y^3} = \frac{2y\sqrt{1 - y^2}}{2y(1 - 2y^2)}$$

(٤–١٢) مثـــال:

باستخدام النظرية أو التعريف اوجد المشتقة الأولى الآتية:

$$F(x) = x^3 + x \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_(1)$$

الحل:

باستخدام المتزايدات

$$3y + \Delta y = F(x + \Delta x) = (x + \Delta x)^3 + (x + \Delta x) \quad \_\_\_\_\_\_\_ (2)$$

ملحوظة: قبل عملية الطرح يجب فك الأقواس مثل القوس $(x + \Delta)$ كما يلي:

$$y + \Delta y = F(x + \Delta x) = (x + \Delta x)(x + \Delta x)^2 + (x + \Delta x)$$

$$= (x + \Delta x)(x^2 + 2x\Delta x + \Delta x^2) + \ (x + \Delta x)$$

$$\because y + \Delta y = F(x + \Delta x)$$
$$= x^3 + 2x^2.\Delta x + x.\Delta x^2 + x^2.\Delta x + 2x.\Delta x^2 + \Delta x^3 + x$$
$$+ \Delta x$$

$$\therefore y + \Delta y = F(x + \Delta x)$$
$$= x^3 + 3x^2.\Delta x + 3x^2.\Delta x^2 +.\Delta x^3 + x + \Delta x \_\_(3)$$

وبالطرح ما بين المعادلتين (١) و (٢) ينتج أن

$$\therefore y + \Delta y - y = x^3 + 3x^2.\Delta x + 3x.\Delta x^2 +.\Delta x^3 + x + \Delta x - x^3 - x$$

$$\therefore \Delta y = F(x + \Delta x) - F(x) = \Delta x(3x^2 + 3x\Delta x + \Delta x^2 + 1) \_\_\_\_\_(4)$$

يمكن إيجاد المشتقة الأولى وذلك بقسمة المعادلة (٤) على Δx وإيجاد النهاية لها عندما Δx تؤول إلى الصفر كما يلي

$$\grave{y} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{F(x + \Delta x) - F(x)}{\Delta x}$$

$$= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(3x^2 + 3x.\Delta x + \Delta x^2 + 1)}{\Delta x}$$

$$\grave{y} = \lim_{\Delta x \to 0} 3x^2 + 3x.\Delta x + \Delta x^2 + 1 = 3x^2 + 1$$

وذلك بالتعويض عن أي قيمة Δx بالصفر ويمكن التأكد من صحة الحل بالتفاضل المباشر كما يلي

$$y = \frac{d\,F(x)}{dx} = \frac{d(x^3 + x)}{dx} = 3x^2 + 1$$

وهو المطلوب إثباته.

(٤-١٣) مثـــال:

المعادلة لسطح في صورة إحداثيات كروية هي $F(r, \theta, \phi)$ حيث سنفرض أن F دالة تفاضلية مستمرة.

(أ) اوجد معادلة مستوى المماس للسطح عند النقطة $(r_o \theta_o\,, \phi)$.

(ب) اوجد معادلة المستوى المماس للسطح $v = 4\cos\theta$ عند النقطة

$$\left(2\sqrt{2}\,, \quad \frac{\pi}{4}, \quad \frac{3\pi}{4}\right)$$

(جـــ) اوجد فئة المعادلات للخط العمودي على السطح في الجزء (ب) النقطة المشار إليها.

(أ) الانحدار للمقدار ϕ بإحداثيات منحنى الأضلاع العمودية.

$$\nabla\phi = \frac{1}{h_1}\ \frac{\partial\phi}{\partial u_1}\ e_1 + \frac{1}{h_2}\ \frac{\partial\phi}{\partial u_2}\ e_2 + \frac{1}{h_3}\ \frac{\partial\phi}{\partial u_3}\ e_3$$

حيث

$$e_1 = \frac{1}{h_1}\ \frac{\partial\phi}{\partial u_1}\,, \qquad e_2 = \frac{1}{h_2}\ \frac{\partial\phi}{\partial u_2}\,, \quad e_3 = \frac{1}{h_3}\ \frac{\partial\phi}{\partial u_3}$$

باستخدام الجاكوبيات في إحداثيات كروية.

$$u_1 = r, u_2 = \theta, \quad u_3 = \phi, h_1 = 1, h_2 = r, h_3 = r\sin\theta\,, r = xi + yJ???$$

$$ZK = r\sin\theta\cos\phi i + r\sin\theta\, r\sin\phi J + r\cos\theta K$$

ويكون

$$\begin{cases} e_1 = r\sin\theta\cos\phi i + r\sin\theta\, r\sin\phi J + \cos\theta K \\ e_2 = \cos\theta\cos\phi i + \cos\theta\sin\phi J - \sin\theta K \\ e_3 = -\sin\phi i + \cos\phi J \end{cases} \qquad (1)$$

وأيضا

$$\nabla F = \frac{\partial F}{\partial r}e_1 + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}e_2 + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F}{\partial \phi}e_3 \qquad (2)$$

كما في معادلة مستوى المماس للسطح المعادلة المطلوبة هي وبالتعويض من (١) و (٢) نحصل على $(r - r_o).\nabla F|_p = 0$

$$\nabla F|_p = \left\{\frac{\partial F}{\partial r}\bigg|_p \sin\theta_o\cos\phi_o + \frac{1}{r_o}\frac{\partial F}{\partial \theta}\bigg|_p \cos\theta_o\cos\phi_o - \frac{\sin\phi_o}{r_o\sin\theta_o}\frac{\partial F}{\partial \phi}\bigg|_p\right\} i$$

$$+\left\{\frac{\partial F}{\partial r}\bigg|_p \sin\theta_o\sin\phi_o + \frac{1}{r_o}\frac{\partial F}{\partial \theta}\bigg|_p \cos\theta_o\sin\phi_o + \frac{\cos\phi_o}{r_o\sin\theta_o}\frac{\partial F}{\partial \phi}\bigg|_p\right\} J$$

$$+\left\{\frac{JF}{Jr}\bigg|_p \cos\theta_o - \frac{1}{r_o}\frac{JF}{J\theta}\bigg|_p \sin\theta_o\right\} K$$

بالإشارة إلى التعبيرات داخل الأقواس بالرموز A, B, C على الترتيب فيكون لدينا $\nabla F|_{\mathrm{p}} = \mathrm{A}i + \mathrm{B}J + \mathrm{C}K$ ، فنجد أن المعادلة المطلوبة هي

$$A(x - x_o) + B(y - y_o) + C(z - z_o) = 0$$

(ب) عندنا الدالة $F = r - 4\cos\theta = 0$ ومنها نحصل على

$$\frac{\theta F}{\partial r} = 1, \qquad \frac{\partial F}{\partial \theta} = 4\sin\theta, \qquad \frac{\partial F}{\partial \phi} = 0$$

وبما أن $\phi_o = {}^{3\pi}/_4$ ، $\theta_o = \frac{\pi}{4}$ ، $_o = 2\sqrt{2}$ ومن الجزء (أ)

$$\frac{\nabla F}{p} = Ai + bJ + CK = -i + J$$

ومن المعادلات المحولة تكون النقطة المعطاة بالإحداثيات العمودية هي

$\left(-\sqrt{2}, \sqrt{2}, 2\right)$ وأيضا

$$r - r_o = \left(x + \sqrt{2}\right)i + \left(y - \sqrt{2}\right)J + (Z - z)K$$

إذن المعادلة المطلوبة للمستوى هي

$$y - x = 2\sqrt{2}, \qquad 1 - \left(x + \sqrt{2}\right) + \left(y - \sqrt{2}\right) = 0$$

(جــ) معادلات الخط العمودي يمكن تمثيلها على الصورة

$$\frac{x + \sqrt{2}}{-1} = \frac{y - \sqrt{2}}{1} = \frac{Z - 2}{0}$$

والمعنى الجزء الأيمن من المعادلة السابقة يوضح لنا أن الخط يقع في المستوى

$Z=2$ إذن الخط المطلوب يعطى بالعلاقة.

$x + y = 0,\ Z = 0$ أو $\frac{x+\sqrt{2}}{-1} = \frac{y-\sqrt{2}}{1}, Z = 0$

(٤-١٤) مثـــال:

اوجد باستخدام النظرية مشتقة الدالة $y = \frac{1}{x-2}$ عند $x=1,\ x=3$ وبين أن المشتقة

غير موجودة عند $x=2$ حيث تكون الدالة غير مستمرة.

الحــل:

$$y = \frac{1}{x - 1} \qquad \_\_\_(1)\,, \qquad y + \Delta y = \frac{1}{(x + \Delta x) - 2}\_\_\_\_(2)$$

بالطرح ما بين المعادلتين (١) و (٢) ينتج

$$\Delta y = \frac{1}{(x + \Delta x) - 2} - \frac{1}{x - 2} \ \_\_\_\_\_(3)$$

بتوحيد المقامات للدالة (٣) نحصل على

$$\Delta y = \frac{x-2-[x+\Delta x-2]}{[(x+\Delta x)-2][x-2]} = \frac{x-2-x+\Delta x+2}{[(x+\Delta x)-2][x-2]}$$

$$\therefore \Delta y = \frac{-\Delta x}{[(x+\Delta x)-2][x-2]}$$

بالتعويض في قانون المشتقة الأولى

$$\grave{y} = \frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{-\Delta x}{\Delta x[x-\Delta x-2][x-2]} = \frac{-1}{[x-2][x-2]} = \frac{-1}{[x-2]^2}$$

$\therefore$ عندما $x=1$ نجد أن $\grave{y} = \frac{-1}{[x-2]^2} = -1$

، عندما $x=2$ نجد أن $\grave{y} = \frac{-1}{[3-2]^2} = -1$

، عندما $x=3$ نجد أن $\grave{y} = \frac{-1}{[2-2]^2} = \frac{-1}{0} = \infty$

$\therefore$ الدالة عند $x=2$ تكون غير موجودة أي غير مستمرة لانعدام المهام بينما عند $x=1, 3$ تكون الدالة موجودة.

(٤-١٥) مثـــال:

إذا $y = e^{ax}$، $Z = f(x,y) = x^2 + 2xy + 4y^2$ فاوجد $\frac{dZ}{dx}$

الحـــل:

$$\frac{dZ}{dx} = \frac{\partial F}{\partial x} = +\frac{\partial F}{\partial y} . \frac{\partial y}{\partial x}$$

$$= (2x+2y) + (2x+8y)ae^{ax}$$

$$= 2(x+y) + za(x+4y)e^{ax}$$

(٤-١٦) مثـــال:

إذا كانت $y = \ln x$ و $Z = f(x,y) = xy^2 + x^2y$

فاوجد

(أ) $\frac{dZ}{dx}$ و (ب) $\frac{dZ}{dy}$

(أ) إن x هنا هو المتغير المستقل ولذلك

$$\frac{dZ}{dx}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial F}{\partial y}.\frac{\partial y}{\partial x}=(y^2+2xy)+(2xy+x^2)\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$=y^2+2xy+2y+x$$

(ب) إن y هنا هو المتغير المستقل لذلك

$$\frac{dZ}{dy}=\frac{\partial F}{\partial x}+\frac{\partial x}{\partial y}.\frac{\partial F}{\partial y}=(y^2+2xy)x+(2xy+x^2)\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$=xy^2+2x^2y+2xy+x^2$$

(٤-١٧) مثـــال:

إذا كان ارتفاع مخروط دائري قائم $15\ cm$ ونصف قطر قاعدته $10\ cm$ فبأي معدل يتغير حجم إذا كان ازدياد ارتفاع المخروط $0.2\ cms^{-1}$ ومعدل نقصان نصف قطر القاعدة $0.3\ cms^{-1}$

الحـــل: ليكن x نصف قطر المخروط و y ارتفاعه $V=\frac{1}{3}\ \pi x^2y$ لنعتبر y, x دالتين في t فيكون

$$\frac{dv}{dt}=\frac{\partial v}{\partial x}\ \frac{dx}{dt}+\frac{\partial v}{\partial y}\ \frac{dy}{dt}=$$
$$\frac{1}{3}\ \pi[2*10*15(-0.3)+1*(0.2)]=\frac{-70\pi}{3}cms^{-1}$$

(٤-١٨) مثـــال:

اوجد معادلات (أ) المستوى المماس، (ب) الخط العمودي للسطح $x^2yz+3y^2-2xz^2+8z=0$ عند النقطة) (1, 2, -1).

(أ) معادلة السطح هي $F = x^2yz + 3y^2 - 2xz^2 + 8z = 0$

الخط العمودي على السطح عند النقطة (1- ,2 ,1) هو

$$= (2xyz - 2z^2)i + (x^2z + 6y)J$$

$$N_o = \nabla F|_{(1,2,-1)} + (x^2y - 4xz + 8)K|_{(1,2,-1)} = -6i + 11J + 14K$$

بالرجوع إلى مستوى المماس في السطح

المتجه *o* إلى النقطة *(x, z, y)* على المستوى المماس هو $r = xi + yJ + zK$

المتجه *o* إلى النقطة *(1, 2, -1)* على المستوى المماس هو

$$V_o = i + 2J - K$$

المتجه $V - V_o = (x-1)i + (y-2)J + (z+1)K$ يقع في المستوى المماس ولذلك فهو عمودي على N_o.

إذن المعادلة المطلوبة $(V - V_o).N_o = 0$ أي أن

$$\{(x-1)i + (y-2)J + (z+1)K\}.\{-6i + 11J + 14K\} = 0$$

$$-6(x-1) + 11(y-z) + 14(z+1) = 0$$ أو $$6x - 11y - 14z + 2 = 0$$

(ب) نفترض $r = xi + yJ + zK$ هو المتجه من نقطة *O* (نقطة الأصل) إلى أي نقطة *(x, y, z)* العمود N_o. المتجه من نقطة *O* إلى النقطة *(1, 2, -1)* الواقعة على العمود هي $V_o = i + 2J - K$

المتجه $V_o - V_o = (x-1)i + (y-2)J + (z+1)K$ في نفس الخط للمتجه N_o. إذن

$(V_o - V_o) \times N_o = 0$ أي أن $$\begin{vmatrix} i & J & K \\ x-1 & y-2 & z+1 \\ -6 & 11 & 14 \end{vmatrix} = 0$$

الذي يكافيء المعادلات

$$11\ (x-1) = -6(y-2),\quad 14(y-2) = 11(z+1),\quad 14(x-1) = -6$$

وهذه يمكن كتابتها على الصورة

$$\frac{x-1}{-6} = \frac{y-2}{11} = \frac{z+1}{14}$$

وهذه غالبا تسمى الصيغة أو الصورة القياسية لمعادلات الخط المستقيم. بوضع كل من هذه النسب مساويا للبارامتر t فيكون لدينا

$$x = 1-6t,\ \ y = z+11t,\ \ z-14t = 1$$

ويسمى المعادلات البارامترية للخط المستقيم.

(٤-١٩) مثـــال

عند أي نقط الخط العمودي من المسألة السابقة جزء (ب) يقابل المستوى $x + 3y - 2z = 10$ ؟

الحل:

بالتعويض على المعادلات البارامترية من المسألة السابقة جزء (ب) في معادلة المستوى فنجد أن $1-6t+3(2+11t)-2(14t-1) = 0$ أو $t = -1$

حينئذ $x = 1-6t = 7,\quad y = z+11t = -9,\ \ z = 14t-1 = -15$

والنقطة المطلوبة هي (7, -9, -15).

(٤-٢٠) مثـــال:

اثبت أن السطح $\ ^2 - 2yz + y^3 = 4$ يكون عموديا على سطح من مجموعة السطوح $x^2 + 1 = (2-4a)y^2 + az^2$ عند نقطة التقاطع (1, -1, 2)

الحل:

نفرض أن المعادلتين لسطح مكتوبتان على الصورة

$$F = x^2 - 2yz + y^3 - 4 = 0, \quad G = x^2 + 1 - (2-4a)y^2 - az^2 = 0$$

فحينئذ

$$\nabla F = 2xi + (3y^2 2z)J - 2yK, \quad \nabla G = 2xi - 2(2-40)yJ - 2azK$$

إذن العمودان على السطحين عند النقطة (2 ,1- ,1) تعطى بالمقدارين

$$N_1 = 2i - J + 2K, \quad N_2 = 2i + 2(2-4a)J - 4aK$$

وبما أن

$$N_1 . N_2 = (2i - J + 2K)(2i + 2(2-4a)J - 4aK)$$

فمن ذلك ينتج أن $_1, N_2$ متعامدين لجميع قيم a ومن ذلك ينتج المطلوب.

الخلاصة:

أجريت هذه الدراسة للتعرف على تطبيقات المشتقات الجزئية في مجالات مختلفة قد تم جمع المعلومات من المصادر الثانوية التي شملت على عدد من المراجع المختلفة داخل المكتبة.

وقد وجدت هذه الدراسة أن هناك عدة تطبيقات للمشتقات الجزئية، وقد تم تقسيم هذا البحث إلى أربعة فصول. الفصل الأول هو يشتمل على الدوال والنهايات والاشتقاق.

أما الفصل الثاني اشتمل على مفهوم المشتقات الجزئية والمشتقات الجزئية من رتب أعلى وأيضاً على نظريات في الاشتقاق الجزئي منها محددة الجاكوبيا.

أما تطبيقات المشتقات الجزئية وهي تطبيقات هندسية ومشتقات اتجاهية وطريقة مضروب لاجرانج للنهايات العظمى والصغرى فجاء يحتويها الفصل الثالث.

وقد اشتمل الفصل الرابع على بعض الأمثلة والتطبيقات.

Conclusion:

This study was conducted to identify the partial derivatives applications in various fields have been gathering information from secondary sources, which included a number of different references within the library.

This study has found that there are several applications of partial derivatives, it has been divided this research into four chapters. The first chapter is included on State and endings and derivation.

The second chapter included the concept of partial derivatives and partial derivatives of a higher level and also on the theories of partial derivation of which specific Jacobian.

The partial derivatives which applications engineering applications and directional derivatives and the way factorial LaGrange to the ends of the Great and Lesser came contained in Chapter III. Chapter IV have included some examples and applications.

المقتـــرح:

- علاقة الاشتقاق الجزئي بالمعادلات التفاضلية الجزئية.
- تطبيقات التفاضل الجزئي.
- الاتصال في متغيرات عديدة وعلاقته مع الاشتقاق.

المراجع:

١- د. إبراهيم ديب سرمدي، (حساب التفاضل والهندسة التحليلية)، مكتبة الملك فهد الوطنية، أثناء النشر، المملكة العربية السعودية، ١٤٢٢هـ.

٢- عبد الشافي فهمي عبادة وآخرون، أسس علم الرياضيات التفاضل والتكامل، الطبعة الثانية، دار الفكر العربي، جدة، المملكة العربية السعودية، ٢٠٠٥م.

٣- موراي ر. شبيجل، التفاضل والتكامل المتقدم، الطبعة الخامسة، الدار الدولية للنشر والتوزيع، مصر، ١٩٩٩م.

٤- موراي ر.شبيجل، ترجمة د. حسن العويضي، نظريات ومسائل في الدوال المركبة، الدار الدولية للاستثمارات الثقافية.

٥- وليم هـ. دورفي، ترجمة د. محمد علي محمد السمري ، حساب التفاضل والتكامل والهندسة التحليلية، الدار الدولية للنشر والتوزيع، حلوان، مصر.