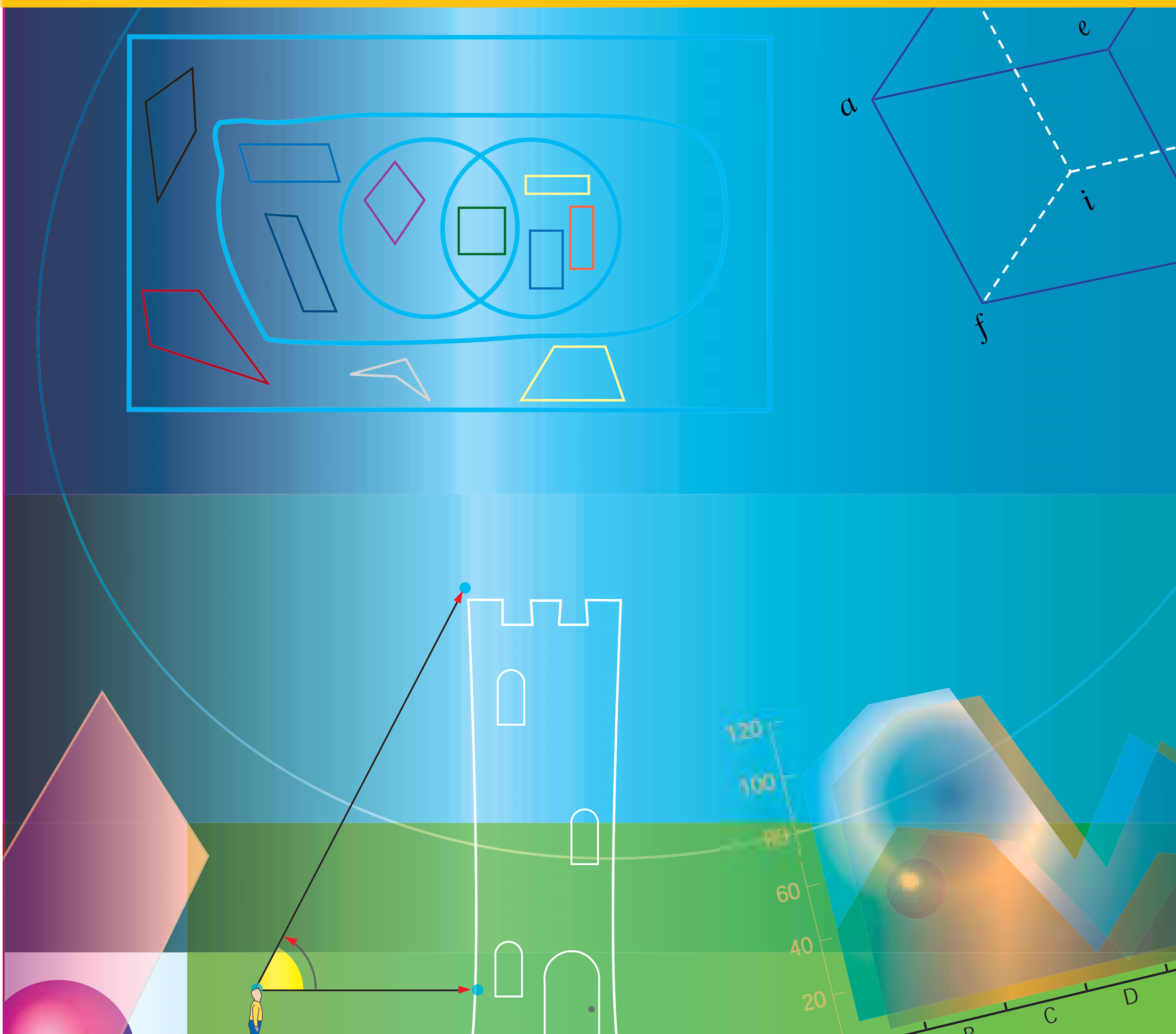
دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم العالي

الرياضيات

٨

الجزء الثاني



بسم الله الرحمن الرحيم

دولة فلسطين
وزارة التربية والتعليم العالي

الرياضيـــــات

للصف الثامن الأساسي

الجزء الثاني

تأليف وتطوير الطبعة الجديدة

د. فطين مسعد   محمد عالية   فيصل القدسي (مركز المناهج)

تأليف

د. حسن يوسف «منسقاً»   فيصل القدسي
مفلح الزرعي   مروان شرف
سالم عثمان سويلم   سهيل صالحة (مركز المناهج)

قررت وزارة التربية والتعليم العالي في دولة فلسطين

تدريس كتاب (الرياضيات) في مدارسها للصف الثامن الأساسي بدءاً من العام الدراسي ٢٠٠٢/ ٢٠٠٣م

الإشـراف العام

رئيس لجنـة المناهج – د. نعيم أبو الحمص

مدير عام مركز المناهج – د. صلاح ياسين

مركـز المناهج

إشراف تربوي : د.عمر أبوالحمص

الدائرة الفنية

- **إشـراف إداري** : رائـد بركـات
- **تصـميـم** : عاصم نـــاصر ، مراد راتب ، أماني حبوب
- **الإعداد المحوسب للطباعة** : م. حـمدان بحـبوح
- **تنضيد** : أمينة سالم، اسمهان الجدع، سمر عامر

الفريق الوطني لمنهاج الريـــاضيـات

د. فطين مسعد «منسقاً»	د. الياس ضبيط	شهناز الفـــار
علي خليل حمد	د. علي خليـفة	ليانا جابـــر
د. محمد حمدان	محمد مقبـــل	وائل كشـــك

الطبعة الثالثة التجريبية

٢٠٠٤م/١٤٢٥ هـ

مركز المناهج – شارع مكة – ص .ب ٧١٩ – البيرة رام الله – فلسطين

تلفون ٢٢٤٠٦١٧٤(٩٧٠) فاكس ٢٢٤٠١٥٥٠(٩٧٠)

e-mail:pcdc@palnet.com

تمهيد

رأت وزارة التربية والتعليم العالي ضرورة وضع منهاج يراعي الخصوصية الفلسطينية ؛ لتحقيق طموحات الشعب الفلسطيني حتى يأخذ مكانه بين الشعوب. إن بناء منهاج فلسطيني يعد أساساً مهمّاً لبناء السيادة الوطنية للشعب الفلسطيني وأساساً لترسيخ القيم والديموقراطية، وهو حق إنساني، وأداة تنمية الموارد البشرية المستدامة التي رسختها مبادئ الخطة الخمسية للوزارة.

وتكمن أهمية المنهاج في أنه الوسيلة الرئيسة للتعليم التي من خلالها تتحقق أهداف المجتمع ؛ لذا تولي الوزارة عناية خاصة بالكتاب المدرسي، أحد عناصر المنهاج ؛ لأنه المصدر الوسيط للتعلم، والأداة الأولى بيد المعلم والطالب، إضافة إلى غيره من وسائل التعلم : الإنترنت والحاسوب والثقافة المحلية والتعلم الأسري وغيرها من الوسائط المساعدة.

أقرت الوزارة هذا العام (٢٠٠٤/ ٢٠٠٥) تطبيق المرحلة الخامسة من خطتها للمنهاج الفلسطيني لكتب الصفين الخامس والعاشر الأساسيين، بالإضافة إلى تطوير كتب المراحل السابقة وهي للصفوف الأساسية من الأول إلى الرابع، ومن السادس إلى التاسع، وستتبعها كتب المرحلة الثانوية.

وتعد الكتب المدرسية وأدلة المعلم التي أنجزت للصفوف العشرة حتى الآن، وعددها يقارب ٢٣٠ كتاباً، ركيزة أساسية في عملية التعليم والتعلم، بما تشتمل عليه من بيانات ومعلومات عُرضت بأسلوب سهل ومنطقي ؛ لتوفير خبرات متنوعة، تتضمن مؤشرات واضحة، تتصل بطرائق التدريس، والوسائل والأنشطة وأساليب التقويم، وتتلاءم مع مبادئ الخطة الخمسية المذكورة أعلاه.

وتتم مراجعة الكتب وتنقيحها وإثراؤها سنويّاً بمشاركة التربويين والمعلمين الذين يقومون بتدريسها، وترى الوزارة الطبعات من الأولى إلى الرابعة طبعات تجريبية قابلة للتعديل والتطوير ؛ كي تتلاءم مع التغيرات في التقدم العلمي والتكنولوجي ومهارات الحياة. إن قيمة الكتاب المدرسي الفلسطيني تزداد بمقدار ما تبذل فيه من جهود ومن مشاركة أكبر عدد ممكن من المتخصصين في مجال إعداد الكتب المدرسية، الذين يحدثون تغييراً جوهريّاً في التعليم، من خلال العمليات الواسعة من المراجعة، بمنهجية رسخها مركز المناهج في مجالي التأليف والإخراج في طرفي الوطن الذي يعمل على توحيده.

إن وزارة التربية والتعليم العالي لايسعها إلا أن تتقدم بجزيل الشكر والتقدير إلى المؤسسات والمنظمات الدولية، والدول العربية والصديقة وبخاصة حكومة بلجيكا ؛ لدعمها المالي لمشروع المناهج.

كما أن الوزارة لتفخر بالكفاءات التربوية الوطنية، التي شاركت في إنجاز هذا العمل الوطني التاريخي من خلال اللجان التربوية، التي تقوم بإعداد الكتب المدرسية، وتشكرهم على مشاركتهم بجهودهم المميزة، كلاً حسب موقعه، وتشمل لجان المناهج الوزارية، ومركز المناهج، والإقرار، والمؤلفين، والمحررين، والمشاركين بورشات العمل، والمصممين، والرسامين، والمراجعين، والطابعين، والمشاركين في إثراء الكتب المدرسية من الميدان أثناء التطبيق.

وزارة التربية والتعليم العالي
مركز المناهج
كانون الثاني ٢٠٠٥ م

مقدمـــة

فهذا هو الجزء الثاني – الطبعة التجريبية الثالثة– من كتاب الرياضيات للصف الثامن الاساسي وفق خطة المنهاج الفلسطيني الأول.

لقد اشمل هذا الكتاب على أربع وحدات هي: التحليل إلى العوامل والكسور الجبرية، والهندسة، وحساب المثلثات، والاحتمالات.

ففي الوحدة الاولى (التحليل إلى العوامل والكسور الجبرية) تم التركيز على تحليل العبارة التربيعية وتحليل مجموع وفرق مكعبين وتطبيق ذلك في إيجاد العامل المشترك الأعلى والمضاعف المشترك الأصغر للمقادير الجبرية واختصار الكسور الجبرية وجمعها وطرحها.

وفي الوحدة الثانية (الهندسة) تم التركيز على خواص الأشكال الرباعية بما في ذلك متوازي الأضلاع وحالاته الخاصة (المعين والمستطيل والمربع) ونظريات المنتصفات والقطع المتوسطة والتكافؤ والمجسمات (مساحاتها وحجومها) مستخدمين التطابق حيناً وإجراء القياس والملاحظة والاستقراء حيناً آخر لبرهنة النظريات أو قبولها دون برهان ومن ثم تطبيقها في حل التمارين والمسائل.

وفي الوحدة الثالثة (حساب المثلثات) تم تقديم النسب المثلثية الأساسية واستخدامها في حل المثلث القائم الزاوية وزوايا الارتفاع والانخفاض.

وفي الوحدة الرابعة (الاحتمالات) تم التركيز على مفهوم الاحتمال من خلال التكرار النسبي وقدمت بعض قوانين الاحتمال.

لقد حاولنا تقديم الوحدات المقررة بأسلوب يتسم بالوضوح والحديث المباشر مع الطلبة فكانت الأمثلة المتعددة والنشاطات والتدريبات والتمارين والمسائل المتنوعة آملين أن لا يشكل ذلك عائقاً أمام انهاء المادة في الوقت المقرر فلزملائنا المعلمين والمعلمات الكلمة الأولى في وضع خطة التدريس المناسبة بما يضمن فهم الطلبة واستيعابهم وتغطية المادة.

نقدم الشكر الجزيل لكل الزملاء في الميدان الذي شاركوا في اثراء هذه الطبعة مؤكدين على حرصنا أن نتلقى المزيد من الملاحظات حول هذه الطبعة الجديدة للوصول إلى الكتاب الأمثل الذي ننشده جميعاً من أجل أبنائنا الطلبة، ابناء فلسطين العزيزة.

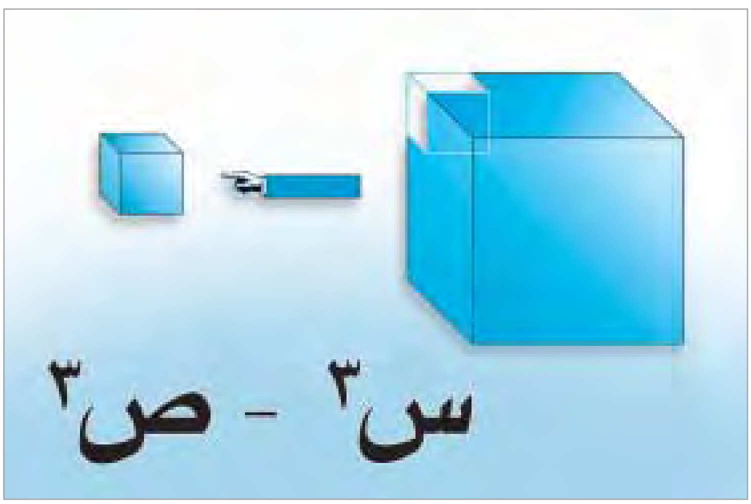
والله ولي التوفيق

فريق تأليف وتطوير الطبعة الثالثة

المحتويات

٥

الوحـدة



التحليل إلى العوامل والكسور الجبـريـة

٥ - ١ تمهيد - مراجعة التحليل إلى العوامل

دَرَسْتَ سابقاً عملية تحليل الأعداد الطبيعية إلى عواملها الأولية أي عملية كتابة هذه الأعداد كحاصل ضرب عددين أوليين أو أكثر ، كما درست بعد ذلك عملية تحليل المقادير الجبرية إلى عواملها مستخدماً في ذلك الطرق الآتية : ١ طريقة إخراج العامل المشترك .

٢ طريقة تجميع الحدود .

٣ طريقة الفرق بين مربعين .

سنقدم لك الآن بعض الأمثلة والتدريبات المتنوعة التي تساعدك في تذكر هذه الطرق تمهيداً لتعرفك على طرق مهمة أخرى في التحليل سنقدمها لك في الدروس اللاحقة.

مثال (١)

حلل كلاً من المقادير الآتية إلى عواملها :

أ $٢س^٢ - ٦س$

ب $س^٣ + ٣س^٢ + ٤س + ١٢$

جـ $٤س^٢ - ٩ص^٢$

الحـل:

أ بإخراج العامل المشترك ٢س ، يكون التحليل كما يأتي :

$٢س^٢ - ٦س = ٢س (س-٣)$

لاحظ أنه يمكنك التحقق من صحة التحليل بضرب العاملين الناتجين وسوف تحصل على المقدار الأصلي .

ب لا يوجد عامل مشترك بين جميع حدود المقدار $س^٣+٣س^٢+٤س+١٢$ ، لذا نلجأ إلى تقسيم هذه الحدود إلى قسمين واخراج العامل المشترك من كل قسم هكذا : $س^٣+٣س^٢+٤س+١٢ = (س^٣+٣س^٢) + (٤س + ١٢)$

$= س^٢ (س+٣) + ٤ (س+٣)$

$= (س+٣) (س^٢+٤)$

لاحظ أن العامل $(س^٢+٤)$ هو مجموع مربعين ولا يحلل. إنه عبارة أولية .

جـ المقدار $٤س^٢ - ٩ص^٢$ فرق بين مربعين ويحلل بالقاعدة :

$أ^٢ - ب^٢ = (أ-ب) (أ+ب)$ ، لذا فإن :

$٤س^٢ - ٩ص^٢ = (٢س - ٣ص) (٢س + ٣ص)$.

مثال (٢)

استخدم التحليل الى العوامل في ايجاد قيمة كُلٍ من :

(أ) ٨٢ x ٦٥ + ٨٢ x ٣٥

(ب) ١٥ x ١٦,٥ − ١٥ x ٦,٥

(جـ) $(٦٧٥)^{٢} - (٣٢٥)^{٢}$

الحـل:

(أ) ٨٢ x ٦٥ + ٨٢ x ٣٥ = ٨٢ (٦٥ +٣٥)

= ٨٢ x ١٠٠ = ٨٢٠٠

(ب) ١٥ x ١٦,٥ − ١٥ x ٦,٥ = ١٥ (١٦,٥ −٦,٥)

= ١٥ x ١٠ = ١٥٠

(جـ) $(٦٧٥)^{٢} - (٣٢٥)^{٢}$ = (٦٧٥ − ٣٢٥) (٦٧٥ + ٣٢٥)

= ٣٥٠ x ١٠٠٠ =٣٥٠٠٠٠

تمارين:

١ أحلل كلاً من المقادير الآتية إلى عواملها الأولية :

(أ) $٢أس^{٢} + ٦أ^{٢}س$

(ب) ٢أ (س −ص) + $(س −ص)^{٢}$

(جـ) $٥س^{٢}$ + ١٠ب س + س + ٢ب

(د) $س^{٢}$ - س + س ص −ص

(هـ) $س^{٢} ص^{٢} - ٩ع^{٢}$

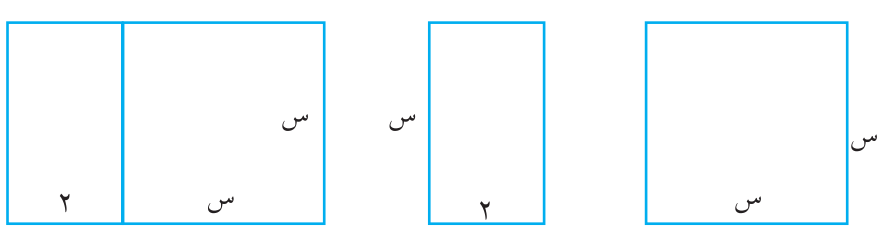
(و) $(س + ص)^{٢} - (س-ص)^{٢}$

٢ استخدم التحليل الى العوامل في ايجاد قيمة كل من :

(أ) ٢٧ x ٢,١ + ٢٧ x ٧,٩

(ب) $(١,١)^{٢} - (٠,٩)^{٢}$

٣ يمثل شكل (١) الآتي مربعاً طول ضلعه س من الوحدات ، ويمثل شكل (٢) مستطيلاً طوله س وحدة وعرضه ٢ وحدة . باستخدام فكرة المساحات على شكل (٣) أوضح أن : $س^{٢}$ + ٢س = س (س + ٢)



شكل (١) شكل (٢) شكل (٣)

٥ – ٢ تحليل العبارة التربيعية

تتخذ المقادير الجبرية التي نتعامل بها في الرياضيات صوراً مختلفة، ومن أهم هذه الصور ما يسمى بالعبارة التربيعية. فعلى سبيل المثال، يعتبر كل من المقادير الآتية عبارة تربيعية:
$س^{٢}+٣س+٢$, $٢س^{٢}+٩س+٤$ ، $س^{٢}+٦س$ ، $س^{٢}-٤$ ، بينما لا يعتبر أي من المقادير الآتية عبارة تربيعية: $س^{٣}+٢س^{٢}-س+٧$، $س^{٤}+١٦$ ، $٢س+٥$.

بشكل عام:

> **المقدار الجبري الذي يتخذ الصورة: $أس^{٢}+ب س+جـ$ حيث أ ، ب ، جـ أعداد حقيقية، $أ \neq ٠$ يسمى عبارة تربيعية وتسمى أ معامل $س^{٢}$، ب معامل الحد الأوسط، جـ الحد الثابت.**

ستدرس العبارات التربيعية، لأهميتها، بالتفصيل في السنوات القادمة ولكنك الآن ستدرس تحليل العبارة التربيعية في صورتها الخاصة عندما يكون معامل $س^{٢}=١$، ومن ثم في صورتها العامة عندما يكون معامل $س^{٢} \neq ١$.

أولاً: عندما يكون معامل $س^{٢}=١$

مثال (١)

باستخدام قانون التوزيع، نعلم أن:

$$(س+٢)(س+٤) = س(س+٤)+٢(س+٤)$$
$$= س^{٢}+٤س+٢س+٨$$
$$= س^{٢}+٦س+٨$$

أي أن $س^{٢}+٦س+٨ = (س+٢)(س+٤)$ وهذا هو تحليل العبارة التربيعية $س^{٢}+٦س+٨$.

من المثال السابق، نلاحظ ما يلي:

١ – تحليل العبارة التربيعية $س^{٢}+٦س+٨$ يتكون من عاملين وضعا داخل زوجين من الاقواس هكذا: $س^{٢}+٦س+٨=(س+٢)(س+٤)$

٢ – الحدّان الأوّلان في القوسين (أي س ، س) هما عاملان للحد الأول في العبارة التربيعية.

٣- الحدّان الثّانيان في القوسين (أي +٢ ، +٤) هما عاملان للحد الثابت في العبارة التربيعية، ويلاحظ أن **مجموعهما يساوي معامل الحد الأوسط** وهذه ملاحظة مهمة إذ لو تم اختيار عاملين آخرين للعدد ٨ مثل ١ ، ٨ لما كان مجموعهما يساوي معامل الحد الأوسط وبالتالي لما كان التحليل صحيحاً.

مثال (٢)

حلل العبارة التربيعية : س^{٢} + ٥س + ٦

الحل:

(١) س^{٢} +٥س + ٦ = (س   ) (س   )

(٢) العددان اللذان حاصل ضربهما = ٦ ومجموعهما =٥

هما ٢ ، ٣ إذن فالحدّان الثّانيان في القوسين هما +٢ ، +٣

نكمل التحليل :

س^{٢} +٥س +٦ = (س+٢) (س+٣)

التحقق : بإجراء ضرب العاملين : (س+٢) (س+٣)

حاصل الضرب = س^{٢} + ٣س+٢س+٦

= س^{٢} +٥س +٦

= العبارة الأصلية، أي أن التحليل صحيح.

مثال (٣)

حلل : س^{٢} -٦س+٥

الحل:

(١) س^{٢} -٦س+٥ = (س   ) (س   )

(٢) ما هما العددان اللذان حاصل ضربهما = +٥ ومجموعهما -٦؟

بما أن حاصل الضرب (+٥) موجب فالعددان إما موجبان معاً أو سالبان معاً ولأن مجموعهما (-٦) سالب إذن فهما سالبان معاً. العددان هما -١ ، -٥ .

نكمل التحليل : س^{٢} -٦س+٥ = (س-١) (س-٥)

التحقق : بإجراء ضرب العاملين ومقارنة ناتج الضرب بالعبارة التربيعية يمكن التحقق من صحة التحليل.

مثال (٤)

حلل : $س^{٢} - ٢س - ٨$

الحل:

(١) $س^{٢} - ٢س - ٨ = (س \qquad)(س \qquad)$

(٢) ما هما العددان اللذان حاصل ضربهما = −٨ ومجموعهما −٢؟

بما أن حاصل الضرب (−٨) سالب فالعددان أحدهما موجب والآخر سالب

وبما أن مجموعهما (−٢) سالب فالعدد السالب بإهمال الإشارة أكبر من العدد الموجب . العددان هما −٤ ، ٢

نكمل التحليل : $س^{٢} - ٢س - ٨ = (س - ٤)(س + ٢)$

تحقق من صحة التحليل .

مثال (٥)

حلل : $س^{٢} + س + ١$

الحل:

(١) $س^{٢} + س + ١ = (س \qquad)(س \qquad)$

(٢) ما هما العددان الصحيحان اللذان حاصل ضربهما +١ ومجموعهما +١؟

بما أن حاصل الضرب موجب فالعددان إما موجبان معاً أو سالبان معاً وبما أن مجموعها موجب فهما موجبان معاً والعددان الصحيحان الموجبان اللذان حاصل ضربهما ١ هما ١ ، ١ ولكن مجموعهما $\neq$ ١ إذن لا يوجد مثل هذين العددين الصحيحين . إذن لا نستطيع تحليل المقدار $س^{٢} + س + ١$.

نسمي المقدار $س^{٢} + س + ١$ عبارة أولية .

مثال (٦)

حلل : $(س+١)^{٢} - ٥(س+١) - ٦$

الحل:

لجعل المقدار على الصورة العامة للعبارة التربيعية أي على الصورة :

$أس^{٢} + ب س + جـ$ ، نفك الأقواس ونجمع الحدود المتشابهة ونكمل التحليل هكذا :

(س+١)^{٢} – ٥ (س+١) – ٦ = (س+١) (س+١) – ٥ (س+١) – ٦

= س^{٢} + س + س + ١ – ٥س – ٥ – ٦

= س^{٢}+ ٢س + ١ – ٥س – ١١

= س^{٢} – ٣س –١٠

= (س – ٥) (س + ٢)

طريقة ثانية:

بفرض أن ص = س + ١ والتعويض في المقدار الأصلي،

يكون المقدار = ص^{٢} – ٥ص – ٦

= (ص – ٦) (ص + ١)

وبالتعويض بدل ص قيمتها س + ١،

يكون المقدار = (س + ١ – ٦) (س + ١ + ١)

= (س – ٥) (س + ٢)

تمارين:

١ أحلل العبارات الآتية إلى عواملها الأولية :

أ) س^{٢} – ٣س + ٢

ب) ٢س^{٢} + ١٠س + ٨

جـ) ٧س + س^{٢} – ٨

د) س^{٢} – س – ١٢

هـ) ٥س^{٢} + ٤٥س + ٧٠

٢ أحلل إلى العوامل الأولية (إن أمكن) :

أ) س^{٢} – (٦س+٧)

ب) (س+٢)^{٢} – ٣٦

جـ) (س+٢)^{٢} –١٠(س+٢) + ٢٤

د) س^{٢} + ١٨س ص + ٤٥ص^{٢}

هـ) س^{٢} +س +٦

ثانياً : عندما يكون معامل $\text{س}^{٢} \neq ١$

لا تختلف طريقة التحليل في هذه الحالة عن الحالة الخاصة السابقة عندما كان معامل $\text{س}^{٢} = ١$، فالتجريب هو الأساس، وقد يستغرق منك التجريب في الحالة العامة بعض الوقت نظراً لتعدد الامكانات القابلة للتجريب، ولكن التدريب والممارسة سيساعدك في الوصول إلى التحليل المطلوب في وقت أقل.

مثال (١)

باستخدام قانون التوزيع، نعلم أن:

$$(\text{س}+٤)(٢\text{س}+١) = (\text{س}+٤)(٢\text{س}+١)$$

$$= ٢\text{س}^{٢}+\text{س}+٨\text{س}+٤$$

$$= ٢\text{س}^{٢}+٩\text{س}+٤$$

أو بصورة عكسية:

$$٢\text{س}^{٢} + ٩\text{س} + ٤ = (\text{س} + ٤)(٢\text{س} + ١)$$

من هذا المثال نلاحظ ما يلي:

١) الحدّان الأوّلان في القوسين (أي س، ٢س) هما عاملان للحد الأول في العبارة التربيعية.

٢) الحدّان الثانيان في القوسين (أي +٤ ، +١) هما عددان حاصل ضربهما = الحد الثابت في العبارة التربيعية وبحيث:

$٤ \times ٢\text{س} + \text{س} \times ١ = ٩\text{س}$ = الحد الأوسط. إذا سمّينا الحدين ٤ ، ٢س **الحدّين القريبين**، وسمّينا الحدّين س ، ١ **الحدّين البعيدين**، نلاحظ أن التحليل يكون صحيحاً عندما يكون (حاصل ضرب الحدين القريبين+ حاصل ضرب الحدين البعيدين) = الحد الأوسط في العبارة التربيعية. ويمكن استخدام التمثيل الآتي في عملية الضرب والجمع المذكورة.

نكتب أولاً عوامل الحد الأول في العبارة التربيعية تحت بعضهما.

نكتب ثانياً عوامل الحد الثابت في العبارة التربيعية تحت بعضهما.

نجري ضرب الحدين على كلٍ من القطرين

ونجمع حاصلي الضرب ونقارن ذلك بالحد الأوسط.

$$\begin{array}{ccc} \text{س} & \times & ٤ \\ ٢\text{س} & & ١ \end{array} \qquad \begin{array}{r} \text{س} \\ +\ ٨\text{س} \\ \hline ٩\text{س} \end{array}$$

٩س = الحد الأوسط.

مثال (٢)

حلّل : ٣س^{٢} + ٨س + ٤

الحل:

(١) نحلل الحد الأول ٣س^{٢} إلى عاملين : ٣س ، س

(٢) نحلل الحد الثابت ٤ إلى عاملين فنجد أكثر من احتمال :

نجرب العددين ١ ، ٤ :

٣س	١		١٢س
س	٤	+	س
			١٣س ≠ الحد الأوسط .

نجرب العددين ٢ ، ٢ :

٣س	٢		٦س
س	٢	+	٢س
			٨س = الحد الأوسط.

إذن التحليل المطلوب : ٣س^{٢} + ٨س + ٤ = (٣س+٢) (س+٢)

مثال (٣)

حلّل : ٢س^{٢} − ٧س + ٦

الحل:

(١) ٢س^{٢} − ٧س + ٦ = (٢س   ) (س   )

(٢) نلاحظ أن الحد الثابت ٦ موجب والحد الأوسط سالب فالعاملان للعدد ٦ يجب أن يكونا سالبين ، ويساعدنا هذا الاستنتاج في تقليص حالات التجريب .

نجرب العددين −١ ، −٦ :

٢س	-١		-١٢س
س	-٦	+	- س
			-١٣س ≠ الحد الأوسط .

نجرب العددين −٢ ، −٣ :

٢س	-٢		- ٦س
س	-٣	+	- ٢س
			-٨س ≠ الحد الأوسط.

نجرب العددين −٣ ، −٢ :

٢س	-٣	- ٤س
س	-٢	+ - ٣س
		-٧س = الحد الأوسط.

إذن التحليل المطلوب : ٢س^{٢} − ٧س + ٦ = (٢س−٣) (س−٢)

مثال (٤)

حلّل : ٥س^{٢} − ٨س − ٤

الحـل:

(١) ٥س^{٢} − ٨س − ٤ = (٥س) (س)

(٢) نجرّب العددين ١ ، −٤ عاملين للحد الثابت −٤ :

٥س	١	- ٢٠س
س	-٤	+ س
		-١٩س ≠ الحد الأوسط .

(٢) نجرّب العددين ٢ ، −٢ عاملين للحد الثابت −٤ :

٥س	٢	- ١٠س
س	-٢	+ ٢س
		-٨س = الحد الأوسط.

إذن التحليل المطلوب : ٥س^{٢} − ٨س − ٤ = (٥س+٢)(س−٢)

تمارين ومسائل:

١ أحلّل كلاً من العبارات التربيعية الآتية :

أ ٥س^{٢} − ١١س + ٢ ب ٧س^{٢} + ١٥س +٢

جـ ٦س^{٢} + س − ١ د ٢س^{٢} − ٥س − ٧

٢ أحلل :

أ ٤س^{٢} − ١٩س ص + ١٢ص^{٢}

ب ١٢س^{٢} − س ص − ٦ ص^{٢}

٣ مستطيل مساحته (٢س^{٢} + ١٣س − ٧) وحدة مربعة. أعبر عن بعدي المستطيل بدلالة س .

٤ مربع مساحته (س^{٢} + ٢س + ١) وحدة مربعة. أعبر عن طول ضلع المربع بدلالة س .

٥ – ٣ تحليل عبارة تربيعية على صورة مربع كامل

تمهيـد: مربع مجموع أو فرق حدّين

مثال (١)

تعلم أن : (س+٣)^{٢} = (س + ٣) (س + ٣)

= س^{٢} + ٣س + ٣س + ٩

= س^{٢} + ٦س + ٩

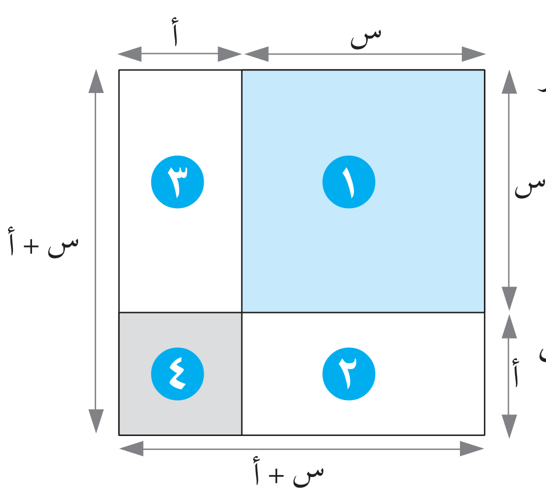
بشكل عام : (س + أ)^{٢} = (س + أ) (س + أ)

= س^{٢} + س أ + أس + أ^{٢}

= س^{٢} + ٢أس + أ^{٢}

أي أن :

> مربع مجموع حدين = مربع الحد الأول +ضعفي الحد الأول x الحد الثاني + مربع الحد الثاني .



يمكن توضيح هذه القاعدة هندسياً ، فالشكل المجاور يمثل مربعاً طول ضلعه (س+أ) من الوحدات .

مساحة المربع = مربع طول ضلعه

= (س+أ)^{٢}

وهذه المساحة = مجموع مساحات المناطق الأربع التي ينقسم إليها المربع والمرقمة (١)، (٢)، (٣)، (٤).

أي أن : (س+أ)^{٢} = س^{٢} + أس + أس + أ^{٢}

= س^{٢} + ٢أس + أ^{٢}

مثال (٢)

أوجد مفكوك (٢س+٤)^{٢}

الحـل:

(٢س+٤)^{٢} = (٢س)^{٢} + ٢ x (٢س) (٤) + (٤)^{٢}

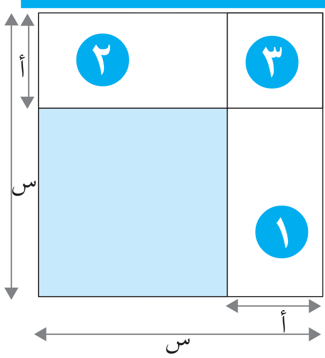
= ٤س^{٢} + ١٦ س + ١٦

بنفس الاسلوب، يمكن التوصل إلى قاعدة مربع الفرق بين حدين :

(س−أ)^{٢} = س^{٢} − ٢أس + أ^{٢}

أي أن :

مربع الفرق بين حدين = مربع الحد الأول − ضعفي الأول x الثاني + مربع الحد الثاني



يمكن توضيح هذه القاعدة هندسياً كما يأتي :

مساحة المنطقة المظللة = مساحة مربّع طول ضلعه (س−أ) .

= (س−أ)^{٢} . . . . (١)

مساحة المنطقة المظللة أيضا = مساحة المربع الكبير الذي طول ضلعه س − مساحة المستطيل رقم (١) − مساحة المستطيل رقم (٢) − مساحة المربع رقم (٣) . لماذا؟

= س^{٢} − أ(س − أ) − أ(س − أ) − أ^{٢} . لماذا؟

= س^{٢} − أ س + أ^{٢} − أس + $\cancel{\text{أ}^{٢}}$ − $\cancel{\text{أ}^{٢}}$.

= س^{٢} − ٢أ س + أ^{٢} . . . . (٢)

من (١) ، (٢) نستنتج أن : (س−أ)^{٢} = س^{٢} − ٢أ س + أ^{٢}

يمكنك اثبات صحة هذه القاعدة أيضاً باستخدام قاعدة مربع مجموع حدين السابقة وذلك بكتابة (س−أ)^{٢} على الصورة (س +(− أ))^{٢} . أكمل الحل .

مثال (٣)

أوجد مفكوك (٣س − ٢)^{٢}

الحل:

(٣س−٢)^{٢} = (٣س)^{٢} − ٢ (٣س) (٢) + (−٢)^{٢}

= ٩س^{٢} − ١٢س + ٤

مثال (٤)

أوجد مفكوك (س − ٢ص)^{٢}

الحل:

(س−٢ص)^{٢} = (س)^{٢} − ٢ (س) (٢ص) + (−٢ص)^{٢}

= س^{٢} − ٤س ص + ٤ص^{٢}

تدريب

أكتب مفكوك المربعات الكاملة الآتية :

أ) (س+٥)^{٢}

ب) (س−٧)^{٢}

جـ) (٣س−٨)^{٢}

د) (٢س+$\frac{١}{٢}$)^{٢}

هـ) (م س + ن)^{٢}

و) (س + ص + ١)^{٢} . (إرشاد : إعتبر (س + ص) حداً أولاً في المقدار) .

تحليل عبارة تربيعية على صورة مربع كامل:

وجدنا سابقاً أن : (س±أ)^{٢} = س^{٢} ± ٢أس+أ^{٢}

أي أن العبارة التربيعية على الصورة : س^{٢} ± ٢أس+أ^{٢} تكون مربّعاً كاملاً وتحلل هكذا :

س^{٢} ± ٢أس+أ^{٢} = (س ± أ)^{٢}

مثال (١)

حلّل العبارة التربيعية : س٢ + ١٢س + ٣٦

الحل:

س^{٢} + ١٢س +٣٦ = (س)^{٢} + ٢ x س x ٦ + (٦)^{٢}

= (س + ٦)^{٢} .

مثال (٢)

حلّل العبارة التربيعية : ٤٩ س^{٢} −٤٢س ص + ٩ص^{٢} .

الحل:

٤٩ س^{٢} − ٤٢ س ص + ٩ص^{٢} = (٧س)^{٢} − ٢ x ٧س x ٣ص + (٣ص)^{٢}

= (٧س − ٣ص)^{٢}

تمارين ومسائل:

١ حلل العبارات الآتية :

أ) $\text{س}^{٢} + ٦\text{س} + ٩$

ب) $\text{ص}^{٢} - ١٠\text{ص} + ٢٥$

جـ) $٩\text{س}^{٢} + ٢٤\,\text{س ص} + ١٦\text{ص}^{٢}$

د) $٤٩\,\text{س}^{٢} + ١٦٨\,\text{س} + ١٤٤$

هـ) $\text{س}^{٤} - ١٨\text{س}^{٢} + ٨١$

و) $٨\text{س}^{٢} - ٢٤\text{س} + ١٨$

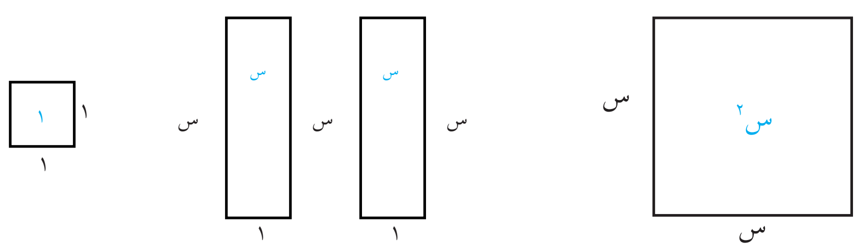
٢ أكمل الحدود الناقصة في العبارات الآتية لتصبح مربعات كامله :

أ) $\text{س}^{٢} - \boxed{} + ٣٦$

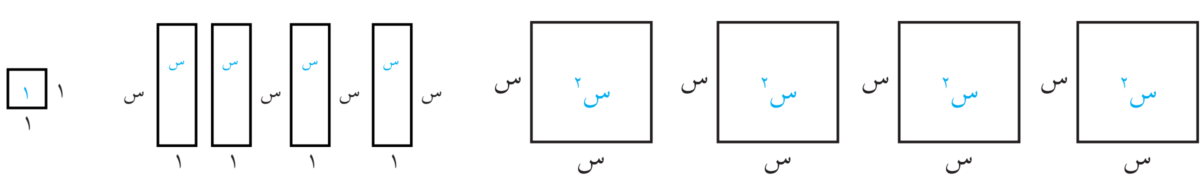
ب) $٤\text{س}^{٢} - ٤\text{س} + \boxed{}$

٣ أ) في الشكل الآتي أربع مناطق مساحاتها (بالوحدات المربعة) : $\text{س}^{٢}$، س ، س، ١ .

أعيد ترتيب هذه القطع لتكوّن مربعاً . ما طول ضلع هذا المربع؟



ب) أعيد ترتيب القطع الآتية لتكوّن مربّعاً . ما طول ضلع هذا المربع؟



٥ – ٤ تحليل الفرق بين مكعبين

كما تعرفت سابقاً تحليل الفرق بين مربعين ، تتعرف الآن طريقة تحليل الفرق بين مكعبين .

مثال (١)

باستخدام قانون التوزيع ، اعلم أن :

(س−ص)(س^{٢}+س ص+ص^{٢}) = س(س^{٢} + س ص + ص^{٢}) − ص(س^{٢} + س ص + ص^{٢})

= س^{٣} + ~~س^{٢}ص~~ + ~~س ص^{٢}~~ − ~~س^{٢}ص~~ − ~~س ص^{٢}~~ − ص^{٣}

= س^{٣} − ص^{٣}

أي بصوره عكسية : س^{٣}−ص^{٣} = (س − ص) (س^{٢} + س ص + ص^{٢})

لاحظ أن س هي الجذر التكعيبي للمكعب الأول س^{٣} ، وأن ص هي الجذر التكعيبي للمكعب الثاني ص^{٣} .

بشكل عام:

س^{٣}−ص^{٣} = (س − ص) (س^{٢} + س ص + ص^{٢})

مثال (٢)

حلّل المقادير الآتية إلى عواملها الأولية :

أ) س^{٣} − ٢٧

ب) ٨س^{٣} − $\frac{١}{٨}$

جـ) ١٢٨ع^{٤} − ٢ع ك^{٣}

الحل:

أ) س^{٣} − ٢٧ = (س)^{٣} − (٣)^{٣} = (س − ٣) (س^{٢} + ٣س + ٩)

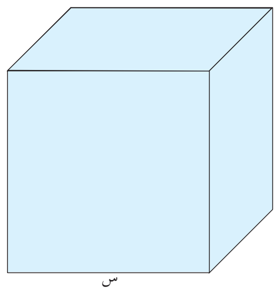
ب) ٨س^{٣} − $\frac{١}{٨}$ = (٢س)^{٣} − ($\frac{١}{٢}$)^{٣}

= (٢س − $\frac{١}{٢}$) [(٢س)^{٢} + (٢س) x $\frac{١}{٢}$ + ($\frac{١}{٢}$)^{٢}]

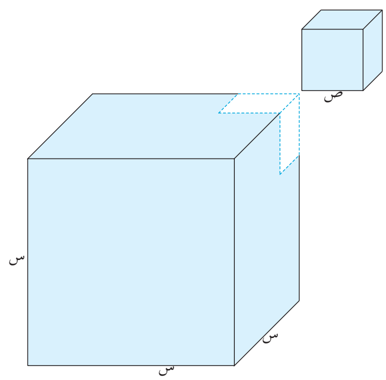
= (٢س − $\frac{١}{٢}$)(٤س^{٢}+س+$\frac{١}{٤}$)

جـ) ١٢٨ع^{٤} − ٢ع ك^{٣} = ٢ع (٦٤ع^{٣} − ك^{٣}) = ٢ع (٤ع − ك) (١٦ع^{٢} + ٤ع ك + ك^{٢})

نشاط عملي:



١) اصنع مكعباً طول ضلعه س . ما حجم هذا المكعب بدلالة س؟

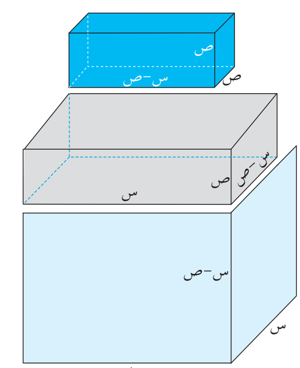


٢) اقطع من إحدى زوايا هذا المكعب مكعباً آخر طول ضلعه ص . ما حجم هذا المكعب المقطوع بدلالة ص؟

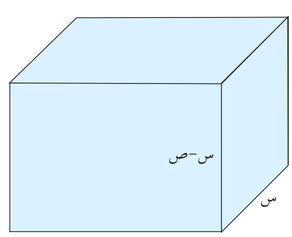
٣) ما حجم الجزء المتبقي من المكعب الأول وذلك بدلالة س ، ص؟

هل هو $س^{٣} - ص^{٣}$؟

٤) حاول أن تجد حجم الجزء المتبقي وذلك بتجزئته إلى ثلاثة أجزاء، كل جزء عبارة عن متوازي مستطيلات معلوم الأبعاد بدلالة س، ص كما في الشكل المجاور :

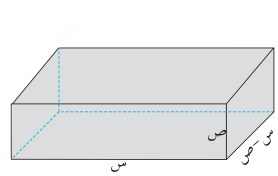


الجزء الأول ، الجزء الثاني ، الجزء الثالث



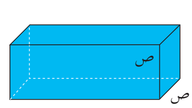
الجزء الأول : أبعاده هي : س ، س ، (س − ص)

فيكون حجمه هو $س^{٢}$ (س − ص)



الجزء الثاني : أبعاده هي : س ، ص ، (س − ص)

فيكون حجمه هو س ص (س − ص)



الجزء الثالث : أبعاده هي : ص ، ص، (س − ص)

فيكون حجمه هو $ص^{٢}$ (س − ص)

حجم الجزء المتبقي = س^{٣} − ص^{٣} = حجم الجزء الأول + حجم الجزء الثاني + حجم الجزء الثالث

= س^{٢} (س − ص) + س ص (س − ص) + ص^{٢} (س − ص)

= (س − ص) (س^{٢} + س ص + ص^{٢})

إذن: س^{٣} − ص^{٣} = (س − ص) (س^{٢} + س ص + ص^{٢})

وهذا يبين عملياً صحّة قاعدة تحليل الفرق بين مكعبين.

تدريبات صفيّة:

أُحلّل المقادير الآتية إلى عواملها الأولية:

أ) س^{٣} − ١

ب) س^{٤} − ص^{٣}س

جـ) ٢٤ ل^{٣} − ٨١

د) س^{٦} − ٦٤

تمارين ومسائل:

١ أُحلّل المقادير الآتية إلى عواملها الأولية:

أ) س^{٣} − ٢^{٣}

ب) ل^{٣} − م^{٣}

جـ) أ^{٣} − $\frac{١}{٨}$

د) س^{٥} − س^{٢}

هـ) ص^{٦} − ١٢٥

و) ٨ س^{٣} − (−٢ أ)^{٣}

ز) س^{٦} − ص^{٦} − ص^{٣} + س^{٣}

ح) س^{٣} − $\frac{١٢٥}{٦٤}$

٥ – ٥ تحليل مجموع مكعبين

يمكن الاعتماد على قاعدة تحليل الفرق بين مكعبين السابقة في تحليل مجموع مكعبين هكذا :

$$س^٣ + ص^٣ = س^٣ - (-ص)^٣$$

$$= [س - (-ص)] [س^٢ + س \times (-ص) + (-ص)^٢]$$

$$= (س + ص) (س^٢ - س ص + ص^٢)$$

تحقق من صحة التحليل بضرب المقدارين (س + ص) ، (س² − س ص + ص²) .

بشكل عام:

$$س^٣ + ص^٣ = (س + ص) (س^٢ - س ص + ص^٢)$$

مثال

حلّل المقادير التالية إلى عواملها الأولية :

أ) $س^٣ + ل^٣$ ب) $٨ س^٣ + ١$

جـ) $٢٤ س^٣ + ٣ ع^٣$ د) $س^٦ + \frac{٨}{١٢٥}$

الحل:

أ) $س^٣ + ل^٣ = (س + ل) (س^٢ - س ل + ل^٢)$

ب) $٨ س^٣ + ١ = (٢ س)^٣ + (١)^٣$

$$= (٢ س + ١) [(٢ س)^٢ - ٢ س + ١]$$

$$= (٢ س + ١) (٤ س^٢ - ٢ س + ١)$$

جـ) $٢٤ س^٣ + ٣ ع^٣ = ٣ (٨ س^٣ + ع^٣)$ إخراج ٣ عاملاً مشتركاً

$$= ٣ [(٢ س)^٣ + ع^٣]$$

$$= ٣ (٢ س + ع) [(٢ س)^٢ - ٢ س \times ع + (ع)^٢]$$

$$= ٣ (٢ س + ع) (٤ س^٢ - ٢ س ع + ع^٢)$$

د) $س^6 + \frac{8}{125} = (س^2)^3 + (\frac{2}{5})^3$

$= (س^2 + \frac{2}{5})[(س^2)^2 - س^2 \times \frac{2}{5} + (\frac{2}{5})^2]$

$= (س^2 + \frac{2}{5})(س^4 - \frac{2}{5}س^2 + \frac{4}{25})$

تدريبات صفيّة:

أحلّل المقادير التالية إلى عواملها الأولية :

أ) $س^3 + م^3$

ب) $-س^3 - ص^3$

جـ) $64 + ل^3$

د) $8 س ص + 27 س^4 ص^4$

تمارين ومسائل:

1) أحلّل المقادير التالية إلى عواملها الأولية :

أ) $27 س^3 + 1$

ب) $س^4 + 8 س$

جـ) $س^3 ص^3 + \frac{1}{8}$

د) $س^6 + 125 ص^6$

هـ) $(س + ص)^4 + س + ص$

و) $س^3 + \frac{ب^3}{8}$

٥ - ٦ تطبيقات جبرية على التحليل الى العوامل

يستفاد من التحليل إلى العوامل في تطبيقات جبرية كثيرة منها :

١ إيجاد العامل المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر لمقدارين جبريين أو أكثر .

٢ اختصار الكسور الجبرية .

٣ إجراء العمليات عليها كالجمع والطرح . وسنوضح ذلك فيما يأتي :

العامل المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر

تعرفت هذين المفهومين سابقاً في مجال الأعداد الطبيعية ، واستخدمت طريقة التحليل الى العوامل الأولية في إيجاد كلٍ منهما كما في المثال الآتي :

مثال (١)

أوجد العامل (القاسم) المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر للعددين : ١٢ ، ٣٠ .

الحل:

نحلّل كلاً من العددين إلى عوامله الأولية هكذا :

١٢ = ٢ x ٢ x ٣

٣٠ = ٢ x ٣ x ٥

ق. م.أ (١٢ ، ٣٠) = حاصل ضرب العوامل الأولية المشتركة .

= ٢ x ٣ =٦

م.م.أ (١٢ ، ٣٠) = حاصل ضرب العوامل الأولية المشتركة والعوامل غير المشتركة .

= ٢ x ٢ x ٣ x ٥ =٦٠

لا يختلف مفهوم العامل المشترك الأكبر والمضاعف المشترك الأصغر وطريقة إيجادها في حالة المقادير الجبرية عنه في حالة الأعداد الطبيعية .

مثال (٢)

أوجد العامل المشترك الأكبر (ع . م . أ)، وكذلك المضاعف المشترك الأصغر (م . م . أ) للمقدارين الآتيين: س^{٢} − ١ ، س^{٣} − ١

الحل:

س^{٢} − ١ = (س − ١) (س + ١)

س^{٣} − ١ = (س − ١) (س^{٢} + س + ١)

العوامل المشتركة : س − ١

العوامل غير المشتركة : (س + ١)، (س^{٢} + س + ١)

إذن (ع . م . أ) للمقدارين هو : (س − ١)

إذن (م . م . أ) للمقدارين هو : (س − ١) (س + ١) (س^{٢} + س + ١)

= (س^{٢} − ١) (س^{٢} + س + ١)

مثال (٣)

أوجد (م . م . أ) وكذلك (ع . م . أ) لما يلي :

أ) س^{٢} + ٦ س + ٩ ، س^{٢} − س − ١٢

ب) س^{٣} + ٤ س^{٢} + ٤ س ، ٢ س^{٣} + ٤ س^{٢}

الحل:

أ) س^{٢} + ٦ س + ٩ = (س + ٣)^{٢}

س^{٢} − س − ١٢ = (س + ٣) (س − ٤)

إذن : (م . م . أ) = (س + ٣)^{٢} (س − ٤)

(ع . م . أ) = س + ٣

ب) س^{٣} + ٤ س^{٢} + ٤ س = س (س^{٢} + ٤ س + ٤)

= س (س + ٢)^{٢}

٢ س^{٣} + ٤ س^{٢} = ٢ س^{٢} (س + ٢)

إذن : (م . م . أ) = ٢ س^{٢} (س + ٢)^{٢}

(ع . م . أ) = س (س + ٢)

تدريبات صفيّة:

أجد (م . م . أ) وكذلك (ع . م . أ) لكل مما يأتي :

أ) ٢س ، ٥

ب) ٣س ، ٢س

جـ) س^{٣} − ٨ ، ٣ س^{٢} − ١٢

د) ٢ س^{٢} (س − ١) (٢ س + ٣) ، ٤ س (س − ١)^{٢} (٢س − ٣)

تمارين ومسائل:

١ أجد (م . م . أ) وكذلك (ع . م . أ) للمقادير الواردة في كلٍ مما يأتي :

أ) ٣س^{٣} + ٢٤ ، س^{٣} + ٤س^{٢} + ٤س

ب) ٢س^{٢} + ٣س ، ٢س^{٢} + ٥س + ٣

جـ) (٣ س − ١) (س^{٢} − ١) ، (س^{٣} − ١) (س + ١)

د) ٣س (س − ١)^{٢} ، س^{٢} (س + ١) (س − ١)^{٢}

٢ إذا كان المقدار أ عاملاً من عوامل المقدار ب، فماذا يكون العامل المشترك الأكبر بينهما؟ وماذا يكون المضاعف المشترك الأصغر لهما ؟

٣ أجد (م . م . أ) وكذلك (ع . م . أ) للمقادير الآتية :

٣س^{٢} + ٥س − ٢ ، س^{٣} + س^{٢} − ٢س ، ٦ س^{٢} + ١٠س − ٤

اختصار الكسور الجبرية

تُجرى هذه العملية بطريقة مماثلة لإجرائها على الكسور الحسابية العادية ، والفكرة الأساسية في ذلك هي قسمة البسط والمقام على عامل مشترك بينهما ، والاستمرار بالقسمة على العوامل المشتركة حتى لا يبقى هناك أي عامل مشترك بين البسط والمقام إلا الواحد الصحيح . وبطريقة أخرى ، يمكن الحصول على كسر بأبسط صورة بقسمة البسط والمقام على العامل المشترك الأكبر بينهما ،

فمثلاً الكسر $\frac{٣٦}{٦٤} = \frac{\overset{١٨}{\cancel{٣٦}}}{\underset{٣٢}{\cancel{٦٤}}} = \frac{\overset{٩}{\cancel{١٨}}}{\underset{١٦}{\cancel{٣٢}}} = \frac{٩}{١٦}$ أو $\frac{\overset{٩}{\cancel{٣٦}}}{\underset{١٦}{\cancel{٦٤}}} = \frac{٩}{١٦}$

مثال (١)

اكتب الكسر $\frac{\text{س}^{٣} - ٢٧}{\text{س}^{٢} - ٩}$ بأبسط صورة.

الحل:

$$\frac{\text{س}^{٣} - ٢٧}{\text{س}^{٢} - ٩} = \frac{\overset{١}{\cancel{(\text{س} - ٣)}}\,(\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + ٩)}{\underset{١}{\cancel{(\text{س} - ٣)}}\,(\text{س} + ٣)} = \frac{\text{س}^{٢} + ٣\text{س} + ٩}{\text{س} + ٣}$$

مثال (٢)

أ) اكتب الكسر $\frac{\text{س}^{٢} - ٢٠\text{س} + ٩٩}{\text{س}^{٢} - ١٣\text{س} + ٢٢}$ بأبسط صورة.

ب) استخدم النتيجة السابقة في ايجاد القيمة العددية للكسر عندما س = ١٢

الحل:

أ) $$\frac{\text{س}^{٢} - ٢٠\text{س} + ٩٩}{\text{س}^{٢} - ١٣\text{س} + ٢٢} = \frac{(\text{س} - ٩)\,\overset{١}{\cancel{(\text{س} - ١١)}}}{(\text{س} - ٢)\,\underset{١}{\cancel{(\text{س} - ١١)}}}^{*} = \frac{\text{س} - ٩}{\text{س} - ٢}$$

ب) يمكن الحصول على قيمة الكسر عندما س = ١٢ بالتعويض في الصورة الأبسط للكسر وهي $\frac{\text{س} - ٩}{\text{س} - ٢}$

$$\text{الكسر} = \frac{١٢ - ٩}{١٢ - ٢} = \frac{٣}{١٠}$$

* حيث أنه لا يجوز القسمة على صفر فإن أي كسر جبري يكون معرّفاً وله قيمه عددية محدّدة عندما لا يكون المقام يساوي صفراً ، وهذا يعني ضرورة استثناء قيم س التي تجعل المقام يساوي صفراً .

تمارين:

١ أكتب كلاً من الكسور الآتية بأبسط صورة :

أ) $\frac{س^٢ - ١٢١}{س^٢ - ١٢س + ١١}$ ب) $\frac{٧س ص + ٧ص}{١٤س ص^٢ - ١٤ص^٢}$

جـ) $\frac{٣س^٣ + ٦س}{س^٣ + س^٢ + ٢س + ٢}$ د) $\frac{س^٢ - ٢س - ٣}{س^٣ - ٢٧}$

٢ أكتب الكسر $\frac{٨س^٢ - ٨}{س^٣ - س^٢ - س + ١}$ بأبسط صورة . ماقيمة الكسر عندما س = ٩؟

جمع الكسور الجبرية وطرحها

تجرى عمليتا الجمع والطرح على الكسور الجبرية بطريقة مماثلة لإجراء هاتين العمليتين على الكسور العادية ، والفكرة الأساسية في ذلك استبدال هذه الكسور بكسور مكافئة ، لها المقام نفسه (ويفضل أن يكون المضاعف المشترك الأصغر للمقامات) ثم تطبيق قاعدة جمع الكسور المتجانسة وهي : $\frac{أ}{ب} + \frac{جـ}{ب} = \frac{أ + جـ}{ب}$

مثـال (١) أوجد ناتج ما يأتي واكتبه في أبسط صورة :

أ) $\frac{ص + ١}{٢ص} + \frac{٤ص - ١}{٢ص}$ ب) $\frac{س + ١}{س^٣} - \frac{س - ١}{٤س^٢}$

الحـل: أ) $\frac{ص + ١}{٢ص} + \frac{٤ص - ١}{٢ص} = \frac{ص + ١ + ٤ ص - ١}{٢ص} = \frac{٥ \cancel{ص}}{٢ \cancel{ص}} = \frac{٥}{٢}$

ب) $\frac{س + ١}{س^٣} - \frac{س - ١}{٤س^٢}$

م . م . أ . للمقامين هو ٤س^٣ ، لذا نحول الكسرين إلى كسرين متجانسين مقامهما ٤س^٣ .

المقدار = $\frac{٤(س+١)}{٤س^٣} - \frac{س(س-١)}{٤س^٣} = \frac{٤ (س + ١) - س (س - ١)}{٤س^٣}$

$= \frac{٤س + ٤ - س^٢ + س}{٤ س^٣} = \frac{٥س - س^٢ + ٤}{٤س^٣}$

مثال (٢)

أوجد ناتج ما يأتي واكتبه في أبسط صورة : $\frac{\text{س}}{\text{س}+١} + \frac{\text{س}+٢}{\text{س}^٢-١}$

الحـل: $\frac{\text{س}}{\text{س}+١} + \frac{\text{س}+٢}{(\text{س}+١)(\text{س}-١)}$

م . م . أ . للمقامين هو (س+١) (س−١)، لذا نحول الكسرين إلى كسرين متجانسين مقامهما (س+١) (س−١) .

المقدار $= \frac{\text{س}(\text{س}-١)}{(\text{س}+١)(\text{س}-١)} + \frac{\text{س}+٢}{(\text{س}+١)(\text{س}-١)}$

$$= \frac{\text{س}(\text{س}-١)+(\text{س}+٢)}{(\text{س}+١)(\text{س}-١)}$$

$$= \frac{\text{س}^٢-\text{س}+\text{س}+٢}{(\text{س}+١)(\text{س}-١)} = \frac{\text{س}^٢+٢}{\text{س}^٢-١}$$

مثال (٣)

أوجد ناتج ما يأتي واكتبه في أبسط صورة : $\frac{\text{س}-٢}{\text{س}^٢-١} - \frac{٣}{٢\text{س}+٢}$

الحـل: $\frac{\text{س}-٢}{\text{س}^٢-١} - \frac{٣}{٢\text{س}+٢} = \frac{\text{س}-٢}{(\text{س}-١)(\text{س}+١)} - \frac{٣}{٢(\text{س}+١)}$

م.م.ب. للمقامات = ٢(س−١)(س+١)

ناتج الطرح $= \frac{٢(\text{س}-٢)}{٢(\text{س}-١)(\text{س}+١)} - \frac{٣(\text{س}-١)}{٢(\text{س}-١)(\text{س}+١)}$

$$= \frac{٢\text{س}-٤}{٢(\text{س}-١)(\text{س}+١)} - \frac{٣\text{س}-٣}{٢(\text{س}-١)(\text{س}+١)}$$

$$= \frac{٢\text{س}-٤-٣\text{س}+٣}{٢(\text{س}-١)(\text{س}+١)} = \frac{-\text{س}-١}{٢(\text{س}-١)(\text{س}+١)}$$

$$= \frac{-\cancel{(\text{س}+١)}}{٢(\text{س}-١)\cancel{(\text{س}+١)}} = \frac{-١}{٢(\text{س}-١)}$$

تدريبات صفيّة:

أجد ناتج ما يلي وأكتبه في أبسط صورة :

أ) $\frac{٢}{س} + \frac{٣}{س}$

ب) $\frac{٥س}{س+١} - \frac{٦}{٢س + ٢}$

جـ) $\frac{ص + ١}{ص} + \frac{٥}{ص + ٢}$

د) $\frac{٢ص}{ص^{٣} - ١} + \frac{ص}{ص^{٢} + ص + ١}$

تمارين ومسائل:

أجد ناتج ما يلي وأكتبه في أبسط صورة :

أ) $\frac{س^{٣}}{س - ١} - \frac{س^{٢}}{س - ١}$

ب) $\frac{س}{س ص - س^{٢}} - \frac{س^{٢}}{س^{٢}ص - س^{٣}}$

جـ) $\frac{س + ٢}{٣س - ١٢} + \frac{٢س - ١}{س - ٤}$

د) $\frac{س^{٢} - ٥س + ٤}{س^{٢} - ١٦} + \frac{٢س}{٢س^{٢} + ٨س}$

هـ) $\frac{أ^{٢} - ٢أ - ١٥}{أ^{٢} - ٩} + \frac{٢}{٢أ - ٦}$

و) $\frac{س^{٢} - ٣س - ٤}{س^{٢} - س - ٢} - \frac{س^{٢} - ٥س - ١٤}{س^{٢} - ٣س - ١٠}$

ز) $\frac{٤س}{٣س - س^{٢}} + \frac{٧س^{٢}}{س^{٣} + ٣س^{٢}} - \frac{٤٨}{١٨ - ٢س^{٢}}$

تمارين عامة

١ أحلّل كلاً مما يأتي إلى عوامله الأولية :

أ) أ س – أص + أ ع + ب س – ب ص + ب ع

ب) $س^{٢} + ٢س ص + ص^{٢} + س + ص$

جـ) $(س+١)^{٣} + (س-١)^{٣}$

د) $٢٧س^{٦} + ٨ص^{٦}$

هـ) $٩س^{٥} - ٩س^{٢} - س^{٣} + ١$

و) $(س-١)^{٢} - ٢(س-١) - ٨$

ز) $٥س^{٢}(أ+٢) - ٢س(أ+٢) - ٧(أ+٢)$

ح) $ب^{٢} - جـ^{٢} - ٦ب + ٩$

ط) $أ^{٢} - س^{٢} + ٢س ص - ص^{٢}$

ي) ٥س(٥س–٦) – ٤ص(ص–٣)

٢ إذا كان (س + ٣) عاملاً من عوامل المقدار : $س^{٢} + ٨س + جـ$
فما قيمة جـ؟

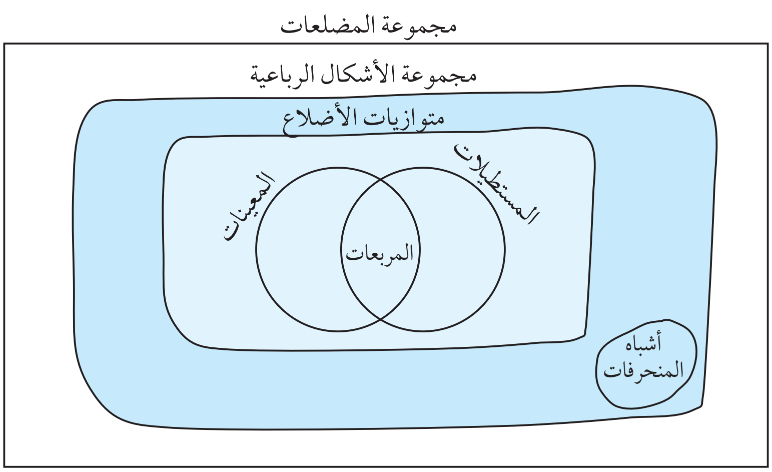
٣ أجد ناتج ما يأتي وأكتبه بأبسط صورة :

أ) $\frac{٣س - ٦}{س^{٢} - ٥س + ٦} + \frac{٢س + ٦}{س^{٢} + س - ٦}$

ب) $\frac{س^{٢} + ٧س + ١٢}{س^{٢} + ٨س + ١٥} + \frac{٣س^{٢} + ٢٥س + ٤٢}{٣س^{٢} + ٢٢س + ٣٥}$

٤ أستخدم التجريب وأجد عددين صحيحين متتاليين الفرق بين مكعّبيهما = ١٩ .

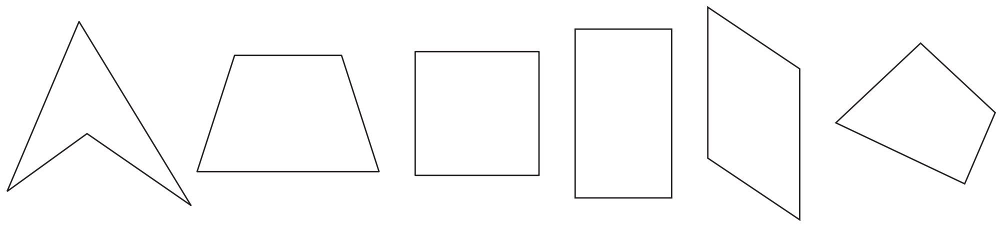
الوحــدة ٦



الهندســــــــة

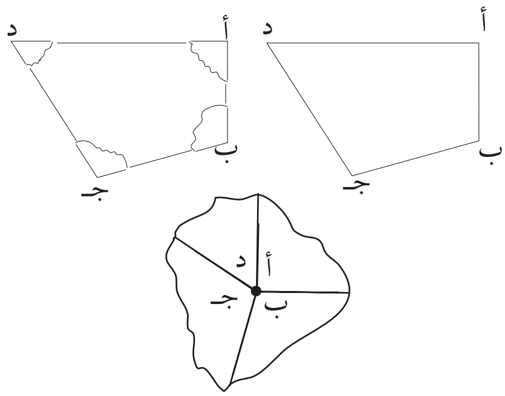
٦-١ الأشكال الرباعيـة

تمهيد : الشكل الرباعي هو مضلع له أربعة أضلاع . الأشكال الآتية جميعها رباعية :



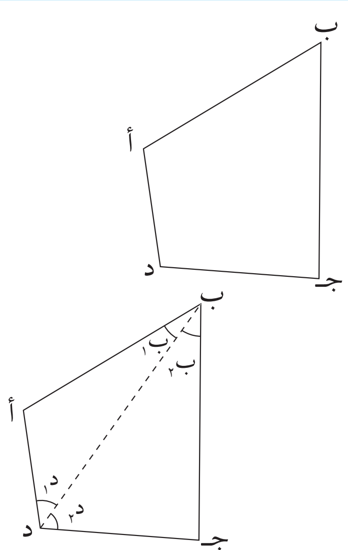
لقد تعرفت سابقاً أن مجموع زوايا الشكل الرباعي يساوي ٣٦٠ْ . النشاطان الآتيان يوضحان ذلك .

نشـــاط(١):



في الشكل الرباعي أ ب جـ د المجاور، قطعت الزوايا الأربعة ورتبت كما في الشكل .
وضح السبب في أن مجموع الزوايا الأربعة = ٣٦٠ْ .

نشـــاط(٢):



في الشكل الرباعي أ ب جـ د المجاور ، مجموع الزوايا الأربعة هو نفس مجموع زوايا المثلثين اللذين انقسم إليهما الشكل الرباعي . أكمل :

مجموع زوايا الشكل الرباعي = أ + ب + جـ + د

= أ+ب$_1$+ب$_2$+جـ+د$_2$+د$_1$

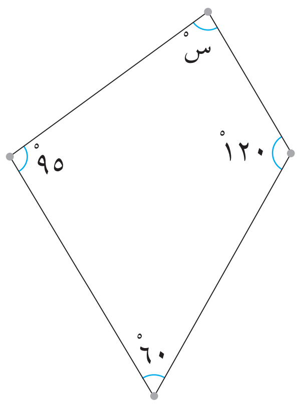
= (أ+ب$_1$ + د$_1$) + (جـ+ب$_2$+د$_2$)

= . . . درجة + . . . درجة

= . . . درجة .

مثـــال (١)

في الشكل المقابل، أوجد قياس الزاوية المجهولة س .



الحـل:

بما أن مجموع زوايا الشكل الرباعي ٣٦٠° فإن :

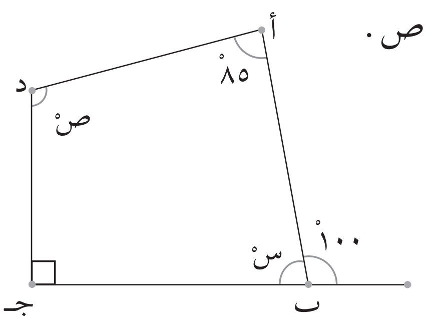
س+١٢٠°+٦٠°+٩٥° =٣٦٠°

س+٢٧٥°=٣٦٠°

س = ٨٥°

مثـــال (٢)

في الشكل المقابل، أوجد قياس الزاويتين س، ص .



الحـل:

توجد زاويتان مجهولتان في السؤال هما

س، ص .

هل هناك معلومات تساعد في ايجاد احداهما ؟

الزاوية س والزاوية ١٠٠° متجاورتان وعلى استقامة واحدة أي أن مجموعهما ١٨٠° .

س= ١٨٠-١٠٠

س=٨٠°

نعرف الآن ثلاث زوايا في الشكل الرباعي ونريد معرفة الزاوية الرابعة .

بما أن مجموع زوايا الشكل الرباعي ٣٦٠° فإن :

٨٥°+٨٠°+٩٠°+ص= ٣٦٠°

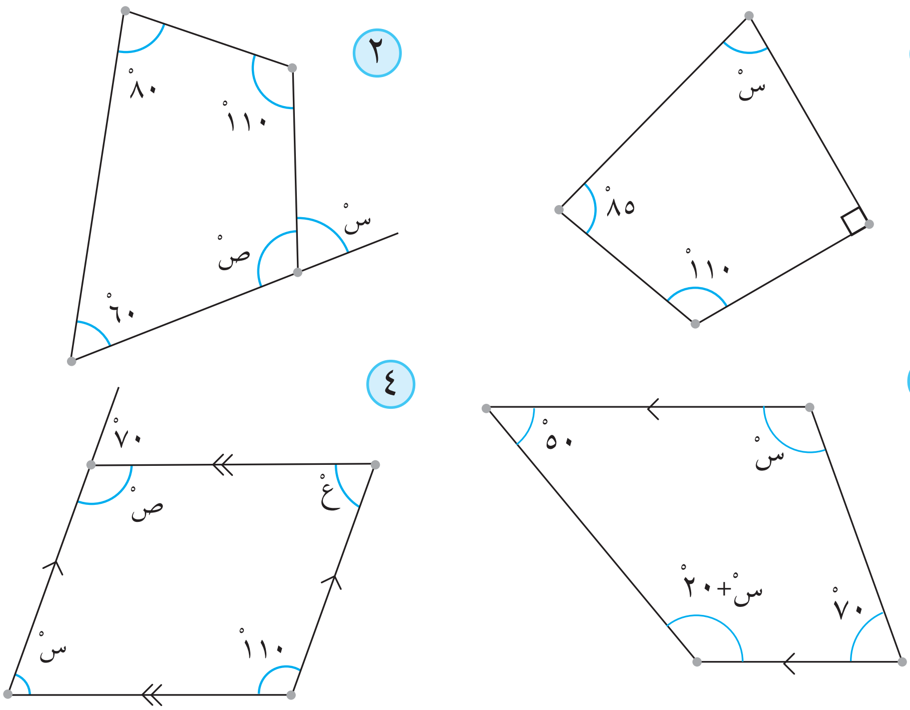
٢٥٥°+ص=٣٦٠°

ص= ٣٦٠-٢٥٥°

ص=١٠٥° .

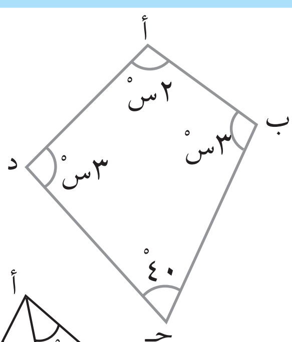
تدريبات صفّية:

أجد قياس كلّ من الزوايا المجهولة في الأشكال الرباعية الآتية:



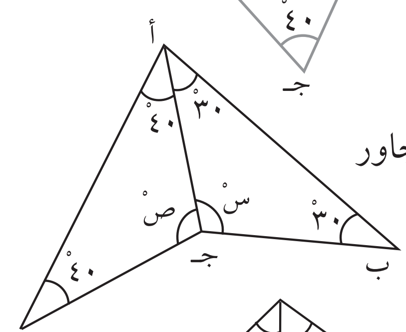
تمارين ومسائل:

١ أجد قياس كل زاوية من زوايا الشكل الرباعي المجاور.

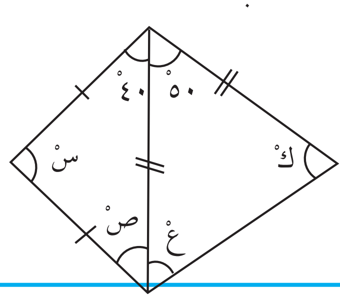


٢ (أ) أجد قياس كل من الزاويتين المجهولتين في الشكل المجاور

(ب) أتحقق من أن مجموع زوايا الشكل الرباعي المقعر أ ب جـ د يساوي ٣٦٠°.



٣ أجـد كل زاوية مجهولة في الشكل المجاور.

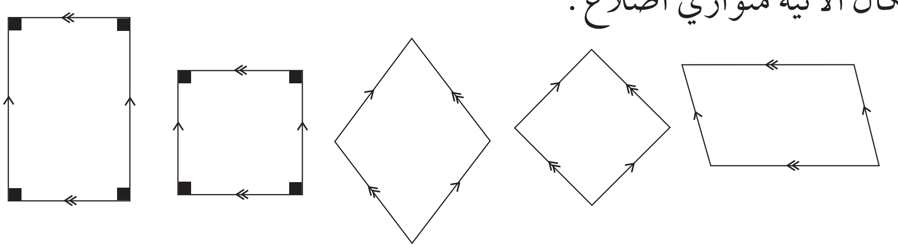


٦-٢ متــوازي الأضـــلاع

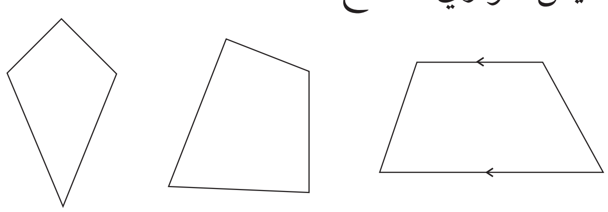
تعريــف

متوازي الأضلاع : هو شكل رباعي فيه كل ضلعين متقابلين متوازيان .

كلٌّ من الأشكال الآتية متوازي أضلاع :



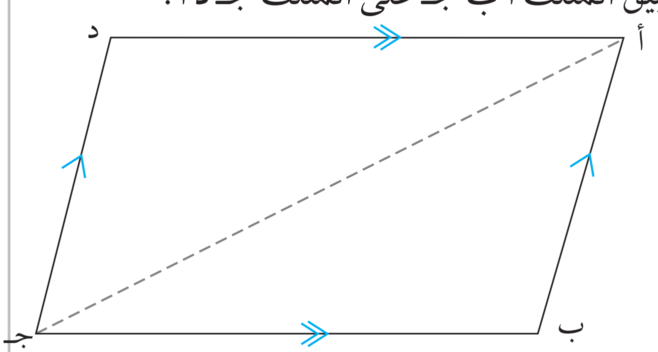
وكلٌّ من الأشكال الآتية ليس متوازي أضلاع :



إن شكل فن المجاور يمثل العلاقة بين متوازيات الأضلاع والأشكال الرباعية :

نشــــاط:

ارسم متوازي أضلاع على ورق عادي أو مقوّى كما في الشكل المجاور. إقطع الشكل إلى مثلثين حول أحد القطرين (أ جـ مثلاً)، وحاول تطبيق المثلث أ ب جـ على المثلث جـ د أ .



اكتب على دفترك وأكمل العبارات الآتية :

تقع النقطة أ على النقطة ----

تقع النقطة ب على النقطة----

تقع النقطة جـ على النقطة----

الزاوية أ ب جـ تقع على الزاوية ---

الضلع أ ب يقع على الضلع--- وهذا يعني أنَّ أ ب=----

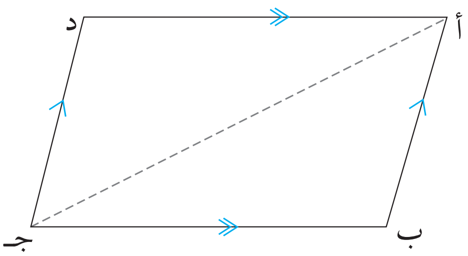
الضلع ب جـ يقع على الضلع ---- وهذا يعني أن----=----

يوضح النشاط السابق النظرية التالية :

نظرية

في متوازي الأضلاع : ١) كل ضلعين متقابلين متساويان .
٢) كل زاويتين متقابلتين متساويتان في القياس .

البرهان:

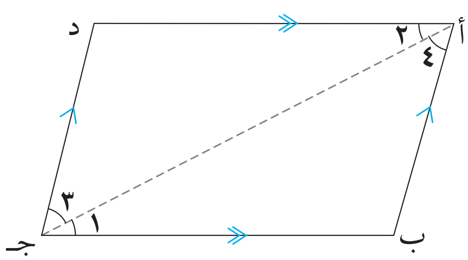


نريد بيان صحة ما يلي :

اولاً : أ ب = د جـ ، ب جـ = أد

ثانياً : ∡ ب = ∡ د ، ∡ أ = ∡ جـ

إذا استطعنا تطبيق المثلثين أ ب جـ ، جـ د أ (كما فعلنا في النشاط السابق) فإننا نبرهن على صحة العبارات السابقة .



هل تتوفر شروط الانطباق للمثلثين المذكورين؟

∡ ١ = ∡ ٢ بالتبادل لأن د أ // جـ ب .

∡ ٤ = ∡ ٣ بالتبادل لأن ب أ // جـ د

أ جـ = أ جـ (ضلع مشترك) .

ينطبق المثلثان وينتج أن :

أ ب = د جـ

ب جـ = أ د

وهذا يعني أن كل ضلعين متقابلين متساويان . . . (١)

وينتج من التطابق ايضاً أن ∡ ب = ∡ د .

وهذا يعني أن ∡ ب تساوي مقابلتها ∡ د .

ولكن ماذا عن الزاويتين أ ، جـ؟ هل هما متساويتان؟

∡ ١ = ∡ ٢ بالتبادل

∡ ٣ = ∡ ٤ بالتبادل

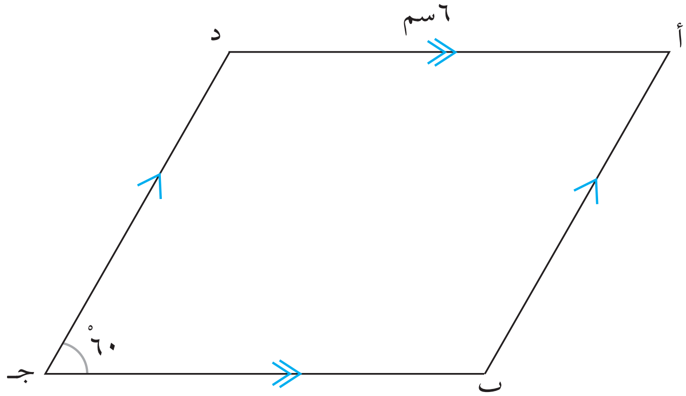
∡ ١ + ∡ ٣ = ∡ ٢ + ∡ ٤

أي أن ∡ جـ = ∡ أ

وهذا يعني أن كل زاويتين متقابلتين متساويتان . . . (٢)

مثـــال

أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه أ د = ٦ سم، ق ∢ جـ = ٦٠ْ
أوجد قياس كل من الزوايا أ، ب، د، وما طول ب جـ؟



الحـل: ∢ أ = ∢ جـ = ٦٠ْ لأن الشكل متوازي أضلاع والزاويتان متقابلتان.

بما أن أ د // ب جـ فإن ∢ د + ∢ جـ = ١٨٠ْ (متحالفتان)

∢ د = ١٨٠ْ − ٦٠ْ

∢ د = ١٢٠ْ

∢ ب = ١٢٠ْ لأنها تقابل ∢ د

ب جـ = أ د لأنهما ضلعان متقابلان في متوازي الأضلاع

إذن ب جـ = ٦ سم.

تدريـبات صفّية:

(١) أ ب جـ د متوزاي أضلاع فيه أ ب = ٥سم ، ب جـ = ٨سم . ما محيط متوازي الأضلاع؟

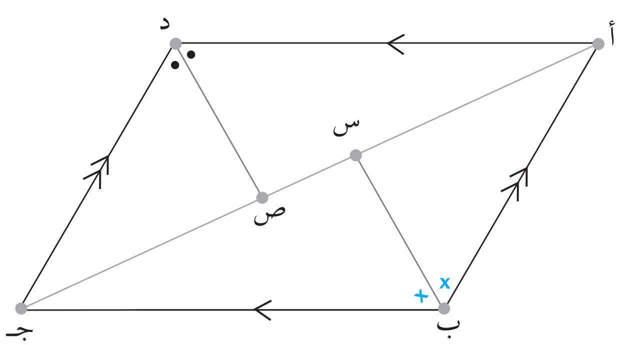
(٢) أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه ∢ أ = ٧٠ْ. أجد كل زاوية من الزوايا الأخرى للشكل وأبيّن السبب في كل حاله.

(٣) س ص ع ن متوازي أضلاع فيه س ص = ٥سم، س ن = ٩سم، ∢ ع = ٥٥ْ.
أجد جميع الأضلاع والزوايا الأخرى للشكل مبيناً السبب في كل حالة.

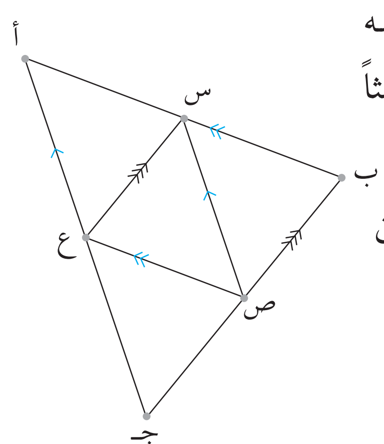
تمارين ومسائل:

١ أ ب جـ د متوازي أضلاع، فيه
ق ∢ أ = ٦٥ْ، أ ب = ٦سم
ومحيطه ٣٤سم.
أجد قياسات زواياه، وأطوال أضلاعه.

٢ أ ب جـ د متوازي أضلاع، نُصّفت
الزاويتان أ ب جـ ، جـ د أ بمستقيمين
لاقيا أ جـ في س ، ص على الترتيب.
أُثبتُ أن: ب س = د ص
(إرشاد: أبحث عن مثلثين متطابقين)



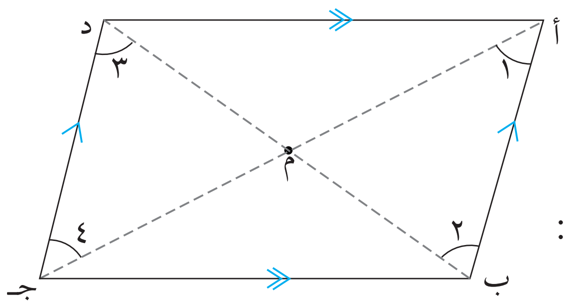
٣ في الشكل المقابل س ص ع مثلث، مرت برؤوسه ثلاثة مستقيمات توازي أضلاعه المقابلة، فكوّنت مثلثاً جديداً هو أ ب جـ.
(١) أسمي ثلاثة متوازيات أضلاع في الشكل وأبين السبب في كل حالة.
(٢) أُبرهنُ أن: س، ص، ع هي منتصفات أضلاع المثلث أ ب جـ.



خاصية أخرى لمتوازي الأضلاع

نظرية	قطرا متوازي الأضلاع ينصف كل منهما الآخر

أي أنه في متوازي الأضلاع المجاور أ ب جـ د، والذي يتقاطع قطراه في م فإن :



أ م=م جـ ، ب م = م د .

ما هما المثلثان اللذان نحتاج لتطبيقهما لبيان

أن أ م= جـ م وكذلك ب م= د م ؟

اكتب شروط الانطباق بإكمال ما يأتي على دفترك :

△ أ ب م، △ جـ دم فيهما :

أ ب= ---- السبب : -----

∠ ١ =---- السبب : -----

∠ ٢ =-----السبب : ----

ينطبق المثلثان لتساوي زاويتين وضلع في أحدهما مع نظائرهما في الثاني وينتج من التطابق أن :

أ م = ----- وكذلك ب م = -----

أي أن قطري متواز الأضلاع ينصف كل منهما الآخر .

تمرين :

أ ب جـ د متوازي اضلاع . س نقطة تقاطع قطريه . فإذا كان طول القطر أ جـ ١٢ سم، وطول ب د ١٠ سم .

أجد طول كل من : أ س ، جـ س ، ب س ، د س وأبين السبب في كل حالة .

خلاصة :

في متوازي الأضلاع : (١) كل ضلعين متقابلين متوازيان (تعريف) .

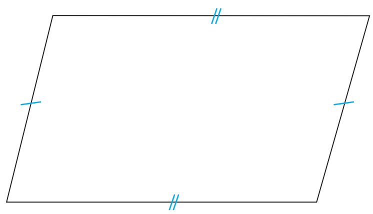
(٢) كل ضلعين متقابلين متساويان .

(٣) كل زاويتين متقابلتين متساويتان .

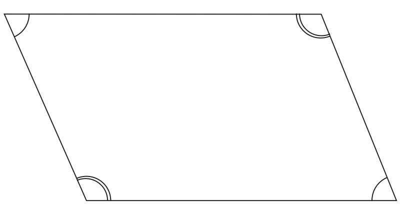
(٤) القطران ينصف كل منهما الآخر .

٦ – ٣ متى يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع؟

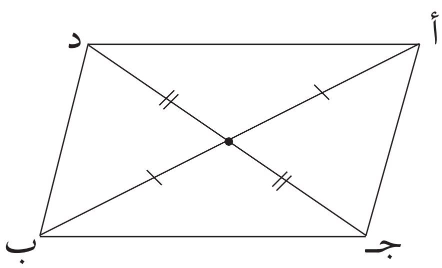
إذا عرفنا أن شكلاً ما متوازي أضلاع فاننا نعرف خصائصه . ولكن ماذا عن العكس؟
أي ما هي الخصائص التي تتوفر في شكل رباعي ليكون متوازي أضلاع؟
فمثلاً : هل تساوي كل ضلعين متقابلين في شكل رباعي يجعله متوازي أضلاع؟
أي هل تكفي المعطيات المبينة على الرسم المجاور لبيان أن الشكل متوازي أضلاع؟



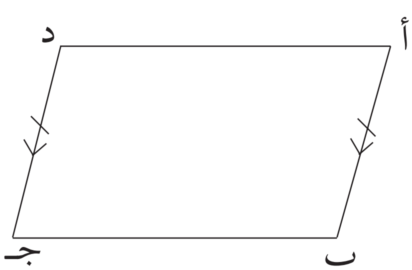
وكمثال آخر ، هل تساوي كل زاويتين متقابلتين في شكل رباعي يجعله متوازي أضلاع؟
أي هل تكفي المعطيات المبينة على الرسم المجاور لبيان أن الشكل متوازي أضلاع؟



وهل رؤوس القطعتين المستقيمتين أ ب ، جـ د في الشكل المجاور تحدد رؤوس متوازي أضلاع؟ أي هل الشكل أ جـ ب د الذي قطراه ينصف كل منهما الآخر يكون متوازي أضلاع؟



وكمثال أخير ، هل تساوي وتوازي الضلعين أ ب ، د جـ في الشكل المجاور يجعله متوازي أضلاع ؟



ستقدم النظرية الآتية الإجابة على مثل هذه التساؤلات .

نظرية

يكون الشكل الرباعي متوازي أضلاع في أي من الحالات الآتية :

(١) إذا توازى فيه كل ضلعين متقابلين (تعريف) .

(٢) إذا تساوى فيه كل ضلعين متقابلين .

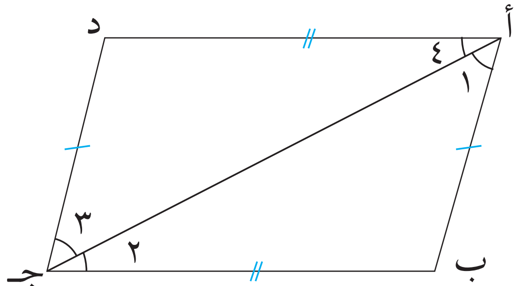
(٣) إذا تساوت فيه كل زاويتين متقابلتين .

(٤) إذا نصف قطراه كل منهما الاخر .

(٥) إذا تساوى وتوازى ضلعان متقابلان .

البرهان:

الحالة الثانية من النظرية :



في الشكل المجاور أ ب جـ د :

أ ب = د جـ ، أ د = ب جـ

نريد بيان أن أد / / ب جـ ، أ ب / / دجـ .

المثلثان أ ب جـ، جـ د أ متطابقان لتساوي ثلاثة أضلاع في أحدهما مع نظائرهما في الآخر .

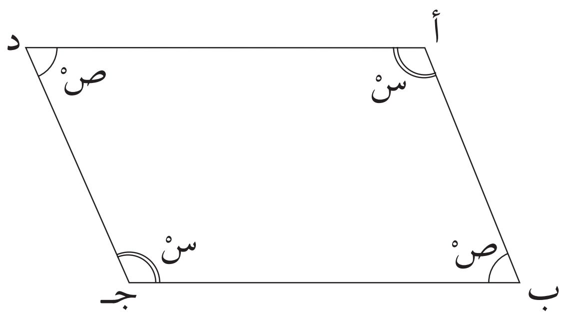
ينتج من التطابق تساوي زوايا هي في وضع تبادل . ماهي؟

أكمل البرهان على دفترك : ∢١=----- . إذن أ ب / / -----

∢٢= ----- . إذن ب جـ / / -----

إذن الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع لأن --------------------

الحالة الثالثة من النظرية :



في الشكل المجاور أ ب جـ د :

∢ أ= ∢جـ ولتكن س درجة

∢ ب= ∢ د ولتكن ص درجة

مجموع زوايا الشكل الرباعي= ٣٦٠ْ

س+ص+س+ص= ٣٦٠ْ

٢س+٢ص=٣٦٠ْ

س+ص=١٨٠ْ

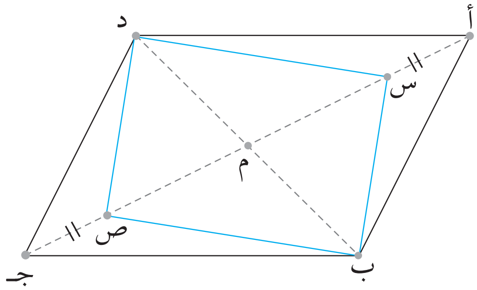
لاحظ أن الزاويتين أ، ب وهما في وضع تحالف مجموعهما ١٨٠ْ أي أن أد / / ب جـ

ولاحظ أيضاً أن الزاويتين أ ، د وهما في وضع تحالف مجموعهما ١٨٠ْ أي أن أ ب / / د جـ

أي أن الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع .

ونترك برهنة **الحالتين** الرابعة والخامسة للطالب .

مثال (١)



الشكل المقابل أ ب جـ د متوازي أضلاع ، م نقطة تقاطع قطريه ، س ، ص نقطتان على القطر أ جـ بحيث إن :

أ س = جـ ص .

أثبت أن س ب ص د متوازي أضلاع .

الحل:

أ م = م جـ (قطرا متوازي الأضلاع ينصّف كلٌّ منهما الآخر)

أ س = جـ ص (معطى)

∴ أ م – أ س = م جـ – جـ ص

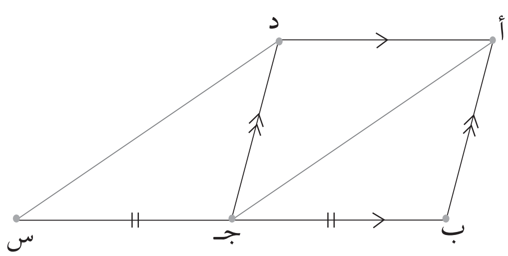
∴ س م = م ص . . . (١)

كذلك ب م = م د . . . (٢) (قطرا متوازي الأضلاع ينصّف كلٌّ منهما الآخر)

من (١) ، (٢) ينتج أن قطري الشكل الرباعي س ب ص د ينصّف كلٌّ منهما الآخر .

∴ الشكل الرباعي س ب ص د متوازي أضلاع .

مثال



في الشكل الآتي أ ب جـ د متوازي أضلاع ، س نقطة على امتداد ب جـ بحيث إن : ب جـ = جـ س . أثبتْ أنّ الشكل أ جـ س د متوازي أضلاع .

الحل:

يتم المطلوب إذا وجدنا ضلعين متقابلين متوازيين ومتساويين في الشكل أ جـ س د

ب جـ = أ د (ضلعان متقابلان في متوازي الأضلاع أ ب جـ د)

ب جـ = جـ س (معطى)

∴ أ د = جـ س

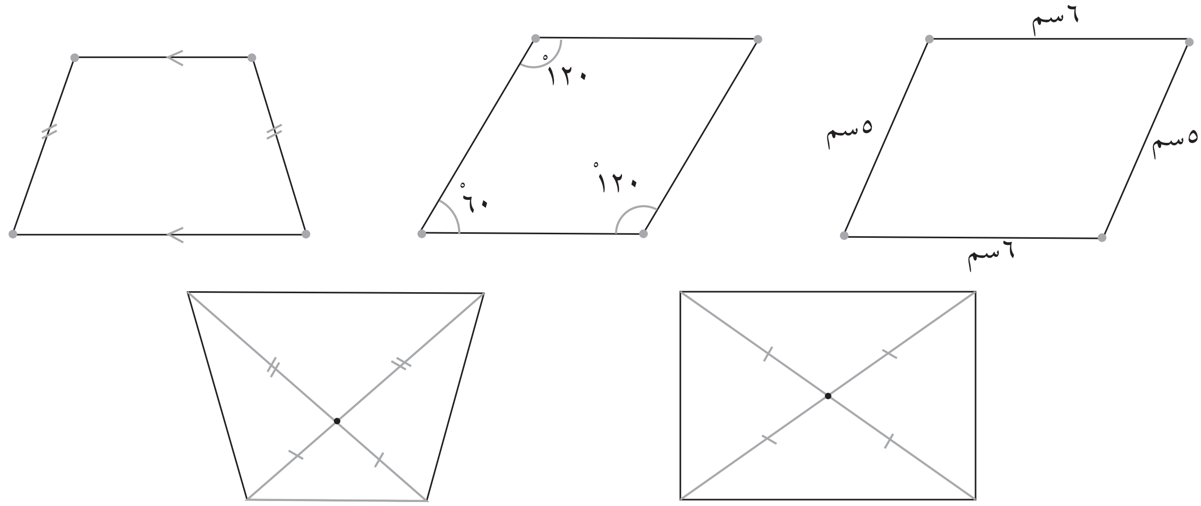
لكن أ د // جـ س

أصبح الشكل أ جـ س د فيه ضلعان متساويان ومتوازيان

∴ أ جـ س د متوازي أضلاع .

تدريبات صفيّة :

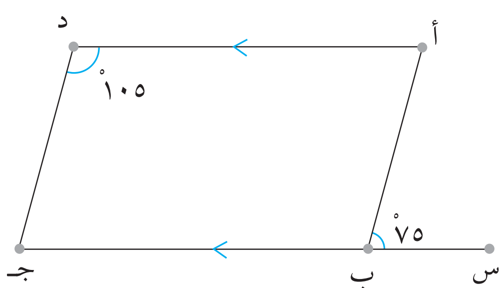
١ أيُّ الأشكالِ الرباعية الآتية متوازي أضلاع ؟



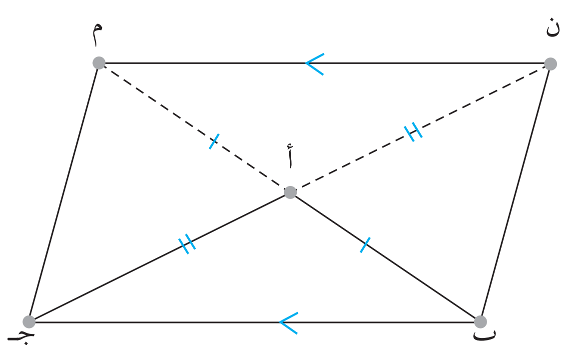
٢ في الشكل المقابل أ ب جـ د شكل رباعي، فيه أ د // ب جـ .

∢س ب أ = ٧٥ْ، ∢أ د جـ = ١٠٥ْ .

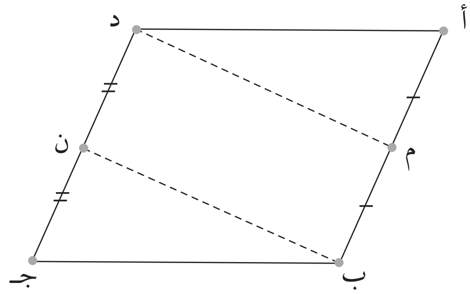
أثبت أن الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع .



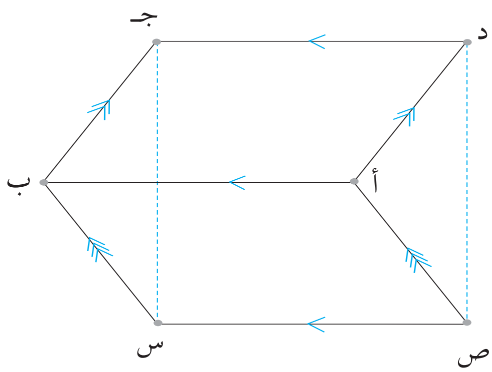
٣ في الشكل المقابل أ ب جـ مثلث، مُدَّ ب أ ، جـ أ من جهة أ إلى م ، ن على الترتيب بحيث كان أ ب = أ م ، أ جـ = أ ن . أُثبتُ أنّ الشكل ن ب جـ م متوازي أضلاع .



تمارين ومسائل:

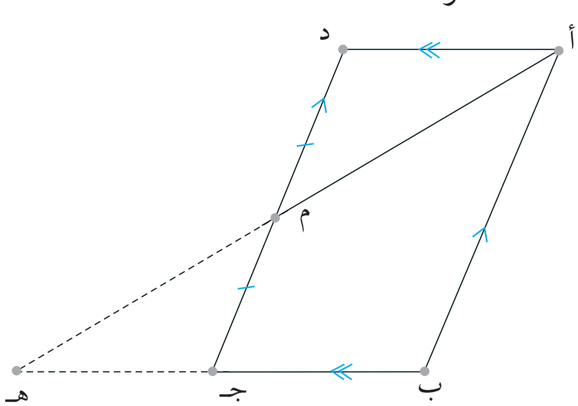


١ في الشكل المقابل أ ب جـ د متوازي أضلاع . م منتصف أ ب ، ن منتصف جـ د
أُثبتُ أن الشكل م ب ن د متوازي أضلاع .



٢ في الشكل المقابل أ ب جـ د ، أ ب س ص متوازيا أضلاع مشتركان في الضلع أ ب ، ومرسومان في جهتين مختلفين فيه . أُثبتُ أنّ د ص س جـ متوازي أضلاع .

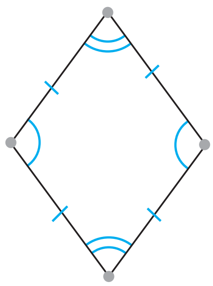
٣ امامك معطيات ليست كافية ليكون الشكل الرباعي متوازي اضلاع .
ارسم في كل حالة شكلا رباعيا يحقق الشروط المعطاة ولا يكون متوازي اضلاع .
(أ) شكل رباعي فيه ضلعان متقابلان متوازيان .
(ب) شكل رباعي فيه زاويتان متقابلتان متساويتان .
(جـ) شكل رباعي فيه ضلعان متقابلان متساويان .
(د) شكل رباعي فيه احد القطرين ينصف الآخر .



٤ أ ب جـ د متوازي أضلاع ، نُصِّف الضلع جـ د في م ، ثم وُصل أ م ، ومُدَّ على استقامته حتى لاقى امتداد ب جـ في هـ .
أبرهن أن: ب جـ = جـ هـ .

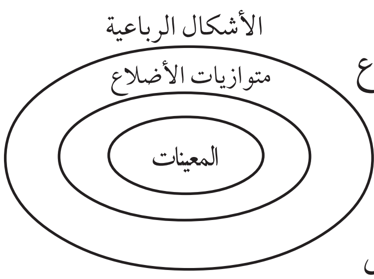
٦ – ٤

حالات خاصة لمتوازي الاضلاع
(المُعَيَّن ، والمستطيل ، والمربع)



المُعَيَّن :

هو متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران متساويان (وهذا يعني أن جميع أضلاع المعين متساوية) .

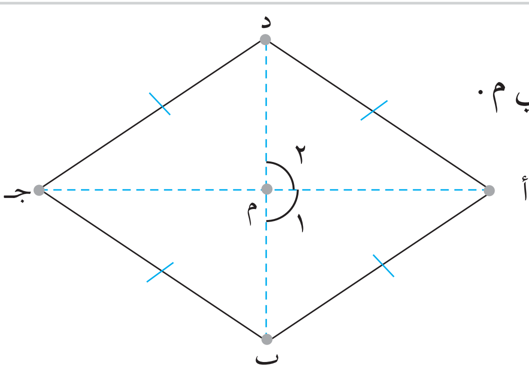


ويبين شكل ڤن المجاور أن المعين حالة خاصة من متوازي الأضلاع أو أن المعينات هي مجموعة جزئية من متوازيات الأضلاع .

عرفت في صفوف سابقة أن قطري المعين متعامدان وينصف كل منهما الأخر ، وسوف تتعرف هنا على اثبات صحة هذه الخاصية .

نظرية

قطرا المعين متعامدان ، وينصِّفُ كلٌّ منهما الآخر .



في الشكل المجاور أ ب جـ د معين قطراه متقاطعان في م .

ونريد اثبات أن : (١) م ب = م د

(٢) م أ = م جـ

(٣) ب د عمودي على أ جـ

البرهان:

المعين حالة خاصة من متوازي الأضلاع ولهذا فإن قطري المعين أ ب جـ د ينصف كل منهما الآخر وهذا يثبت الجزئين الأول والثاني من المطلوب .

بقي علينا أن نثبت أن القطرين متعامدان . لاحظ أن جميع أضلاع المعين متساوية .

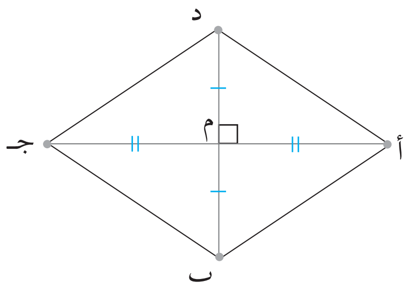
المثلث أ ب د متساوي الساقين وفيه أ م يصل من الرأس إلى منتصف القاعدة .

إذن أ م عمودي على القاعدة ب د (أي أن ∢ ١ = ∢ ٢ = قائمة) .

أي أن القطرين متعامدان (لماذا؟)

تمرين:

هل عكس النظرية السابقة صحيح ؟ أي إذا عرفنا أن قطري شكل رباعي متعامدان وينصف كل منهما الاخر فهل هذا الشكل معين؟



أكمل البرهان الآتي على دفترك :

القطران ينصف كل منهما الآخر .

إذن الشكل أ ب جـ د هو ----------

في △ د أ جـ : د م عمود منصف للقاعدة أ جـ .

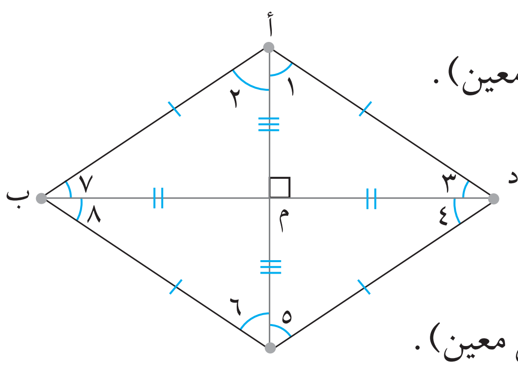
إذن △ د أ جـ متساوي الساقين، أي أن د أ = ----

إذن الشكل أ ب جـ د معين لأنه متوازي أضلاع فيه ضلعان متجاوران ---- .

مثال

في المعين المجاور : ∡ أ= ١٠٠°، ∡ د =٨٠°

جد قيم الزوايا ١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ .



الحل:

في △ أ ب د ، أ ب = أ د (لأن الشكل معين) .

أ م عمود من أ على القاعدة ب د .

اذن أ م ينصف زاوية الرأس

أي أن ∡ ١ = ∡ ٢ = $\frac{١٠٠}{٢}$ = ٥٠°

في △ د أ جـ : د أ = د جـ (لأن الشكل معين) .

د م عمود من رأس المثلث المتساوي الساقين على القاعدة

إذن د م ينصف زاوية الرأس .

أي ان ∡ ٣ = ∡ ٤ = $\frac{٨٠}{٢}$ = ٤٠°

وبالمثل يمكن أن نبين أن ∡ ٧ = ∡ ٨ = ٤٠°

وكذلك ∡ ٥ = ∡ ٦ = ٥٠°

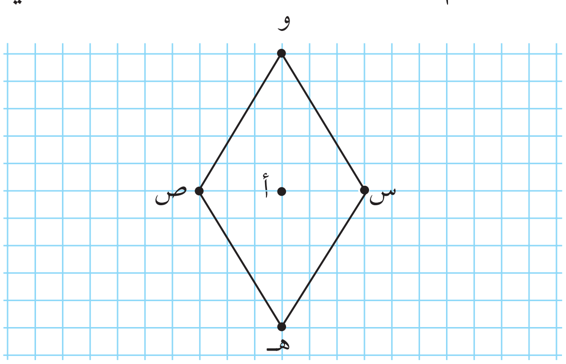
نتيجة: قطرا المعين ينصفان زواياه .

خلاصة:

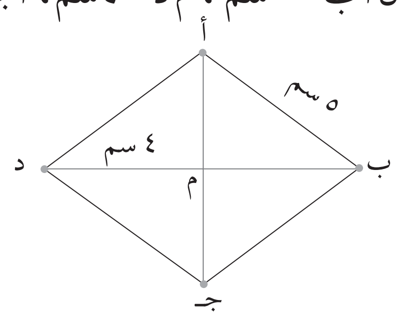
يكون الشكل الرباعي معيناً في أي من الحالات الآتية :
(١) إذا كانت جميع أضلاع الشكل الرباعي متساوية .
(٢) إذا كان قطرا الشكل الرباعي متعامدين وينصف كل منهما الآخر .
(٣) إذا كان قطرا الشكل الرباعي ينصفان زواياه .
(٤) إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع وكان قطراه متعامدين .
(٥) إذا كان الشكل الرباعي متوازي أضلاع وكان فيه ضلعان متجاوران متساويان .

تمارين ومسائل:

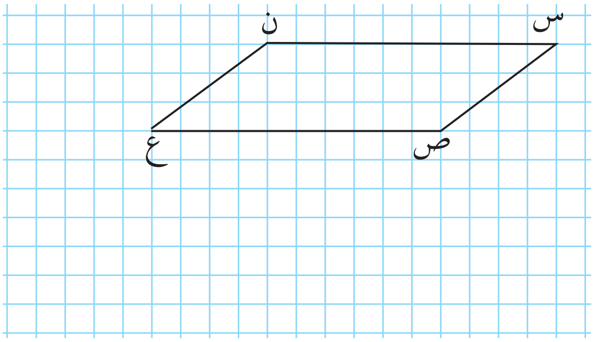
١ على شبكة المربعات المجاورة، وضعت النقطة أ ثم النقطتين س ، ص كما هو مبين في الشكل ثم النقطتين و ، هـ (أنظر الشكل) .
أبين أن الشكل و س هـ ص معين .



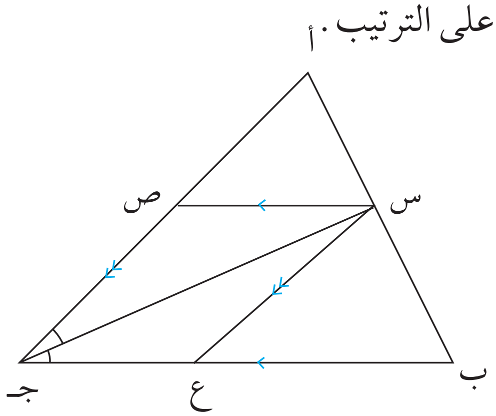
٢ أ ب حـ د معين، يتقاطع قطراه أ جـ ، ب د في م . إذا كان أ ب = ٥سم ، م د = ٤سم، أجد قياس كل مما يأتي وأبين السبب في كل حالة :
أولاً : طول أ د
ثانياً : طول ب م
ثالثاً : زاوية أ م ب



٣ الشكل المجاور س ص ع ن متوازي أضلاع، أضيف شكلاً آخر لمتوازي الأضلاع حتى يشكلان معاً معيناً .

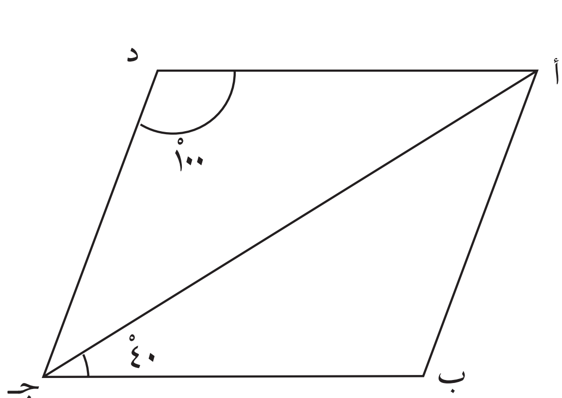


٤ أ ب جـ مثلث . نصفت زاوية جـ بالمستقيم جـ س كما في الشكل، ورسم من س المستقيمان س ص، س ع يوازيان ب جـ ، أ جـ على الترتيب .
أثبت أن الشكل س ص جـ ع مُعَين .

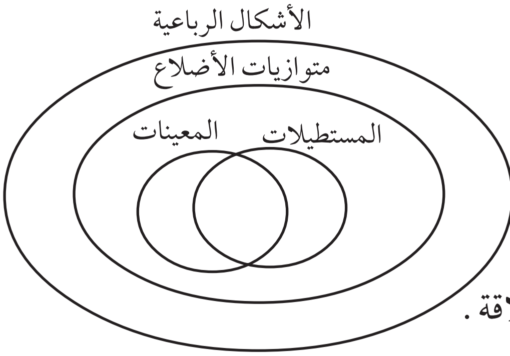


٥ أ ب جـ د معين تقاطع قطراه في م .
إذا كان طول القطر أ جـ = ١٦ سم وطول ب د = ١٢ سم، فما طول ضلع المعين؟

٦ أ ب جـ د متوازي أضلاع بحيث أن ∢ د = ١٠٠ْ ، ∢ ب جـ أ = ٤٠ْ .
أبين أن أ ب جـ د هو معين .



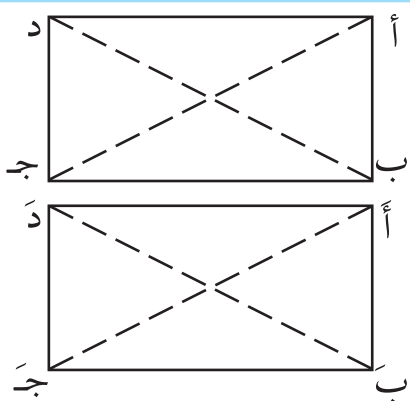
المستطيل:



المستطيل هو : متوازي أضلاع إحدى زواياه قائمة .
(وهذا يعني أن جميع الزوايا قوائم) .
لاحظ أن المستطيل هو حالة خاصة من متوازي الأضلاع ويمثل شكل ڤن المجاور هذه العلاقة .

درست سابقاً خواص المستطيل وعرفت أن قطري المستطيل متساويان وينصف كل منهما .

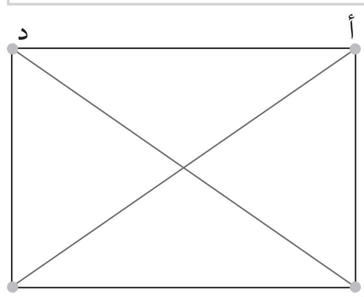
نشـــاط:



خذ ورقتين متطابقتين كل منهما مستطيلة الشكل .
صل القطرين في كل منهما . إقلب المستطيل الأول وضعه على الآخر . تجد أن القطر أ جـ يقع على القطر الآخر بَ دَ والذي يساوي ب د . ماذا تستنتج؟

نظرية

قطرا المستطيل متساويان في الطول، وينصّف كلٌّ منهما الآخر .



في المستطيل المجاور، نريد إثبات أن :
(١) القطر أ جـ = القطر ب د
(٢) القطرين أ جـ ، ب د ينصف كل منهما الآخر .

البرهان:

من السهل برهنة الجزء الثاني من المطلوب، حيث أن المستطيل هو متوازي أضلاع فقطراه ينصف كل منهما الآخر .

ولبرهنة تساوي القطرين أ جـ ، ب د، نبحث عن مثلثين متطابقين يحويان القطرين .

المثلثان أ ب جـ ، د جـ ب فيهما :

أ ب = د جـ (ضلعان متقابلان في المستطيل) .

ب جـ = ب جـ (ضلع مشترك)

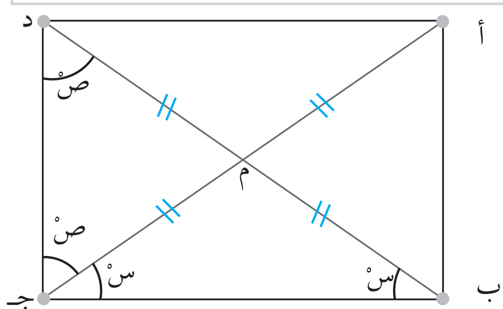
∢ أ ب جـ = ∢ د جـ ب (كل منهما ٩٠°)

ينطبق المثلثان وينتج أن أ جـ = د ب ، وبهذا تكون النظرية صحيحة .

عكس النظرية السابقة صحيح ونقدمها فيما يأتي دون برهان :

نظرية

الشكل الرباعي الذي قطراه متساويان في الطول، وينصّف كلٌّ منهما الآخر هو مستطيل .



في الشكل المجاور، إذا عرفنا أن :

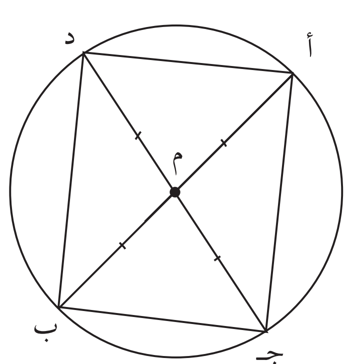
أ جـ = ب د، وأن أ جـ ، ب د ينصف كل منهما الآخر

فإن الشكل أ ب جـ د مستطيل .

مثــال

أ ب ، جـ د قطران في دائرة مركزها م .

أثبت أن الشكل أ جـ ب د مستطيل .



الحـل:

أ ب = جـ د لأنهما قطران في نفس الدائرة .

م أ = م ب، م جـ = م د (أنصاف أقطار) .

إذاً الشكل الرباعي أ جـ ب د قطراه متساويان

وينصف كل منهما الآخر فهو مستطيل .

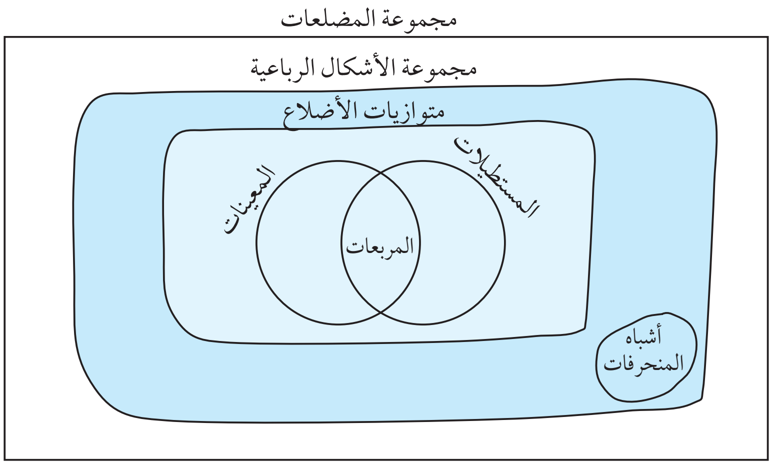
المربع:

المربع هو متوازي أضلاع، جميع أضلاعه متساوية، وإحدى زواياه قائمة.

وعليه فإن: المربع هو معين فيه زاوية قائمة (لماذا؟)

والمربع هو مستطيل فيه ضلعان متجاوران متساويان (لماذا؟)

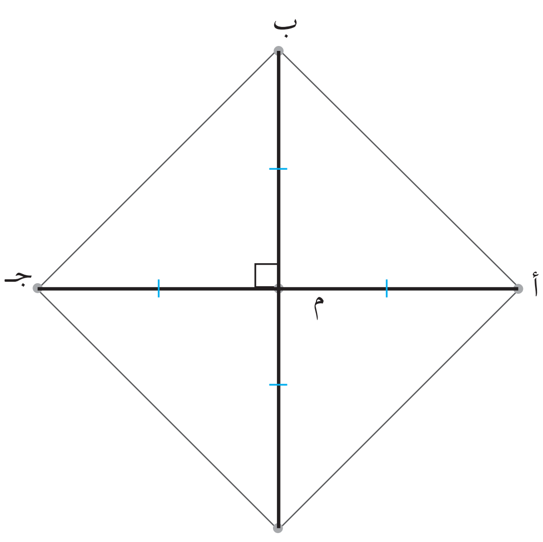
ويمثل شكل ڤن الآتي العلاقة بين المربع وأشكال رباعية أخرى، فهو حالة خاصة من المستطيل وهو أيضاً حالة خاصة من المعين.



مثـــال

أب جـ د شكل رباعي قطراه متساويان ومتعامدان وينصف كل منهما الآخر.

أثبت أن الشكل مربع.



البرهان:

بما أن القطرين متساويان وينصف كل منهما الآخر فإن الشكل مستطيل.

وبما أن القطرين متعامدان وينصف كل منهما الآخر فإن الشكل معين.

أي أن الشكل زواياه قوائم (لأنه مستطيل) وأضلاعه متساوية (لأنه معين)، وهذا يعني أن أضلاع الشكل متساوية وزواياه قوائم فهو مربع.

تمارين ومسائل:

١ أضع إشارة (✓) أمام العبارة الصحيحة، واشارة (X) أمام العبارة غير الصحيحة في كل مما يأتي:

أ) ☐ كل مستطيل هو مربع .

ب) ☐ كل مربع هو معين .

جـ) ☐ المعين هو مستطيل .

د) ☐ المستطيل هو متوازي أضلاع .

هـ) ☐ المعين الذي قطراه متساويان هو مربع .

و) ☐ قطرا المعين متساويان ومتعامدان .

ز) ☐ قطرا المستطيل متساويان ومتعامدان .

ح) ☐ قطرا المربع متساويان ومتعامدان .

ط) ☐ المعين الذي إحدى زواياه قائمة هو مربع .

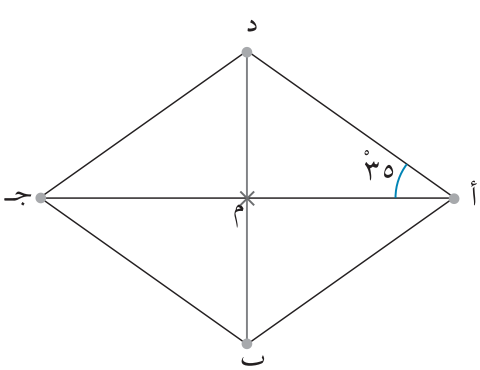
ي) ☐ الشكل الرباعي الذي جميع أضلاعه متساوية، وإحدى زواياه قائمة هو مربع .

٢ في الشكل المقابل:

أ ب جـ د معين، م نقطة التقاء قطريه .

ق ∢ د أ م = °٣٥ .

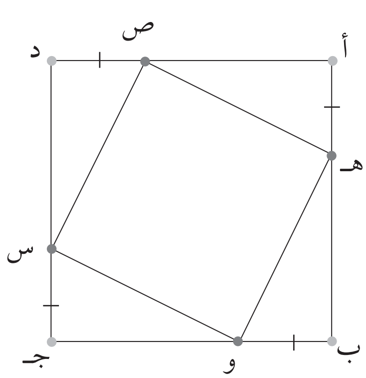
أحسبُ قياسات جميع زواياه الداخلية .



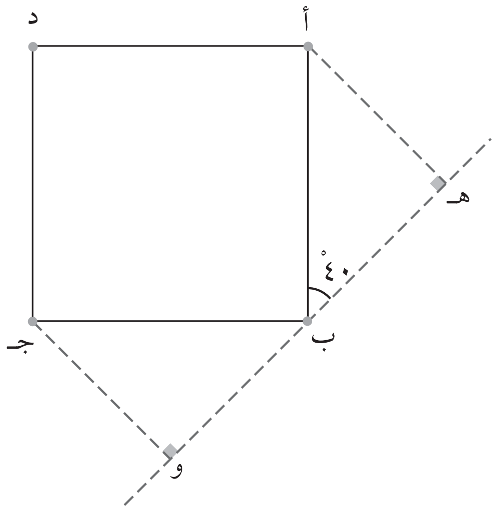
٣ في الشكل المقابل:

أ ب جـ د مربع طول ضلعه ٩ سم، أخذت النقاط: هـ، و، س، ص على أضلاعه: أ ب، ب جـ، جـ د، د أ على الترتيب بحيث كان أ هـ = ب و = جـ س = د ص = ٣ سم .

أُبرهنُ أن الشكل هـ و س ص مربع .



٤ إذا مرت برؤوس المعين مستقيمات توازي قطريه، أُثبتُ أن الشكل الناتج من تقاطع المستقيمات المتوازية هو مستطيل.



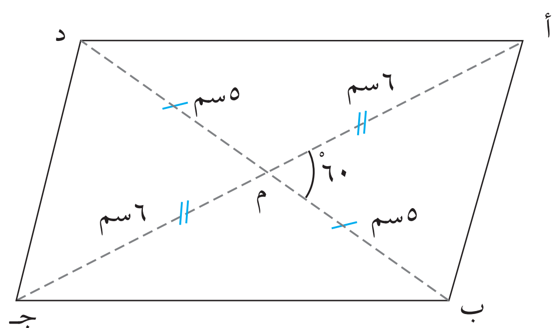
٥ في الشكل المقابل:

أ ب جـ د مربع، مر بالرأس ب مستقيم يصنع مع أب زاوية قياسها ٤٠ْ، ثم أُنزِل عليه من أ، جـ العمودان أ هـ، جـ و.

أبرهن أنّ: أ هـ = ب و.

(**إرشاد**: أطبّق المثلثين أ هـ ب، ب و جـ.)

٦ في الشكل الرباعي أ ب جـ د المجاور، قطرا الشكل يتقاطعان في م وينصف كل منهما الآخر. طول أ م = ٦سم، طول ب م = ٥سم:



(أ) هل يمكن أن يكون الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع؟

الجواب: . . . .

السبب: . . . .

(ب) هل يمكن أن يكون الشكل مستطيلاً؟

الجواب: ------------

السبب: -------------

(جـ) هل يمكن أن يكون الشكل معيناً؟

الجواب: ------------

السبب: --------------

(د) هل يمكن أن يكون الشكل مربّعاً؟

الجواب: ------------

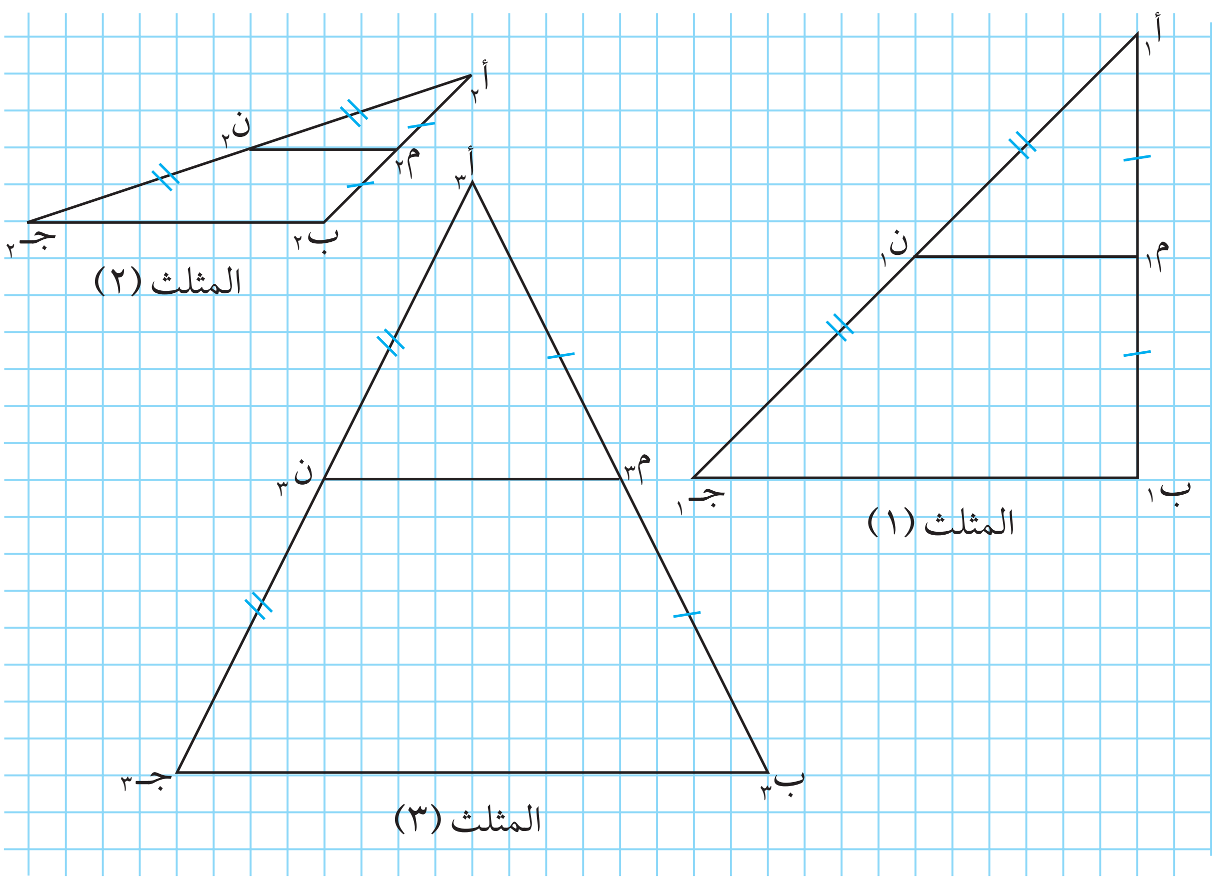
السبب: --------------

٦ – ٥ نظريات المنتصفات والقطع المتوسطة

سوف تتعرف في هذا البند على العلاقة بين القطع المستقيمة التي تصل بين منتصفات أضلاع المثلث وأضلاع هذا المثلث المقابل لهذه القطع ، كما ستتعرف على القطع المتوسطة في المثلث وخصائصها .

نشـــاط:

في كل مثلث مما يأتي ، جد بِعَدّ المربعات طول القطعة الواصلة بين منتصفي ضلعين في المثلث وطول الضلع الثالث في هذا المثلث ، ثم إملأ الفراغات في الجدول الآتي :



المثلث	طول القطعة الواصلة بين منتصفي الضلعين	طول الضلع الثالث	العلاقة بين الطولين
الأول	$م_١ ن_١$ =----	$ب_١ جـ_١$ =----	$م_١ ت_١ : ب_١ جـ_١$ =---
الثاني	$م_٢ ت_٢$ =---	$ب_٢ جـ_٢$ =----	$م_٢ ت_٢ : ب_٢ جـ_٢$ =---
الثالث	$م_٣ ت_٣$ =---	$ب_٣ جـ_٣$ =----	$م_٣ ت_٣ : ب_٣ جـ_٣$ =---

ماذا تلاحظ :

ألاحظ أن القطعة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث يساوي نصف طول الضلع الثالث للمثلث كما ألاحظ من الرسوم أن القطعة توازي الضلع الثالث . وهذا هو مضمون النظرية الآتية التي نقدمها دون برهان .

نظرية (١٧)

القطعة المستقيمة الواصلة بين منتصفي ضلعين في مثلث توازي الضلع الثالث، وطولها يساوي نصف طوله .

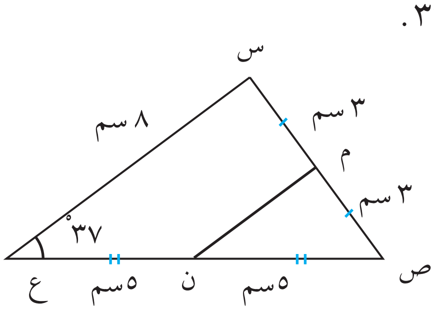
مثال (١)

س ص ع مثلث فيه م منتصف الضلع س ص ، النقطة ن منتصف ص ع كما في الشكل .

فإذا كان طول س ع= ٨ سم وقياس ∢ع = ٣٧° .

جد : (١) طول م ن

(٢) قياس ∢ م ن ص



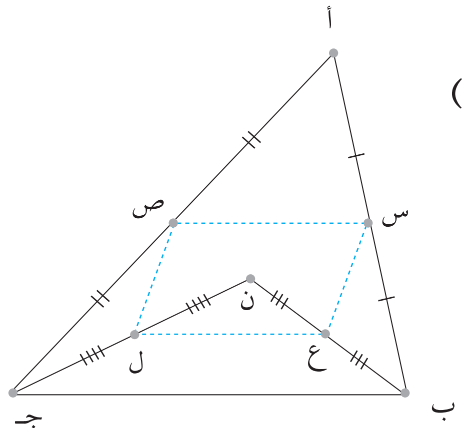
الحل: القطعة م ن تصل بين منتصفي ضلعين في المثلث إذاً م ن = $\frac{١}{٢}$ س ع

م ن = $\frac{١}{٢}$ × ٨ = ٤ سم

وكذلك فإن م ن // س ع إذاً ∢ م ن ص = ٣٧° لأنها تساوي ع بالتناظر .

مثـــال (٢)

أ ب جـ مثلث، ن نقطة داخل المثلث أ ب جـ نُصِفت القطع المستقيمة أ ب، أ جـ، ب ن، ن جـ في س، ص، ع، ل على الترتيب. أثبت أن الشكل س ع ل ص متوازي أضلاع.



البـــرهان: في المثلث أ ب جـ

القطعة المستقيمة س ص تمر بمنتصفي الصلعين أ ب، أ جـ

∴ س ص // ب جـ، س ص = $\frac{١}{٢}$ ب جـ . . . . . . (١)

كذلك في المثلث ن ب جـ القطعة المستقيمة ع ل تمر بمنتصفي الضلعين ن ب، ن جـ

∴ ع ل // ب جـ، ع ل = $\frac{١}{٢}$ ب جـ . . . . . . (٢)

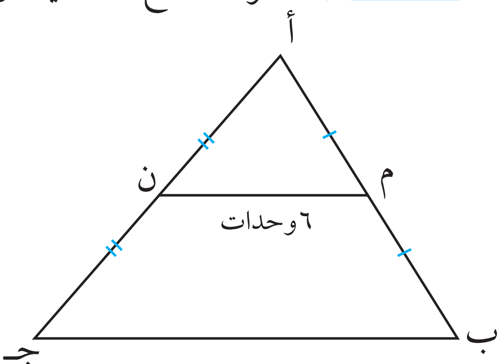
من (١)، (٢) نستنتج أن س ص // ع ل، س ص = ع ل

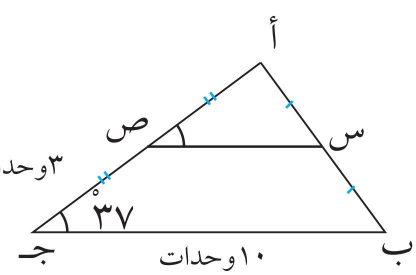
∴ الشكل س ع ل ص فيه ضلعان متساويان ومتوازيان

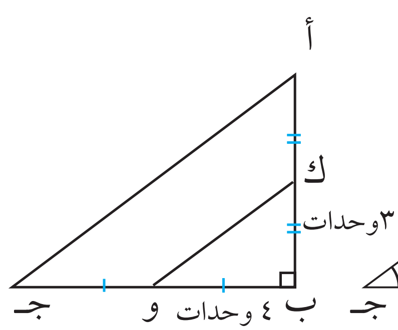
∴ س ع ل ص متوازي أضلاع وهو المطلوب

تمارين ومسائل:

١ أجد أطوال القطع المستقيمة والزوايا المحددة في كل مما يأتي:







ب جـ = ...

السبب: . . . .

س ص = ...

السبب: . . . .

∡ أ ص س = ...

السبب: . . . .

ك و = ...

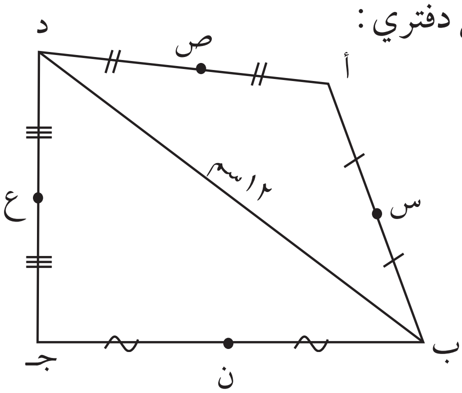
السبب: . . . .

أ جـ = ...

السبب: . . . .

٢ أ ب جـ مثلث متساوي الأضلاع طول ضلعه ٦ سم . النقاط س ، ص ، ع منتصفات أضلاعه أ ب ، ب جـ ، أ جـ على الترتيب . ما نوع المثلث س ص ع؟
ما محيط هذا المثلث؟ بين السبب في كل حالة .

٣ أ ب جـ د شكل رباعي طول قطره ب د = ١٢ سم . النقاط س ، ص ، ع ، ن منتصفات أ ب، أ د ، د جـ ، ب جـ على الترتيب . أجيب على دفتري :



ما طول س ص ؟ لماذا؟

ما طول ع ن؟ لماذا؟

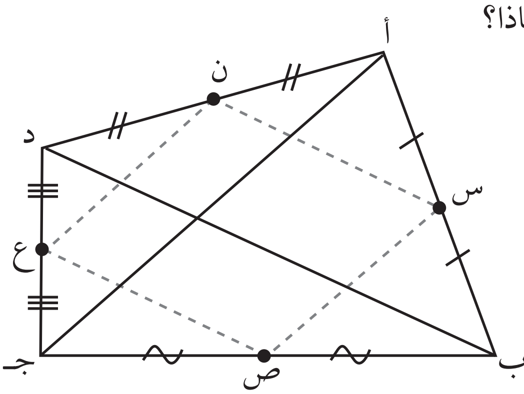
ما العلاقة بين طول س ص ، ع ن؟

هل س ص // ع ن ؟ لماذا؟

ماذا أستنتج عن الشكل س ص ع ن ؟ لماذا؟

٤ أ ب جـ مثلث متساوي الساقين فيه أ ب = أ جـ = ١٠ سم، أ د عمود على القاعدة ب جـ
س منتصف أ ب، أجد طول س د .

٥ أ ب جـ د شكل رباعي ، طول أ جـ = ٨سم ، طول ب د = ١٠ سم .
س ، ص ،ع ، ن منتصفات أ ب ، ب جـ ، جـ د ، د أ على الترتيب . (لا حظ الشكل الآتي)
(١) أجد طول كل ضلع من أضلاع الشكل س ص ع ن .
(٢) ما هو الشكل س ص ع ن لماذا؟

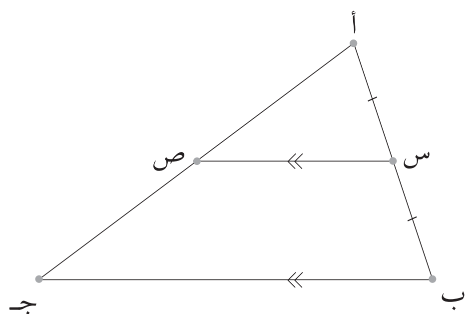


حقائق (نظريات) أخرى على المنتصفات.

فيما يأتي بعض الحقائق والنظريات الآخرى على القطع الواصلة بين منتصفات الأضلاع ، وهي مقدّمه هنا دون برهان ، ويمكن استخدام هذه الحقائق في التطبيقات وحل الأسئلة .

نظرية

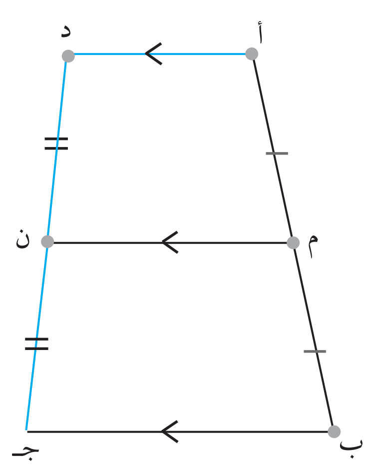
إذا رسم من منتصف أحد أضلاع مثلث قطعة مستقيمة توازي ضلعاً آخر ، فإن هذا الموازي ينصف الضلع الثالث . وطول هذه القطعة يساوي نصف طول الضلع الذي توازيه .



أي أنه في △أ ب جـ : إذا كانت س منتصف أ ب ، ورسم س ص يوازي ب جـ فإن ص لا بد وأن تكون منتصف أ جـ .

نظرية

القطعة الواصلة بين منتصفي الضلعين غير المتوازيين في شبه المنحرف توازي القاعدتين وطولها يساوي نصف مجموع طولي القاعدتين .



أي أنه في شبه المنحرف أ ب جـ د ، إذا كانت القطعة م ن تصل بين منتصفي الضلعين غير المتوازيين فتكون أ ب ، د جـ فإن هذه القطعة توازي كلاً من القاعدتين أد ، ب جـ كما أن طولها = $\frac{١}{٢}$ (أ د+ ب جـ) ، أي أن طولها يساوي نصف مجموع القاعدتين المتوازيتين .

مثـال

أ ب جـ د شبه منحرف (كما في الشكل أدناه) .

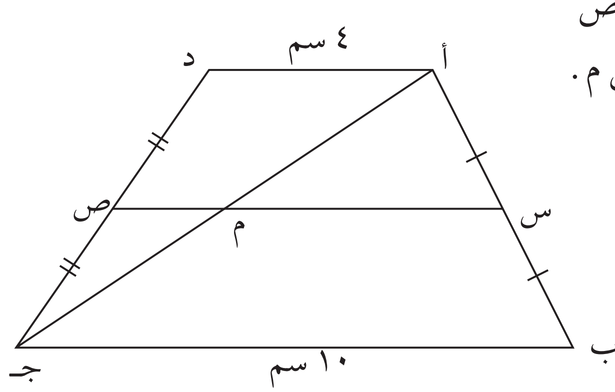
قاعدتاه المتوازيتان طولاهما ٤ سم ، ١٠ سم ،

س ص قطعة واصلة بين منتصفي الضلعين أ ب ، د جـ وتقطع القطر أ جـ في م .

جد : (١) طول س ص .

(٢) طول م ص

(٣) طول س م .



الحـل: القطعة س ص تصل بين منتصفي الضلعين غير المتوازيين أ ب ، د جـ في شبه المنحرف .

∴ س ص = $\frac{١}{٢}$ (أ د + ب جـ) .

= $\frac{١}{٢}$ (٤ + ١٠) = $\frac{١}{٢}$ X ١٤ = ٧سم . . . .(١)

كذلك س ص // أ د ، ب جـ أي أن ص م // د أ .

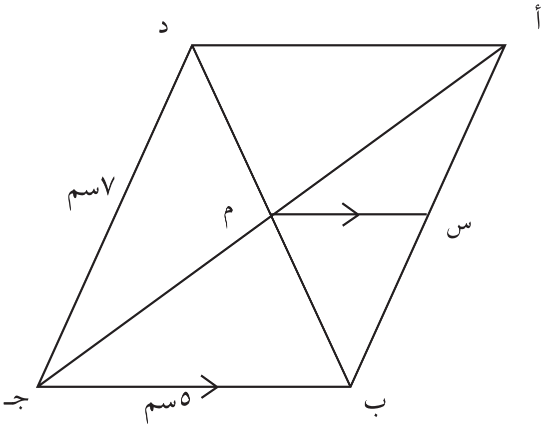
في △أ جـ د : ص م ينصف الضلع د جـ ويوازي القاعدة د أ فهو ينصف الضلع أ جـ أي أن م منتصف أ جـ .

∴ ص م قطعة تصل بين منتصفي ضلعين في المثلث أ جـ د فهي تساوي نصف طول الضلع المقابل أي أن ص م = $\frac{١}{٢}$ X ٤ = ٢سم . . . .(٢)

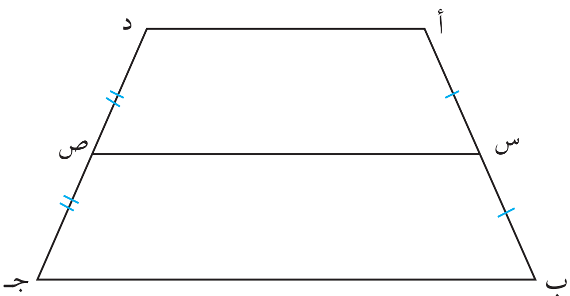
وبنفس الطريقة يمكن التوصل إلى أن س م = $\frac{١}{٢}$ X ١٠ = ٥سم . . . .(٣)

تمارين ومسائل:

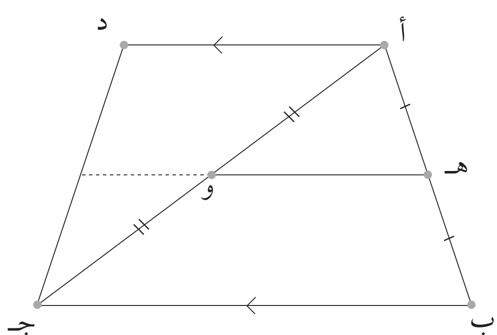
١ أ ب جـ د متوازي أضلاع فيه د جـ = ٧سم ،
ب جـ = ٥سم . م نقطة تقاطع قطريه أ جـ ، ب د .
رسم من م موازٍ للمستقيم جـ ب فقطع أ ب
في س . ما طول م س؟ ولماذا؟



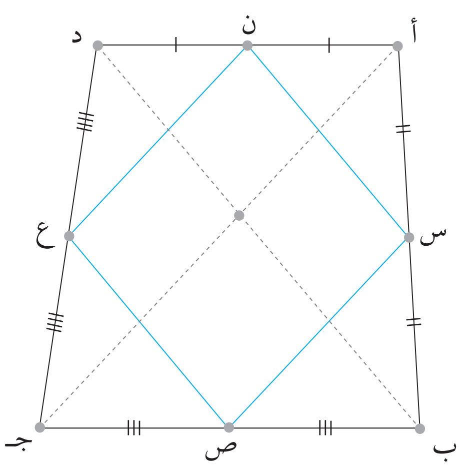
٢ أ ب جـ د شبه منحرف (انظر الشكل
المجاور) س ، ص منتصفا أ ب ، جـ د . إذا
علمت أن أ د = ٥سم ، س ص =٧سم فما
طول ب جـ؟ أبين السبب في كل خطوة



٣ أ ب جـ د شبه منحرف ، قاعدتاه المتوازيتان أ د ،
ب جـ . نُصِّف أ ب ، أ جـ في هـ ، و على
الترتيب .
أُثبتُ أنّ امتداد هـ و ينصِّف جـ د .



٤ في الشكل الرباعي أ ب جـ د المجاور :
أ جـ = ب د = ١٠ سم . س ، ص ، ع ، ن
منتصفات أضلاعه أ ب ، ب جـ ، جـ د ، د أ
على الترتيب . جد طول كل ضلع من أضلاع
الشكل س ص ع ن . وما نوع هذا الشكل ؟



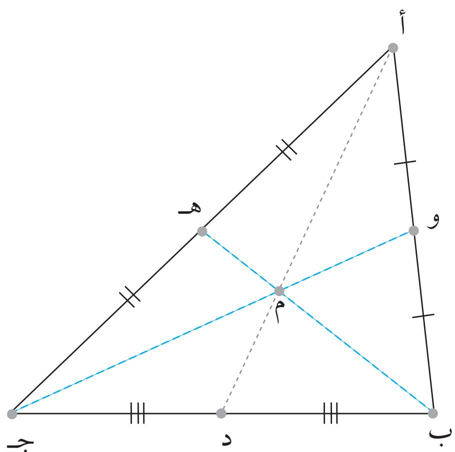
القطع المتوسطة في المثلث

تُسمى القطعة المستقيمة الواصلة من رأس المثلث إلى منتصف الضلع المقابل قطعة متوسطة، ولكل مثلث ثلاث قطع متوسطة، وسوف تدرس هنا نظرية مهمة عن القطع المتوسطة دون برهان .

نظرية

أولاً : القطع المتوسطة في المثلث تلتقي في نقطة واحدة .

ثانياً : نقطة التقاء القطع المتوسطة تقسم كل قطعة منها بنسبة $\frac{٢}{٣}$ من جهة الرأس ، $\frac{١}{٣}$ من جهة القاعدة .



في △ أ ب جـ : ب هـ ، جـ و قطعتان متوسطتان في المثلث، وتتقاطعان في م . إن هذه النظرية تؤكد أننا إذا وصلنا أ د فإنه يمر في م أي أن القطع الثلاثة تلتقي في نقطة واحدة .

كما أن أ م = ٢ م د أو أ م = $\frac{٢}{٣}$ أ د ، م د = $\frac{١}{٣}$ أ د

وكذلك ب م = ٢ م هـ أو ب م = $\frac{٢}{٣}$ ب هـ ، م هـ = $\frac{١}{٣}$ ب هـ

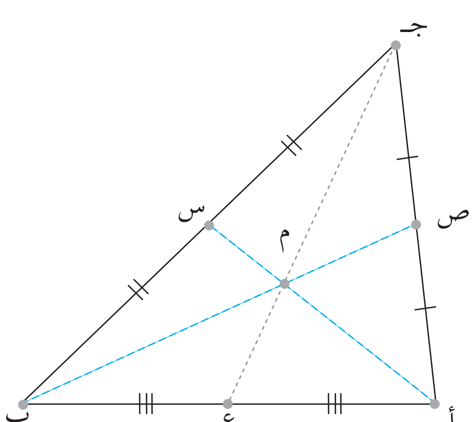
جـ م = ٢ م و أو جـ م = $\frac{٢}{٣}$ جـ و ، م و = $\frac{١}{٣}$ جـ و .

مثـــال

أ ب جـ مثلث . أ س ، ب ص ، جـ ع هي القطع المتوسطة في المثلث والتي تلتقي في م . إذا كان أ م = ٦ سم ، ب م = ٧سم ، جـ م = ٨سم .

فجد طول كلاً من م ص ، م ع ، م س .

الحــل:

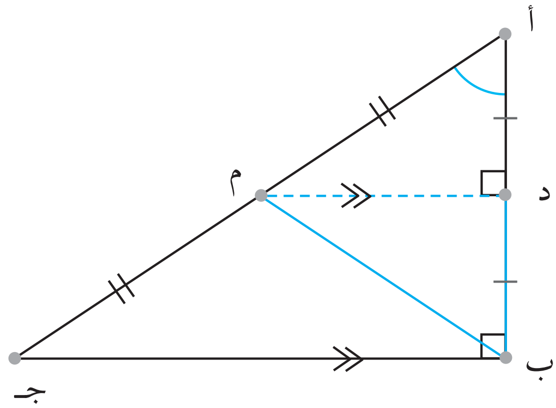


أ م = ٦ سم ∴ م س = ٣ سم لأن م س = $\frac{١}{٢}$ أ م

ب م = ٧ سم ∴ م ص = $\frac{١}{٢}$ × ٧ = ٣,٥ سم لأن م ص = $\frac{١}{٢}$ ب م . بنفس الطريقة يكون م ع = ٤سم

مثال (٢)

في الشكل المجاور، أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب، م منتصف الوتر أ جـ.
أثبت أن ب م = نصف الوتر أي أن: ب م = أ م = جـ م.



العمل: تنزل من م العمود م د على أ ب

البرهان: م د // جـ ب لأن الزاويتين أ د م، أ ب جـ متساويتان (كل منهما ٩٠°) وهما في وضع تناظر.

م د قطعة مرسومة من منتصف أ جـ وتوازي جـ ب فهي تنصف أ ب أي أن د هي منتصف أ ب.

في △ أ م ب: م د ينصف القاعدة أ ب وعمودي عليها

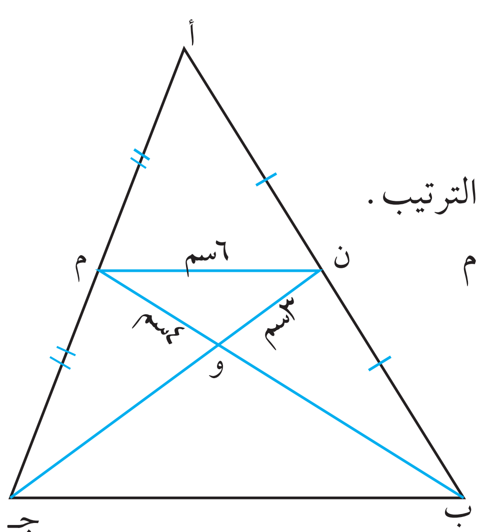
∴ △ أ م ب متساوي الساقين أي أن أ م = ب م.

∴ ب م = $\frac{١}{٢}$ أ جـ.

نتيجة:

القطعة الواصلة من رأس القائمة إلى منتصف الوتر تساوي نصف الوتر.

تمارين ومسائل:

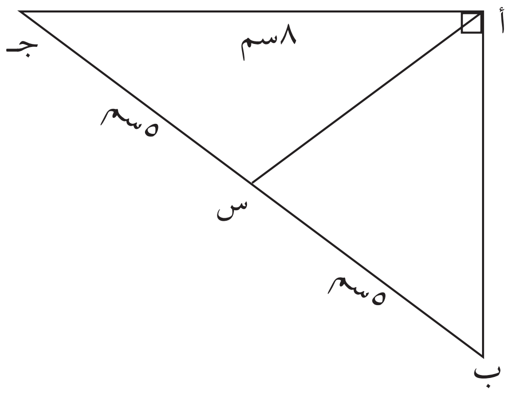


١ في المثلث المجاور: م، ن منتصف أ جـ، أ ب على الترتيب. تقاطع ن جـ، م ب في و. إذا كانت أضلاع المثلث ن و م هي على الترتيب: ٣سم، ٤سم، ٦سم كما هو مبين في الرسم.
أجد طول كل ضلع من أضلاع المثلث و ب جـ.

٢ في الشكل المجاور، أجد:

(١) طول أ س

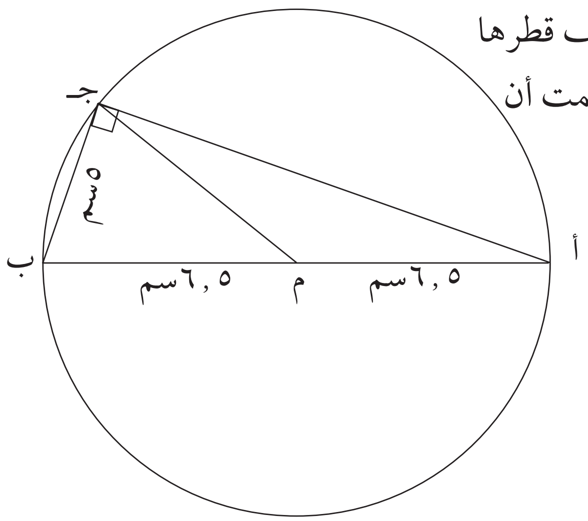
(٢) طول أ ب



٣ في الشكل المجاور: دائرة مركزها م ونصف قطرها يساوي ٦,٥سم، ب جـ =٥سم. إذا علمت أن ∢ أ جـ ب = ٩٠°، أجد:

(١) طول جـ م

(٢) طول أ جـ



٤ م ملتقى القطع المتوسطة أ د، ب هـ، جـ و في المثلث أ ب جـ. وصلت القطع د و، و هـ، هـ د، أبرهن:

(١) ب و هـ د متوازي أضلاع.

(٢) ن منتصف و د.

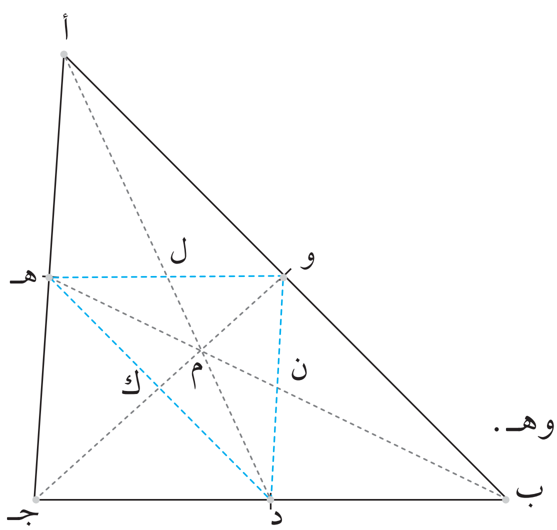
(٣) و د جـ هـ متوازي أضلاع.

(٤) ك منتصف د هـ.

(٥) أ و د هـ متوازي أضلاع.

(٦) ل منتصف و هـ.

(٧) م نقطة تلاقي القطع المتوسطة للمثلث د و هـ.



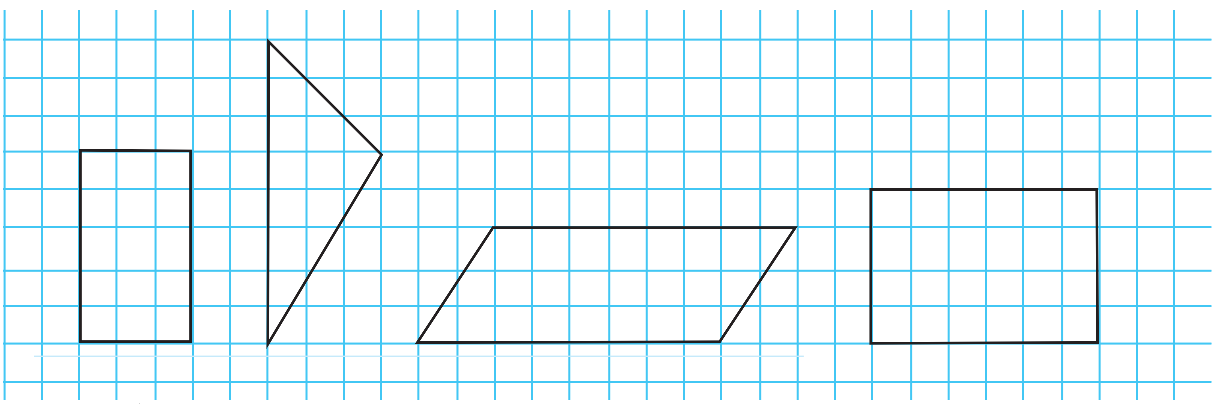
٦-٦ تكافؤ الأشكال الهندسية

تعريف

الشكلان المتكافئان : هما شكلان متساويان في المساحة .

الأشكال أ ، ب ، جـ جميعها متكافئة مساحة كل منها تساوي ٢٤ وحدة مربعة (تحقق من هذا) .

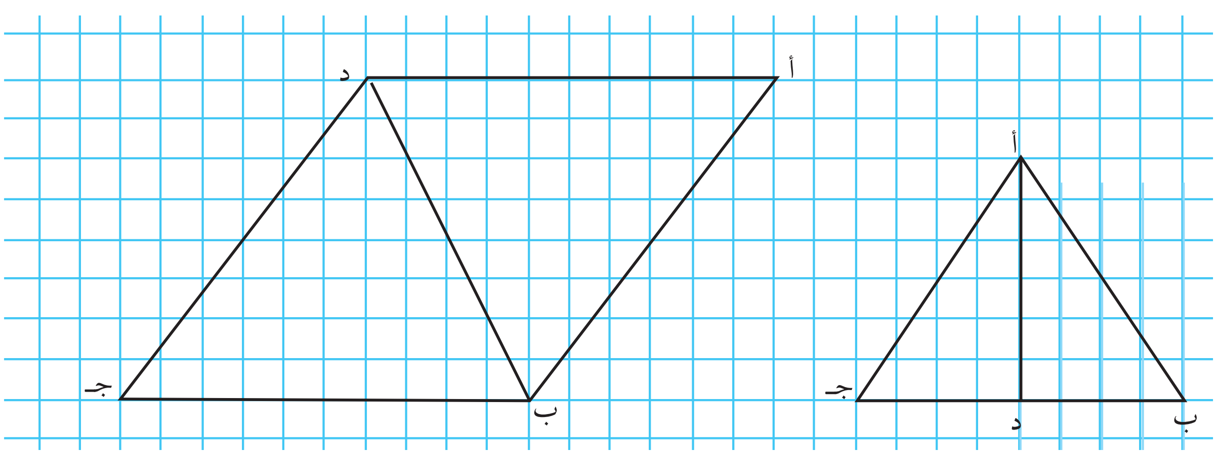
أما الشكل د فهو لا يكافيء أياً من هذه الأشكال حيث أن مساحته ١٥ وحدة مربعة .



الشكل (أ) الشكل(ب) الشكل (جـ) الشكل(د)

هل الشكلان المتطابقان متكافئان؟

بالطبع ، وهذان مثالان على شكلين متطابقين :



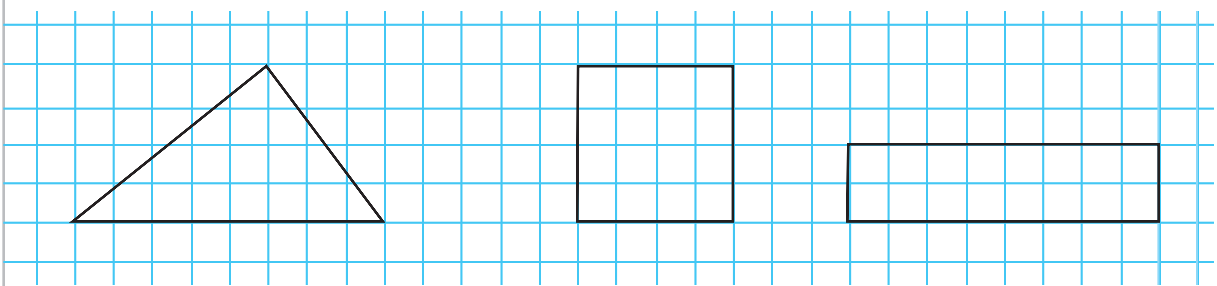
△ أ ب د ، △ أجـ د متطابقان فهما متكافئان ومساحة كل منهما ٢٤ وحدة مربعة .

△ أ ب د ، △ جـ ب د متطابقان فهما متكافئان ومساحة كل منهما ٨٠ وحدة مربعة .

نشـــاط:

هل الشكلان المتكافئان متطابقان؟

الأشكال الآتية جميعها متكافئة فهل هي متطابقة؟ جد مساحة كل منها .



المساحة = ...　　　المساحة = ...　　　المساحة = ...

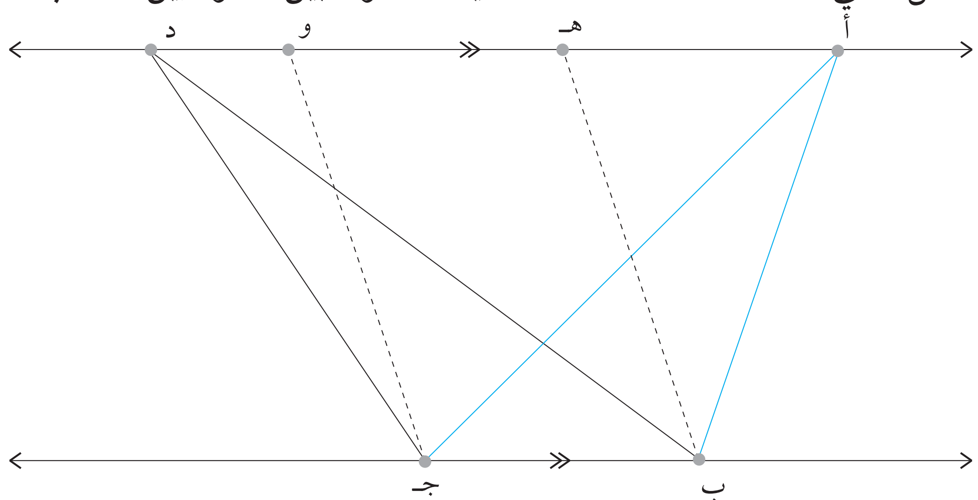
ماذا تستنتج؟ أكمل ما يأتي :

(١) كل شكلين متطابقين يكونان . . . .

(٢) ليس كل شكلين متكافئين . . . .

الأشكال الهندسية المحصورة بين متوازيين

في الشكل الآتي، رسمت عدة أشكال هندسية محصورة بين المتوازيين أ د ، ب جـ.



لاحظ أن : △ أ ب جـ ، ▱ هـ ب جـ و ، △ د ب جـ جميعها محصورة بين المتوازيين وهذه الأشكال الثلاثة تشترك في القاعدة ب جـ.

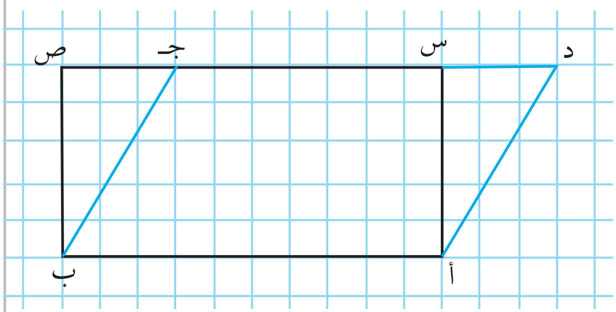
إن وجود أشكال هندسية محصورة بين متوازيين تساعد في مقارنة مساحة هذه الأشكال حيث يكون لكلٍ من هذه الأشكال نفس الارتفاع، وهو المسافة بين الخطين المتوازيين .

وسندرس تكافؤ الأشكال الهندسية المحصورة بين متوازيين في الحالات الآتية :

أولاً : تكافؤ متوازي الأضلاع والمستطيل

نشـــــاط:

الشكل أ ب جـ د متوازي أضلاع والشكل أ ب ص س مستطيل والشكلان مشتركان في القاعدة أ ب ، ومحصوران بين المتوازيين أ ب ، ص د .



ما هو الجزء الذي يمكن قطعه من متوازي الأضلاع أ ب جـ د وأين يلصق حتى نحول متوازي الأضلاع إلى مستطيل؟

. . . .

ما العلاقة بين مساحة متوازي الأضلاع أ ب جـ د والمستطيل أ ب ص س؟

. . . .

يبين هذا النشاط أن ▱ أ ب جـ د يكافئ المستطيل أ ب ص س .

توضح النتيجة السابقة النظرية الاتية :

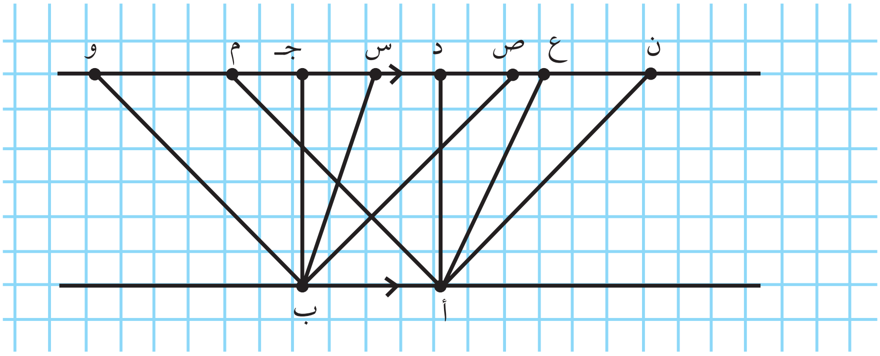
نظرية

متوازي الأضلاع يكافىء المستطيل المشترك معه في القاعدة والمحصور معه بين مستقيمين متوازيين .

نشـــــاط:

سمّ ثلاثة متوازيات أضلاع كل منها يكافىء المستطيل أ ب جـ د في الشكل المجاور ، أجد :

(١) مساحة المستطيل (٢) مساحة كل من متوازيات الأضلاع الثلاثة التي ذكرتها .



ثانياً: تكافؤ متوازيي أضلاع

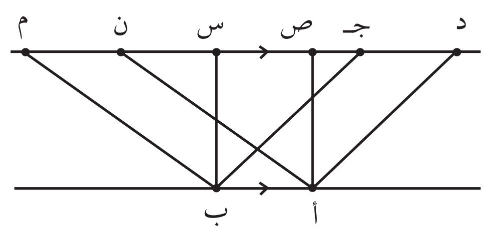
نشـــاط:

في الشكل المجاور: ما العلاقة بين مساحة ▱ أ ب جـ د ومساحة ▱ أ ب م ن؟ أكمل المقارنة كما يأتي:

▱ أ ب جـ د يكافيء المستطيل أ ب س ص لأنهما مشتركان في القاعدة ومحصوران بين متوازيين.

▱ أ ب م ن يكافيء المستطيل .... لأنهما ....

إذن ▱ أ ب جـ د يكافيء ▱ .... لأن كلاً منهما يكافئ المستطيل أ ب س ص.

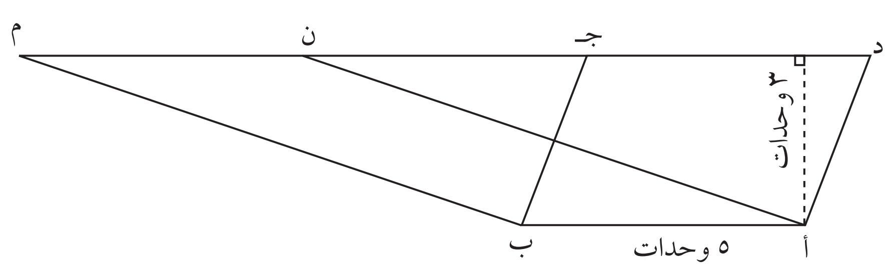


من النشاط السابق نتوصل إلى الحقيقة الآتية:

نظرية

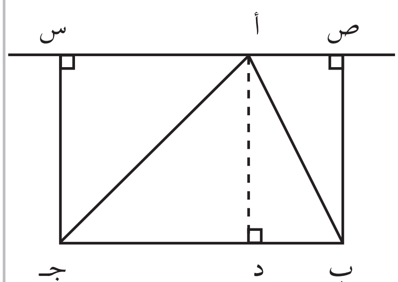
متوازيا الأضلاع المشتركان في القاعدة والمحصوران بين متوازيين يكونان متكافئان.

تمرين: ما مساحة كل من ▱ أ ب جـ د ومتوازي الأضلاع أ ب م ن في الشكل الآتي. أبين السبب.



ثالثاً: علاقة المثلث والمستطيل

نشـــــاط:



قارن مساحة المثلث أ ب جـ بالمستطيل المشترك معه في القاعدة ب جـ والذي ينحصر معه بين متوازيين .

في الشكل المجاور : أ ب جـ مثلث ، ب جـ س ص مستطيل مشتركان في القاعدة ب جـ وينحصران بين المتوازيين س ص ، جـ ب .

ما العلاقة بين مساحة △ أ ب جـ ومساحة المستطيل ب جـ س ص؟

نجزيء △ أ ب جـ إلى جزئين بإنزال عمود من أ على ب جـ وليكن أ د .

△ أ ب د = $\frac{1}{2}$ المستطيل أ د ب ص لأن قطر المستطيل يقسمه إلى مثلثين متكافئين .

△ أ د جـ = $\frac{1}{2}$ المستطيل أ د جـ س لأن قطر المستطيل يقسمه إلى مثلثين متكافئين .

△ أ ب د+ △ أ د جـ = $\frac{1}{2}$ (المستطيل أ د ب ص + المستطيل أ د جـ س) .

أي أن : △ أ ب جـ = $\frac{1}{2}$ المستطيل ب جـ س ص .

من النشاط السابق نتوصل إلى الحقيقة الآتية :

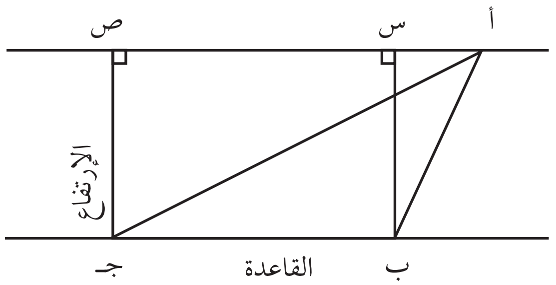
نظرية

مساحة المثلث تساوي نصف مساحة المستطيل المشترك معه في القاعدة والذي ينحصر معه بين متوازيين .

مثـــال (١)

أثبت أن مساحة المثلث = $\frac{١}{٢}$ القاعدة X الإرتفاع .

العمل : نرسم مستطيلاً يتحد مع المثلث أ ب جـ بالقاعدة ومحصور معه بين المتوازيين كما في الشكل المجاور .



البرهان: مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ مساحة المستطيل ب جـ ص س (لماذا؟)

= $\frac{١}{٢}$ طول المستطيل X عرض المستطيل

لكن طول المستطيل = قاعدة المثلث وعرض المستطيل = ارتفاع المثلث

إذن مساحة المثلث أ ب جـ = $\frac{١}{٢}$ قاعدة المثلث X الارتفاع

نتيجة: : مساحة أي مثلث = $\frac{١}{٢}$ القاعدة X الارتفاع

مثـــال (٢)

أثبت أن القطعة المستقيمة المتوسطة تقسم المثلث إلى مثلثين متكافئين .

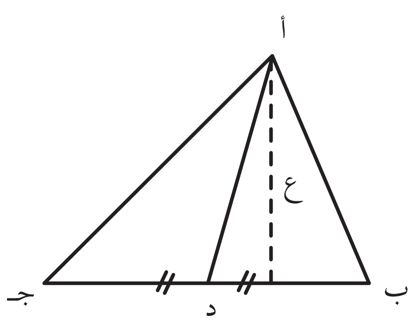
△ أ ب د = $\frac{١}{٢}$ ب د X ع

△ أ جـ د = $\frac{١}{٢}$ جـ د X ع

بمقارنة الطرفين نلاحظ أن ب د = جـ د

وأن ارتفاع كل من المثلثين هو ع .

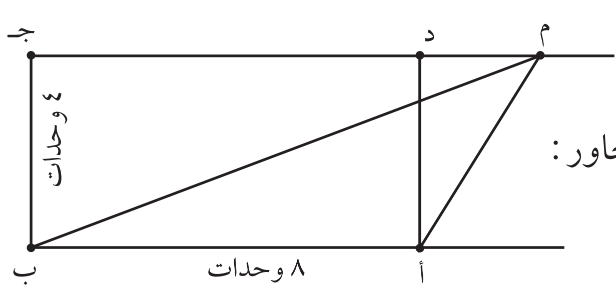
أي أن △ أ ب د يكافئ △ أ جـ د



نتيجة: القطعة المستقيمة المتوسطة تقسم المثلث إلى مثلثين متكافئين

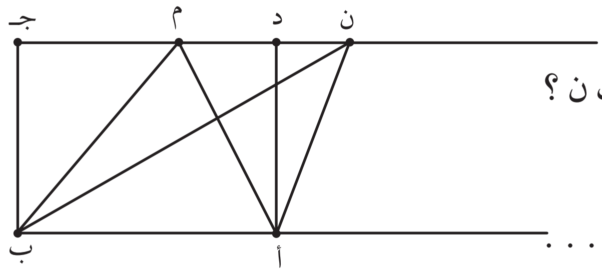
تمرين:

جد مساحة المثلث أ ب م في الشكل المجاور :



رابعاً: تكافؤ مثلثين

نشــــاط:



هل يمكن مقارنة مساحة △ أ ب م ، △ أ ب ن ؟

أكمل العبارات الآتية على دفترك .

مساحة △ أ ب م = $\frac{١}{٢}$ . . . .

مساحة △ أ ب ن = ...

نستنتج أن مساحة △ . . . . . . = مساحة△. . . . . .

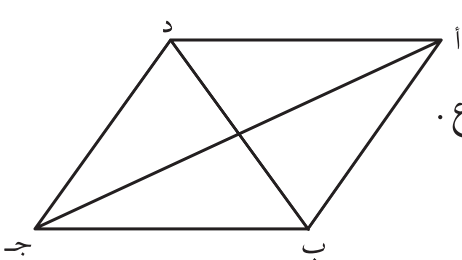
لأن مساحة كل منهما تساوي $\frac{١}{٢}$ مساحة . . . .

من هذا النشاط نتوصل إلى صحة النظرية الآتية :

نظرية

المثلثان المشتركان في القاعدة والمحصوران بين متوازيين يكونان متكافئين .

مثــال



في الشكل المجاور : أ ب جـ د متوازي أضلاع .

جد مثلثين متكافئين واكتب السبب .

جد مثلثين آخرين متكافئين واذكر السبب .

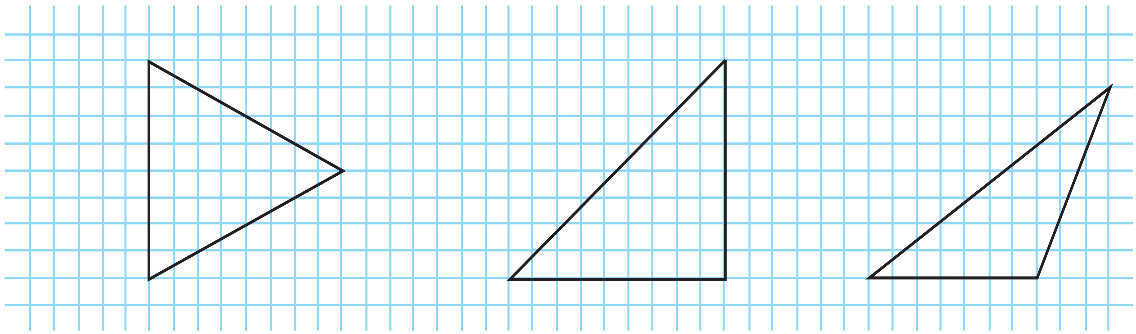
الحــل:

△ أ ب جـ يكافئ △ د ب جـ لأنهما مشتركان في القاعدة ب جـ ومحصوران بين المتوازيين ب جـ ، أ د .

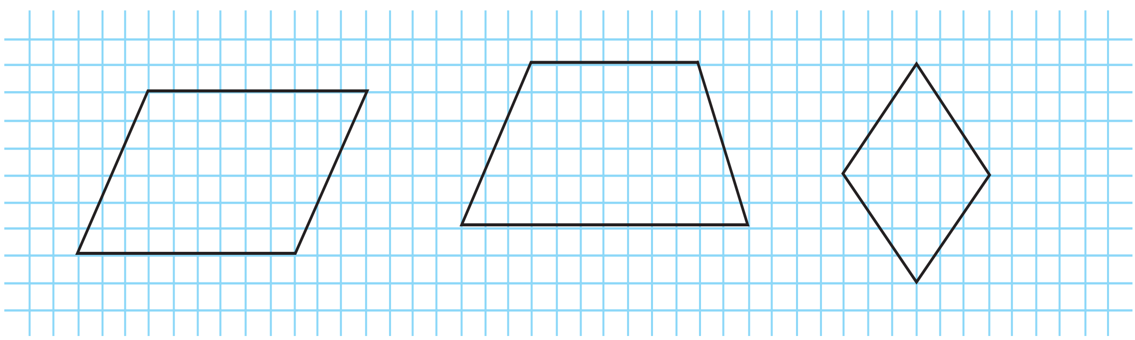
△ د أ ب يكافئ △ جـ أ ب لأنهما مشتركان في القاعدة أ ب ومحصوران بين المتوازيين أ ب ، د جـ .

تمارين ومسائل:

١ أجد مساحة كل من الأشكال الآتية بالوحدات المربعة :

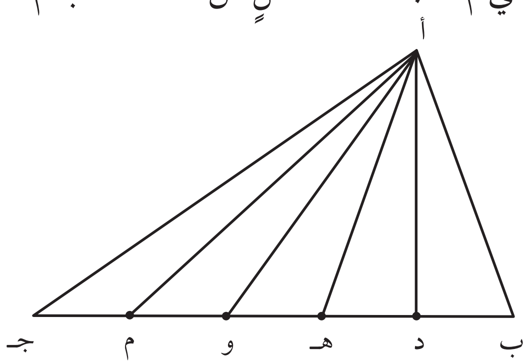


المساحة = ...   المساحة = ...   المساحة = ...

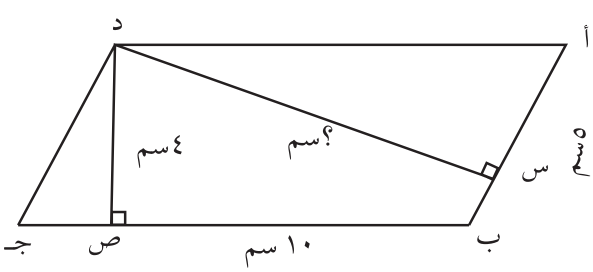


المساحة = ...   المساحة = ...   المساحة = ...

٢ متوازي أضلاع مساحته ١٢ سم^{٢} . تقاطع قطراه في م . أجد مساحة كلٍ من المثلثات أ ب م ، جـ م د ، ب م جـ ، أ م د .

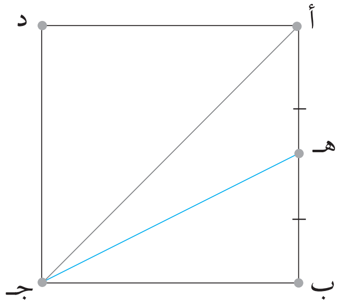


٣ أ ب جـ مثلث مساحته ١٥ سم^{٢} ، قسمت القاعدة ب جـ إلى ٥ أقسام متساوية فتكونت خمسة مثلثات كما في الشكل . أجد مساحة كلٍ منها .



٤ متوازي أضلاع أ ب جـ د فيه أ ب= ٥سم ، ب جـ = ١٠سم ، وطول العمود د ص النازل من د على ب جـ =٤سم . فما طول العمود د س النازل من د على أ ب؟

٦ في الشكل المقابل أ ب جـ د مربع طول ضلعه ١٢ سم . النقطة هـ منتصف أ ب . أجد مساحة المثلث أ هـ جـ .

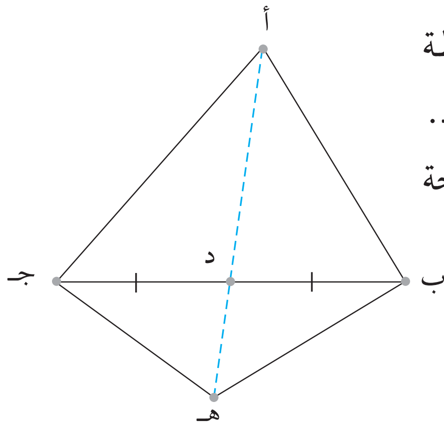


٧ في الشكل المقابل : أ د قطعة مستقيمة متوسطة في المثلث أ ب جـ . مُدّ أ د على استقامته الى هـ .
إذا كانت مساحة △ أ ب جـ = ١٤ سم^{٢} ، ومساحة △ ب هـ جـ = ٨سم^{٢} . أجد :

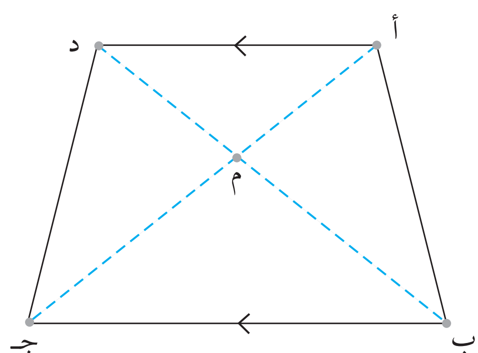
(١) مساحة △ أ ب د

(٢) مساحة △ ب هـ د

(٣) أبين أنّ مساحة المثلث أ ب هـ = $\frac{١}{٢}$ مساحة الشكل أ ب هـ جـ .



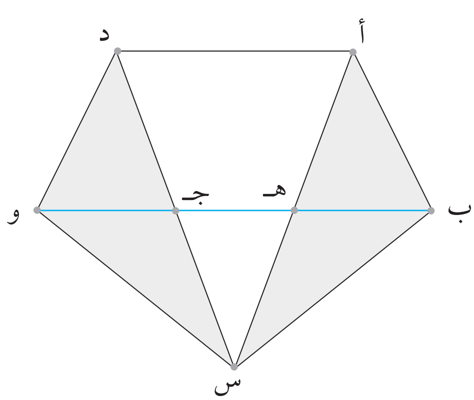
٨ في الشكل المقابل : أ د // ب جـ
أثبت أن : مساحة △ م أ ب = مساحة △ م جـ د .



٩ في الشكل المقابل أ ب جـ د ، أ هـ و د متوازيا أضلاع ، مُدّ أ هـ ، د جـ على استقامتيهما ، فتلاقيا في س . أبرهن :

(١) ▱ أ ب جـ د يكافئ ▱ أ هـ و د

(٢) △ أ ب س يكافئ △ د و س .



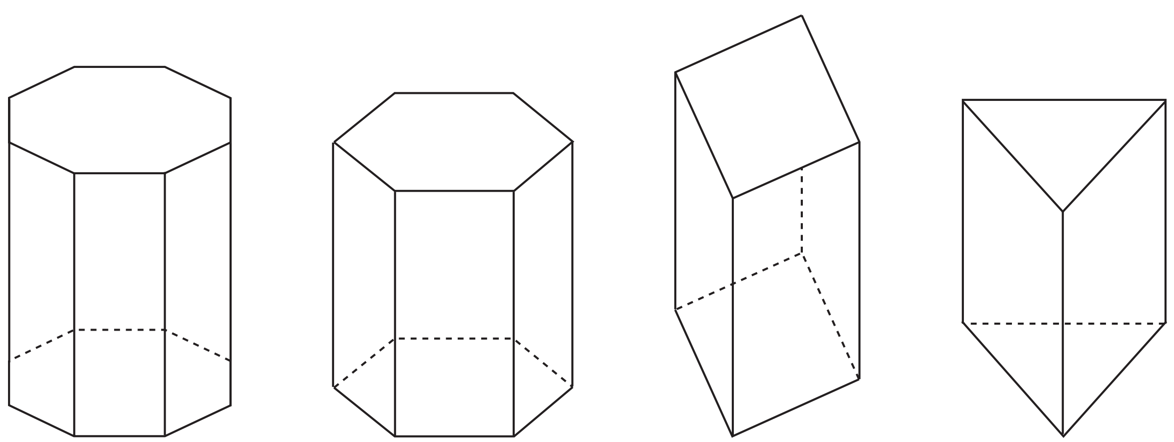
٦-٧ المجسمات (حجومها ومساحاتها الجانبية)

تمهيد : -

تعرفت في السنوات السابقة على عدة مجسّمات مثل المنشور بأنواعه والأسطوانة والهرم والمخروط وعلى حجوم هذه المجسمات ومساحاتها الجانبية . وفيما يلي تذكير بقوانين ايجاد حجوم ومساحات جوانب هذه المجسمات .

المنشور القائم :

يكون المنشور ثلاثياً أو رباعياً أو خماسياً أو سداسياً . . . الخ . أي أن كلا من قاعدتي المنشور المتوازيتين تكون مثلثاً أو شكلاً رباعياً أو خماسياً أو سداسياً . . . الخ أما أوجه المنشور الأخرى فهي مستطيلات .



منشور ثلاثي منشور رباعي منشور سداسي منشور ثماني

والمنشور الرباعي يمكن أن يكون متوازي مستطيلات أو مكعباً، فنلاحظ أن المكعب ومتوازي المتسطيلات حالة خاصة من المنشور .

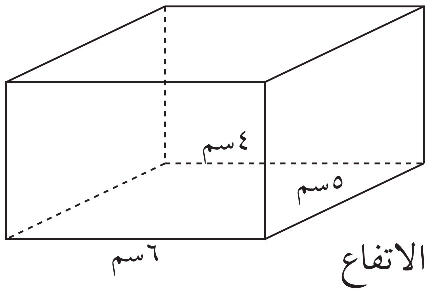
وفيما يأتي قانون حجم المنشور ومساحته الجانبية والكلية .

حجم المنشور= مساحة القاعدة X الارتفاع

المساحة الجانبية للمنشور= مجموع مساحات الأوجه الجانبية وهي مستطيلات

مثال(١)

جد حجم متوازي مستطيلات أبعاده ٦ سم، ٥سم، ٤سم ثم جد مساحته الجانبية والكلية .



الحل: متوازي المستطيلات منشور قائم .

حجم متوازي المستطيلات = مساحة القاعدة X الاتفاع

= (٦X٥) X٤

= ١٢٠سم^{٣}

المساحة الجانبية= مجموع مساحات أربعة مستطيلات تشكل جوانب المجسم

= ٦X٤ + ٥X٤ + ٦X٤ + ٥X٤

=٢٤ +٢٠ + ٢٤ + ٢٠ = ٨٨سم^{٢}

وبطريقة أسهل : المساحة الجانبية = محيط القاعدةXالارتفاع

= (٦+٥+٦+٥) X٤ = ٨٨سم^{٢}

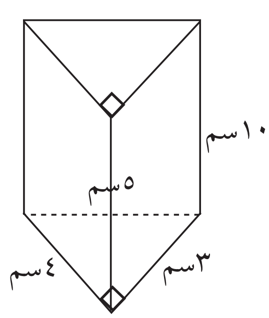
المساحة الكلية = المساحة الجانبية + مجموع مساحتي القاعدتين

=٨٨+٢X٦X٥

= ١٤٨سم^{٢}

مثال(٢)

منشور ثلاثي قائم وقاعدته على شكل مثلث قائم الزاوية وأضلاع هذا المثلث ٣سم، ٤سم، ٥سم وارتفاع المنشور ١٠سم . جد حجم المنشور ومساحته الكلية .



الحل : مساحة قاعدة المنشور= $\frac{١}{٢}$ X ٣X٤ =٦سم٢

حجم المنشور =٦X١٠

= ٦٠سم^{٣}

المساحة الكلية للمنشور= المساحة الجانبية + مجموع مساحتي القاعدتين

= محيط القاعدة Xالارتفاع +مجموع مساحتي القاعدتين

= (٣+٤+٥) X١٠ + (٦+٦)

= ١٢٠ +١٢= ١٣٢ سم^{٢}

تمارين ومسائل:

١ أجد حجم صندوق مكعب الشكل طول ضلعه ١٠سم وأجد مساحته الكلية .

٢ منشور قاعدته مسدس منتظم طول ضلعه ١٠سم ومساحة القاعدة ٢٦٠سم^{٢} فإذا كان ارتفاع المنشور ٥سم أجد :

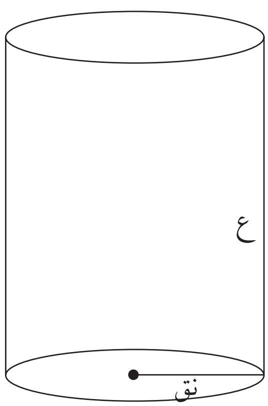
أولاً : حجم المنشور

ثانياً : المساحة الجانبية للمنشور .

ثالثاً : المساحة الكلية للمنشور .

الاسطوانة الدائرية القائمة

يمكن اعتبار الأسطوانة الدائرية القائمة حالة خاصة من المنشور القائم عندما يزداد عدد أضلاع القاعدة زيادة كبيرة جداً لتقترب من الدائرة .



حجم الاسطوانة= مساحة القاعدة × الارتفاع

= نق^{٢}ط ×ع

المساحة الجانبية =محيط القاعدة × ارتفاع الاسطوانة

=٢نق ط ×ع

المساحة الكلية =المساحة الجانبية + مساحتي القاعدتين

= ٢نق ط ع + نق^{٢}ط +نق^{٢}ط

= ٢نق ط ع +٢ نق^{٢}ط

مثـــال

اسطوانة نصف قطر قاعدتها ٦سم وارتفاعها ٨سم، جد حجمها ومساحتها الكلية .

الحـل : حجم الاسطوانة = نق^{٢} ط×ع

= ٦×٦×ط × ٨

= ٢٨٨ط سم^{٣}

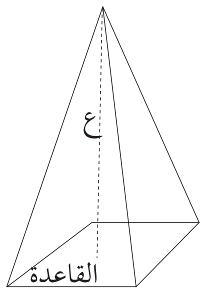
المساحة الكلية= محيط القاعدة ×ع +٢نق^{٢}ط

= ٢×٦×ط × ٨ +٢×٣٦×ط

= ٩٦ ط + ٧٢ ط =١٦٨ط سم^{٢}

الهرم والمخروط

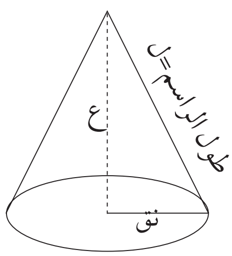
الهرم مجسم له قاعدة مضلعة وأوجهه الجانبية مثلثات تلتقي عند نقطة واحدة تسمى رأس الهرم .



حجم الهرم= $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة X الارتفاع

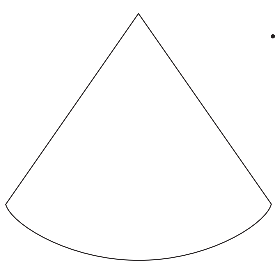
المساحة الجانبية للهرم = مجموع مساحات المثلثات

المخروط حالة خاصة من الهرم عندما يزداد عدد أضلاع القاعدة زيادة كبيرة جداً لتقترب من الدائرة .



حجم المخروط = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة X الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ نق^{٢} ط ع .



مساحة المخروط الجانبية = مساحة القطاع الدائري الذي تشكل منه المخروط .

= $\frac{١}{٢}$ محيط قاعدة المخروط X طول الراسم

= نق ط ل

مثـــال

جد كلاً مما يأتي :

أولاً : حجم هرم قاعدته مربع طول ضلعه ١٠ م وارتفاعة ٩م .

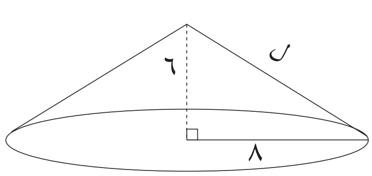
ثانياً : المساحة الجانبية وحجم مخروط نصف قطر قاعدته ٨سم وارتفاعه ٦ سم .

الحـل : أولاً : حجم الهرم = $\frac{١}{٣}$ مساحة القاعدة X الارتفاع

= $\frac{١}{٣}$ X ٩ X ١٠ X ١٠ = ٣٠٠ م^{٣}

ثانياً : ل^{٢} = (٨)^{٢} + (٦)^{٢} = ١٠٠

ل = ١٠سم طول الراسم



المساحة الجانبية للمخروط = نق ط ل

= ٨ X ط X ١٠ = ٨٠ ط سم^{٢}

حجم المخروط= $\frac{١}{٣}$ X ٨X٨X ط X ٦ = ١٢٨ ط سم^{٣}

تمارين ومسائل:

١ جد حجم اسطوانة نصف قطرها قاعدتها ٥سم وارتفاعها ٦سم ثم جد مساحتها الجانبية .

٢ جد حجم هرم قاعدته مربع طول ضلعه ٢٠ متراً وارتفاعه ١٢ متراً .

٣ كومة رمل على شكل مخروط قطر قاعدته ٦م وارتفاعه ٤ أمتار . ما حجم كومة الرمل؟

الكـــــرة

الكرة شكل مألوف لديك : لاشكّ في أنّكَ رأيت كره قدم ، أو كرة سلة ، أو مجسماً للكرة الارضية .


كرة سلة

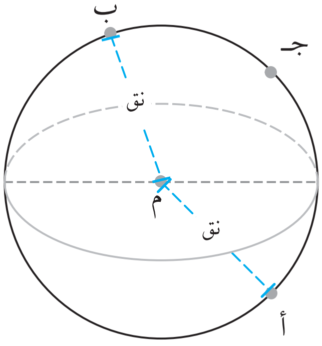

حبة برتقال


الكرة الأرضية

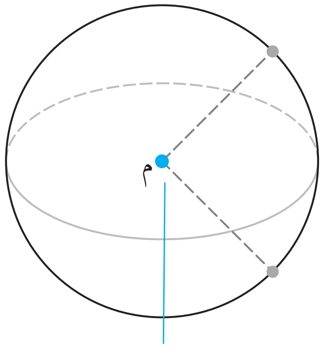
بالإضافة إلى هذه الأجسام تعرف أجساماً أخرى لها شكل كرة أو أجزاء منها ، كبعض حبات البرتقال ، أو أجسام لها أشكال تقارب شكل كرة مثل : بالون منفوخ ، أو قطعٍ من الحلوى .

الخواص الهندسية للكرة:

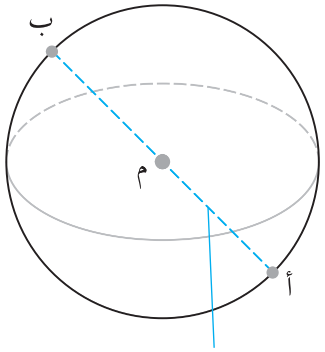
للكرة نقطة داخلية تسمى مركز الكرة ، وهي النقطة الوحيدة التي تتميز بأن جميع النقاط التي تقع على سطح الكرة تبعد بعداً متساوياً عنها ، ويسمى هذا البعد بين أي نقطة على سطح الكرة ومركز الكرة بـ نصف قطر الكرة .



نصف قطر الكرة (نق)



مركز الكرة



قطر الكرة

ملاحظة:

القطعة المستقيمة التي تصل بين نقطتين متقابلتين على سطح الكرة وتمر بالمركز تسمى بقطر للكرة، ويكون المركز منتصف هذا القطر .

مما سبق يمكننا أن نستنتج ما يأتي:

- أطوال انصاف أقطار الكرة متساوية : وبالتالي فإن طول أي من أنصاف الاقطار هذه يسمى نصف قطر الكرة .
- أطوال جميع أقطار الكرة متساوية : وبالتالي فإن طول أي قطر منها يسمى قطر الكرة .
- بما أن قطر الكرة هو القطعة المستقيمة التي تصل بين نقطتين على سطح الكرة وتمر بالمركز ، فإن أي قطر للكرة يتكوّنُ من نصفي قطر .

مساحة سطح الكرة:

لحساب مساحة سطح الكرة نستخدم القانون الآتي :

قانــون

مساحة سطح الكرة = ٤ x ط x (نصف قطر الكرة)^{٢}

أي أن مساحة سطح الكرة = ٤ أضعاف مساحة دائرة قطرها = قطر الكرة

مثــال

احسب مساحة سطح الكرة إذا كان نصف قطرها ٥سم .

الحــل:

مساحة سطح الكرة = ٤ x ط x ٥^{٢} سم^{٢}

= ١٠٠ ط سم^{٢}

= ١٠٠ x ٣,١٤ = ٣١٤ سم^{٢} تقريباً

تمارين ومسائل:

١ أحسبُ مساحة سطح كرة إذا كان قطرها ١٢ سم .

٢ أحسبُ مساحة سطح نصف كرة مفتوحة إذا كان نصف القطر ٨سم .

٣ إذا أردت طلاء خزان ماء على شكل كرة نصف قطرها ٢,١م، وكانت أجرة طلاء المتر المربع الواحد دينارين . أحسبُ تكلفة طلاء هذا الخزان .

٤ أحسبُ نصف قطر كرة مساحة سطحها ١٣٢ سم^٢ .

حجم الكرة:

خزان ماء على شكل كرة، إذا ملأنا هذا الخزان بماء، فإن حجم الماء المستخدم لملء هذا الخزان هو حجم الكرة .

ولحساب حجم الكرة نستخدم القانون التالي :

قانــون

حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ x ط x (نصف قطر الكرة)^٣ = $\frac{٤}{٣}$ ط (نق)^٣

مثـال (١) احسب حجم كرة نصف قطرها ٤ سم .

الحـل: حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ x ط x (نق)^٣

= $\frac{٤}{٣}$ x ط x ٤^٣

= $\frac{٢٥٦}{٣}$ ط = $\frac{٢٥٦}{٣}$ x $\frac{٢٢}{٧}$ = ٢٦٨,٢ سم^٣

مثـال (٢)

ما نصف قطر كرة إذا علمت أن حجم نصف هذه الكرة ١٨ ط م^{٣} ؟

الحـل:

حجم الكرة = ٢ x حجم نصف الكرة

= ٢ x ١٨ط = ٣٦ ط م^{٣} .

بما أن حجم الكرة = $\frac{٤}{٣}$ x ط x (نق)^{٣}

أي أن : ٣٦ ط = $\frac{٤}{٣}$ x ط x (نق)^{٣}

إذاً : (نق)^{٣} = $\frac{٣٦ \times ط \times ٣}{٤ \times ط}$ = ٢٧

إذا : نق = ٣ سم

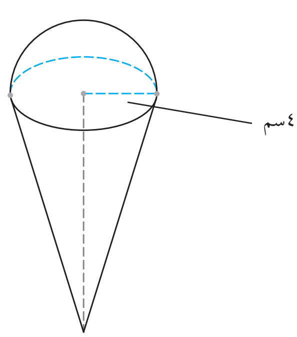
تمارين ومسائل:

١ أحسبُ حجم الكرة التي قطرها ٨سم .

٢ خزان ماء على شكل كرة نصف قطرها ٥ ,٠ م، أحسبُ:

أ) المساحة الخارجية لهذا الخزان .

ب) سعة هذا الخزان .



٣ مخروط نصف قطر قاعدته ٤ سم، وارتفاعه ٩سم، تعلوه نصف كرة لها نصف القطر نفسه .
أحسبُ حجم هذا الشكل .

٤ صهرت ٧٢٩ كرة صغيرة نصف قطر كل منها ١ سم وَعُمِلَ منها كرة واحدة كبيرة .
ما طول نصف قطر هذه الكرة؟

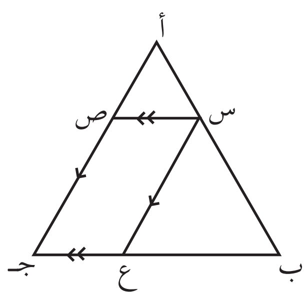
تمارين عامة

١ أضع دائرة حول الشكل / الأشكال التي تحقق الخاصية المذكورة في كلٍ مما يأتي :

أ) القطران ينصف كل منهما الاخر	متوازي أضلاع	معين	مستطيل	مربع
ب) القطران متعامدان	متوازي أضلاع	معين	مستطيل	مربع
جـ) القطران متساويان	متوازي أضلاع	معين	مستطيل	مربع
د) القطران ينصفان الزوايا	متوازي أضلاع	معين	مستطيل	مربع

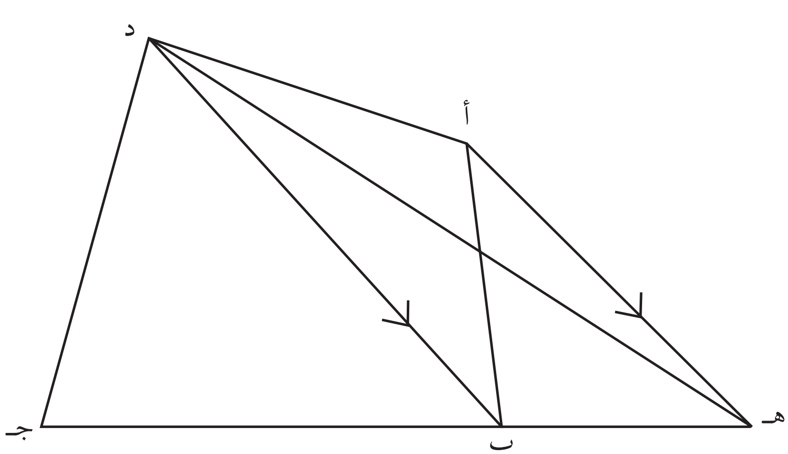
٢ أ ب جـ مثلث متساوي الأضلاع . أخذت النقطة س على الضلع أ ب ورسم منها موازيان للضلعين ب جـ، أجـ(كما في الشكل) . أثبت أن المثلث أ ب جـ ينقسم إلى مثلثين متساويي الأضلاع ومتوازي أضلاع .

كيف تختار النقطة س بحيث ينقسم المثلث أ ب جـ إلى مثلثين متساويي الأضلاع ومعين؟



٣ أ ب جـ د شكل رباعي . رسم من أ المستقيم أ هـ // دب ويلاقي امتداد جـ ب في هـ.

أبرهن أن المثلث دهـ جـ يكافىء الشكل الرباعي أ ب جـ د .

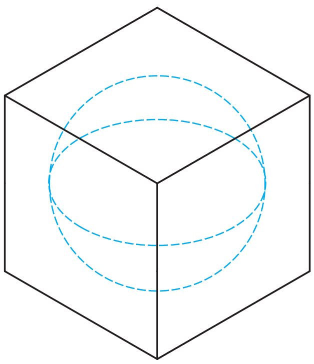


٤ أ ب جـ مثلث . وصلت مستقيماته المتوسطة الثلاثة فتلاقت في م . أُثبت أن المثلث أ ب جـ ينقسم إلى ستة مثلثات متكافئة .

٥ وضعت كرة داخل مكعب فارغ . لامست الكرة جميع وجوه المكعب . إذا كان نصف قطر الكرة يساوي ٦ سم

أ) أحسبُ طول ضلع المكعب .

ب) أحسبُ حجم الماء الذي سيستخدم لملء الفراغ الواقع بين المكعب والكرة .



٦ خزان ماء على شكل كرة مليء بالماء ، فُرغ محتوى هذا الخزان داخل أسطوانة قائمة مساحة قاعدتها ١٥٤ سم^{٢} ، فوصل ارتفاع الماء في الأسطوانة إلى ٢٥٢ سم .

فكم كان نصف قطر خزان الماء الكروي ؟ (أستخدمُ ط = $\frac{٢٢}{٧}$)

٧ خزان مصنوع من الصفيح على شكل كرة قطرها من الخارج ٨٠سم ، وسمك الصفيح ٢ ملم . ما حجم الصفيح المستخدم في صناعة هذا الخزان؟ (استخدم الآلة الحاسبة)

الوحــدة

٧

حساب المثلثات

٧-١ النسب المثلثية الأساسية للزاوية الحادة

مقـدمــة:

حساب المثلثات فرع من فروع الرياضيات يبحث في العلاقة بين أضلاع المثلث وزواياه وإيجاد بعض عناصر المثلث إذا علمت عناصره الأخرى، ويُستخدم كثيراً في قياس المسافات والارتفاعات والزوايا بطرق غير مباشرة، كأن نجد ارتفاع برج عالٍ، أو قمة جبل، أو بعد سفينة في البحر.

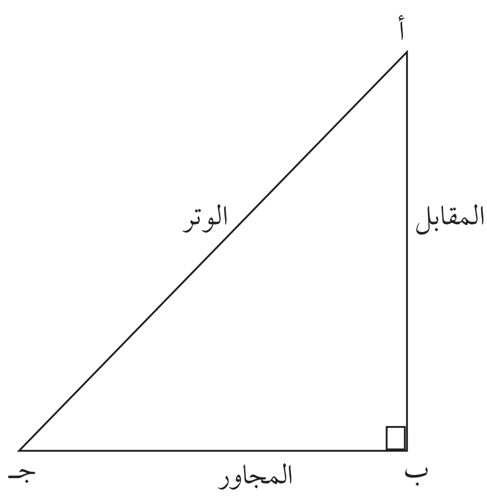
ومن العلماء العرب الذين برزوا في علم حساب المثلثات:

١- أبو الوفاء البوزجاني.
٢- محمد بن موسى الخوارزمي.
٣- أبو عبدالله محمد البتاني.
٤- نصير الدين الطوسي.

نشـــاط:

أبحث في مساهمات واحد من العلماء العرب أعلاه في علم حساب المثلثات مستعيناً بالمراجع المناسبة بما فيها شبكات الإنترنت.

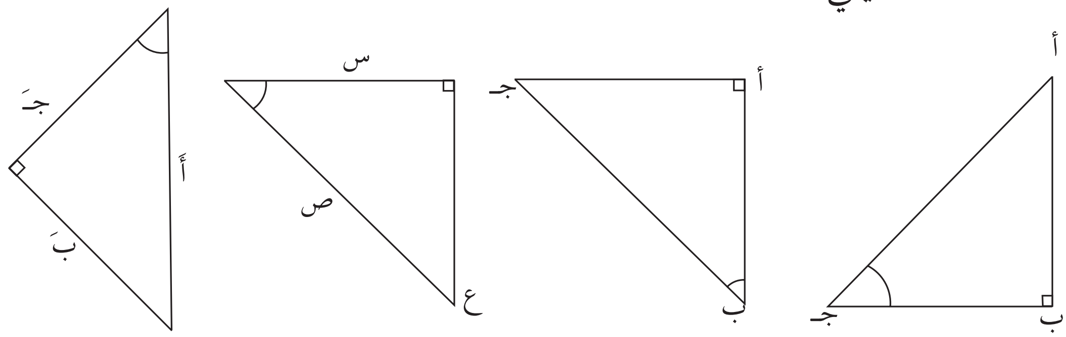
أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب كما في الشكل المجاور. نسمي الضلع أب الضلع المقابل للزاوية جـ، كما نسمي ب جـ الضلع المجاور للزاوية جـ.



نشـــاط:

اذكر الضلع المقابل للزاوية أ والضلع المجاور لها في المثلث أ ب جـ أعلاه.

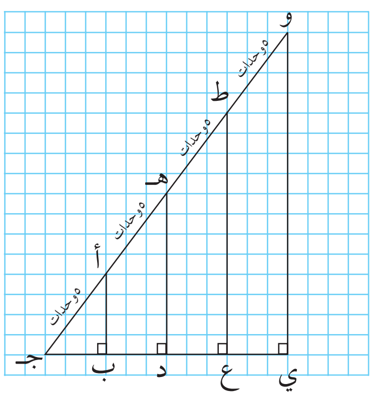
تدريب: اذكر الضلع المقابل للزاوية المشار إليها والضلع المجاور لها والوتر في كل مما يلي :



١- الجيب وجيب التمام للزاوية الحادة:

سبق أن عرفت أن الزاوية الحادة هي الزاوية التي قياسها أكبر من صفر وأصغر من ٩٠° في الشكل المقابل جـ زاوية حادة مشتركة بين محموعة من المثلثات القائمة الزاوية .

تأمل الشكل المقابل واملأ الفراغ في الجدول التالي :

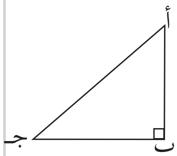


المثلث	المقابل	المجاور	الوتر	$\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$	$\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$
أ ب جـ	٤ وحدات	٣ وحدات	٥ وحدات	$\frac{٤}{٥}$	$\frac{٣}{٥}$
هـ د جـ					
ط ع جـ					
و ي جـ					

لابد وأنك لاحظت من الجدول أن النسبة $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ هي نسبة ثابتة، وكذلك النسبة $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ هي أيضاً نسبة ثابته، وهذا يقودنا إلى التعريف التالي :

تعريف

في المثلث القائم الزاوية :



جيب الزاوية الحادة = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ **أي أن جيب** $\angle$ جـ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$

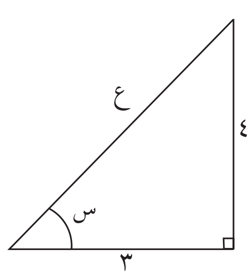
جيب تمام الزاوية الحادة = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ **أي أن جيب تمام** $\angle$ جـ = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$

ملاحظة : جيب الزاوية س يكتب جاس

جيب تمام الزاوية س يكتب جتاس

مثـــال (١)

أوجد جا س ، جتا س في الشكل المجاور.



الحـل:

جا س = $\frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{٤}{\text{ع}}$

لكن من نظرية فيثاغورس ع^{٢} = ٣^{٢} + ٤^{٢}

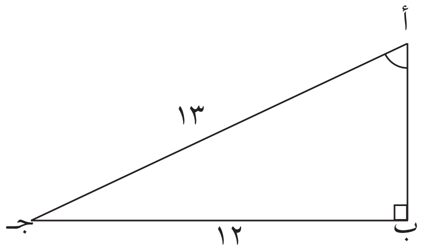
أي أن ع = ٥

$\therefore$ جا س = $\frac{٤}{٥}$

جتا س = $\frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}}$ = $\frac{٣}{٥}$

مثـــال (٢)

في المثلث أ ب جـ المبين في الشكل ، أوجد جا أ ، جتا أ ، جا جـ ، جتا جـ .



الحـل:

$$\text{جا أ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{١٢}}{\text{١٣}}$$

$$\text{جتا أ} = \frac{\text{المجاور}}{\text{الوتر}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$$

لكن من نظرية فيثاغوروس $(\text{أ جـ})^{\text{٢}} = (\text{أ ب})^{\text{٢}} + (\text{ب جـ})^{\text{٢}}$

$$(\text{١٣})^{\text{٢}} = (\text{أ ب})^{\text{٢}} + (\text{١٢})^{\text{٢}}$$

$$\text{أ ب} = \text{٥}$$

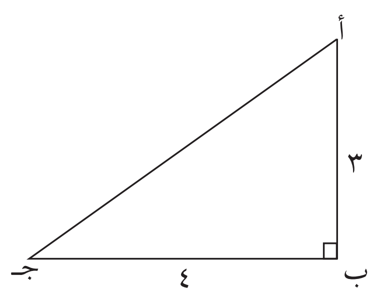
$$\therefore \text{جتا أ} = \frac{\text{٥}}{\text{١٣}}$$

$$\text{جا جـ} = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{٥}}{\text{١٣}}$$

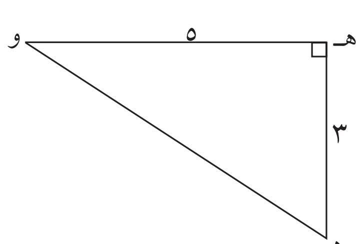
$$\text{جتا جـ} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}} = \frac{\text{١٢}}{\text{١٣}}$$

ملاحظة : إذا كان قياس ∢ أ + قياس ∢ جـ = ٩٠° فإن جا أ = جتا جـ ، وكذلك جتا أ = جا جـ والعكس صحيح ، أي أنه إذا كان جتا أ = جا جـ فإن قياس ∢ أ + قياس ∢ جـ = ٩٠°

تمارين ومسائل:



١ في الشكل المقابل أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب، أجد : جا أ ، جتا أ

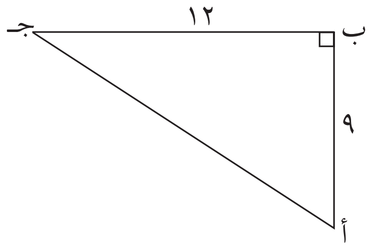


٢ في الشكل المجاور أجد :

جا و ، جتا و

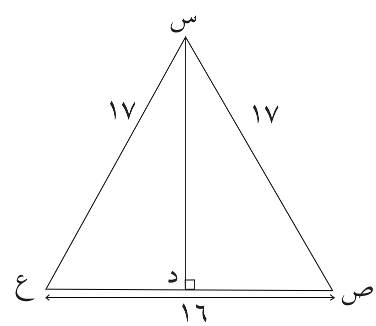
٣ في الشكل المجاور أجد :

جا أ، جتا أ



٤ في الشكل الآتي : س ص = س ع = ١٧ وحدة ، ص ع = ١٦ وحدة . أجد

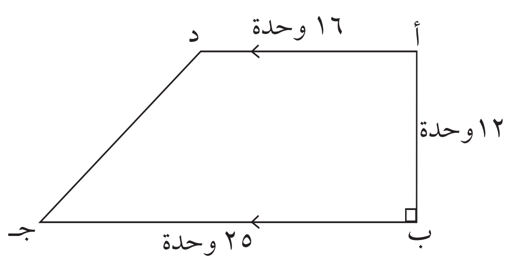
جا ص ، جتا ص ، جا ع ، جتا ع ، جا ∢ د س ص



٥ في الشكل الآتي : أ ب جـ د شبه منحرف ، ∢ب=٩٠°، أحسب قيمة :

١- جتا ∢ أ جـ ب

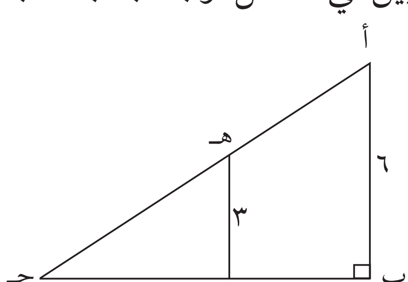
٢- جا ∢ د جـ ب



٦ ١- في المثلث هـ د جـ القائم الزاوية في د المبين في الشكل أدناه أوجد جا جـ + جتا جـ

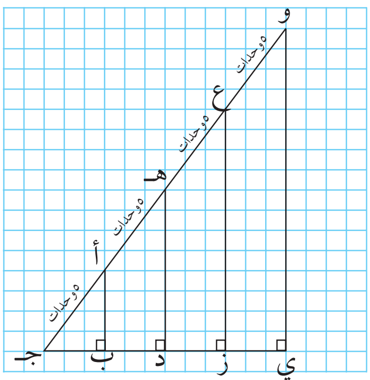
٢- في المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في ب المبين في الشكل أوجد جا جـ + جتا جـ

٣- بين أن جا جـ + جتا جـ > ١



٢- **ظل الزاوية الحادة:**

تأمل الشكل المقابل واملأ الفراغ في الجدول التالي :



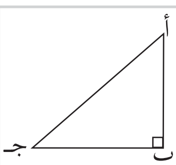
المثلث	المقابل	المجاور	$\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$
أ ب جـ	٤ وحدات	٣ وحدات	$\frac{٤}{٣}$
هـ د جـ			
ط ع جـ			
و ي جـ			

لا بد أنك لاحظت أن $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ هي نسبة ثابتة للزاوية جـ، وتسمى هذه النسبة ظل الزاوية جـ، وتكتب ظاجـ.

تعريـــف

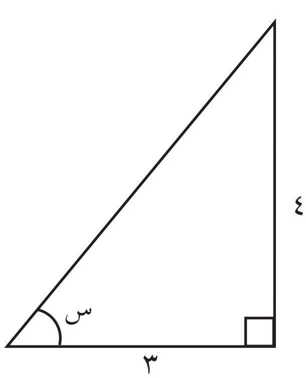
في المثلث القائم الزاوية ، فإن

ظل الزاوية جـ = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ أي أن ظا جـ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$



مثـــال (١)

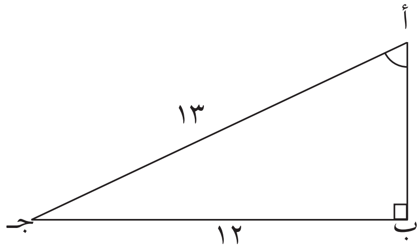
أوجد ظا س في الشكل المجاور.



الحـل: ظا س = $\frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}}$ = $\frac{٤}{٣}$

مثــــال (٢)

في المثلث أ ب جـ المبين في الشكل، أوجد ظا أ ، ظا جـ.



الحـل:

$$\text{ظا أ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}}$$

لكن من نظرية فيثاغوروس

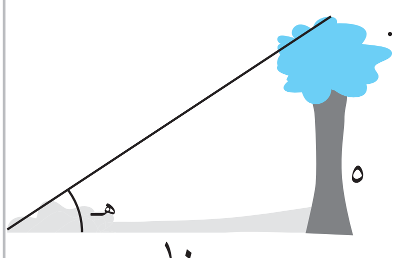
$$(\text{أ جـ})^2 = (\text{أ ب})^2 + (\text{ب جـ})^2$$

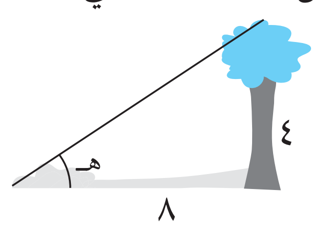
$$(١٣)^2 = (\text{أ ب})^2 + (١٢)^2$$

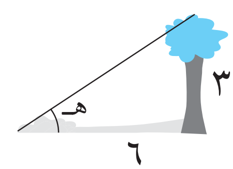
$$\text{أ ب} = ٥ \qquad \therefore \text{ظا أ} = \frac{١٢}{٥} \quad ، \quad \text{ظا جـ} = \frac{\text{المقابل}}{\text{المجاور}} = \frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}} = \frac{٥}{١٢}$$

نشـــــاط:

قيسَ طول ظل كل شجرة في نفس اللحظة، كما في الأشكال أدناه.



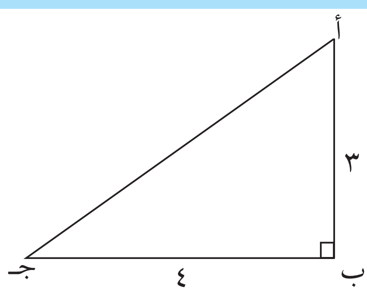




أوجد ظل الزاوية هـ في كل حالة، ماذا تمثل الزاوية هـ.

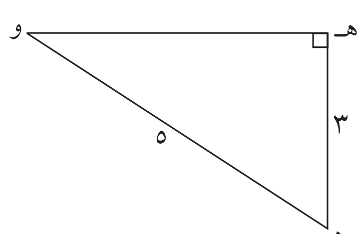
تمارين ومسائل:

١ في الشكل المقابل أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب، أجد: ظا أ ، ظا جـ



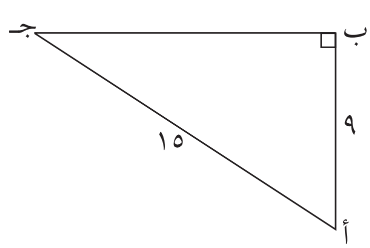
٢ في الشكل المجاور أجد:

ظا و، ظا د



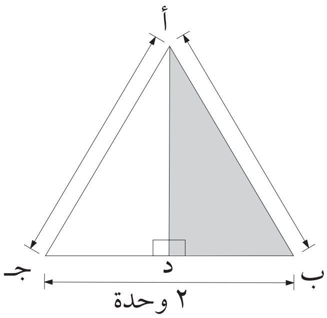
٣ في الشكل المجاور أجد:

ظا أ، ظا جـ



٧-٢ النسب المثلثية لبعض الزوايا الخاصة

هناك بعض الزوايا الخاصة مثل ٣٠ْ ، ٤٥ْ ، ٦٠ْ، وأختيرت هذه الزوايا بالذات نظراً لسهولة إيجاد نسبها المثلثية .



أولاً: النسب المثلثية للزاويتين اللتين قياسهما ٣٠ْ ، ٦٠ْ:

في الشكل المقابل أ ب جـ مثلث متساوي الأضلاع، طول ضلعه ٢ وحدة .

∴ قياس ∢ أ = قياس ∢ ب = قياس ∢ جـ = ٦٠ْ

ننزل من رأسه أ العمود أ د على القاعدة ب جـ، فينتج مثلثان قائما الزاوية ويكون :

قياس ∢ ب أ د = قياس ∢ د أ جـ = ٣٠ْ (لماذا؟)

كما يكون :

ب د = د جـ = ١ وحدة طولية ، وفي المثلث أ د ب فإن :

(أ د)^{٢} + (ب د)^{٢} = (أ ب)^{٢} . . . حسب نظرية فيثاغورس

∴ (أ د)^{٢} = (أ ب)^{٢} − (ب د)^{٢} = ٤ − ١ = ٣

∴ أ د = $\sqrt{٣}$ وحدة طول .

وعليه يكون :

$$\text{جا } ٣٠^\circ = \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الوتر}} = \frac{١}{٢}$$

$$\text{جتا } ٣٠^\circ = \frac{\text{طول الضلع المجاور}}{\text{طول الوتر}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

$$\text{ظا } ٣٠^\circ = \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الضلع المجاور}} = \frac{١}{\sqrt{٣}}$$

كذلك يكون:

$$\text{جا } ٦٠^\circ = \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الوتر}} = \frac{\sqrt{٣}}{٢}$$

$$\text{جتا } ٦٠^\circ = \frac{\text{طول الضلع المجاور}}{\text{طول الوتر}} = \frac{١}{٢}$$

$$\text{ظا } ٦٠^\circ = \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الضلع المجاور}} = \frac{\sqrt{٣}}{١} = \sqrt{٣}$$

تذكر أن:

١) نسبة أطوال أضلاع المثلث الذي قياسات زواياه ٣٠° ، ٦٠° ، ٩٠° كنسبة ١ : $\sqrt{٣}$: ٢

٢) في المثلث الذي قياسات زواياه ٣٠° ، ٦٠° ، ٩٠° يكون طول الوتر ضعفي طول الضلع المقابل للزاوية التي قياسها ٣٠°.

تدريب:

١ أجد قيمة :

أ $٢\text{جتا}^٢ ٣٠^\circ - ١$

ب $٢\text{جا}^٢ ٣٠^\circ - ١$

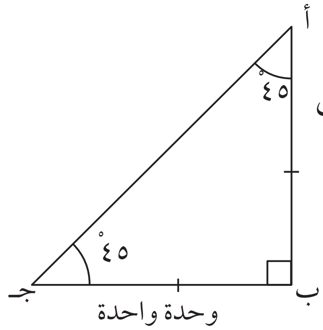
٢ أبين أن : $\text{جتا}^٢ ٣٠^\circ - \text{جا}^٢ ٣٠^\circ = \frac{١}{٢}$

٣ أبين أن : $٢\text{جا } ٣٠^\circ \text{ جتا } ٣٠^\circ = \text{جا } ٦٠^\circ$

ثانياً: النسب المثلثية لزاوية قياسها ٤٥°:

في الشكل المقابل أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب، ومتساوي الساقين فيه :

أ ب = ب جـ = وحدة واحدة ، فيكون قياس كل من الزاويتين الحادتين أ ، جـ ، يساوي ٤٥°. (لماذا ؟)



لإيجاد طول الوتر أ جـ في المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في ب

بما أن $(\text{أ جـ})^{٢} = (\text{أ ب})^{٢} + (\text{ب جـ})^{٢}$ . . . نظرية فيثاغورس

$\therefore (\text{أ جـ})^{٢} = ١ + ١ = ٢$

$\therefore (\text{أ جـ})^{٢} = ٢$

$\therefore \text{أ جـ} = \sqrt{٢}$ وحدة

وعليه يكون:

$$\text{جا } ٤٥^\circ = \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الوتر}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

$$\text{جتا } ٤٥^\circ = \frac{\text{طول الضلع المجاور}}{\text{طول الوتر}} = \frac{١}{\sqrt{٢}}$$

$$\text{ظا } ٤٥^\circ = \frac{\text{طول الضلع المقابل}}{\text{طول الضلع المجاور}} = \frac{١}{١} = ١$$

نلاحظ أن : $\text{جا } ٤٥^\circ = \text{جتا } ٤٥ = \frac{١}{\sqrt{٢}}$

فيما يلي جدول بالنسب المثلثية للزوايا الخاصة:

النسب المثلثية / قياس الزاوية	جا	جتا	ظا
٣٠°	$\frac{١}{٢}$	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{\sqrt{٣}}$
٦٠°	$\frac{\sqrt{٣}}{٢}$	$\frac{١}{٢}$	$\sqrt{٣}$
٤٥°	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	$\frac{١}{\sqrt{٢}}$	١

مثـــال (١)

أوجد قيمة المقدار $\frac{جا ٣٠^\circ}{جتا ٦٠^\circ}$ + ظا ٤٥ْ

الحـل:

جا ٣٠ْ = $\frac{١}{٢}$ ، جتا ٦٠ْ = $\frac{١}{٢}$ ، ظا ٤٥ْ = ١

∴ $\frac{جا ٣٠^\circ}{جتا ٦٠^\circ}$ + ظا ٤٥ْ = $\frac{\frac{١}{٢}}{\frac{١}{٢}}$ + ١ = ١ + ١ = ٢

مثـــال (٢)

برهن أن جتا٢ ٣٠ْ + جا٢ ٦٠ْ ـ $\frac{٣}{٢}$ = ٠

الحـل:

الطرف الأيمن = جتا٢ ٣٠ْ + جا٢ ٦٠ْ ـ $\frac{٣}{٢}$

= $(\frac{\sqrt{٣}}{٢})^٢ + (\frac{\sqrt{٣}}{٢})^٢ - \frac{٣}{٢}$

= $\frac{٣}{٤} + \frac{٣}{٤} - \frac{٣}{٢}$

= $\frac{٣}{٢} - \frac{٣}{٢}$

= صفر (الطرف الأيسر)

أي أن الطرف الأيمن = الطرف الأيسر وهو المطلوب

تدريب: أجد قيمة المقدار جا٢ ٤٥ْ – ٢جا ٦٠ْ جتا ٣٠ْ

تمارين ومسائل:

١ أجد قيمة المقدار جتا٢ ٣٠ْ – جا٢ ٣٠ْ + ١

٢ أجد قيمة المقدار ٣جا ٦٠ْ – ٢جا ٣٠ْ + ٢ظا ٤٥ْ

٣ أثبت أن ٢جتا٢ ٣٠ْ – ١ = جتا ٦٠ْ

٤ في المثلث أ ب جـ إذا كان جاأ = جتاب ، حيث أ ، ب حادتان ، ما قياس زاوية جـ .

٧-٣ ايجاد النسب المثلثية

أولاً: باستخدام الجداول

وضع كثير من علماء المسلمين جداول للنسب المثلثية، والتي لم تتغير الجداول الحديثة عنها كثيراً.

وقد درسنا كيفية إيجاد النسب المثلثية لزاوية معلومة بالرسم، ونظراً لعدم دقة القياس بالأدوات الهندسية المتوفرة وغير المصممة لقياس زوايا دقيقة، ولصعوبة إيجاد قياس زواية معلومة إذا كانت النسبة المثلثية لها معلومة، لهذا وضعت جداول رياضية نستطيع بواسطتها إيجاد النسب المثلثية لأي زاوية معلومة وإيجاد قياس الزاوية إذا علمت إحدى نسبها المثلثية، هذه الجداول مقربة لأربعة منازل عشرية، وقد وضعت هذه الجداول باستخدام أدوات القياس الدقيقة أو الآلات الحاسبة، وسوف نقتصر في دراستنا على إيجاد النسب المثلثية الأساسية للزوايا التي قياسها عدد صحيح من الدرجات.

ملاحظات عن جداول النسب المثلثية لزوايا حادة:

أولاً :جدول الجيوب:

١) جيب قياس أي زاوية حادة عبارة عن كسر حقيقي، وقيمته من الجداول المثلثية المستعملة بين أيدينا تتكون من أربع منازل عشرية.

٢) كلما زاد قياس الزاوية، زادت قيمة جيبها.

ثانياً: جدول جيوب التمام:

١) جيب تمام قياس أي زاوية حادة عبارة عن كسر حقيقي، وقيمته من الجداول المثلثية المستعملة بين أيدينا تتكون من أربع منازل عشرية.

٢) كلما زاد قياس الزاوية، قلّت قيمة جيب التمام للزاوية.

ثالثاً : جدول الظلال:

١) ظل قياس أي زاوية أكبر من صفر وأصغر من ٤٥° عبارة عن كسر حقيقي وقيمته من الجداول المثلثية المستعملة بين أيدينا تتكون من أربع منازل عشرية.

٢) ظا ٤٥° = ١

٣) ظل قياس أي زاوية قياسها أكبر من ٤٥°، وأقل من ٩٠° عبارة عن عدد كسري، وقيمة الكسر العشري من الجداول المستعملة بين أيدينا تتكون من أربع منازل عشرية.

٤) كلما زاد قياس الزاوية، زادت قيمة ظلها.

مثـــال (١)

أوجد قيمة كل من التالية باستخدام جداول النسب المثلثية الموجودة في آخر الكتاب .

جا ١٧° ، جا ٧٥° ، جتا ٧٣° ، جتا ١٥°

ظا ٢٨° ، ظا ٦٥° وماذا تلاحظ ؟

الحـل: من جداول النسب المثلثية نجد أن :

جا ١٧° = ٠,٢٩٢٤ | جا ٧٥° = ٠,٩٦٥٩

جتا ٧٣° = ٠,٢٩٢٤ | جتا ١٥° = ٠,٩٦٥٩

ظا ٢٨° = ٠,٥٣١٧ | ظا ٦٥° = ٢,١٤٤٥

نلاحظ أنه :

بما أن ٧٥ أكبر من ١٧° فإن جا ٧٥° أكبر من جا ١٧° (كلما زاد قياس الزاوية ، زادت قيمة جيبها)

بما أن ٧٣ أكبر من ١٥ فإن جتا ٧٣° أصغر من جتا ١٥° (كلما زاد قياس الزاوية ، قلّت قيمة جيب تمامها)

كما أن : جا ١٧° = جتا ٧٣° (لأن الزاويتين متتامتان)

جا ٧٥° = جتا ١٥° (لأن الزاويتين متتامتان)

مثـــال (٢)

أوجد باستخدام جداول النسب المثلثية قيمة ما يلي :

جا ٢٤° + جتا ٦٣° + ظا ٤٧°

الحـل: باستخدام جداول النسب المثلثية نجد أن :

جا ٢٤° + جتا ٦٣° + ظا ٤٧° = ٠,٤٠٦٧ + ٠,٤٥٤٠ + ١,٠٧٢٤ = ١,٩٣٣١

تدريبات صفيّة:

أجد قيمة كل من التالية باستخدام الجداول : جا ٢٤° ، جا ٨٧° ، جتا ٧٠° ، ظا ٣٤° ، ظا ٨٢°

تمارين ومسائل:

١ أجد قيمة كل من المقادير التالية باستخدام جداول النسب المثلثية :

أ) ظا ٥٤° + جا ٢٥° + جتا ٧٠° ب) جتا ٤٢° + ظا ٢٣° + جا ٨٣°

٢ أبيّن باستخدام جداول النسب المثلثية أن :

أ) جا ٤٠° ≠ ٢ جا ٢٠° ب) جتا ١٥° ≠ $\frac{١}{٣}$ جتا ٤٥°

جـ) ظا ٦٠° ≠ ٣ ظا ٢٠°

٣ ما قياس الزاوية الحادة س أ)إذا كان جتاس = ٠,٦٠١٨ (ب) ظاس = ٠,٥٧٧٤

ثانياً: باستخدام الآلة الحاسبة

لنسب المثلثية التي درسناها هي:

- جيب الزاوية س ويكتب جاس، ويقابله في الآلة الحاسبة الرمز Sin x ، (اختصار لكلمة sine).
- جيب تمام الزاوية س ويكتب جتاس ويقابله في الآلة الحاسبة الرمز Cos x ، (اختصار لكلمة cosine).
- ظل الزاوية س ويكتب ظاس ويقابله في الآلة الحاسبة الرمز Tan x ، (اختصار لكلمة Tangent).

ايجاد النسب المثلثية لزاوية معلومة:

الخطوات:

١) نضغط على مفتاح النسبة المثلثية المطلوبة (tan , cos , sin) فتظهر على الشاشة تلك النسبة المثلثية.

٢) ندخل قياس الزاوية المطلوب إيجاد النسب المثلثية لها إلى الآلة الحاسبة.

٣) نضغط على مفتاح (enter) فتظهر قيمة النسبة المطلوبة مقربة لعدد من المنازل العشرية.

ويجب التنويه إلى أنّ هناك بعض الآلات الحاسبة، تختلف فيها طريقة إيجاد النسبة المثلثية لزاوية معلومة، حيث تُستبدل خطوة(١) بخطوة (٢).

مثـــال (١)

أوجد جا ٥٨° باستخدام الآلة الحاسبة.

الحـل: لإيجاد جا ٥٨° نتبع الخطوات الآتية:

أ) نضغط على مفتاح [Sin]

ب) ندخل قياس الزاوية وهو ٥٨° إلى الآلة الحاسبة بالضغط على المفتاح 5 ثم المفتاح 8.

جـ) نضغط على مفتاح (enter) فتظهر القيمة المطلوبة وهي 0.84804896 .

د) يمكن تقريب الناتج لأربع منازل عشرية بحيث يصبح : جا ٥٨° = ٠,٨٤٨٠

يمكن تلخيص الخطوات السابقة بالخطوات الآتية من اليسار إلى اليمين :

[Sin] → [58]→ [enter]

* الآلة الحاسبة المستخدمة هي آلة حاسبة علمية Scientific Caclulator.

نشـــاط:

باستخدام الآلة الحاسبة، أوجد: جتا ٧٤ْ، ظا ٣٦ْ مقرباً إلى أربع منازل عشرية.

استخدام الآلة الحاسبة لإيجاد الزاوية إذا علمت إحدى نسبها المثلثية:

الخطوات:

١- نضغط على مفتاح Shift.

٢- نضغط أحد المفاتيح: Sin أو Sin^{-1}، Cos أو Cos^{-1}، Tan أو Tan^{-1} حسب المطلوب.

٣- ندخل قيمة النسبة المثلثية للزاوية المطلوبة.

٤- نضغط على مفتاح = أو Enter.

مثـــال (١) باستخدام الآلة الحاسبة، أوجد قياس الزاوية س مقرباً لأقرب عدد صحيح بالدرجات عندما جا س = ٠,٤٥٤٠

الحـل: جاس = ٠,٤٥٤٠ ، نتبع الخطوات التالية من اليسار إلى اليمين:

$$\text{Shift} \rightarrow \text{Sin} \rightarrow (0.4540) \rightarrow =$$

فيكون الجواب لأقرب درجة هو س = ٢٧ْ

مثـال (٢) باستخدام الآلة الحاسبة، أوجد قياس زاوية س مقرباً الناتج لأقرب منزلة عشرية واحدة بالدرجات، عندما ظاس = $\frac{١}{٢}$

الحـل: لإيجاد قياس الزاوية س عندما ظا س = $\frac{١}{٢}$ نتبع الخطوات التالية من اليسار إلى اليمين: $\text{Shift} \rightarrow \text{Tan} \rightarrow (0.5) \rightarrow =$

فيكون الجواب لأقرب منزلة عشرية واحدة على الشاشة هو س = ٢٦,٦ْ

نشـــاط:

باستخدام الآلة الحاسبة، أوجد قياس الزاوية مقرباً الناتج لأقرب عدد صحيح بالدرجات عندما :

أ) جاس = ٠,٤٧٢٥

ب) جتاس = ٠,١٢٥٣

جـ) ظاس = ١,٥

تدريبات صفيّة:

١ باستخدام الآلة الحاسبة أجد النسب المثلثية الآتية مقرباً النواتج لأربع منازل عشرية :

جا ٢٧° ، جتا ٦٥° ، ظا ٣٨°

٢ أ ب جـ مثلث فإذا كان جتا أ = ٠,٩٢٠٥ . أجد قيمة جا جـ باستخدام الآلة الحاسبة .

٣ أجد قيمة جتا ٥٤° + ظا ١٣°

أ) باستخدام جداول النسب المثلثية .

ب) باستخدام الآلة الحاسبة مقرباً الناتج لأربع منازل عشرية .

جـ) أقارن بين الجوابين في (أ) ، (ب) .

تمارين ومسائل:

١ أجد قيمة جتا ٨٢° جتا ٢٢° + جا ٨٢° جا ٢٢° .

أقارن الناتج مع جتا ٦٠° .

٢ أجد قيمة جا ٣٥° جتا ٥٥° + جتا ٣٥° جا ٥٥° .

أقارن الناتج مع جا ٩٠° .

٣ أجد قيمة : (أ) ظا ١٥° .

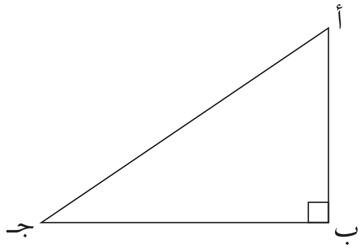
(ب) ظا ٦٠° − ظا ٤٥° .

هل الناتجان في الفرعين أ ، ب متساويان؟

٧-٤ المتطابقات المثلثية

أنت تعلم أن ٣س + ٢س = ٥س ، هي جملة صحيحة مهما كانت قيمة س ، مثل هذه الجمل الصحيحة دائماً تسمى متطابقات . وسندرس بعض المتطابقات المثلثية الهامة حيث نستفيد منها في حل بعض المسائل الرياضية .

يمكن استنتاج بعض المتطابقات المثلثية من المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في ب وهي :



أولاً : ظا جـ = $\frac{\text{جا جـ}}{\text{جتا جـ}}$

البرهان : الطرف الأيسر = $\frac{\text{جا جـ}}{\text{جتا جـ}}$

$$= \frac{\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}}{\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}}$$

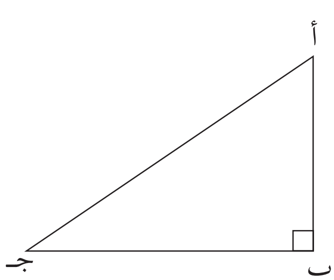
$$= \frac{\text{أ ب}}{\text{ب جـ}}$$

= ظاجـ = الطرف الأيمن ، أي أن الطرف الأيمن = الطرف الأيسر

وبصفة عامة إذا كانت س قياساً لأي زاوية فإن ظا س = $\frac{\text{جا س}}{\text{جتا س}}$

ثانياً: جا^{2}جـ + جتا^{2}جـ = ١

البرهان : الطرف الأيمن = جا^{2}جـ + جتا^{2}جـ



$$= \frac{(\text{أ ب})^{2}}{(\text{أ جـ})^{2}} + \frac{(\text{ب جـ})^{2}}{(\text{أ جـ})^{2}}$$

$$= \frac{(\text{أ جـ})^{2}}{(\text{أ جـ})^{2}}$$

= ١

= الطرف الأيسر ، أي أن الطرفين متساويان

وبصفة عامة ، إذا كانت س قياس لأي زاوية فإن : جا^{2}س + جتا^{2}س = ١

مثـــال (١)

أثبت صحة المتطابقة : (جاس − جتاس)^{٢} = ١ − ٢جاس جتاس

الحـل: الطرف الأيمن = (جاس − جتاس)^{٢}

= جا^{٢}س − ٢جاس جتاس + جتا^{٢}س

= جا^{٢}س + جتا^{٢}س − ٢جاس جتاس

= ١ − ٢جاس جتاس (لأن جا^{٢}س + جتا^{٢}س = ١)

= الطرف الأيسر وهو المطلوب

تدريب صفي:

أثبت صحة المتطابقة (جاس + جتاس)^{٢} = ١ + ٢جاس جتاس

تمارين ومسائل:

١ أثبت صحة المتطابقة $\frac{١}{\text{جا}^{٢}\text{س}} + \frac{١}{\text{جتا}^{٢}\text{س}} = \frac{١}{\text{جا}^{٢}\text{س جتا}^{٢}\text{س}}$

٢ أثبت صحة المتطابقة ظا س + $\frac{١}{\text{ظا س}} = \frac{١}{\text{جا س جتا س}}$

٣ تحقق من أن جتا^{٢} ٣٠° − جا^{٢}٣٠° = جتا ٦٠°

٤ تحقق من أن ٢جا٣٠° جتا٣٠° = جا ٦٠°

٥ تحقق من أن ٢جتا^{٢}٣٠° − ١ = جتا٦٠°

٧–٥ المعادلات المثلثية

تعلمت أن الجملة «٣س – ٤ = ٥» تسمى معادلة، وأن حل المعادلة هو إيجاد قيمة المجهول (س) والذي يجعل الجملة المفتوحة صحيحة، وكذلك الحال فإن الجملة المفتوحة التي تشتمل على نسبة مثلثية أو أكثر تسمى معادلة مثلثيج وأن حلها هو إيجاد قيمة المجهول الذي يجعل هذه الجملة صحيحة.

مثال (١)

حل المعادلة المثلثية التالية: ٢ جا س – ١ = صفر، حيث س زاوية حادة.

الحل: المقصود بحل المعادلة المثلثية هو إيجاد قياس الزاوية س، والتي تجعل الطرف الأيمن مساوياً للطرف الأيسر.

بما أن ٢ جا س – ١ = صفر

٢ جا س = ١

∴ جا س = $\frac{١}{٢}$ ، أي أن س = ٣٠° (زاوية خاصة)

مثال (٢)

حل المعادلة المثلثية التالية: ٣ ظا س + ٢ = ٢ ظا س + ٣ ، س زاوية حادة.

الحل: ٣ ظا س + ٢ = ٢ ظا س + ٣

ظا س = ١ ، أي أن س = ٤٥° (زاوية خاصة)

تدريبات صفيّة:

أحل كلاً من المعادلات التالية:

١ ٢ جتا س – $\sqrt{٣}$ = صفر

٢ ظا^{٢} س – ٢ ظا س + ١ = صفر

تمارين ومسائل:

١ أحل كلاً من المعادلات التالية:

أ) $\sqrt{٣}$ ظا س – ١ = صفر.

ب) ٢ جا^{٢} س = ٣جا س – ١ حيث س زاوية حادة.

٢ إذا كان ظا أ = ٠,٣ ، أحل المعادلة س جا أ – جتا أ = صفر

٣ أجد قيم س التقريبية التي تحقق المعادلة: (٤جاس – ١) (٣جاس – ٢) = ٠

٧-٦ حل المثلث القائم الزاوية

تعلم أن للمثلث ستة عناصر هي ثلاثة أضلاع وثلاث زوايا، ويتعيّن أي مثلث إذا عُلمت قياسات أي ثلاثة عناصر فيه، على أن يكون أحدها ضلعاً على الأقل.

ويُقصد بحل المثلث إيجاد قياسات العناصر المجهولة فيه، وحيث أن دراستنا ستقتصر على المثلث القائم الزاوية، فإن أحد العناصر المعلومة لنا ستكون الزاوية القائمة، ويبقى عنصران آخران أحدهما ضلع على الأقل، كما سنرى في الحالتين التاليتين:

أولاً : حل المثلث القائم الزاوية إذا علم منه طول ضلع وقياس زاوية حادة:

مثـــال

حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في ب، والذي فيه قياس ∢ أ = ٦٠، أ ب = ٨ سم

الحـل:

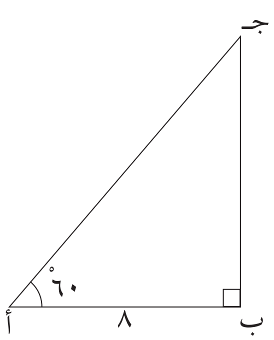
في هذا المثلث ثلاثة عناصر معلومة هي :

قياس ∢ ب = ٩٠ْ ، قياس ∢ أ = ٦٠ْ ، أ ب = ٨ سم

أما عناصره المجهولة فهي :

- قياس ∢ جـ
- طول أ جـ
- طول ب جـ

أ ب	أجـ	ب جـ	∢ أ	∢ ب	∢ جـ
٨سم	؟	؟	٦٠ْ	٩٠ْ	؟



◄ قياس ∢ جـ = ٩٠ْ − قياس ∢ أ = ٩٠ْ − ٦٠ْ = ٣٠ْ

◄ لإيجاد طول أ جـ نعلم أن :

$$\text{جتا } ٦٠ْ = \frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}} \Leftarrow \frac{١}{٢} = \frac{٨}{\text{أ جـ}}$$

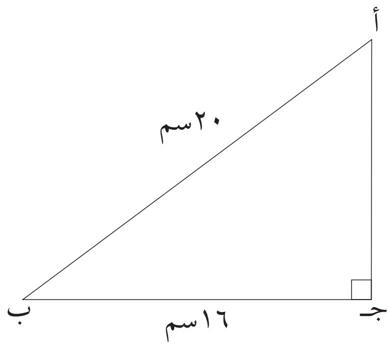
أ جـ = ٢ x ٨ = ١٦ سم .

◄ لإيجاد طول ب جـ نعلم أن : $\text{ظا } ٦٠ْ = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}}$

$$\sqrt{٣} = \frac{\text{ب جـ}}{٨} \Leftarrow \text{ب جـ} = ٨ \times \sqrt{٣} = ٨\sqrt{٣} \text{ سم}$$

ثانياً: حل المثلث القائم الزاوية إذا علم طولا ضلعين فيه:

مثـال (١) حل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في جـ، والذي فيه ب جـ = ١٦ سم، أ ب = ٢٠ سم



الحـل: في هذا المثلث ثلاثة عناصر معلومة هي:

قياس ∢ جـ = ٩٠°، ب جـ = ١٦ سم، أ ب = ٢٠ سم

أما عناصره المجهولة فهي:

- قياس ∢ ب
- قياس ∢ أ
- طول أ جـ

◄ قياس ∢ ب، نعلم أن جتا ب = $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}}$

جتا ب = $\frac{16}{20}$ = ٠,٨ (باستخدام الآلة الحاسبة أو الجداول)

∴ قياس ∢ ب = ٣٦,٨٦٩٩ ≃ ٣٧°

◄ لإيجاد قياس ∢ أ:

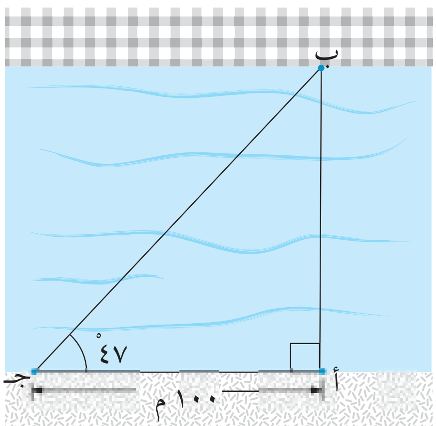
قياس ∢ أ = ٩٠° − قياس ∢ ب = ٩٠ − ٣٧° = ٥٣°

◄ لإيجاد طول أ جـ نعلم أن: جا ٣٧° = $\frac{\text{أ جـ}}{\text{أ ب}}$ ⟸ ٠,٦٠١٨ = $\frac{\text{أ جـ}}{20}$

ومنه: أ جـ = ٢٠ x ٠,٦٠١٨ ≃ ١٢ سم

مثـــال (٢)

أراد شخص أن يقيس عرض نهر ، فحدّد نقطتين أ ، ب متقابلتين على ضفتي النهر المتوازيتين ، بحيث يكون المستقيم الواصل بينهما عمودياً على ضفتي النهر ، ثم سار مسافة ١٠٠ متر حتى وصل إلى نقطة أخرى مثل جـ ، وعندها وجد أن قياس ∢ ب جـ أ = ٤٧ْ . أوجد عرض هذا النهر لأقرب متر .



الحـل: من الشكل المقابل لحساب أ ب (عرض النهر)

نلاحظ أن : ظا ٤٧ْ = $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$

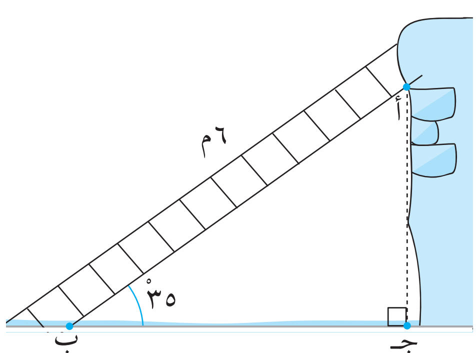
١,٠٧٢٤ = $\frac{\text{أ ب}}{١٠٠}$

أ ب = ١٠٠ x ١,٠٧٢٤ = ١٠٧,٢٤ متر

∴ أ ب (عرض النهر) = ١٠٧ متر (لأقرب متر) .

مثـــال (٣)

أ ب سلم طوله ٦ أمتار يرتكز طرفه أ على حائط رأسي، وطرفه ب على أرض أفقية ، فإذا كان السلم يميل على سطح الأرض بزاوية قياسها ٣٥ْ، أوجد ارتفاع الطرف أ للسلم عن الأرض .



الحـل: من الشكل المقابل نجد أن :

جا ٣٥ْ = $\frac{\text{أ جـ}}{\text{أ ب}}$

٠,٥٧٣٦ = $\frac{\text{أ جـ}}{٦}$

∴ أ جـ = ٦ x ٠,٥٧٣٦ = ٣,٤٤١٦

أي أن ارتفاع الطرف أ للسلم عن الأرض = ٣,٤٤١٦ متر

= ٣,٤٤ متر (لأقرب سم)

تدريبات صفيّة:

١ أ جـ ب مثلث قائم الزاوية في جـ فيه أ جـ = ١٨ سم ، قياس ∢ أ = ٥١ْ . أجد طول ب جـ

٢ أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في ب ، فيه ب جـ = ٥٤ سم ، أ جـ = ٦٣ سم . أجد قياس ∢ جـ

٣ أحل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في ب ، إذا علمت أن قياس ∢ جـ = ٢٨ْ ، ب جـ = ٢٠ سم

تمارين ومسائل:

١ أحل المثلث أ ب جـ القائم الزاوية في ب ، والذي فيه قياس ∢ أ = ٥٤ْ ، ب جـ = ١٦ سم .

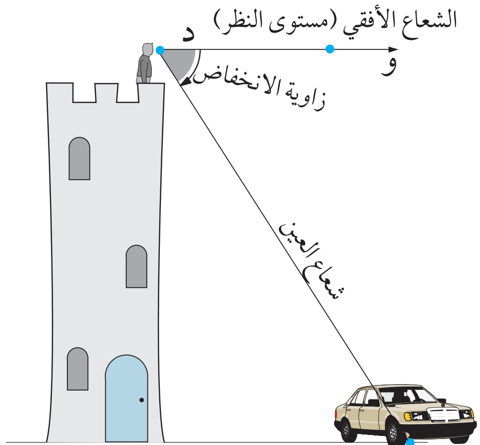
٢ أ ب جـ مثلث متساوي الساقين فيه أ ب = أ جـ ، قياس ∢ أ = ٧٦ْ ، ب جـ = ٨٠ سم .

أجد طول أ ب .

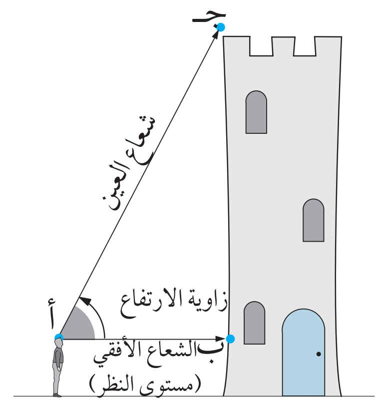
٣ رُبط عمود كهربائي بسلك من قمته إلى نقطة على الأرض تبعد عن قاعدته ٤ متر ، فإذا كان السلك يصنع على الأرض زاوية قياسها ٦٤ْ . أجد طول كل من ا العمود والسلك .

٤ سلم حريق طوله ١٨ متر ، أسند على حائط منزل ليصل إلى نافذة ، فإذا كان قياس الزاوية التي تصنعها قاعدة السلم مع الأرض ٣٢ْ ، أجد ارتفاع النافذة عن الأرض .

٧-٧ زوايا الإرتفاع والإنخفاض



شكل (٢)



شكل (١)

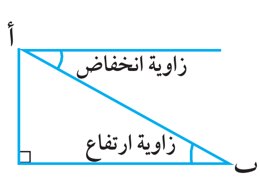
من أهم التطبيقات التي يمكن أن نستفيدها من حساب المثلثات حساب المسافات والتي لا يمكن قياسها بصورة مباشرة لسبب أو لآخر فمثلاً: لا نستطيع قياس ارتفاع برج عال بالمتر العادي ، وكذلك لا نستطيع معرفة بعد شخص ما عن طائرة بالمقاييس العادية المعروفة .

ولكن يمكننا حساب هذه المسافات بسهولة ، باستخدام النسب والعلاقات المثلثية وقبل أن نبدأ عملية قياس هذه المسافات يجب أن ندرس نوعاً من الزوايا يُسمّى بزوايا الارتفاع وزوايا الانخفاض .

في الشكل (١) أعلاه إذا نظر راصد (أ) إلى قمة برج ولتكن جـ فوق مستوى النظر ، ورسم الشعاع الأفقي أ ب وهو مستوى النظر ، كما رسم الشعاع أ جـ، وهو الشعاع الصادر من العين إلى قمة البرج (شعاع العين)، يقال عندئذ بأن ∢ ب أ جـ هي زاوية ارتفاع النقطة جـ من النقطة أ .

وكذلك في الشكل (٢) إذا رصد الشخص (د) جسماً منخفضاً (سيارة مثلاً) ولتكن هـ أسفل مستوى النظر ، ورسم الشعاع الأفقي د و (مستوى النظر)، كما رسم الشعاع د هـ، وهو الشعاع الصادر من العين إلى السيارة (شعاع العين)، يقال عندئذ أن ∢و د هـ هي زاوية انخفاض السيارة هـ من النقطة د .

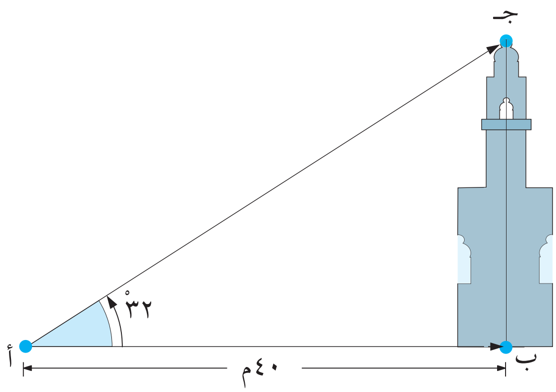
لاحظ أن : زاوية ارتفاع أ من ب = زارية انخفاض ب من أ (بالتبادل)



مثـــال (١)

من نقطة تبعد ٤٠ متراً عن قاعدة مئذنة، قاس شخص زاوية ارتفاع قمة المئذنة فوجد أن قياسها ٣٢°. ما ارتفاع المئذنة لأقرب متر ؟

الحـل: لإيجاد ارتفاع قمة المئذنة ب جـ



$$\text{ظا } ٣٢° = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}}$$

$$٠,٦٢٤٩ = \frac{\text{ب جـ}}{٤٠}$$

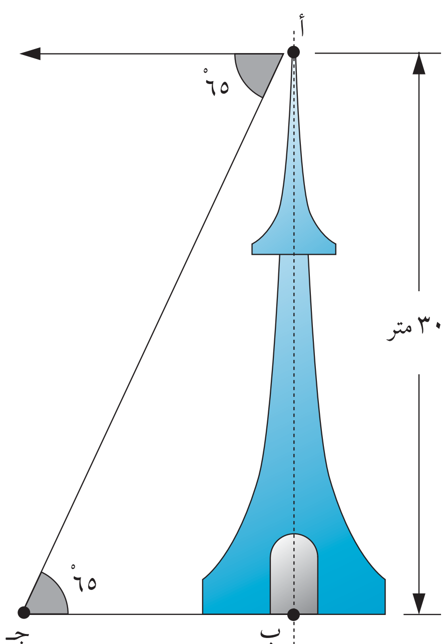
ب جـ = ٤٠ x ٠,٦٢٤٩ = ٢٤,٩٩٦م

∴ ارتفاع قمة المئذنة ≃ ٢٥ م .

مثـــال (٢)

برج ارتفاعه ٣٠ متراً، فإذا كانت زاوية انخفاض جسم موضوع على سطح الأرض من قمة البرج هي ٦٥°، فأوجد بعد الجسم عن قاعدة البرج .

الحـل: في الشكل المقابل نلاحظ أن :



$$\text{ظا } \measuredangle \text{ ب أ جـ} = \frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}}$$

∴ قياس $\measuredangle$ ب أ جـ = ٩٠° − ٦٥° = ٢٥°

أ ب = ٣٠ متر

$$\therefore \text{ ظا } ٢٥° = \frac{\text{ب جـ}}{٣٠}$$

$$٠,٤٦٦٣ = \frac{\text{ب جـ}}{٣٠}$$

ب جـ = ٣٠ x ٣٠ x ٠,٤٦٦٣

= ١٣,٩٨٩ متر

∴ بعد الجسم عن قاعدة البرج = ١٣,٩٨٩ متر ≃ ١٤ متر

تدريبات صفيّة:

١ وَجد رجل يبعد ١٠ أمتار عن قاعدة شجرة أن زاوية ارتفاع قمة الشجرة هي ٣٨ْ. أجد ارتفاع الشجرة؟

٢ رصد شخص من قمة مئذنة سيارة واقفة على بعد ١٢٠ متراً من قاعدة المئذنة، فإذا كان قياس زاوية انخفاض السيارة ١٨ْ، فما هو ارتفاع المئذنة لأقرب متر؟

٣ إذا كان طول ظل نخلة على سطح الأرض ١٤ متراً عندما تكون قياس زاوية ميل أشعة الشمس ١٩ْ، فما ارتفاع هذه النخلة؟

تمارين ومسائل:

١ من نقطة على بعد ٨٠ متراً من قاعدة برج رأسي، وُجد أن قياس زاوية ارتفاع قمة البرج ٤٨ْ. فما ارتفاع البرج؟

٢ شاهد شخص من فوق قمة تل ارتفاعه ٣٠٠ متر أن قياس زاوية انخفاض نقطة في المستوى الأفقي المار بقاعدة التل هي ٣٧ْ. أجد بعد النقطة عن قاعدة التل لأقرب متر.

٣ مئذنة ارتفاعها ٣٥ متراً. أجد قياس زاوية ارتفاع قمتها من نقطة على بعد ٢٥ متراً وتقع في المستوى الأفقي المار بقاعدتها.

٤ رصدت زاوية انخفاض قارب من قمة منارة ارتفاعه ٤٢ متراً عن سطح البحر فكان قياسها ١٩ْ. أجد بعد القارب عن قاعدة المنارة.

٥ رصد قائد طائرة في لحظة ما زاوية انخفاض قمة برج المراقبة في مطار ما فكان قياسها ٢٣ْ فإذا كان ارتفاع الطائرة في تلك اللحظة ٢٥٠٠ متر، أحسب بعد الطائرة عن برج المراقبة عندئذ.

تمارين عامة

١ أضع علامة (✓) أمام العبارة الصحيحة وعلامة (X) أمام العبارة الخاطئة في المكان المخصص لذلك :

أ) ☐ يكون ظل الزاوية دائما أكبر من ١ .

ب) ☐ جيب أي زاوية لا يزيد عن ١ .

د) ☐ إذا كان جتا ٣٥ْ = ٠,٨١٩٢ فإن جا ٥٥ = ٠,١٨٠٨

هـ) ☐ ظا ٧٢ْ > ظا ٢٥ْ

ز) ☐ جا ٥٣ْ > جا ٣٧ْ

ح) ☐ جتا ٦٤ْ > جتا ١٢ْ

ط) ☐ ٢ ظا ٢٣ْ = ظا ٤٦ْ

ي) ☐ ١ + ٢ جا جـ جتا جـ = (جا جـ + جتا جـ)^{٢}

ك) ☐ جتا (٩٠ْ – س) = جا س

ل) ☐ إذا كان ٢ جا س – ١ = صفر ، فإن قياس ∢ س = ٣٠ْ

٢ أكمل الفراغ في كل مما يأتي :

أ) إذا كان جتا (٩٠ – أ) = $\frac{٣}{٥}$ ، فإن جتا أ = ...

ب) أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ، فإذا كان جتا ب = ٠,٨٤٨٠ فإن جا جـ = . . .

جـ) أ ب جـ مثلث متساوي الأضلاع :

∴ ظا أ = ... ، جا ب = ... ، جتا جـ = ...

د) أ ب حـ مثلث قائم الزاوية في ب، وفيه أ ب = ب جـ:

∴ ظا أ = ... ، جا جـ = ...

هـ) $\frac{\text{جا ٢٣ْ}}{\text{جا ٩٧ْ}}$ = ظا . . . .

٣ أضع دائرة حول الإجابة الصحيحة في كل من الأسئلة الآتية :

أ) إذا كان المثلث أ ب جـ قائم الزاوية في ب، فإن جتا أ =

$\frac{\text{أ جـ}}{\text{أ ب}}$ $\qquad$ $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ جـ}}$ $\qquad$ $\frac{\text{أ ب}}{\text{أ جـ}}$ $\qquad$ $\frac{\text{ب جـ}}{\text{أ ب}}$

ب) إذا كان أ ب جـ مثلث فيه أ ب = ٨سم ، أ جـ = ١٠سم ، أ د ⊥ ب جـ

حيث قياس ∢ ب = ٦٠ْ ، قياس ∢ جـ = ٤٥ْ، فإن ب جـ يساوي :

$\sqrt{٩}$ ٢ $\qquad$ $\sqrt{٤}$ ٢ +٥ $\qquad$ $\sqrt{٥}$ ٢ + ٤ $\qquad$ $\sqrt{٧}$ ٢

جـ) إذا كان ٣ جتا أ – ٤ جا أ = صفر ، فإن ظا أ يساوي :

٠,٧٥ $\qquad$ ١ $\qquad$ ٠,٨ $\qquad$ ٠,٦

د) إذا كان أ ب جـ مثلث قائم الزاوية في أ، فإن :

جا ب + جتا ب > ١ $\qquad$ جا ب + جتا ب < ١ $\qquad$ جا ب + جتا ب = ١

٤ أ ب جـ مثلث فيه قياس ∢جـ = ٥٤ْ ، قياس ∢ ب = ٤٦ْ ، أ جـ = ٢٥سم .

أ د ⊥ ب جـ. أجد لأقرب سنتمتر طول كلٍ من : أ د ، أ ب ، ب جـ

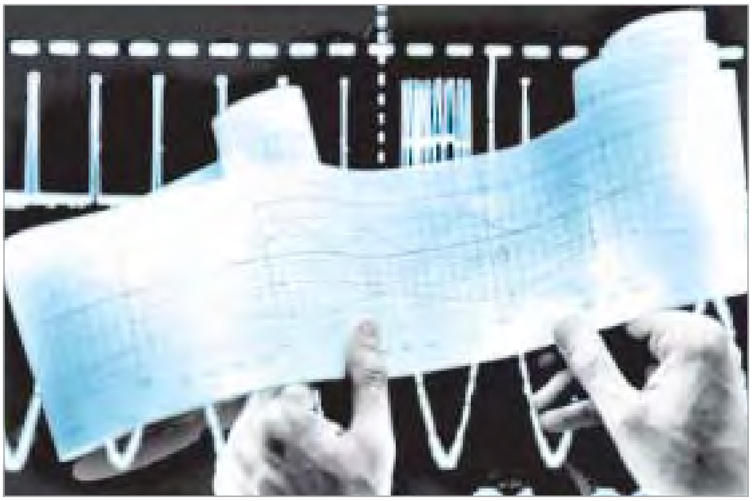
٥ من قمة صخرة ارتفاعها ١٠٠ متر عن سطح البحر ، وُجد أن قياس زاوية انخفاض سفينة ٢٧ْ . أجد بعد السفينة عن قاعدة الصخرة .

٦ إذا كان قياس زاوية ارتفاع مئذنة من نقطة على بعد ٥٠ متر من قاعدتها هي ٣٨ْ، فما هو ارتفاع المئذنة ؟ وإذا قيست زاوية الارتفاع للمئذنة نفسها من نقطة تبعد ١٢٠ متراً عن قاعدتها . أجد قياس زاوية الإرتفاع عندئذ .

٧ أ ب حـ مثلث فيه أ ب = ٨سم ، أ حـ = ٥ سم ، رسم أ د ⊥ ب جـ فقطعه في د، فإذا كان أ د = ٤ سم . أجد قياس كل من زوايا المثلث أ ب جـ

الوحــدة

٨



الاحتمالات

٨-١ تمهيد-التجربة العشوائية والفضاء العيني

درست في الصفوف السابقة بعض المفاهيم الخاصة بالاحتمالات، ومنها :

التجربة العشوائية:

هي التجربة التي يمكن معرفة جميع نتائجها الممكنة مقدماً وقبل إجرائها . ولكن لا نستطيع أن نتنبأ أو نعرف أياً من هذه النتائج سوف يتحقق فعلاً عند إجراء التجربة .

ومن الأمثلة على التجارب العشوائية :

١) إلقاء قطعة نقد معدنية مرة واحدة، وملاحظة الوجه الظاهر .

٢) إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة، وملاحظة عدد النقاط التي تظهر على الوجه العلوي .

٣) سحب بطاقة من علبة تحوي (٤) بطاقات متشابهة ومكتوب عليها الأرقام ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ وملاحظة الرقم المكتوب على البطاقة .

سـؤال:

أ) هل يمكن اعتبار سحب كرة واحدة وملاحظة لون الكرة المسحوبة من كيس يحوي كرة واحدة فقط حمراء اللون تجربة عشوائية ، ولماذا؟

ب) هل يمكن اعتبار رمي حجر منتظم مكتوب على أوجهه الستة الأعداد : ١ ، ٢ ، ٢ ، ٣ ، ٣ ، ٤ وملاحظة العدد الظاهر تجربة عشوائية، ولماذا؟

جـ) هل يمكن اعتبار تجربة اتحاد الهيدروجين مع الأكسجين في ظروف مناسبة للتفاعل وملاحظة تكون الماء تجربة عشوائية، ولماذا؟

الفضاء العيني:

الفضاء العيني لتجربة عشوائية هو مجموعة جميع النتائج الممكنة لهذه التجربة .

ويرمز للفضاء العيني بالرمز Ω وتُقرأ (أوميجا) .

مثـــال

(أ) اكتب الفضاء العيني لكل من التجارب العشوائية الآتية :

١) تجربة إلقاء قطعة نقد معدنية مرة واحدة، وملاحظة الوجه الظاهر .

٢) تجربة إلقاء قطعتي نقد معدنيتين مختلفتين معاً مرة واحدة، وملاحظة الوجهين الظاهرين .

٣) تجربة سحب كرة واحدة من كيس يحوي ٩ كرات متشابهة منها ٥ كرات حمراء و ٤ كرات بيضاء، وملاحظة لون الكرة المسحوبة .

(ب) استخدم المخططات المناسبة لتمثيل الفضاء العيني في التجربة (٢) أعلاه .

الحـل:

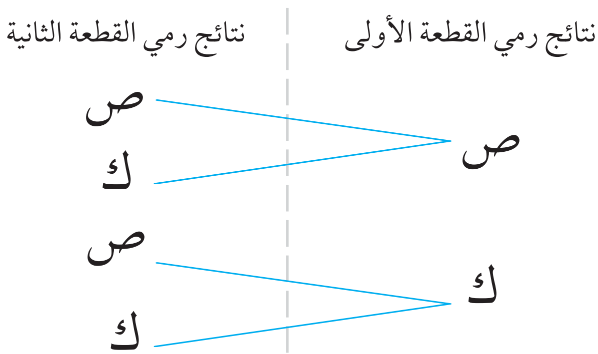
(أ) ١) الفضاء العيني Ω = {ص ، ك} حيث ص تعني صورة، ك تعني كتابة .

٢) الفضاء العيني Ω = { (ص ، ص) ، (ص ، ك)، (ك ، ص)، (ك ، ك)}

٣) الفضاء العيني Ω = { حمراء ، بيضاء}

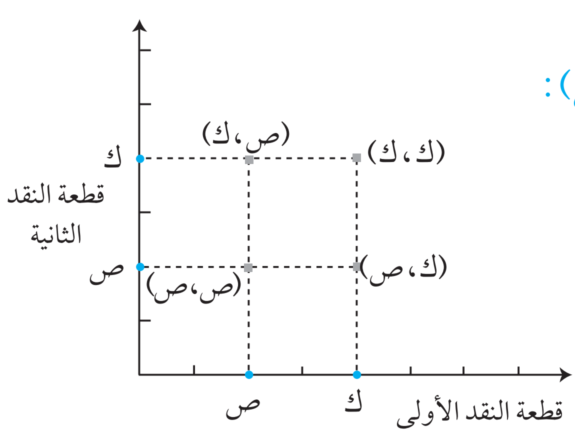
(ب) يمكن تمثيل الفضاء العيني للتجربة (٢) أعلاه بإحدى الطريقتين الآتيتين :

الطريقة الأولى (المخطط الشجري) :



الفضاء العيني Ω
x (ص ، ص)
x (ص ، ك)
x (ك ، ص)
x (ك ، ك)

الطريقة الثاني ة (المخطط البياني) :



تمارين ومسائل:

١ أكتب الفضاء العيني لكل من التجارب العشوائية الآتية :

أ) تجربة اختيار عدد من مجموعة الأعداد {٢ ، ٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧}، وملاحظة العدد الناتج .

ب) تجربة إلقاء حجر نرد منتظم ، كُتب على أوجهه الستة أسماء المدن الفلسطينية : طولكرم ، رام الله ، غزة ، الخليل ، خانيونس ، نابلس ، وملاحظة اسم المدينة الظاهر .

جـ) تجربة سحب كرة من كيس يحوي (١٢) كرة متشابهة منها (٥) كرات حمراء ، (٣) كرات بيضاء ، (٤) كرات زرقاء ، وملاحظة لون الكرة المسحوبة .

د) تجربة إلقاء حجري نرد منتظمين ومختلفين معاً مرة واحدة ، وملاحظة العددين الظاهرين . استخدم المخطط البياني لتمثيل الفضاء العيني .

٢ أكتب الفضاء العيني لتجربة إلقاء قطعة نقد معدنية و حجر نرد معاً مرة واحدة وملاحظة الوجهين الظاهرين وذلك باستخدام المخطط البياني .

٣ أكتب الفضاء العيني لتجربة إلقاء قطعة نقد ثلاث مرات على التوالي ، وملاحظة الأوجه الظاهرة ، وذلك باستخدام المخطط الشجري .

٤ يراد تكوين لجنة من عضوين يتم اختيارهما عشوائياً من بين ٤ طلاب يرمز لأسمائهم بالرموز : أ ، ب ، جـ ، د . أكتب الفضاء العيني لهذه التجربة .

٨-٢ الحوادث والعمليات عليها

الحادث هو مجموعة جزئية من الفضاء العيني لتجربة عشوائية.

ويرمز للحادث بأحد الرموز الآتية : ح، $ح_١$، $ح_٢$، $ح_٣$، . . .

مثال (١)

إذا كان الفضاء العيني لتجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة، وملاحظة العدد الظاهر هو: Ω = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}

أكتب كلاً من الحوادث الآتية، وعدد عناصر كل منها.

١) $ح_١$: حادث ظهور عدد فردي.

٢) $ح_٢$: حادث ظهور عدد أكبر أو يساوي (٧).

٣) $ح_٣$: حادث ظهور عدد طبيعي أصغر أو يساوي (٦).

٤) $ح_٤$: حادث ظهور عدد أولي.

الحل:

١) $ح_١$ = {١ ، ٣ ، ٥} وعدد عناصره ٣.

٢) $ح_٢$ = { } = Ø وعدد عناصره صفر.

٣) $ح_٣$ = {١، ٢، ٣، ٤، ٥، ٦}.

= Ω وعدد عناصره ٦.

٤) $ح_٤$ = {٢، ٣ ، ٥} وعدد عناصره ٣.

مثال (٢)

إذا كان الفضاء العيني لتجربة إلقاء قطعتي نقد مختلفتين معاً مرة واحدة، وملاحظة الوجهين الظاهرين هو: Ω = {(ص ، ص)، (ص، ك)، (ك ، ص)، (ك ، ك)}

فإن كلاً من المجموعات الجزئية الآتية للمجموعة Ω تمثل حوادث:

١) $ح_١$ = {(ص ، ص)}

٢) $ح_٢$ = {(ص ، ك)، (ك ، ك)}

٣) $ح_٣$ = Ø

٤) $ح_٤$ = {(ص ، ص)، (ص ، ك)، (ك ، ص)، (ك ، ك)}

٥) $ح_٥$ = {(ص ، ص)، (ك ، ص)}

أنواع الحوادث

١) الحادث البسيط:

هو الحادث الذي يحوي عنصراً واحداً فقط من الفضاء العيني لتجربة عشوائية، مثل $ح_1$ في مثال(٢) السابق والذي يحوي عنصراً واحداً فقط هو الزوج المرتب (ص ، ص).

٢) الحادث المركب:

هو الحادث الذي يحوي أكثر من عنصر واحد من الفضاء العيني لتجربة عشوائية، مثل $ح_2$ في المثال السابق، والذي يحوي عنصرين.

٣) الحادث المستحيل:

هو الحادث الذي لا يحوي أي عنصر من الفضاء العيني لتجربة عشوائية، مثل $ح_3$ في المثال السابق، والذي لا يحوي أي عنصر، ومثل هذا الحادث لا يمكن وقوعه.

٤) الحادث المؤكد (الأكيد):

هو الحادث الذي يحوي جميع عناصر الفضاء العيني Ω لتجربة عشوائية، مثل $ح_4$ في المثال السابق، الذي يساوي Ω، ومثل هذا الحادث مؤكد الوقوع.

العمليات على الحوادث

الحوادث مجموعات، وبالتالي يمكن الحصول على حوادث جديدة من حادثين معلومين مثل $ح_1$ ، $ح_2$ باستخدام العمليات على المجموعات وهي : عملية الاتحاد ($\cup$)، وعملية التقاطع ($\cap$)، وعملية الفرق (−)، وعملية ايجاد متممة مجموعة (التتام).

مثال (٣)

إذا كانت $\Omega = \{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦\}$

وكان $ح_1 = \{١ ، ٢ ، ٣\}$

وكان $ح_2 = \{٢ ، ٤ ، ٦\}$

أوجد كلاً من الحوادث الآتية :

١) $ح_1 \cup ح_2$

٢) $ح_1 \cap ح_2$

٣) $ح_1 - ح_2$

٤) $\overline{ح_1}$ (متممة $ح_1$)

الحـل: ١) ح$_{١}$ ∪ ح$_{٢}$ وهي مجموعة العناصر الموجودة في ح$_{١}$ أو في ح$_{٢}$

= {١ ، ٢ ، ٣} ∪ {٢ ، ٤ ، ٦}

= {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٦}

٢) ح$_{١}$ ∩ ح$_{٢}$ وهي مجموعة العناصر الموجودة في كل من ح$_{١}$ ، ح$_{٢}$

= {١ ، ٢ ، ٣} ∩ {٢ ، ٤ ، ٦}

= {٢}

٣) ح$_{١}$ − ح$_{٢}$ وهي مجموعة العناصر الموجودة في ح$_{١}$ وغير موجودة في ح$_{٢}$

= {١ ، ٢ ، ٣} − {٢ ، ٤ ، ٦}

= {١ ، ٣}

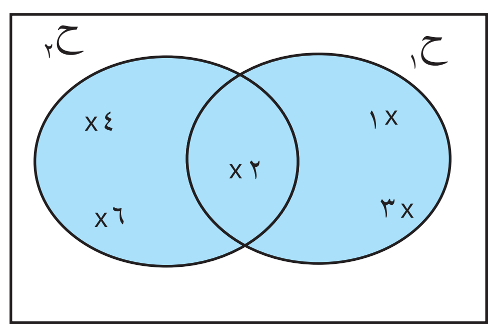
٤) $\overline{\text{ح}}_{١}$ وهي مجموعة العناصر الموجودة في Ω وغير موجودة في ح$_{١}$

= Ω − ح$_{١}$

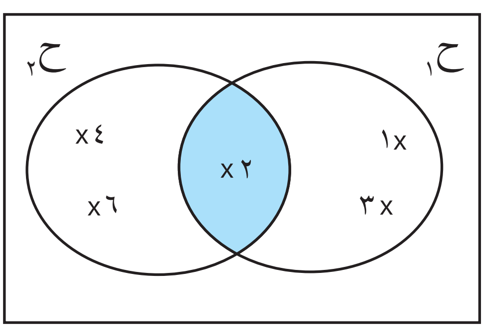
= {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦} − {١ ، ٢ ، ٣}

= {٤ ، ٥ ، ٦}

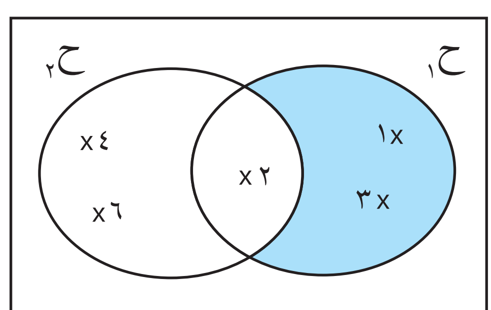
ويمكن تمثيل الحوادث الأربعة السابقة بأشكال فن كما يأتي :



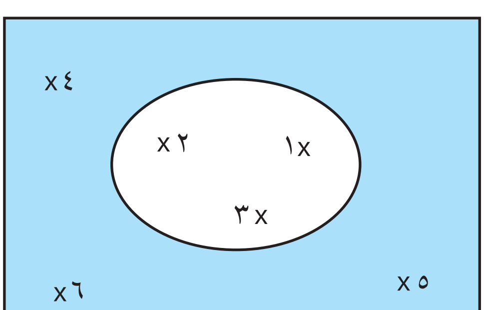
ح$_{١}$ ∪ ح$_{٢}$



ح$_{١}$ ∩ ح$_{٢}$



ح$_{١}$ − ح$_{٢}$



$\overline{\text{ح}}_{١}$

تمارين ومسائل:

١ في تجربة اختيار عدد صحيح من بين الأعداد ١ إلى ٨، وملاحظة العدد الناتج :

(أ) أكتب الفضاء العيني Ω لهذه التجربة .

(ب) أكتب كلاً من الحوادث الآتية :

$ح_١$: العدد الناتج زوجي .

$ح_٢$: العدد الناتج يقبل القسمة على ٣ دون باق .

$ح_٣$: $ح_١ \cup ح_٢$.

$ح_٤$: $\overline{ح_١}$. أصف الحادث بالكلمات .

٢ في تجربة إلقاء قطعة نقد ثم حجر نرد منتظم مرة واحدة، وملاحظة النتائج على الوجهين :

(أ) أكتب الفضاء العيني Ω لهذه التجربة .

(ب) أكتب كلاً من الحوادث الآتية :

$ح_١$: حادث ظهور صورة مع عدد أولي .

$ح_٢$: حادث ظهور صورة مع عدد فردي .

$ح_٣$: $ح_١ \cap ح_٢$.

٣ ألقي حجرا نرد متمايزين مرة واحدة، ولوحظ العددان الظاهران .

(أ) أكتب الفضاء العيني Ω لهذه التجربة .

(ب) أكتب كلاً من الحوادث الآتية :

$ح_١$: مجموع العددين الظاهرين = ٧ .

$ح_٢$: مجموع العددين الظاهرين $<$ ٥ .

$ح_٣$: العدد الظاهر على الحجر الأول = ٣ .

$ح_٤$: $ح_١ - ح_٢$.

٣-٨ التكرار النسبي والاحتمال

التكرار النسبي لحادث:

هو النسبة بين عدد المرات التي يحصل فيها الحادث إلى عدد مرات إجراء التجربة .

فإذا ألقيت قطعة نقد ١٠ مرات متتالية وظهرت الصورة في ٤ مرات منها ، فإن التكرار النسبي لحادث

$$\text{ظهور الصورة} = \frac{\text{عدد مرات ظهور الصورة}}{\text{عدد مرات إجراء التجربة}} = \frac{٤}{١٠} = ٠,٤$$

للتكرارات النسبية أهمية خاصة في تقدير احتمالات الحوادث كما يوضح المثال الآتي :

مثـــال

ألقيت قطعة نقد منتظمة عددا من المرات ، وسُجّلت النتائج الآتية :

عدد المرات	عدد مرات ظهور الصورة	التكرار النسبي لعدد مرات ظهور الصورة
٥٠	٢٧	٠,٥٤
١٠٠	٤٥	٠,٤٥
٢٠٠	٩٨	٠,٤٩
٣٠٠	١٥٧	٠,٥٢
٤٠٠	٢٠٩	٠,٥٢
٤٠٠	٢٥٧	٠,٥١
١٠٠٠	٥١٠	٠,٥١

يلاحظ من هذا المثال أن التكرار النسبي لعدد مرات ظهور الصورة يختلف باختلاف عدد مرات اجراء التجربة ، وأنه كلما زادت مرات اجراء التجربة ، كلما اتجه التكرار النسبي إلى الاستقرار و الاقتراب من القيمة الثابتة ٠,٥ . يسمى العدد الثابت ٠,٥ احتمال ظهور الصورة عند القاء قطعة النقد المنتظمة مرة واحدة .

من ناحية أخرى يمكننا نظرياً الحصول على الاحتمال ٠,٥ من ملاحظة أن الفضاء العيني Ω لتجربة إلقاء قطعة النقد المنتظمة يتكون من نتيجتين اثنتين لهما الفرصة نفسها في الوقوع ، وهما صورة وكتابة . لذا فإن فرصة (احتمال) وقوع احداهما ولتكن الصورة = ٠,٥

وبوجهٍ عام، إذا كانت لنتائج الفضاء العيني Ω فرصة الحدوث نفسها فإن:

$$\text{احتمال الحادث (ح)} = \text{ل (ح)} = \frac{\text{عدد عناصر الحادث (ح)}}{\text{عدد عناصر الفضاء العيني } \Omega}$$

$$= \frac{\text{ع (ح)}}{\text{ع } (\Omega)}$$

مثــال (١)

في تجربة القاء حجر نرد منتظم مرة واحدة، وملاحظة العدد الظاهر. أوجد احتمال كلٍ من الحوادث الآتية:

أ $ح_١$ = حادث الحصول على عدد زوجي.

ب $ح_٢$ = حادث الحصول على عدد يزيد على ٤.

جـ $ح_٣$ = حادث الحصول على عدد زوجي أو فردي.

د $ح_٤$ = حادث الحصول على عدد يزيد على ٧.

الحــل:

$\Omega = \{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦\}$

أ $ح_١ = \{٢ ، ٤ ، ٦\}$

حجر النرد منتظم، إذن $\text{ل (ح}_١) = \frac{\text{ع (ح}_١)}{\text{ع } (\Omega)} = \frac{٣}{٦} = \frac{١}{٢}$

ب $ح_٢ = \{٥ ، ٦\}$

$\text{ل (ح}_٢) = \frac{\text{ع (ح}_٢)}{\text{ع } (\Omega)} = \frac{٢}{٦} = \frac{١}{٣}$

جـ $ح_٣ = \{١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦\}$

$\text{ل (ح}_٣) = \frac{\text{ع (ح}_٣)}{\text{ع } (\Omega)} = \frac{٦}{٦} = ١$

د $ح_٤ = \{\ \} = \emptyset$

$\text{ل (ح}_٤) = \frac{\text{ع (ح}_٤)}{\text{ع } (\Omega)} = \frac{٠}{٦} = ٠$

مثـــال (٢)

إذا كان الفضاء العيني لتجربة القاء قطعتي نقد منتظمتين مختلفتين مرة واحدة هو :

Ω = {(ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك)}

و كان ح$_1$ = حادث الحصول على الكتابة مرتين .

ح$_2$ = حادث عدم الحصول على صورتين .

ح$_3$ = حادث عدم الحصول على أية صورة أو أية كتابة .

ح$_4$ = حادث الحصول على صورة أو كتابة .

أ أكتب كل حادث من الحوادث السابقة ، واذكر نوعه .

ب أوجد كلاً من الاحتمالات الآتية :

١) ل (ح$_1$)   ٢) ل (ح$_2$)   ٣) ل(ح$_3$)   ٤) ل(ح$_4$)

٥) ل(ح$_1$ $\cup$ ح$_2$)   ٦) ل (ح$_1$ $\cap$ ح$_2$)   ٧) ل ($\overline{\text{ح}_1}$)   ٨) ل(ح$_2$ − ح$_3$)

الحـــل:

أ ح$_1$ = {(ك ، ك)} وهو حادث بسيط

ح$_2$ = {(ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك)} وهو حادث مركب

ح$_3$ = { } = $\emptyset$ وهو الحادث المستحيل

ح$_4$ = {(ص ، ص) ، (ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك)} ، وهو الحادث الأكيد .

ب ١) ل (ح$_1$) = $\frac{\text{ع (ح}_1)}{\text{ع }(\Omega)}$ = $\frac{1}{4}$

٢) ل(ح$_2$) = $\frac{\text{ع (ح}_2)}{\text{ع }(\Omega)}$ = $\frac{3}{4}$

٣) ل (ح$_3$) = $\frac{\text{ع (ح}_3)}{\text{ع }(\Omega)}$ = $\frac{0}{4}$ = صفر

٤) ل (ح$_4$) = $\frac{\text{ع (ح}_4)}{\text{ع }(\Omega)}$ = $\frac{4}{4}$ = ١

٥) ح$_1$ $\cup$ ح$_2$ = {(ك ، ك)} $\cup$ {(ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك)}

= {(ص ، ك) ، (ك ، ص) ، (ك ، ك)}

$\therefore$ ل (ح$_1$ $\cup$ ح$_2$) = $\frac{\text{ع (ح}_1 \cup \text{ح}_2)}{\text{ع }(\Omega)}$ = $\frac{3}{4}$

٦) $ح_١ \cap ح_٢$ = {(ك، ك)} ∩ {(ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك)}

= {(ك، ك)}

∴ $ل(ح_١ \cap ح_٢) = \frac{ع(ح_١ \cap ح_٢)}{ع(\Omega)} = \frac{١}{٤}$

٧) $\overline{ح_١} = (\Omega) - ح_١$ = {(ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)}، لماذا؟

∴ $ل(\overline{ح_١}) = \frac{ع(\overline{ح_١})}{ع(\Omega)} = \frac{٣}{٤}$

٨) $ح_٢ - ح_٣$ = {(ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك)}، لماذا؟

∴ $ل(ح_٢ - ح_٣) = \frac{ع(ح_٢ - ح_٣)}{ع(\Omega)} = \frac{٣}{٤}$

نتـــــائج:

١) إذا كان (ح) حادثاً أكيداً فإن : ل(ح) = ١ (لاحظ أن ح = Ω)

٢) إذا كان (ح) حادثاً مستحيلاً فإن : ل(ح) = صفر (لاحظ أن ح = $\emptyset$)

٣) إذا كان (ح) حادثا (ليس أكيداً وليس مستحيلاً)، أي أن ح $\neq \Omega$، ح $\neq \emptyset$، فإن :

$٠ < ل(ح) < ١$

٤) إن ل (ح) + ل ($\overline{ح}$) = ١

أي أن احتمال وقوع الحادث + احتمال وقوع متممة الحادث = ١

أو أن احتمال وقوع الحادث + احتمال عدم وقوع الحادث = ١

مثــــال (٣)

في تجربة اختيار عدد صحيح من بين الأعداد ٤ إلى ١٠ ، وملاحظة العدد الظاهر .

إذا كان : $ح_١$: حادث العدد زوجي . $ح_٢$: حادث العدد فردي .

أوجد قيمة كل من : ل ($ح_١$)، ل ($ح_٢$)، ثم بين أن ل ($ح_١$)+ ل ($ح_٢$) = ١

الحـل:

$$\Omega = \{٤ ، ٥ ، ٦ ، ٧ ، ٨ ، ٩ ، ١٠\}$$

$$ح_١ = \{٤ ، ٦ ، ٨ ، ١٠\}$$

$$ل(ح_١) = \frac{ع(ح)}{ع(\Omega)} = \frac{٤}{٧}$$

$$ح_٢ = \{٥ ، ٧ ، ٩\}$$

$$ل(ح_٢) = \frac{٣}{٧}$$

$$ل(ح_١) + ل(ح_٢) = \frac{٤}{٧} + \frac{٣}{٧} = ١$$

لاحظ أن $ح_١$ ، $ح_٢$ حادثان متتامان فمجموع احتماليهما = ١

تمارين ومسائل:

١ أجد احتمال سحب كرة حمراء من كيس يحوي (٩) كرات متشابهة منها (٥) كرات حمراء ، (٤) كرات زرقاء .

٢ من بين (٢٨) حالة ولادة في إحدى المستشفيات ، كان عدد المواليد الذكور ١٢ ، اختيرت حالة ولادة عشوائياً من الحالات المذكورة . ما احتمال أن يكون المولود أنثى؟

٣ صندوق يحتوي على ٤ كرات زرقاء، ٥ كرات بيضاء، ٦ كرات سوداء . سحبت كرة عشوائياً من الصندوق ولوحظ لونها ، مااحتمال أن تكون الكرة المسحوبة زرقاء أو بيضاء؟ .

٤ صف فيه ٤٥ طالباً، منهم ٢١ طالباً عيونهم سوداء، ١٠ طلاب عيونهم عسلية . إذا تم اختيار أحد الطلبة عشوائياً فما احتمال أن تكون عيناه سوداوين أو عسليتين؟

٥ في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرة واحدة، وملاحظة العدد الظاهر ، إذا كان :

$ح_١$ = حادث الحصول على عدد زوجي، $ح_٢$ = حادث الحصول على عدد أكبر من ٨ .

$ح_٣$ = حادث الحصول على عدد أولي ، $ح_٤$ = حادث الحصول على عدد أصغر أو يساوي ٦ .

فأجد قيمة كل من : ١) ل$(ح_٢)$ ٢) ل$(ح_٣)$ ٣) ل$(\overline{ح_٤})$

٤) ل$(ح_٢ \cup ح_٤)$ ٥) ل$(ح_٢ \cap ح_٣)$ ٦) ل$(\overline{ح_١})$

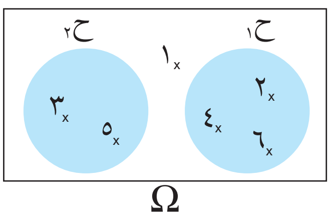
٤-٨ قوانين الاحتمـــال

الحادثان المنفصلان

مثـــال (١)

في تجربة إلقاء حجر نرد منتظم مرّة واحدة، وملاحظة الوجه الظاهر، إذا كان $ح_١$: حادث ظهور عدد زوجي، $ح_٢$: حادث ظهور عدد فردي أكبر من ١،

فإن Ω = {١ ، ٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}، $ح_١$ = {٢ ، ٤ ، ٦}، $ح_٢$ = {٣ ، ٥}



نلاحظ أن $ح_١ \cap ح_٢ = \emptyset$. نسمي مثل هذين الحادثين حادثين منفصلين فهما لا يشتركان في أي عنصر من عناصر Ω . لاحظ الشكل المجاور.

نلاحظ أيضاً أن $ح_١ \cup ح_٢$ = {٢ ، ٣ ، ٤ ، ٥ ، ٦}، ما العلاقة بين ل($ح_١ \cup ح_٢$) ، ل($ح_١$) ، ل($ح_٢$)؟

$$ل(ح_١ \cup ح_٢) = \frac{٥}{٦} \text{ ، } ل(ح_١) = \frac{٣}{٦} \text{ ، } ل(ح_٢) = \frac{٢}{٦}$$

$$ل(ح_١) + ل(ح_٢) = \frac{٣}{٦} + \frac{٢}{٦} = \frac{٥}{٦}$$

إذن $ل(ح_١ \cup ح_٢) = ل(ح_١) + ل(ح_٢)$

بوجه عام

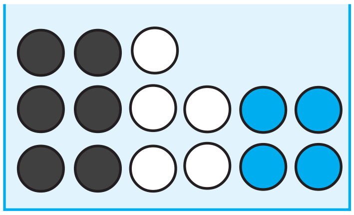
١ القانون الأول: إذا كان $ح_١$ ، $ح_٢$ حادثين منفصلين، فإن:

$$\boxed{ل(ح_١ \cup ح_٢) = ل(ح_١) + ل(ح_٢)}$$

مثـــال (٢)

صندوق يحتوي على ٤ كرات زرقاء، ٥ كرات بيضاء، ٦ كرات سوداء، سُحبت كرة عشوائياً من الصندوق، فما احتمال أن تكون الكرة المسحوبة زرقاء أو بيضاء؟

الحـل:



ليكن ح_1 : حادث سحب كرة زرقاء.

، ح_2 : حادث سحب كرة بيضاء.

ح_1 ، ح_2 حادثان منفصلان، إذ لا يمكن أن تكون الكرة المسحوبة زرقاء وبيضاء في آن واحد

$$\text{ل}\,(\text{ح}_1) = \frac{٤}{١٥}$$

$$\text{ل}\,(\text{ح}_2) = \frac{٥}{١٥}$$

$$\text{ل}\,(\text{ح}_1 \cup \text{ح}_2) = \text{ل}\,(\text{ح}_1) + \text{ل}\,(\text{ح}_2) \,.$$

$$= \frac{٤}{١٥} + \frac{٥}{١٥}$$

$$= \frac{٩}{١٥} = \frac{٣}{٥}$$

مثـــال (٣)

إذا كان $\text{ل}\,(\text{ح}_1 \cup \text{ح}_2) = ٠{,}٨$ و $\text{ل}(\text{ح}_1) = ٠{,}٥$ ، ح_1 ، ح_2 حادثان منفصلان.

أوجد $\text{ل}(\overline{\text{ح}_2})$.

الحـل:

ح_1 ، ح_2 حادثان منفصلان، إذن :

$$\text{ل}\,(\text{ح}_1 \cup \text{ح}_2) = \text{ل}\,(\text{ح}_1) + \text{ل}\,(\text{ح}_2)$$

$$٠{,}٨ = ٠{,}٥ + \text{ل}\,(\text{ح}_2)$$

$$٠{,}٨ - ٠{,}٥ = \text{ل}\,(\text{ح}_2)$$

$$٠{,}٣ = \text{ل}\,(\text{ح}_2)$$

$$\text{ل}\,(\overline{\text{ح}_2}) = ١ - \text{ل}\,(\text{ح}_2)$$

$$= ١ - ٠{,}٣$$

$$= ٠{,}٧$$

تدريبات صفّية

١ صف فيه (٤٥) طالباً، منهم (٢١) طالباً عيونهم سوداء، و (١٠) طلاب عيونهم عسلية، فإذا تم اختيار أحد طلبة الصف عشوائياً، فما احتمال أن تكون عيناه سوداوين أو عسليتين؟

٢ في تجربة رمي حجري نرد متماثلين، إذا كان الحادث $ح_١$ هو «الحصول على مجموع يساوي ٧» والحادث $ح_٢$ هو «الحصول على مجموع يساوي ١١». فهل الحادثان في $ح_١$، $ح_٢$ منفصلان؟ أجد أيضاً ل $(ح_١ \cup ح_٢)$.

٣ في تجربة رمي حجري نرد منتظمين ومختلفين في اللون، إذا كان الحادث $ح_١$ هو: الحصول على مجموع = ٧، والحادث $ح_٢$ هو: الحصول على مجموع = ١١.
أجد: ل$(ح_١)$، ل$(ح_٢)$، ل$(ح_١ \cup ح_٢)$. هل $ح_١$، $ح_٢$ حادثان منفصلان؟

الحادثان المتقاطعان

مثـــال (١)

في تجربة رمي قطعة نقد منتظمة مرّتين على التوالي، وملاحظة الوجهين الظاهرين، إذا كان $ح_١$: حادث ظهور الصورة في الرمية الأولى، $ح_٢$: حادث ظهور الكتابة في إحدى الرميتين.

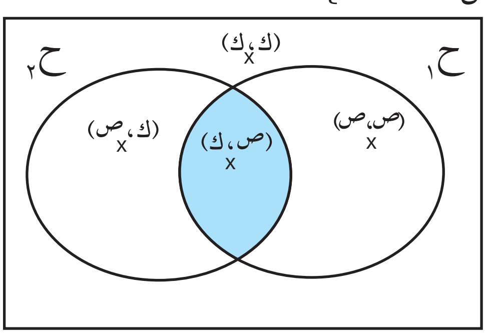
فإن Ω = { (ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)، (ك، ك)}

$ح_١$ = { (ص، ص)، (ص، ك)}

$ح_٢$ = {(ص، ك)، (ك، ص)}

نلاحظ هنا أن $ح_١ \cap ح_٢$ = {(ص، ك)} $\neq \emptyset$

، أي أن $ح_١$، $ح_٢$ حادثان غير منفصلين (حادثان متقاطعان) أنظر الشكل المجاور.



ما العلاقة في هذه الحالة بين ل $(ح_١ \cup ح_٢)$، ل $(ح_١)$، ل $(ح_٢)$، ل $(ح_١ \cap ح_٢)$؟

$ح_١ \cup ح_٢$ = { (ص، ص)، (ص، ك)، (ك، ص)}

ل $(ح_١ \cup ح_٢) = \frac{٣}{٤}$ ، ل $(ح_١) = \frac{٢}{٤}$ ، ل $(ح_٢) = \frac{٢}{٤}$ ، ل $(ح_١ \cap ح_٢) = \frac{١}{٤}$

ل $(ح_١)$ + ل $(ح_٢)$ − ل $(ح_١ \cap ح_٢) = \frac{٢}{٤} + \frac{٢}{٤} - \frac{١}{٤} = \frac{٣}{٤}$

إذن ل $(ح_١ \cup ح_٢)$ = ل $(ح_١)$ + ل $(ح_٢)$ − ل $(ح_١ \cap ح_٢)$

٢ القانون الثاني: إذا كان $ح_١$ ، $ح_٢$ حادثين ، فإن:

$$\boxed{ل(ح_١ \cup ح_٢) = ل(ح_١) + ل(ح_٢) - ل(ح_١ \cap ح_٢)}$$

مثال (٢)

في تجربة رمي حجر نرد منتظم، إذا كان $ح_١$ حادث «ظهور عدد زوجي» و $ح_٢$ حادث «ظهور عدد أقل من ٤»، فما احتمال ظهور عدد زوجي أو عدد أقل من ٤ ؟

الحل:

$ح_١ = \{٢ ، ٤ ، ٦\}$ $\qquad$ $ل(ح_١) = \frac{٣}{٦}$

$ح_٢ = \{١ ، ٢ ، ٣\}$ $\qquad$ $ل(ح_٢) = \frac{٣}{٦}$

$ح_١ \cap ح_٢ = \{٢\}$ $\qquad$ $ل(ح_١ \cap ح_٢) = \frac{١}{٦}$

$$ل(ح_١ \cup ح_٢) = ل(ح_١) + ل(ح_٢) - ل(ح_١ \cap ح_٢)$$

$$= \frac{٣}{٦} + \frac{٣}{٦} - \frac{١}{٦} = \frac{٥}{٦}$$

مثال (٣)

إذا كان احتمال نجاح سعيد في امتحان الثانوية العامة (التوجيهي) يساوي ٠,٨ واحتمال نجاح علي في امتحان الثانوية العامة (التوجيهي) ٠,٩ واحتمال نجاح سعيد وعلي في الامتحان نفسه يساوي ٠,٧٢ فما احتمال حصول نجاح سعيد أو علي في امتحان الثانوية العامة (التوجيهي)؟

الحل:

على فرض أن $ح_١$ حادث نجاح سعيد، $ح_٢$ حادث نجاح علي فإن: $ل(ح_١) = ٠,٨$

$ل(ح_٢) = ٠,٩$ ، $ل(ح_١ \cap ح_٢) = ٠,٧٢$

احتمال نجاح سعيد أو علي = $ل(ح_١ \cup ح_٢)$

$= ل(ح_١) + ل(ح_٢) - ل(ح_١ \cap ح_٢)$

$= ٠,٨ + ٠,٩ - ٠,٧٢$

$= ٠,٩٨$

تمارين ومسائل:

١ $ح_1$ ، $ح_2$ حادثان في فضاء عيني Ω بحيث $ل(ح_1) = \frac{٣}{٨}$ ، $ل(ح_2) = \frac{٣}{٤}$ ،
$ل(ح_1 \cap ح_2) = \frac{١}{٤}$. أجد كلاً من : $ل(ح_1 \cup ح_2)$ ، $ل(\overline{ح_1})$

٢ إذا كان احتمال نجاح طالب ما في امتحان الرياضيات هو $\frac{٢}{٣}$ ، واحتمال نجاحه في امتحان اللغة الانجليزيّة هو $\frac{٤}{٩}$ ، واحتمال نجاحه في امتحان الرياضيات أو امتحان اللغة الانجليزية هو $\frac{٤}{٥}$ ، فما احتمال نجاح الطالب في الامتحانين معاً ؟

٣ صف فيه (٥٠) طالباً، معهم (٢٥) طالباً يحبون كرة السلة، و (٣٥) طالباً يحبون كرة القدم، و (١٥) طالباً يحبون اللعبتين معاً . فإذا تم اختيار أحد طلبة الصف عشوائياً، فما احتمال أن يكون ممن :

أ) يحبون كرة السلة؟

ب) يحبون كرة القدم؟

جـ) يحبون اللعبتين معاً؟

د) يحبون لعبة واحدة على الأقل؟

تمارين عامة

١ إذا كان ل $(ح_١ \cup ح_٢)$ = ٠,٦٥ و ل $(ح_١)$ = ٠,٤ ، ل$(ح_٢)$ = ٠,٢٥ ، فهل $ح_١$ ، $ح_٢$ حادثان منفصلان؟

٢ صندوق فيه تسع كرات متماثلة ومرقمة بالأرقام من ١-٩ ، سُحبت كرة من الصندوق عشوائياً، فإذا كان الحادث $ح_١$ هو «الرقم على الكرة المسحوبة فردي»، والحادث $ح_٢$ هو «الرقم على الكرة المسحوبة يقبل القسمة على ٤». أحسب ل $(ح_١ \cup ح_٢)$.

٣ روضة أطفال تضم (١٥٠) طفلاً منهم (٩٥) يحبون الرسم، و (٧٥) يحبون القراءة، و (٤٠) يحبون الرسم والقراءة، اختير أحد أطفال الروضة عشوائياً. أحسب احتمال أن يكون الطفل المختار ممن:

أ) يحبون الرسم.
ب) يحبون القراءة.
جـ) يحبون الرسم أو القراءة.
د) لا يحبون الرسم ولا يحبون القراءة.

٤ في تجربة سحب بطاقة من بين (٥٠) بطاقة متشابهة وموضوعة في صندوق وتحمل الأرقام من ١ - ٥٠ ، أجد احتمال حدوث كل من الحوادث الآتية:

أ) $ح_١$: العدد على البطاقة أولي وأصغر من ٢٠ .
ب) $ح_٢$: العدد على البطاقة زوجي ويقبل القسمة على (٨) دون باق.
جـ) $ح_٣$: العدد فردي ومحصور بين ١٠ ، ٣٤.
د) $ح_٤$: العدد يقبل القسمة على كل من ٢ ، ٣ دون باق.

٥ في تجربة إلقاء ٣ قطع نقد مختلفة مرة واحدة ، وملاحظة النتائج على الوجوه الثلاثة، أجد احتمال حدوث كل من الحوادث الآتية:

أ) $ح_١$: حادث ظهور صورتين على الأقل.
ب) $ح_٢$: حادث ظهور صورتين وكتابة.
جـ) $ح_٣$: حادث ظهور كتابة على الأقل.
د) $ح_٤$: حادث ظهور كتابة ثلاث مرات.

ملـحق

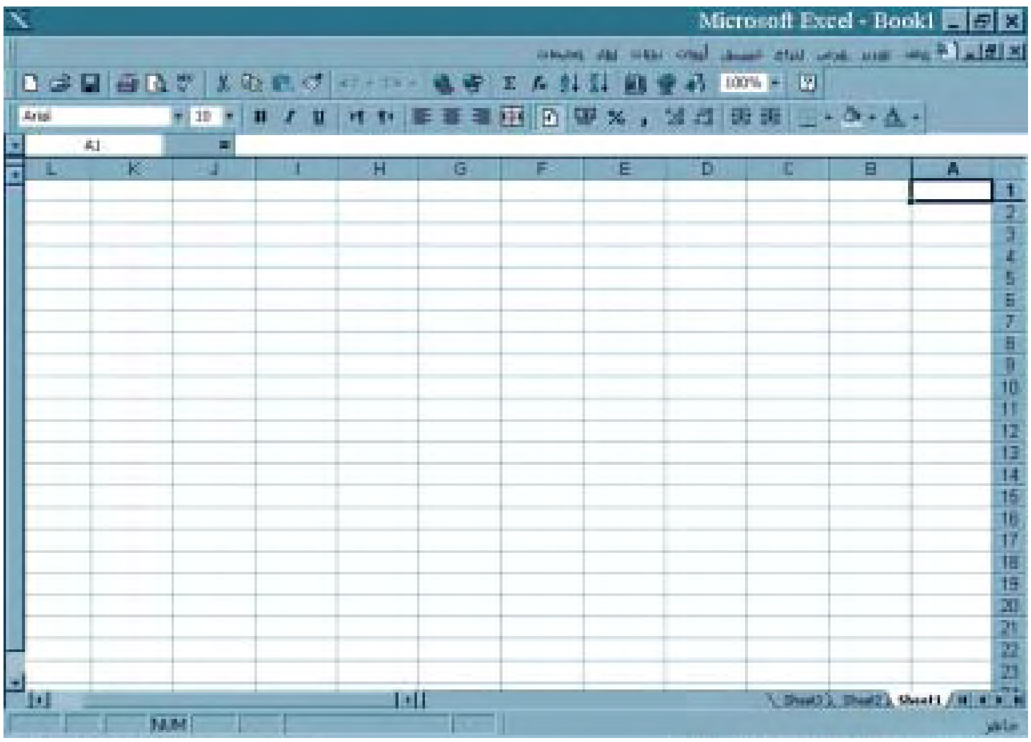
هذا الملحق اختياري .

يمكن استخدام برمجيات متعددة أخرى في تعلّم التطبيقات الحاسوبية .

تطبيقات حاسوبية

سوف ندرس في هذا الجزء، بعض التطبيقات الحاسوبية التي تهتم بالعمليات الحسابية مثل إيجاد مجموع أعداد، أو إيجاد وسط مجموعة من الأعداد، أو حساب جيب زاوية معلومة، أو حساب جيب تمامها، وستعامل مع برنامج (Excel) للتعرف على العمليات الحسابية المذكورة.

وهذه صورة لشاشة برنامج (Excel)



وهي عبارة عن جدول به صفوف وأعمدة، وتُرقّم الصفوف بالأعداد ١ ، ٢ ، ٣، . . . ، بينما تأخذ الأعمدة حروفاً مثل ...,A, B, C ، ويُسمّى الجزء الناتج من تقاطع الصف مع العمود بالخلية، وهي المكان المتوفر لتعبئة المعلومات، ونرمز للخلية بعمودها وصفّها مثل الخلية A1 فهي الخلية الناتجة من تقاطع العمود A والصف (١)، والخلية D3 هي الخلية الناتجة من تقاطع العمود D والصف (٣)، والخلية H20 فهي الخلية الناتجة من تقاطع العمود H والصف (٢٠).

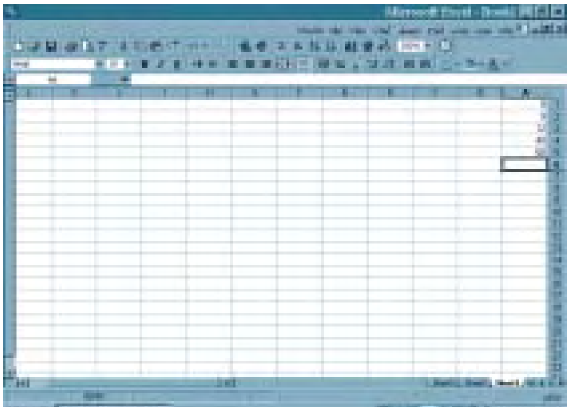
الرمز Σ :

ويظهر في شاشة برنامج Excel الرمز Σ ، ويقرأ «سيجما» ويعني المجموع .

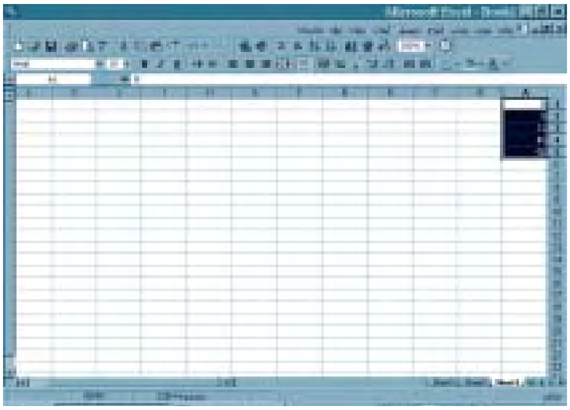
ويُستخدم الرمز Σ في إيجاد مجموع أعداد . إليك المثال التالي :

مثـال

١- عبئ الأعداد ٨ ، ٩ ، ١٢ ، ٤٩ ، ٥٨ في العمود A ، بحيث يأخذ كل عدد خلية .

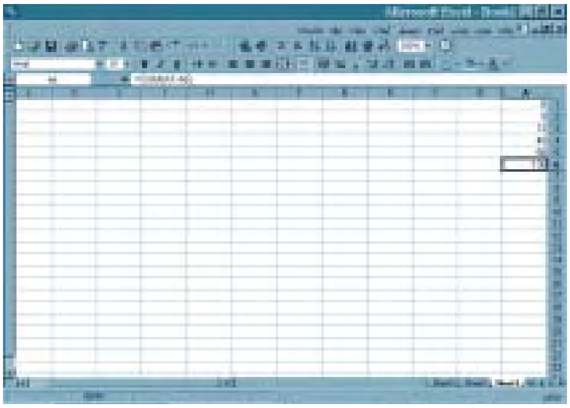


٢- لإيجاد مجموع هذه الأعداد ، حدّد الخلايا A1, A2, A3, A4, A5 .



٣- اضغط على الرمز Σ .

٤- تجد أن العدد (١٣٦) يظهر في الخلية A6 .



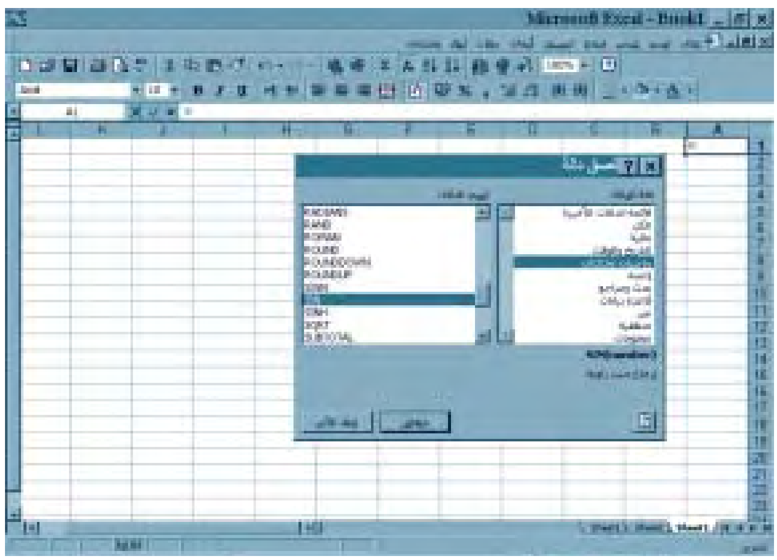
إيجاد جيب الزاوية:

لإيجاد جيب زاوية معلومة مثل ٣٥ْ ، نتبع الخطوات التالية :

١) نضغط على f_x ، فيظهر صندوق الحوار (لصق دالة) .

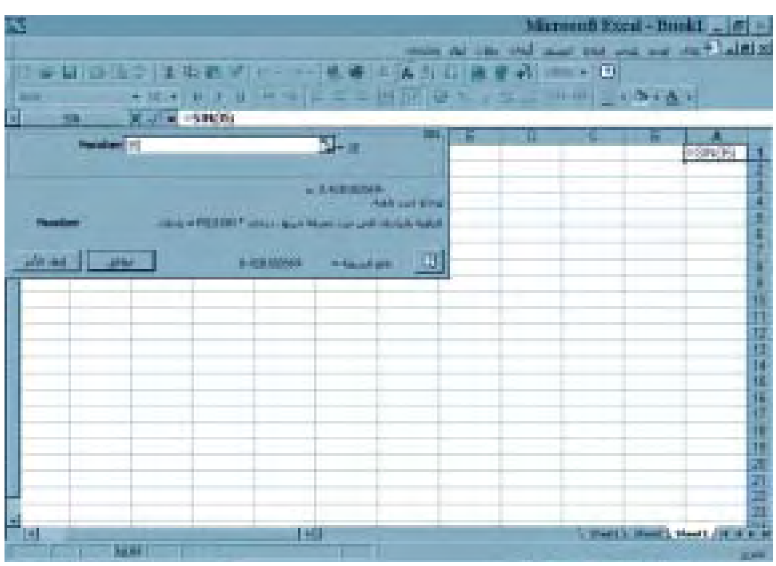
٢) نختار كلمة(رياضيات ومثلثات) من قائمة (فئة الدالة) .

٣) نختار كلمة (sin) من قائمة (اسم الدالة)



٤) نضغط (موافق) .

٥) يظهر صندوق الحوار ، ونكتب ٣٥ في المكان المسموح به للكتابة ونضغط موافق .



٦) يظهر العدد 0.42818 ، وهو جيب الزاوية ٣٥ْ .

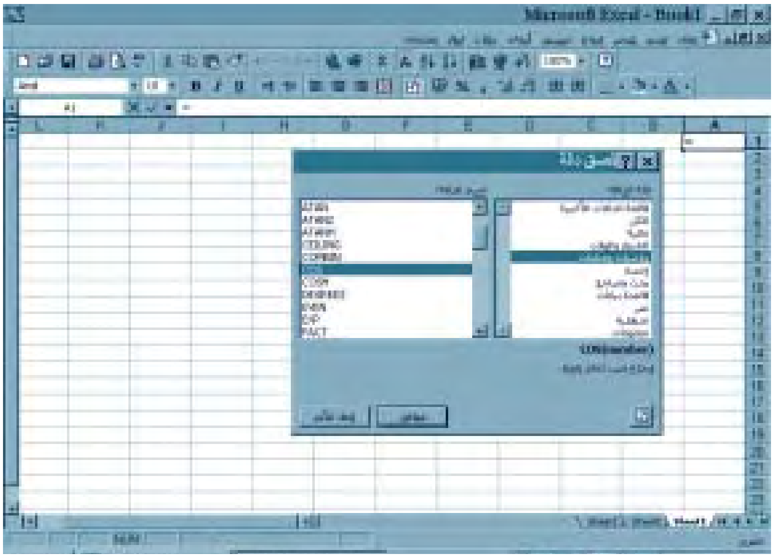
إيجاد جيب تمام الزاوية.

لإيجاد جيب تمام زاوية معلومة مثل ٧٣ْ ، نتبع الخطوات التالية :

١) نضغط على f_x ، فيظهر صندوق الحوار (لصق دالة) .

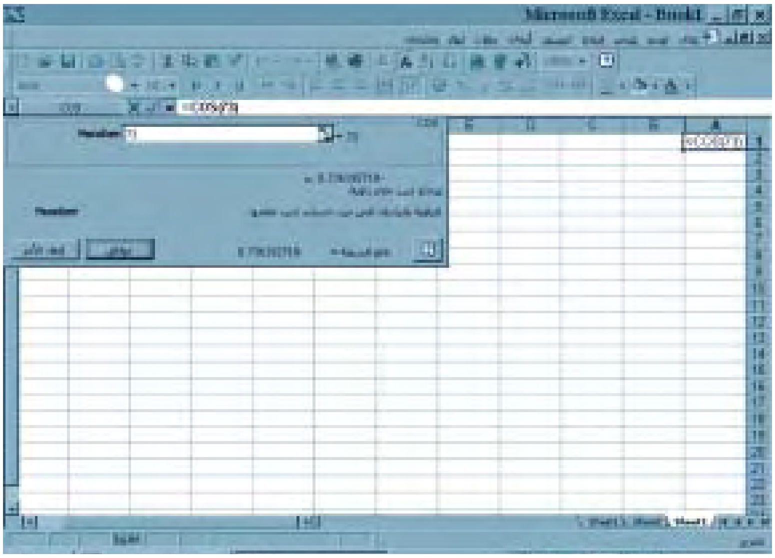
٢) نختار كلمة(رياضيات ومثلثات) من قائمة (فئة الدالة) .

٣) نختار كلمة (cos) من قائمة (اسم الدالة)



٤) نضغط (موافق) .

٥) يظهر صندوق الحوار ، ونكتب ٧٣ في المكان المسموح به للكتابة ونضغط موافق .



٦) يظهر العدد 0.73619 ، وهو جيب تمام الزاوية ٧٣ْ .

الجداول المثلثية

قياس الزاوية بالدرجات	جا أ	جتا أ	ظا أ
١	٠,٠١٧٥	٠,٩٩٩٨	٠,٠١٧٥
٢	٠,٠٣٤٩	٠,٩٩٩٤	٠,٠٣٤٩
٣	٠,٠٥٢٣	٠,٩٩٨٦	٠,٠٥٢٤
٤	٠,٠٦٩٨	٠,٩٩٧٦	٠,٠٦٩٩
٥	٠,٠٨٧٢	٠,٩٩٦٢	٠,٠٨٧٥
٦	٠,١٠٤٥	٠,٩٩٤٥	٠,١٠٥١
٧	٠,١٢١٩	٠,٩٩٢٥	٠,١٢٢٨
٨	٠,١٣٩٢	٠,٩٩٠٣	٠,١٤٠٥
٩	٠,١٥٦٤	٠,٩٨٧٧	٠,١٥٨٤
١٠	٠,١٧٣٦	٠,٩٨٤٨	٠,١٧٦٣
١١	٠,١٩٠٨	٠,٩٨١٦	٠,١٩٤٤
١٢	٠,٢٠٧٩	٠,٩٧٨١	٠,٢١٢٦
١٣	٠,٢٢٥٠	٠,٩٧٤٤	٠,٢٣٠٩
١٤	٠,٢٤١٩	٠,٩٧٠٣	٠,٢٤٩٣
١٥	٠,٢٥٨٨	٠,٩٦٥٩	٠,٢٦٧٩
١٦	٠,٢٧٥٦	٠,٩٦١٣	٠,٢٨٦٧
١٧	٠,٢٩٢٤	٠,٩٥٦٣	٠,٣٠٥٧
١٨	٠,٣٠٩٠	٠,٩٥١١	٠,٣٢٤٩
١٩	٠,٣٢٥٦	٠,٩٤٥٥	٠,٣٤٤٣
٢٠	٠,٣٤٢٠	٠,٩٣٩٧	٠,٣٦٤٠

قياس الزاوية بالدرجات	جا أ	جتا أ	ظا أ
٢١	٠,٣٥٨٤	٠,٩٣٣٦	٠,٣٨٣٩
٢٢	٠,٣٧٤٦	٠,٩٢٧٢	٠,٤٠٤٠
٢٣	٠,٣٩٠٧	٠,٩٢٠٥	٠,٤٢٤٥
٢٤	٠,٤٠٦٧	٠,٩١٣٥	٠,٤٤٥٢
٢٥	٠,٤٢٢٦	٠,٩٠٦٣	٠,٤٦٦٣
٢٦	٠,٤٣٨٤	٠,٨٩٨٨	٠,٤٨٧٧
٢٧	٠,٤٥٤٠	٠,٨٩١٠	٠,٥٠٩٥
٢٨	٠,٤٦٩٥	٠,٨٨٢٩	٠,٥٣١٧
٢٩	٠,٤٨٤٨	٠,٨٧٤٦	٠,٥٥٤٣
٣٠	٠,٥٠٠٠	٠,٨٦٦٠	٠,٥٧٧٤
٣١	٠,٥١٥٠	٠,٨٥٧٢	٠,٦٠٠٩
٣٢	٠,٥٢٩٩	٠,٨٤٨٠	٠,٦٢٤٩
٣٣	٠,٥٤٤٦	٠,٨٣٨٧	٠,٦٤٩٤
٣٤	٠,٥٥٩٢	٠,٨٢٩٠	٠,٦٧٤٥
٣٥	٠,٥٧٣٦	٠,٨١٩٢	٠,٧٠٠٢
٣٦	٠,٥٨٧٨	٠,٨٠٩٠	٠,٧٢٦٥
٣٧	٠,٦٠١٨	٠,٧٩٨٦	٠,٧٥٣٦
٣٨	٠,٦١٥٧	٠,٧٨٨٠	٠,٧٨١٣
٣٩	٠,٦٢٩٣	٠,٧٧٧١	٠,٨٠٩٨
٤٠	٠,٦٤٢٨	٠,٧٦٦٠	٠,٨٣٩١

قياس الزاوية بالدرجات	جا أ	جتا أ	ظا أ
٤١	٠,٦٥٦١	٠,٧٥٤٧	٠,٨٦٩٣
٤٢	٠,٦٦٩١	٠,٧٤٣١	٠,٩٠٠٤
٤٣	٠,٦٨٢٠	٠,٧٣١٤	٠,٩٣٢٥
٤٤	٠,٦٩٤٧	٠,٧١٩٣	٠,٩٦٥٧
٤٥	٠,٧٠٧١	٠,٧٠٧١	١,٠٠٠
٤٦	٠,٧١٩٣	٠,٦٩٤٧	١,٠٣٥٥
٤٧	٠,٧٣١٤	٠,٦٨٢٠	١,٠٧٢٤
٤٨	٠,٧٤٣١	٠,٦٦٩١	١,١١٠٦
٤٩	٠,٧٥٤٧	٠,٦٥٦١	١,١٥٠٤
٥٠	٠,٧٦٦٠	٠,٦٤٢٨	١,١٩١٨
٥١	٠,٧٧٧١	٠,٦٢٩٣	١,٢٣٤٩
٥٢	٠,٧٨٨٠	٠,٦١٥٧	١,٢٧٩٩
٥٣	٠,٧٩٨٦	٠,٦٠١٨	١,٣٢٧٠
٥٤	٠,٨٠٩٠	٠,٥٨٧٨	١,٣٧٦٤
٥٥	٠,٨١٩٢	٠,٥٧٣٦	١,٤٢٨١
٥٦	٠,٨٢٩٠	٠,٥٥٩٢	١,٤٨٢٦
٥٧	٠,٨٣٨٧	٠,٥٤٤٦	١,٥٣٩٩
٥٨	٠,٨٤٨٠	٠,٥٢٩٩	١,٦٠٠٣
٥٩	٠,٨٥٧٢	٠,٥١٥٠	١,٦٦٤٣
٦٠	٠,٨٦٦٠	٠,٥٠٠٠	١,٧٣٢١
٦١	٠,٨٧٤٦	٠,٤٨٤٨	١,٨٠٤٠
٦٢	٠,٨٨٢٩	٠,٤٦٩٥	١,٨٨٠٧
٦٣	٠,٨٩١٠	٠,٤٥٤٠	١,٩٦٢٦
٦٤	٠,٨٩٨٨	٠,٤٣٨٤	٢,٠٥٠٣
٦٥	٠,٩٠٦٣	٠,٤٢٢٦	٢,١٤٤٥

قياس الزاوية بالدرجات	جا أ	جتا أ	ظا أ
٦٦	٠,٩١٣٥	٠,٤٠٦٧	٢,٢٤٦٠
٦٧	٠,٩٢٠٥	٠,٣٩٠٧	٢,٣٥٥٩
٦٨	٠,٩٢٧٢	٠,٣٧٤٦	٢,٤٧٥١
٦٩	٠,٩٣٣٦	٠,٣٥٨٤	٢,٦٠٥١
٧٠	٠,٩٣٩٧	٠,٣٤٢٠	٢,٧٤٧٥
٧١	٠,٩٤٥٥	٠,٣٢٥٦	٢,٩٠٤٢
٧٢	٠,٩٥١١	٠,٣٠٩٠	٣,٠٧٧٧
٧٣	٠,٩٥٦٣	٠,٢٩٢٤	٣,٢٧٠٩
٧٤	٠,٩٦١٣	٠,٢٧٥٦	٣,٤٨٧٤
٧٥	٠,٩٦٥٩	٠,٢٥٨٨	٣,٧٣٢١
٧٦	٠,٩٧٠٣	٠,٢٤١٩	٤,٠١٠٨
٧٧	٠,٩٧٤٤	٠,٢٢٥٠	٤,٣٣١٥
٧٨	٠,٩٧٨١	٠,٢٠٧٩	٤,٧٠٤٦
٧٩	٠,٩٨١٦	٠,١٩٠٨	٥,١٤٤٦
٨٠	٠,٩٨٤٨	٠,١٧٣٦	٥,٦٧١٣
٨١	٠,٩٨٧٧	٠,١٥٦٤	٦,٣١٣٨
٨٢	٠,٩٩٠٣	٠,١٣٩٢	٧,١١٤٥
٨٣	٠,٩٩٢٥	٠,١٢١٩	٨,١٤٤٣
٨٤	٠,٩٩٤٥	٠,١٠٤٥	٩,٥١٤٤
٨٥	٠,٩٩٦٢	٠,٠٨٧٢	١١,٤٣٠١
٨٦	٠,٩٩٧٦	٠,٠٦٩٨	١٤,٣٠٠٧
٨٧	٠,٩٩٨٦	٠,٠٥٢٣	١٩,٠٨١١
٨٨	٠,٩٩٩٤	٠,٠٣٤٩	٢٨,٦٣٦٣
٨٩	٠,٩٩٩٨	٠,٠١٧٥	٥٧,٢٩٠٠
٩٠	١,٠٠٠٠	٠,٠٠٠٠	∞

ساهم في انجاز هذا العمل:

لجنة المناهج الوزارية :(قرار الوزير بتاريخ ٢٣/١١/٢٠٠٢م)

– د. نعيم أبو الحمص (رئيساً) – جهاد زكارنة (عضواً) –زينب الوزير (عضواً)

– د. عبد الله عبد المنعم (نائب الرئيس) –هشام كحيل (عضواً) – د. صلاح ياسين (أمين السر)

اللجنة الفنية للمتابعة:

– د. صلاح ياسين (منسقاً) – د. غازي أبو شرخ(عضواً) – أ. منير الخالدي (عضواً)

ـ د. عمر أبو الحمص (عضواً) – أ. صبحي الكايد (عضواً) –مديرالقياس والتقويم (عضواً)

– د. هيفاء الآغا(عضواً) – أ. جميل أبو سعدة (عضواً)

المشاركون في ورشة عمل الطبعة الثالثة من الكتاب:

– جمال ثابت – داود عبد الله – حنان سليمان

– إيمان داود – خالد بكر – زين البها الفروخ

– جمال خضر – مرشد يوسف – سالم عثمان

– محمد العيشاوي

تم الجزء الأول بحمد الله