الفصل الثانـي

الجـانــب النظري

مقدمة: Introduction

يتضمن هذا الفصل الإطار النظري ويتكون من جزئين الأول ويشمل على مفاهيم البرمجة والبرمجة الخطية ونماذج البرمجة الخطية وطرق حلها والثاني يركز على مفاهيم برمجة الأهداف وعلاقتها بالبرمجة الخطية وبناء نماذجها وطرق حلها.

(2−0) البرمجة الرياضية: Mathematical Programming

{ [19]،[20]،[22]،[30]، [26]، [27] }

البرمجة الرياضية تعرف بأنها العلم الذي يبحث في تحديد القيمة العظمى أو القيمة الصغرى لدالة محدده تسمى دالة الهدف Objective function والتي تعتمد, على عدد محدد من المتغيرات .هذه المتغيرات قد تكون مستقلة عن بعضها، أو قد تكون مرتبطة مع بعضها بما يسمى القيود Constraints ومن الطبيعي أن تهتم البرمجة الرياضية بدراسة طرائق الحل وكيفية بنائها.

والصيغة العامة للبرمجة الرياضية تأخذ الشكل الأتي

Optimize (minimization or maximization)

$Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$

Subject to

$$\left.\begin{array}{l} g(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ g(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ . \\ . \\ . \\ g(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{array}\right\} \begin{array}{c} \geq \\ = \\ \leq \end{array} \left\{\begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \\ . \\ . \\ . \\ b_n \end{array}\right.$$

(2−1) أنواع البرمجة الرياضية: Type of Mathematical Programming

هناك أنواع عديدة من البرمجة الرياضية أهمها البرمجة الخطية، البرمجة الخطية الصحيحة، البرمجة الهدفية أو برمجة الأهداف، البرمجة غير الخطية، البرمجة الديناميكية، والبرمجة العشوائية (التصادفية).

(2-2) البرمجة الخطية: Linear Programming

البرمجة الخطية هي إحدى طرق بحوث العمليات التي شاع تطبيقها واستخدامها في إتخاذ قرارات التخطيط المثلى وتعرف على أنها طريقة رياضية منظمة تتعلق بتخصيص Allocation الموارد المحدودة من المواد الأولية والعمل والآلات والمعدات ورأس المال بأفضل طريقة ممكنة من أجل تحقيق هدف معين وعادة ما يكون هذا الهدف هو تعظيم Maximization الأرباح أو تخفيض Minimization التكاليف.

(1-2-2) نموذج البرمجة الخطية: Linear Programming Model

البرمجة الخطية عبارة عن أسلوب رياضي يستخدم في إيجاد الحل الأمثل لكيفية إستخدام المشكلة لمواردها.

الصيغة العامة لنموذج البرمجة الخطية

دالة الهدف

$$\text{Optimize: } Z=\sum_{j=1}^{n} C_j X_j \longrightarrow \quad (1-2)$$

القيود الأساسية

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j (\leq = \geq)\ b_i \longrightarrow \quad (2-2)$$

عدم السلبية

$$X_j \geq 0 \longrightarrow \quad (3-2)$$

$i=1, 2,\dots, m \quad j=1, 2,\dots,n$

إن الشكل الرياضي العام لنموذج البرمجة الخطية هو:

Optimize $Z = C_1X_1 + C_2X_2 + C_3X_3 + \cdots + C_nX_n$

Subject to

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}X_1 + a_{12}X_2 + \cdots + a_{1n}X_n \leq=\geq b_1 \\ a_{21}X_1 + a_{22}X_2 + \cdots + a_{2n}X_n \leq=\geq b_2 \\ \quad\vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ a_{m1}X_1 + a_{m2}X_2 + \cdots + a_{mn}X_n \leq=\geq b_m \end{array}\right\}$$

$X_1, X_2, \dots, X_n \ 0 \geq$

$i=1,2,\dots,m \quad j=1,2,\dots,n$

من الشكل أعلاه فإن $X_1, X_2, \dots, X_n$ تسمى متغيرات القرار وعادة ما تمثل، ساعات الإنتاج، رأس المال، ... أي أن المسألة تحتوي على n من متغيرات القرار $X_j \geq 0$ وتسمى المعادلة الأولى

بدالة الهدف Objective Function فهي إما يكون الهدف منها هو تعظيم الربح أو تخفيض التكلفة، أي أن كلمة الأمثل Optimize أما تكون Maximize أو Minimize.

أما $C_1, C_2, ..., C_n$ فتسمى بمعاملات دالة الهدف، أي معاملات المتغيرات في دالة الهدف. وعادة تمثل ربح او كلفة.

أما المعادلات الأخرى فتسمى بالقيود Constraints على دالة الهدف وفي هذه المعادلات، المعاملات $a_{ij}\ ; i = 1,2,...,n\ ; j = 1,2,...,m$ لمتغيرات النموذج، ويتضح أن هناك m من المعادلات أو المتباينات، إما $b_1, b_2, ..., b_m$ فتسمى بالثوابت Constants وهي ما متاح من الموارد (ساعات العمل، عدد العاملين، المواد الأولية، رأس المال، ...).

(2-2-2) حل نموذج البرمجة الخطية:

بعد إكمال الخطوة الأولى والمتمثلة ببناء نموذج البرمجة الخطية تكون الخطوة الثانية حل النموذج لإيجاد قيم متغيرات القرار، ولحل نموذج البرمجة الخطية توجد طريقتان

(2-2-3) الطريقة البيانية Graphical Method

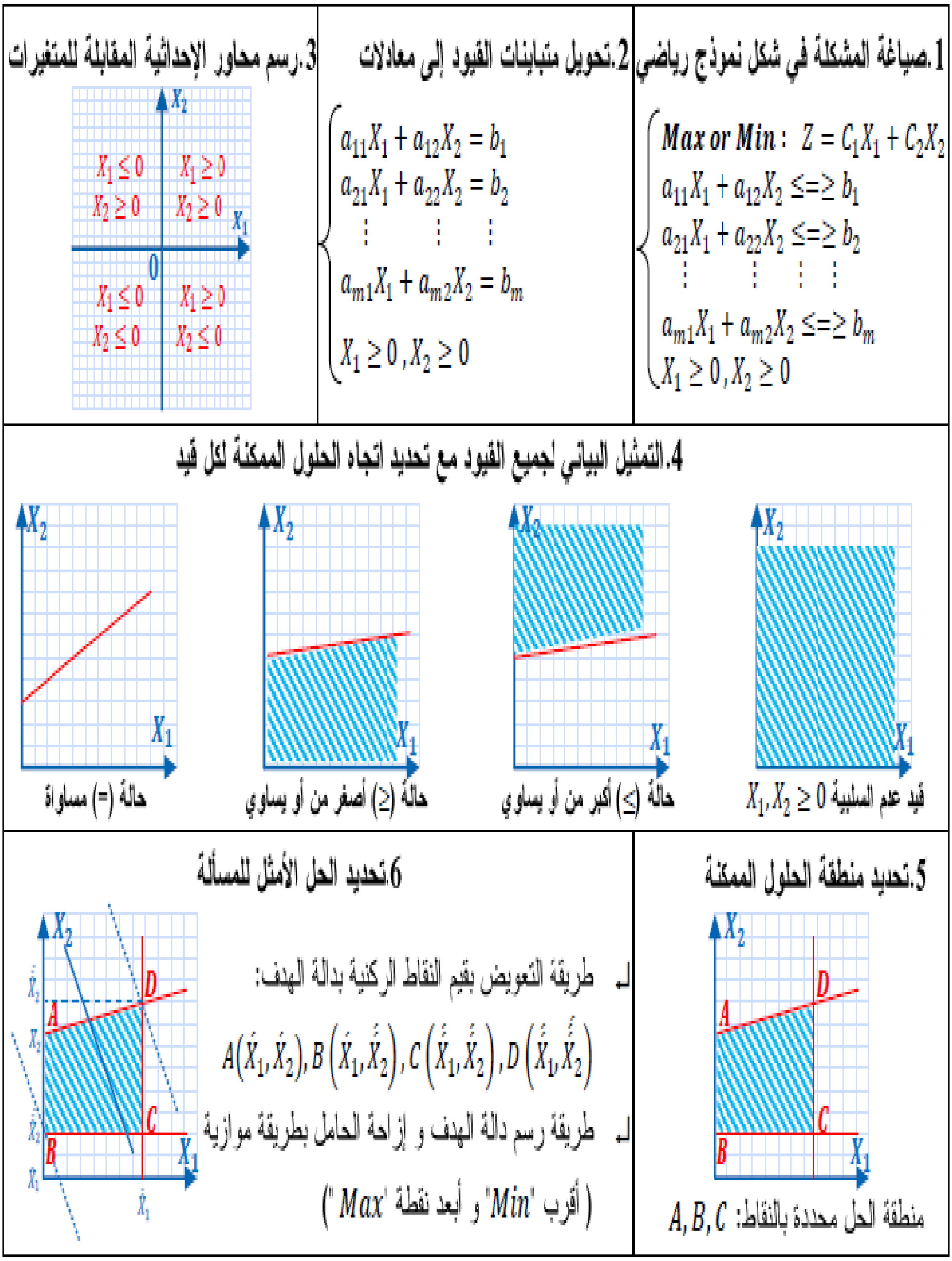
يتم إنجاز الحل البياني من خلال تمثيل قيود مشكلة البرمجة الخطية بيانياً والتي تعد وسيلة ناجحة في توضيح الكثير من المشاكل المرتبطة بها، وتتميز بالسرعة النسبية لكن إستخدامها مقيد بضرورة أن ينطوي النموذج على متغيرين (متغيرات القرار تكون أثنان فقط) حيث لا يمكن إستخدامها لعدد أكثر من متغيرين.

وتتخلص خطواتها كالأتي:

1. تحويل متباينات القيود إلى معادلات.
2. رسم محاور الإحداثية المقابلة لمتغيرات المشكلة.
3. التمثيل البياني لجميع القيود مع تحديد إتجاه الحلول الممكنة لكل قيد.

ويمكن توضيح مراحل الحل بالطريقة البيانية كما في الجدول التالي:

الشكل رقم 2-1: ملخص لخطوات الحل باستخدام الطريقة البيانية



المصدر: رسالة ماجستير– الطالبة باشا نجاح

(2-2-4) حالات خاصة في الطريقة البيانية:-

هناك أربع حالات خاصة تظهر عند إستخدام الطريقة البيانية في حل مشاكل البرمجة الخطية:

1- الفائض: Surplus

وتسمى بحالة التكرار، وتتمثل في وجود قيد فائض أي أن وجوده أو عدم وجوده لا يؤثر على منطقة الحلول الممكنة، ويعني وجود قيود أكثر أهمية من غيرها.

2- تعدد الحلول المثلى: Multiple Optimal Solution

وتعني وجود أكثر من حل أمثل، وتظهر عند تطابق (توازي) دالة الهدف مع أحد قيود المشكلة، أي يكون لهما نفس الميل.

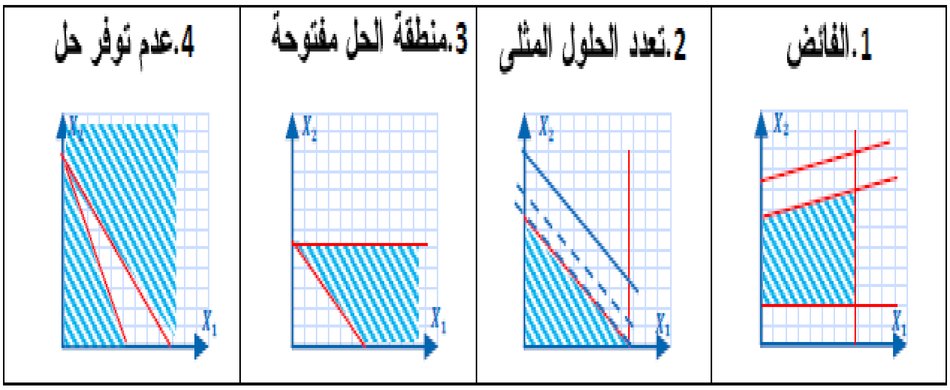
3- منطقة الحلول مفتوحة: Open area solutions

ويعني عدم وجود حل للمشكلة قيد الدراسة وذلك بسبب عدم تقاطع مناطق حلول القيود وبالتالي عدم وجود منطقة حلول مشتركة.

4- عدم توفر حل: No Feasible Solution

وهي التي لاتوجد منطقة حلول مشتركة بين القيود.

الشكل رقم 2-2: أمثلة للحالات الخاصة في طريقة الرسم البياني



المصدر: رسالة ماجستير – الطالبة باشا نجاح

(2-2-5) طريقة السمبلكس: Simplex Method

طريقة السمبلكس وسيلة رياضية تتمتع بدرجة عالية من الكفاءة بصدد الحصول على الحل الأمثل لمشكلة البرمجة الخطية ، وتصلح لأي عدد من متغيرات القرار .

وتعتمد هذه الطريقة على فكرة أساسية مؤداها إحداث تحسن مضطرد لقيم دالة الهدف، حيث يبدأ ببعض الحلول الممكنة الأساسية ونمر بين هذه الحلول في خطوات محددة تماماً بحيث تزداد قيمة دالة الهدف في كل خطوة، وتستمر هذه الطريقة حتى نحصل على الحل الممكن الأساسي الذي تكون عنده دالة الهدف أكبر ما يمكن (عند حالة تعظيم الأرباح) وتقليل قيمة دالة الهدف إلى أقل مايمكن (عند حالة تدنية التكاليف).

تسير طريقة السمبلكس بخطوات منتظمة في إيجاد الحل الأمثل .ويتم الحصول على الحل الأمثل بإتباع خطوات معدودة، علمًا أن طريقة السمبلكس تشير إلى نوعية الحلول فيما إذا كانت المسألة بدون حل أمثل أو أن لها حلولاً متعددة.

(6-2-2) إجراءات الحل بطريقة السمبلكس :-

يتم إيجاد الحل لنماذج البرمجة الخطية (LP) بموجب طريقة Simplex وفقاً إلى ثلاث مراحل أساسية و متسلسلة، و يمكن وصفها على النحو الآتي:

1) إيجاد الحل الأساسي الممكن (الحل الأولي) (Feasible solution).

2) تحسين الحل الأولي للحصول على الحل الأفضل (Best solution).

3) تحسين الحل الأفضل للحصول على الحل الأمثل (Optimal solution).

وقد يتم ذلك بخطوة واحدة أو عدة خطوات وكما يلي:

1- تحويل نموذج البرمجة الخطية من الصيغة العامة أو القانونية (canonical form) الى الصيغة القياسية (Standard form) وذلك:

(أ). بإضافة متغير راكد (Si) (Slack Variable) الى دالة الهدف (Z) و من ثم تحويل دالة الهدف (Z) الى معادلة صفرية عن طريق تحويل القيم الى الجانب الايسر وجعلها تساوي صفر.

(ب). بإضافة متغير راكد الى قيود المشكلة (لا بد أن تكون من نوع اصغر من او يساوي) إلى الطرف الاقل من المعادلة وهو الطرف الايسر.

2- تحديد عدم السلبية اي ان كافة قيم المتغيرات في المشكلة تكون موجبة أو مساوية للصفر أي أن (X_j , $S_i \geq 0$)

حيث $j=1,2,\ldots,n$ عدد المتغيرات

و $i=1,2,\ldots,m$ عدد القيود.

3- تنظيم جدول الحل الأساسي الممكن (Feasible solution) أو الإبتدائي بالاعتماد على جميع معاملات المتغيرات X_j, S_i في قيود النموذج و دالة الهدف.

4- تحديد المتغير الداخل (Entering variable) وعلى أساس أكبر قيمة بإشارة سالبة في صف دالة الهدف (Z) إذا كانت دالة الهدف هي تعظيم Max وعلى أساس أكبر قيمة بإشارة موجبة في صف دالة الهدف (Z) إذا كانت دالة الهدف هي تصغير Min.

5- العمود الذي يوجد فيه المتغير الداخل يسمى بالعمود المحوري (Pivot column).

6- تحديد المتغير الخارج (Leaving variable) عن طريق قسمة القيم الموجودة في الجهة اليمنى في عمود (Right hand side RHS) على ما يقابلها من قيم المعاملات في العمود المحوري (Pivot col.) ، و المتغير الذي يقابل أقل قيمة موجبة (وتهمل القيم غير المعرفة والسالبة) من خوارج القسمة يعد هو المتغير الخارج ، ليحل المتغير الداخل محله في الجدول لاحقا.

7- الصف الذي يوجد فيه المتغير الخارج يسمى بالصف المحوري (Pivot row). أما العنصر الذي يقع تحت المتغير الداخل ، و أمام المتغير الخارج فيسمى بالعنصر المحوري (Pivot element) أو نقطة الارتكاز وهو العنصر الناتج من تقاطع عمود المتغير الداخل مع صف المتغير الخارج .

8- يمكن الحصول على المعادلة المحورية أو الممهدة (Pivot equation) من خلال قسمة القيم في صف المتغير الخارج على العنصرالمحور (Pivot element) وهي تمثل قيم المتغير الداخل الجديدة.

9- لغرض تحسين الحل الممكن أي بناء جدول آخر

a) يتم وضع المعادلة المحورية أو الممهدة في الجدول الجديد للحل في الموقع نفسه حيث يخرج منه المتغير الخارج ليحل محله المتغير الداخل.

b) يتم إيجاد معاملات دالة الهدف الجديدة (New z) و كالآتي :

معاملات (Z) الجديدة =

معاملات (Z) القديمة – معامل المتغير الداخل في صف دالة الهدف * المعادلة المحورية

بمعنى ضرب العنصر المقابل لدالة الهدف في عمود المحور(تحت العنصر الداخل) في المعادلة المحورية وطرح النتيجة مع قيم دالة الهدف في الجدول القديم وتوضع في الجدول الجديد.

c) يتم إيجاد معاملات القيود الجديدة للمتغيرات Si وكالآتي:

معاملات (Si) الجديدة =

معاملات (Si) القديمة – معامل المتغير الداخل في صف (Si) القديمة * المعادلة المحورية

بمعنى أخذ المعامل تحت المتغير الداخل للقيد بعكس اشارته وضربه بالمعادلة الممهدة ومن ثم جمعه مع القيم العائدة له في الجدول وتوضح في الجدول الجديد وهكذا مع بقية القيود الاخرى .

10- يتم الوصول للحل الامثل optimal solution عندما تكون جميع معاملات دالة الهدف الجديدة في جدول الحل أكبر من أو تساوي صفر إذا كانت دالة الهدف تعظيم Max، أما اذا كانت قيمة واحدة على الأقل في دالة الهدف سالبة فهذا يعني عدم التوصل الى الحل الأمثل. أو عندما تكون جميع معاملات دالة الهدف الجديدة في جدول الحل أقل من أو تساوي صفر إذا كانت دالة الهدف تصغير Min، أما اذا كانت قيمة واحدة على الأقل في دالة الهدف موجبة فهذا يعني عدم التوصل الى الحل الأمثل.

11- يعاد إجراء الخطوات السابقة نفسها بدءا من تحديد العنصر الداخل و الخارج والمعادلة المحورية حتى تصبح جميع معاملات دالة الهدف أكبر أو تساوي صفر.

(2-2-7) حالات خاصة في طريقة السمبلكس:-

من خلال البحث عن الحل الأمثل لمشاكل البرمجة الخطية بطريقة السمبلكس، تظهر حالات خاصة قد تنجم عن عدم الدقة في صياغة النماذج الرياضية أو في تحديد العوامل المؤثرة على المسألة موضوع البحث ومن أهم هذه الحالات:

1- عدم وجود حلول ممكنة (تعذر الحل): No Feasible Solutions

تحدث هذه الحالة عندما لا نجد حلاً مرضياً لجميع قيود المشكلة، ويتم التعرف على ذلك من خلال الجدول النهائي، حيث تكون جميع القيم في صف ($C_j - Z_j$) تشير إلى تحقق شرط الأمثلية في حين يبقى متغير إصطناعي أو أكثر في عمود المتغيرات الأساسية، أي دخول متغيرات إصطناعية للحل النهائي، وسبب ذلك هو أن صياغة المشكلة لم تكن بالشكل الصحيح.

بطريقة أوضح في هذه الحالة نصل إلى جدول في جميع معاملات دالة الهدف أقل من أو تساوي صفر في حالة التعظيم أو أكبر من أو يساوي في حالة التقليل، لكن المتغيرات الأساسية تتضمن متغير إصطناعي واحد أو أكثر مما يوحي بوجود خطأ في تركيب البرنامج.

2- حلول غير محدودة: Unbounded Solutions

تظهر هذه الحالة قبل الوصول إلى الحل الأمثل، عند أحد مراحل التحسين على مستوى عمود النسب عند تحديد المتغير الخارج حيث تكون جميع النسب صفرية أو سالبة أو غير محدودة وبالتالي عدم التمكن من تحديد المتغير الخارج.

3- إنحلال الحل (تفكك/ تكرار): Degeneracy

تحدث هذه الحالة عندما تضم المشكلة قيداً فائضاً، وتظهر على مستوى عمود النسب عندما يتعذر إختيار المتغير الخارج بسبب تساوى النسب.

4- وجود أكثر من حل أمثل (تعدد الحلول المثلى): Multiple Optimal Solutions

تظهر هذه الحالة على مستوى سطر التقييم بالجدول النهائي قيم صفرية لمتغيرات غير أساسية رغم عدم وجودها في مزيج الحل، مما يعني أنها تعطي نفس الحل الأمثل أي أنها حلول بديلة.

(2-3) برمجة الأهداف: Goal Programming

{ [24]،[23]،[39] ،[18] ،[37] ،[6] }

برمجة الأهداف تعتبر تقنية تستخدم من أجل حل مشاكل القرارات متعددة الأهداف، حيث يمكن لهذا الأسلوب معالجة المشاكل التي تتضمن أهدافاً رئيسية متعددة وأهدافاً فرعية متعددة حتى ولو كانت متعارضة، كما أنّ دالة الهدف في نموذج برمجة الأهداف قد تشمل وحدات قياس غير متجانسة مثل عملات ،عدد الوحدات ، الأوزان ....

ويتم معالجة الأهداف المتعددة والمتعارضة عن طريق ترتيب وتوضيح الأهداف ، بحيث يتم تحقيق الأهداف ذات المرتبة الدنيا بعد تحقيق الأهداف التي تعلوها مرتبة، أو بعد أن تصل هذه الأهداف إلى نقطة لا يمكن بعدها إحداث أي تحسينات عليها في ظل القيود المتعارضة .

(2-3-1) نموذج برمجة الأهداف: Goal Programming Model

هو نموذج رياضي يهدف إلى إيجاد أقرب وأحسن الحلول إلى عدد من الأهداف المحددة مسبقاً ، وبعبارة أخرى يهدف نموذج برمجة الأهداف إلى تخفيض مجموع الانحرافات عن الأهداف المحددة مسبقاً إلى أدنى حد ممكن.

ويقوم نموذج برمجة الأهداف على مبدأ أساسي ، هو أنّ متخذي القرار لا ينظرون عادة للحلول المثلى وخاصة في ظل تعدد الأهداف وتعارضها ولكن يتطلعون إلى الحلول التي يمكن اعتبارها مقبولة أو قريبة من الوضع الأمثل .

ومما سبق نجد أنّ نموذج برمجة الأهداف يعتبر أسلوباً فعّالاً في التعامل مع المشاكل ذات الأهداف المتعددة والمتعارضة .

الصياغة العامة لنموذج برمجة الأهداف كما يلي:

Minimize Z = $\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{m}}(\mathbf{d_i^+} + \mathbf{d_i^-}) \longrightarrow (4-2)$

Subject to:

$\mathbf{A}\underline{\mathbf{X}} - \mathbf{I}\underline{\mathbf{d}^+} + \mathbf{I}\underline{\mathbf{d}^-} = \underline{\mathbf{b}} \longrightarrow (5-2)$

$\mathbf{Xj},\ \mathbf{d_i^-},\ \mathbf{d_i^+} \geq \mathbf{0} \longrightarrow (6-2)$

حيث

$\underline{\mathbf{b}}$: وتمثل (القيم المستهدفة) وهنا تكون لدينا m من الأهداف يعبر عنها بواسطة متجه عمودي يتكون من m العناصر

A: تعبر عن العلاقة بين الأهداف الرئيسية والأهداف الفرعية وهي معاملات متغيرات القرار وتمثل مصفوفة إبعادها(m×n)

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\underline{b} = \begin{pmatrix} b1 \\ b2 \\ \vdots \\ bm \end{pmatrix}$$

X: هي متغيرات القرار وتمثل متجه يتألف $(n\times1)$

$$\underline{X} = \begin{pmatrix} X1 \\ X2 \\ . \\ . \\ . \\ Xn \end{pmatrix}$$

$\mathbf{d_i^-}$ **,** $\mathbf{d_i^+}$**:** هي متغيرات الإنحراف الموجب والسالب على التوالي وتمثل متجه عمودي يتألف من m العناصر للمتغير الذي يمثل الانحرافات عن الأهداف.

ومتغيرات الإنحراف هذه مجازية المعنى وليست حرفية المعنى، حيث $d_i^-, d_i^+ \geq 0$

$\mathbf{d_i^-}$**:** تشير إلى القصور في تحقيق الهدف.

$\mathbf{d_i^+}$**:** تشير إلى التجاوز في تحقيق الهدف.

وتمثل متجه يتألف $(m\times1)$

$$\underline{\mathbf{d}^+} = \begin{pmatrix} d_1^+ \\ d_2^+ \\ . \\ . \\ . \\ d_m^+ \end{pmatrix} \qquad \underline{\mathbf{d}^-} = \begin{pmatrix} d_1^- \\ d_2^- \\ . \\ . \\ . \\ d_m^- \end{pmatrix}$$

I: تمثل مصفوفة الوحدة التي تتألف $(m\times m)$ من الأبعاد.

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & . \; . \; . & 0 \\ 0 & 1 & . \; . \; . & 0 \\ . & & & \\ . & & & \\ . & & & \\ 0 & 0 & . \; . \; . & 1 \end{pmatrix}$$

(2-3-2) علاقة نموذج برمجة الأهداف بالبرمجة الخطية:

أنّ نموذج برمجة الأهداف استطاع أن يعالج العيب الأساسي في نموذج البرمجة الخطية، وهو التزامه بهدف واحد فقط وذلك عن طريق معالجة المشاكل المتعددة الأهداف، إضافة إلى أن نموذج برمجة الأهداف لا يشترط أن تقاس هذه الأهداف بوحدات قياس متجانسة، وعلى الرغم من التماثل النسبي في طريقة العرض الرياضي لكلا النموذجين، إلا أنّ نموذج برمجة الأهداف يمتاز عن نموذج البرمجة الخطية بقدرته على تحليل ومعالجة المشاكل ذات الأهداف المتعددة والمتعارضة.

وطبقاً لنموذج برمجة الأهداف فإنه يتم تخفيض الانحرافات عن تحقيق الأهداف في ظل القيود الموجودة، وعلى أساس الأهمية النسبية والأولوية لكل هدف، بدلاً من تعظيم أو تخفيض دالة الهدف مباشرةً كما في نموذج البرمجة الخطية، فيكون الغرض من استخدام نموذج برمجة الأهداف هو الوصول إلى الحل المرضي (Satisfied Solution)، الذي يخفض مجموع الانحرافات الموجبة والسالبة عن الأهداف المرجوة إلى أدنى حد ممكن بينما الغرض من استخدام نموذج البرمجة الخطية هو الوصول إلى الحل الأمثل للمشكلة (Optimized Solution).

والجدول الاتي يبين نواحي الاختلاف بين نموذج البرمجة الخطية ونموذج برمجة الأهداف كما يلي:

العنصر	البرمجة الخطية	برمجة الأهداف
الغرض أو الهدف	أمثل	إشباع
التعبيرات الكمية	خطية	خطية وغير خطية
التركيب أو البناء	هدف واحد، عدد من القيود	أهداف متعددة ، عدد من القيود
دالة الهدف	متغيرات قرارية	متغيرات قرارية، متغيرات إنحرافية
القيود والأهداف	أهمية متساوية	مرتبة حسب الأهمية، أهمية متساوية

يعتبر نموذج برمجة الأهداف أفضل من نموذج البرمجة الخطية للأسباب الأتية:

1- يأخذ النموذج في الاعتبار الأهداف المتعددة ، وينسجم ذلك مع اتجاه الأهداف المتعددة في كثير من القرارات .

2- يوفر هذا النموذج كمية كبيرة من البيانات لمتخذي القرار تساعدهم في اتخاذ القرار السليم ، وتجعل الإدارة أكثر فهماً لطبيعة المشكلة .

3- يسمح النموذج بعملية التوفيق بين الأهداف المتعارضة ، ولذلك فإنّ القيمة الحقيقية لنموذج برمجة الأهداف تكمن في قدرته على إيجاد حلول للمشاكل التي تتضمن أهدافاً متعددة ومتعارضة وفقاً لهيكل أو تفضيلات الإدارة .

4- يساعد نموذج برمجة الأهداف الإدارة على تحقيق المنفعة القصوى من المصادر المستخدمة في الإنتاج .

5- يعتبر نموذج برمجة الأهداف أسلوب سهل للاستخدام بالمقارنة مع بعض الأساليب الرياضية الأخرى.

نتيجة للمزايا السابقة استطاع نموذج برمجة الأهداف أن يقدم حلولاً للمشاكل التي عجز نموذج البرمجة الخطية عن تقديم حلولٍ لها.

(2-3-3) الإطار العام لنموذج برمجة الأهداف :

{ [35]، [36]، [32]، [31]، [29]، [38] }

يتحدد الإطار العام لنموذج برمجة الأهداف في ضوء ثلاثة عناصر رئيسية هي (دالة الهدف ومجموعة القيود المفروضة على المشكلة وشروط عدم السلبية) وسوف نقوم بتوضيح طبيعة وخصائص هذه العناصر فيما يلي:

1- **دالة الهدف** : **Objective Function**

تتميز دالة الهدف في نموذج برمجة الأهداف بأنها تتضمن معايير مرتبطة بالاهداف المطلوب تحقيقها، وهو تخفيض الانحرافات غير المرغوب فيها عن الأهداف المطلوبة إلى أدنى حد ممكن، بدلاً من دالة هدف مقيدة بمعيار واحد كما في نموذج البرمجة الخطية وهو إما تعظيم الربح أو تخفيض التكلفة، وتبين دالة الهدف لنموذج برمجة الأهداف مجموعة الانحرافات الموجبة والسالبة التي يجب تخفيضها إلى أدنى حد ممكن، وغالباً ما يصحب هذه الانحرافات أوزان ترجيح لأهداف تمثل الأولويات التي تضعها الإدارة لتحقيق الأهداف المختلفة.

دالة الهدف في نموذج برمجة الأهداف تظهر الرغبة على تحقيق كل الأهداف بقدر الإمكان وذلك بتقليل مجموع أوزان المتغيرات الإنحرافية.

هناك ثلاثة أنواع لدالة الهدف هي:

1. الأهداف المتساوية القياس والأهمية

Commensurate goals and equals important

وهي أبسط أنواع الأهداف ونادراً ما يتم وجودها في التطبيق العملي وتكتب على النحو الأتي

$$\text{Minimize: } Z = \sum_{j=1}^{n}(d_i^+ + d_i^-) \longrightarrow \qquad (7-2)$$

وفي هذا النوع يمكن إستخدام طريقة السمبلكس القياسية Standard Simplex .

2. الأهداف المتباينة الأوزان

Differential Weighting of Goals

هذا النوع من دالة الهدف تكون فيه مجموعة من الأهداف متكافئة القياس ولكن يفرق بين تلك الأهداف بإعطاء كل هدف وزن يختلف عن الأخر، ويمكن كتابة دالة الهدف كالأتي

$$\text{Min: } Z = \sum_{i=1}^{n} W_j(d_i^+ + d_i^-) \longrightarrow \quad (8-2)$$

3. ترتيب الأسبقية للأهداف

Priority Ranking of Goals

وهو أكثر أنواع دالة الهدف شيوعاً، ودائماً تواجهنا عملياً عندما تكون الأهداف غير متكافئة القياس لذا لابد من عمل ترتيب لأسبقية الأهداف وفقاً لأهميتها من وجهة نظر متخذ القرار مع إمكانية إعطاء أوزان متباينة للأهداف داخل حدود مستوى الأسبقية الواحدة ولترتيب الأسبقيات يرمز لها بالرمز P_j مع وجوب توفر الشرط التالي

$$P_1 > P_2 > \cdots > P_j$$

J=1, 2,…, k

حيث k تمثل عدد الأسبقيات في النموذج والرمز > : أكبر من

ويمكن كتابة دالة الهدف كالاتي

$$\text{Min: } Z = \sum_{i=1}^{n} P_i(d_i^+ + d_i^-) \longrightarrow \quad (9-2)$$

وهذا النوع من دوال الهدف يتم فيه الحل بإيجاد الحل للاسبقية الأولى P_1 ومن ثم الإنتقال إلى الأسبقية الثانية P_2 وهكذا.

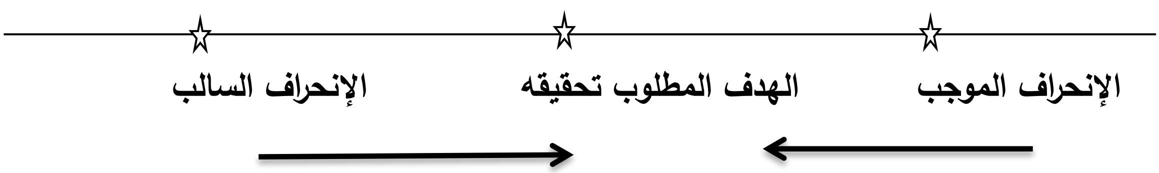
وتتكون دالة هدف نموذج برمجة الأهداف من الانحرافات غير المرغوب فيها عن مستويات الأهداف المطلوب تحقيقها، بحيث يتم تخفيض مجموع هذه الانحرافات إلى أدنى حد ممكن ، ومن الممكن أن يكون الانحراف أكبر من قيمة الهدف ويرمز له بالرمز (d^+) أو أن يكون الانحراف أصغر من قيمة الهدف ويرمز له بالرمز (d^-) ، وتتوقف إشارة الانحراف في دالة الهدف على رغبة متخذ القرار في تحقيق مستوى الهدف المطلوب، حيث d^+ ، d^- أكبر من أوتساوي صفر.

ويمكن إيضاح بعض الحالات التي يمكن أن تظهر فيها قيمة (d) وأثر ذلك على دالة الهدف فيما يلي.

أ- **تحقيق مستوى الهدف بالضبط** : أي أنّ متخذ القرار يرغب في تحقيق مستوى الهدف بالضبط بدون أي زيادة أو نقص عن هذه القيمة ، وفي هذه الحالة يتم وضع متغيرات الانحراف (d^+ ، d^-) في دالة الهدف كما يلي :

((المطلوب تخفيض (d^+، d^-) إلى أدنى حد ممكن))

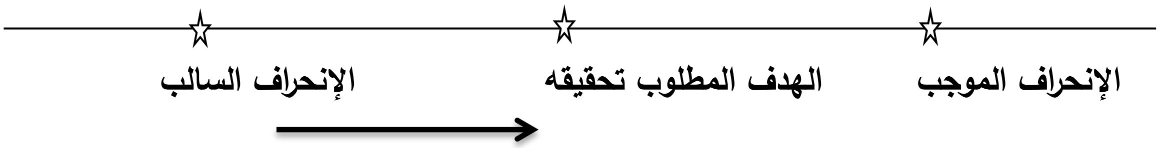
مثال: عندما لايحدد متخذ القرار الهدف بزيادة او نقصان



ب- تحقيق أقصى قيمة للهدف : أي أنّ متخذ القرار يرغب في تخفيض الانحراف السالب ، بينما يكون الانحراف الموجب مرغوب فيه ، وفي هذه الحالة يتم صياغة دالة الهدف من الانحراف السالب فقط كما يلي :

((المطلوب تخفيض (d^-) إلى أدنى حد ممكن))

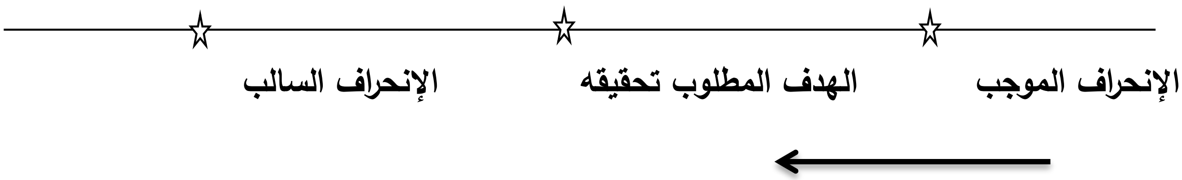
مثال: إذا كان الهدف يمثل ربح أو تحقيق قيمة هدف على الأقل.



ج- تحقيق أدنى قيمة للهدف : أي أنّ متخذ القرار يرغب في تخفيض الانحراف الموجب بينما يكون الانحراف السالب مرغوب فيه ، وفي هذه الحالة يتم صياغة دالة الهدف من الانحراف الموجب فقط كما يلي :

((المطلوب تخفيض (d^+) إلى أدنى حد ممكن))

مثال: اذا كان الهدف يمثل تكلفة أو زمن أوتحقيق قيمة هدف على الأكثر.



ويمكن إختصار ما سبق في الجدول التالي:

المتغيرات الإنحرافية المراد تخفيضها	**نوع القيد**
d^+	$f(X) \leq b_i$
d^-	$f(X) \geq b_i$
$d^- + d^+$	$f(X) = b_i$

أي أنه بصفة عامة إذا كان قيد الهدف (أصغر من أو يساوي ≤) وذلك قبل إضافة متغير الانحراف فإننا سوف نضيف متغير الانحراف الموجب إلى دالة الهدف، أما إذا كان قيد الهدف (أكبر من أو يساوي ≥) فسوف يتم إضافة متغير الانحراف السالب إلى دالة الهدف، أما إذا كان قيد الهدف (بشكل مساواة =) فإنّ دالة الهدف سوف تحتوي على كل من متغيري الانحراف الموجب والسالب .

2- <u>القيود</u> : **Constraints**

يحتوي نموذج برمجة الأهداف على نوعين من القيود :

أ) – القيود الهيكلية :

تعبر عن القيود الأساسية التي تفرضها طبيعة المشكلة محل الدراسة، وتظهر هذه القيود (قيود الموارد المالية والتكنولوجية – وقيود الموارد الاقتصادية الأخرى بالإضافة إلى أية قيود أخرى تفرضها المشكلة محل الدراسة) في نموذج برمجة الأهداف في صورة معادلات أو متباينات خطية يحتاج تحويلها إلى إدخال متغيرات راكدة عليها . يكون شكل القيود كالأتي:

$$\sum_{j=1}^{n} \mathbf{a_{ij}x_j} (\leq = \geq)\ \mathbf{b_i}$$

ب) – قيود الأهداف :

تتضمن قيود الأهداف في نموذج برمجة الأهداف كافة الأهداف التي تسعى المنظمة لتحقيقها والمستوى الواجب تحقيقه لكل منها، بالإضافة لتوضيح مساهمة كل متغير قراري في تحقيق المستويات المحددة للأهداف المختلفة ، والانحرافات الموجبة والسالبة لمختلف الأهداف ، ولصياغة قيود الأهداف رياضياً يواجه متخذ القرار الحالات التالية :

1– إذا كان قيد الهدف في شكل معادلة فإنّ هذا يعني رغبة متخذ القرار في تحقيق مستوى معين للهدف بالضبط لا أكثر ولا أقل، ومن ثم يتضمن قيد الهدف كلا النوعين من الانحرافات السالبة والموجبة (d^+ ، d^-).

2– إذا كان قيد الهدف على شكل متباينة يكون متخذ القرار أمام إحدى الحالتين التاليتين:

أ – اعتبار المستوى المحدد للهدف بمثابة حد أقصى لا ينبغي تجاوزه ، وبالتالي فإنّ المتباينة تأخذ شكل (≤) ومن ثم يتضمن قيد الهدف الانحراف السالب (d^-) فقط عن الهدف .

ب– اعتبار المستوى المحدد للهدف بمثابة حد أدنى لا ينبغي أن تقل عنه المتباينة ، وبالتالي فإنّ المتباينة تأخذ شكل (≥) ومن ثم يتضمن قيد الهدف الانحراف الموجب (d^+) فقط عن الهدف .

وفي جميع الحالات السابقة يكون شكل القيود الهدفية كالأتي:

$$\boldsymbol{f_i(x) + d_i^- - d_i^+ = b_i}$$

حيث i=1,2,…,m

$\boldsymbol{f_i(x)}$: تمثل الدالة الخطية الممثلة لدالة الهدف

3– **شرط عدم السلبية** : **Nonnegative Condition**

يقضي هذا الشرط أن لا تظهر متغيرات المشكلة الخاضعة للدراسة في الحل الأمثل بقيم سالبة، فهي إما أن تكون مساوية للصفر أو أكبر من الصفر، وتشمل هذه المتغيرات جميع متغيرات نموذج برمجة الأهداف سواء كانت متغيرات القرار أو متغيرات الانحراف عن القيم المحددة للأهداف أو المتغيرات الراكدة.

وكذلك يقصد بها أن المتغيرات التي تعبر عن كمية ونوعية الإنتاج أو عدد العاملين،... لايمكن أن تكون سالبة لان ذلك يتعارض مع منطق الحياة.

$$X_j ,\ d_i^- ,\ d_i^+ \geq 0$$

حيث $i=1,2,\ldots,m$

$j=1,2,\ldots,n$

(2-3-4) بناء نموذج برمجة الأهداف:

تتمثل الخطوات الأساسية لبناء نموذج برمجة الاهداف كما يلي:

الخطوة الأولى : تحديد المتغيرات القرارية للمشكلة

وهي المتغيرات أو العوامل التي يمكن لمتخذ القرار التحكم فيها أو تغييرها، وتمثل الناتج الأخير للقرار أو النموذج. ويرمز لمتغيرات القرار بالرمز **Xj** حيث $j=1,2,\ldots,n$

الخطوة الثانية: صياغة دوال أهداف النموذج

$$\text{Minimize } Z = \sum_{i=1}^{m}(d_i^+ + d_i^-) \longrightarrow \qquad (2-4)$$

الخطوة الثالثة: صياغة القيود

وتنقسم قيود هيكلية

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j (\leq = \geq)\ b_i \longrightarrow \qquad (2-2)$$

وقيود هدفية

$$A\underline{X} - I\underline{d^+} + I\underline{d^-} = \underline{b} \longrightarrow \qquad (2-5)$$

الخطوة الرابعة: شرط عدم السلبية

$$X_j,\ d_i^- ,\ d_i^+ \geq 0$$

(2-3-5) حل نموذج برمجة الأهداف { [21],[26],[30] }

(2-3-5-1) الطريقة البيانية: Graphical Solution

تستخدم في حل النماذج التي تحتوي على متغيرين أساسيين سواء كانت هذه النماذج تحتوي على هدف واحد أو أكثر.

الحل عن طريق الرسم البياني مشابه للبرمجة الخطية ، والاختلاف الوحيد هو أن عملية برمجة الأهداف تقدم حل منفصل لكل مستوى أولوية.

يمكن اللجوء للحل البياني لنماذج البرمجة بالأهداف التي تتكون من متغيرين، وهي حالة لا تتوفر في أغلب المواقف التي يواجهها متخذ القرار إذ تحتوي في الغالب على عدد كبير من المتغيرات مما يتطلب تمثيلها بيانياً أساليب هندسية متقدمة، إلا أن أهمية التفسير البياني تكمن في أنها تسمح لصاحب القرار إستيعاب وادراك طبيعة المشاكل عموماً والتي تحتاج الحل ببرمجة الأهداف عن طريق تدنية الإنحراف بنفس ترتيب أولويات الأهداف.

خطوات الحل بالرسم البياني لبرمجة الأهداف:

1- تحديد نقاط الحل المناسبة، وهي النقاط التي تلتزم بقيود المشكلة محل الدراسة.

2- تحديد جميع الحلول المناسبة التي تحقق الهدف الأكثر أولوية، وإن لم يكن هناك حلول مناسبة تحقق الهدف الأكثر أولوية يتم تحديد الحل (الحلول) الأقرب لتحقيقه.

3- الإنتقال إلى مستوى الأولوية التالي وتحديد أفضل حل ممكن دون المخاطرة بأي إنجاز للأهداف ذات الأولوية الأعلى.

4- تكرار الخطوات السابقة إلى أن تتم دراسة جميع الأولويات.

ويمكن عرض خطوات الحل البياني بالمشكلة التالية:

المشكلة:

عميل يستثمر 80000 وحدة نقدية في شركة Nicolo للاستثمار وكإستراتيجية أولية يتبعها فإنه يرغب في أن تحتوي محفظة الاستثمار الخاصة على نوعين من الأسهم :

السهم	السعر / سهم	العائد السنوي المحدد / سهم	مؤشر المخاطرة / سهم
أسهم شركة بترول في الولايات المتحدة	25	3	0.50
أسهم ممتلكات Hub	50	5	0.25

الهدف الرئيسي (الأولوية من المستوى 1) :

البحث عن محفظة ذات مؤشر مخاطرة 700 أو أقل .

الهدف الثانوي (الأولوية من المستوى 2) :

البحث عن محفظة تقدم عائد سنوي لا يقل عن 9000 وحدة نقدية .

بناء النموذج:

سنبدأ أولاً بتحديد متغيرات القرار:

X_1 = عدد الأسهم المشتراة في شركة بترول الولايات المتحدة.

X_2 = عدد الأسهم المشتراة في HUB.

متغيرات الإنحراف:

d_1^+ = المقدار الذي يزيد به مؤشر المخاطرة للمحفظة عن القيمة المستهدفة 700

d_1^- = المقدار الذي يقل به مؤشر المخاطرة للمحفظة عن القيمة المستهدفة 700

d_2^+ = المقدار الذي يكون به العائد السنوي للمحفظة أكبر من القيمة المستهدفة 9000 وحدة نقدية .

d_2^- = المقدار الذي يكون به العائد السنوي للمحفظة أقل من القيمة المستهدفة 9000 وحدة نقدية

مشكلة P1 :

دالة الهدف (1) $\text{Min } Z = d_1^+$

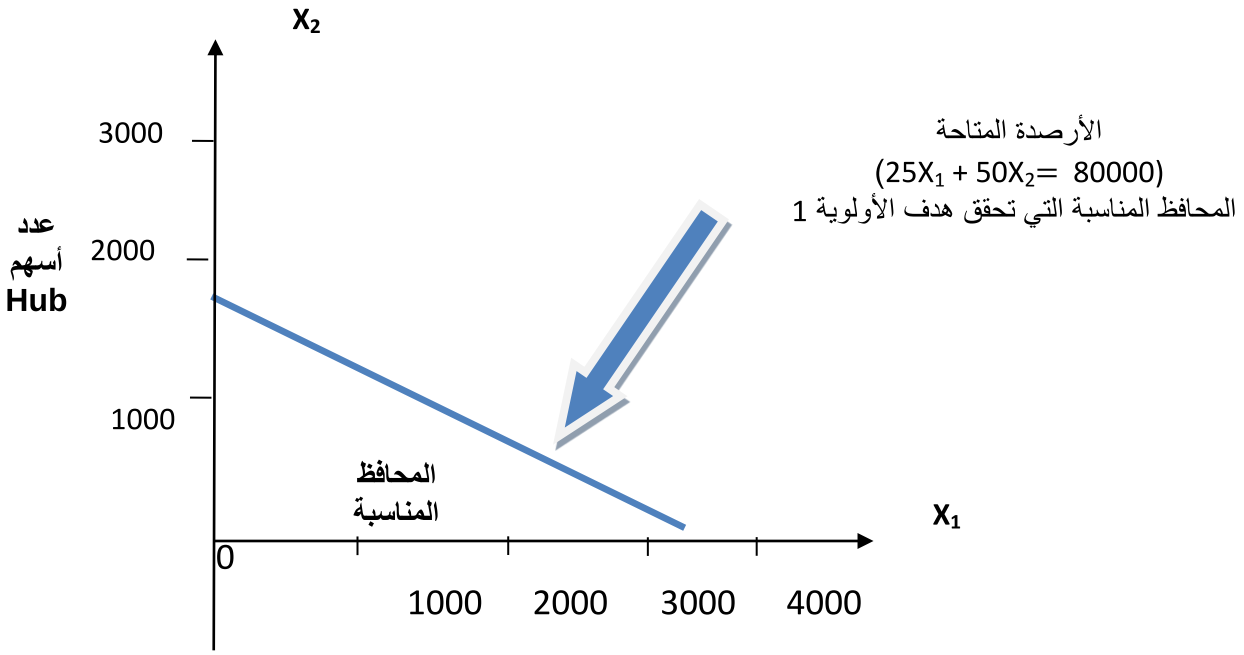
في ظل القيود التالية :

أرصدة متاحة $25X_1 + 50X_2 \le 80000$

معادلة الهدف (1) P1 $0.50X_1 + 0.25X_2 - d_1^+ + d_1^- = 700$

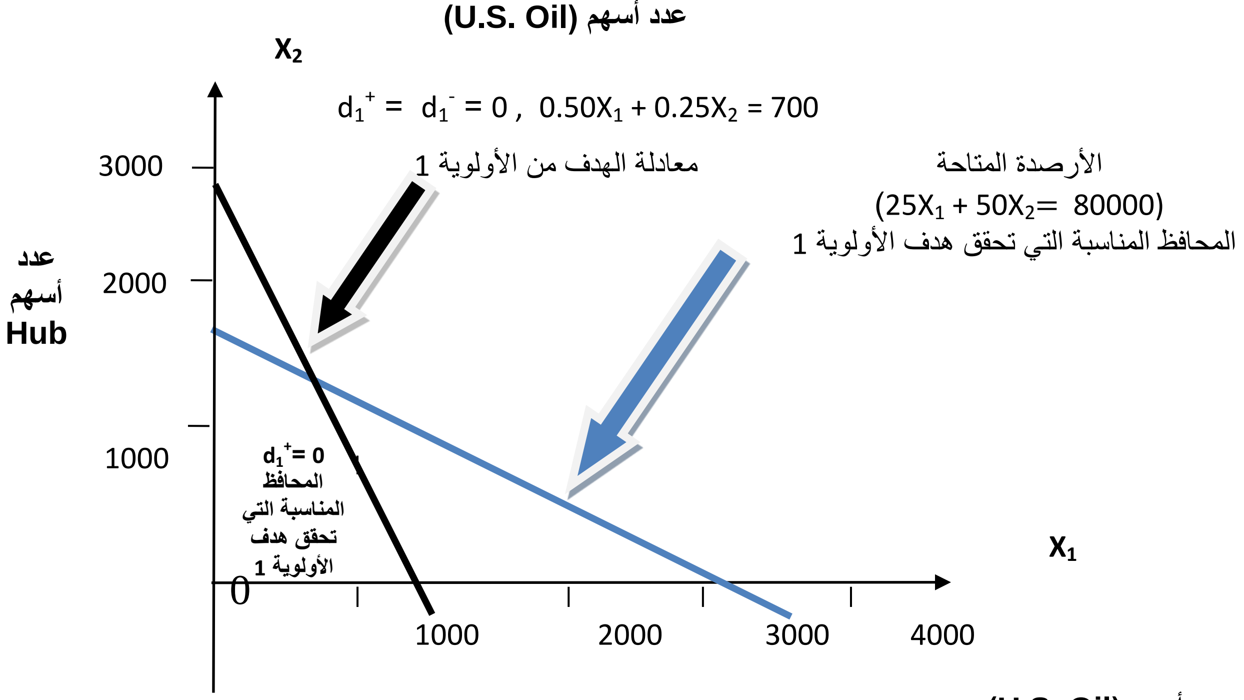
معادلة الهدف (2) P2 $3X_1 + 5X_2 - d_2^+ + d_2^- = 9000$

$$X_1 \ , X_2 \ , d_1^+ \quad , \ d_1^- \quad , \quad d_2^+ \quad , \ d_2^- \ \geq \ 0$$



الشكل رقم (3) : المحافظ التي تحقق قيد الأرصدة المتاحة

عدد أسهم (U.S. Oil)



عدد أسهم (U.S. Oil)

الشكل رقم (4) : المحافظ التي تحقق الهدف P1

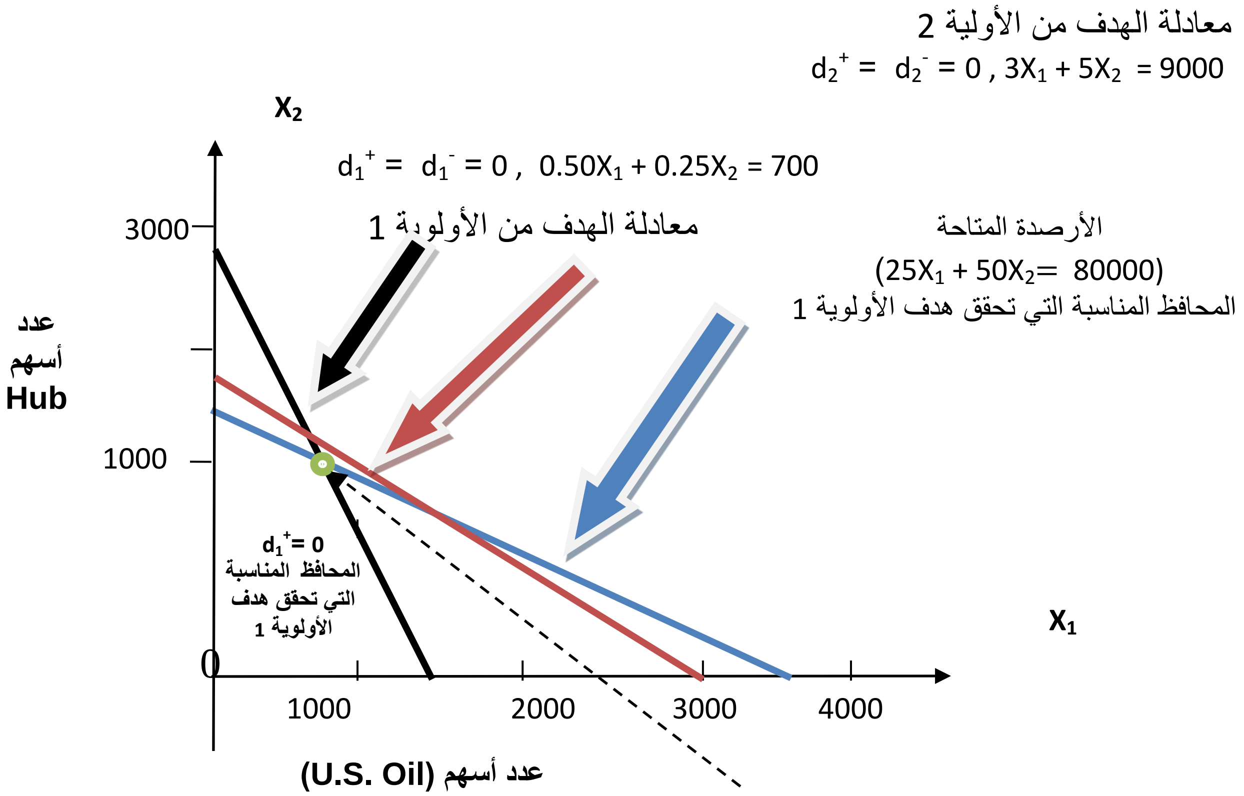
مشكلة P2 :

$$\text{Min } Z = d_2^-$$ دالة الهدف (2)

في ظل القيود التالية :

$25X_1 + 50X_2 \leq 80000$	أرصدة متاحة
$0.50X_1 + 0.25X_2 - d_1^+ + d_1^- = 700$	P1 معادلة الهدف (1)
$3X_1 + 5X_2 - d_2^+ + d_2^- = 9000$	P2 معادلة الهدف (2)
$d_1^+ = 0$	تحقيق الهدف P1

$$X_1 \ , X_2 \ , d_1^+ \ , d_1^- \ , d_2^+ \ , d_2^- \geq 0$$



الشكل رقم (5) : أفضل حل يحقق الهدفين معاً (حل مشكلة P_1)

$X_1 = 800$, $X_2 = 1200$
أفضل حل للهدف الثانوي هو الذي لا يقلل من حل الهدف الأولي

(2-5-3-2) طريقة السمبلكس: The Simplex Method

من الممكن إتباع خطوات ومراحل طريقة السمبلكس لمعالجة المشاكل المتعددة الأهداف في إطار نموذج برمجة الأهداف. وحتي يمكن الوقوف على إمكانية أستخدام طريقة السمبلكس على هذا النوع من المشاكل يجب الإستعانة بالمسألة التالية :

بفرض أن مدير الإنتاج بإحدى الشركات الصناعية يقوم حالياً بوضع مستويات الإنتاج لمنتجات الشركة ، والمتمثلة في نوعين من المنتجات هما X_1 , X_2 وتقوم خطة الشركة على التشغيل الكامل لطاقة المصنع من خلال العمل لمدة خمسة أيام أسبوعياً ، وبثلاث ورديات يومياً ، وكل وردية ثماني ساعات ، أي أن الطاقة الأسبوعية للمصنع

هي 7200 دقيقة $(5 \times 3 \times 8 \times 60 = 7200)$.

ويتم إنتاج كلا نوعي المنتج في خط تجميع مشترك ، ويستطيع الانتهاء من المنتج الأول في دقيقتين ، والمنتج الثاني في دقيقة واحدة ، وقد وضع مدير الإنتاج أمامه محاولة تحقيق هدفين :

- الهدف الأول ويمثل هدف الأولوية الأولى، وهو تحقيق إجمالي عائد مساهمة مقداره 70000 وحدة نقدية على الأقل، علماً أن هامش ربح المنتج الأول هو 15 وحدة نقدية، وهامش الربح الثاني هو 10 وحدة نقدية .
- الهدف الثاني وهو يمثل أيضاً هدف الأولوية الثانية ويتمثل في تحديد إجمالي عدد الوحدات المنتجة من النوعين معاً بعدد لا يزيد عن 5000 وحدة نقدية في الأسبوع، وذلك تمشياً مع الخطة الموضوعة لمستويات المخزون .

بناء النموذج:

دالة الهدف:

$$\text{Min } Z = P1\ d_1^- + P2\ d_2^+$$

القيود: فتكون على الشكل التالي :

قيد طاقة التجميع	$2X_1 + X_2 + S_1 = 7200$
معادلة هدف الربح	$15X_1 + 10X_2 + d_1^- - d_1^+ = 70000$
معادلة هدف مستوى المخزون	$X_1 + X_2 + d_2^- - d_2^+ = 5000$
شرط عدم السلبية	$X_1, X_2, S_1, d_1^-, d_1^+, d_2^-, d_2^+ \geq 0$

إن خطوات الحل مشابهة لخطوات حل جدول السمبلكس التقليدي ، مع ملاحظة أن جدول السمبلكس التقليدي يتعامل مع المشكلات وحيدة الهدف أما برمجة الأهداف فإنها تتعامل مع المشكلات المتعددة الأهداف ، لذلك ينبغي أن تعكس معاملات دالة الهدف هذا التعدد في الأهداف، حيث يوجد في مسألتنا الحالية هدفان هما (الربح ومستوى المخزون)، وقد تم ترميز هدف الأولوية الأولى بالرمز (P1)، وهدف الأولوية الثانية بالرمز (P2) .

ويتم تقسيم الجزء الأسفل من الجدول إلى عدد من الأقسام وفقاً لعدد الأهداف الموجودة ، فأكثر الأهداف أولوية يوضع في أول قسم ، ثم الذي يليه في الأولوية يوضع في القسم الثاني وهكذا ، ويوضح الجدول رقم (2) ذلك كما يلي :

الجدول رقم (2) : جدول السمبلكس المبدئي

معاملات الهدف للمتغيرات الأساسية		المتغيرات الأساسية	القيم	X_1	X_2	S_1	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+
P_1	P_2									
0	0	S_1	7200	2	1	1	0	0	0	0
1	0	d_1^-	70000	15	10	0	1	-1	0	0
0	0	d_2^-	5000	1	1	0	0	0	1	-1
دالة الهدف		P_1	C_j	0	0	0	1	0	0	0
			Z_j	15	10	0	1	-1	0	0
70000			$C_j - Z_j$	-15	-10	0	0	1	0	0
دالة الهدف		P_2	C_j	0	0	0	0	0	0	1
			Z_j	0	0	0	0	0	0	0
0			$C_j - Z_j$	0	0	0	0	0	0	1

– اختبار أمثلية الحل :

لاختبار أمثلية الحل فإننا ننظر إلى السطر $(C_j - Z_j)$ لمستوى الأولوية الأعلى أولاً، فإذا تبين أن كل القيم موجبة أو صفرية نكون قد وصلنا إلى الحل الأمثل ، أما إذا ظهرت قيم سالبة في السطر $(C_j - Z_j)$ عند هذا المستوى من الأولوية فيتعين علينا الدخول في مرحلة تالية لتحسين الحل ، وتطبيقاً لما سبق نلاحظ أن هناك قيم سالبة لمتغيرات القرار $(X_1 \ , X_2)$ في السطر $(C_j - Z_j)$ بالنسبة لهدف الأولوية الأولى (P1) ، لذلك يمكن القول أن الحل الذي يقدمه الجدول المبدئي هو حل غير أمثل ، ويتعين البدء في خطوات تحسين الحل ، حيث يتم إجراء تحسين الحل بنفس الخطوات المعتادة في مشكلات البرمجة الخطية ، حيث يتم اختيار أكبر قيمة بإشارة سالبة (بالقيمة المطلقة) ويكون متغيره هو المتغير المرشح للدخول إلى الحل ، وبالتالي من الجدول نلاحظ أن X_1 هو المتغير المرشح للدخول إلى الحل ، ثم نحدد المتغير المرشح للخروج من الحل وعنصر الدوران أو العنصر المحوري

ونكمل باقي العمليات كما في طريقة السمبلكس المعتادة (عنصر الدوران بالمربع الملون) ، وبالتالي نحصل على الجدول التالي

الجدول رقم (3) : جدول الحل الثاني

معاملات الهدف للمتغيرات الأساسية P_1	P_2	المتغيرات الأساسية	القيم	X_1	X_2	S_1	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+
0	0	X_1	3600	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0	0	0
1	0	d_1^-	16000	0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{15}{2}$	1	-1	0	0
0	0	d_2^-	1400	0	1/2	$-\frac{1}{2}$	0	0	1	-1
دالة الهدف		P_1	C_j	0	0	0	1	0	0	0
16000			Z_j	0	$\frac{5}{2}$	$-\frac{15}{2}$	1	-1	0	0
			$C_j - Z_j$	0	$-\frac{5}{2}$	$\frac{15}{2}$	0	1	0	0
دالة الهدف		P_2	C_j	0	0	0	0	0	0	1
0			Z_j	0	0	0	0	0	0	0
			$C_j - Z_j$	0	0	0	0	0	0	1

الجدول رقم (4) : جدول الحل الثالث

معاملات الهدف للمتغيرات الأساسية		المتغيرات الأساسية	القيم	X_1	X_2	S_1	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+
P_1	P_2									
0	0	X_1	2200	1	0	1	0	0	-1	1
1	0	d_1^-	9000	0	0	-5	1	-1	-5	5
0	0	X_2	2800	0	1	-1	0	0	2	-2
دالة الهدف		P_1	C_j	0	0	0	1	0	0	0
			Z_j	0	0	- 5	1	-1	-5	5
9000			$C_j - Z_j$	0	0	5	0	1	5	-5
دالة الهدف		P_2	C_j	0	0	0	0	0	0	1
			Z_j	0	0	0	0	0	0	0
0			$C_j - Z_j$	0	0	0	0	0	0	1

من الجدول رقم (4) أي جدول الحل الثالث يمكن أن نقف على الملاحظات التالية:

– إن هذا الجدول لا يمثل الحل الأمثل، حيث توجد قيمة سالبة في السطر $(C_j - Z_j)$ بالنسبة للأولوية الأولى عند المتغير (d_2^+) ، ومن ثم فإن اختيار هذا المتغير للدخول إلى الحل في المرحلة التالية للحل سيعمل على تخفيض الانحراف غير المرغوب فيه لهدف الربح بمقدار 5 وحدات نقدية عن كل وحدة تضاف من المتغير (d_2^+).

– يلاحظ أيضاً أن قيمة $(C_j - Z_j)$ في مستوى الأولوية الثانية للمتغير (d_2^+) هو $(1 +)$ ، وحيث أن هذا المتغير يمثل الانحراف غير المرغوب فيه لهدف الأولوية الثانية (هدف مستوى المخزون) ، هذا يعني أن زيادة وحدة واحدة من (d_2^+) سيؤدي إلى زيادة قيمة هدف الأولوية الثانية بمقدار (1).

– مما سبق نجد أن هناك تناقضاً ، ففي حين أن زيادة (d_2^+) بمقدار وحدة واحدة يؤدي إلى تخفيض 5 وحدات من الانحراف غير المرغوب فيه لهدف الأولوية الأولى (الربح) ، نجد أنه في الوقت نفسه يعمل على زيادة الانحرافات غير المرغوب فيها لهدف الأولوية الثانية بمقدار (1) ، وهنا نتساءل ما هو التصرف الواجب حيال هذا التناقض ؟ .

– للإجابة على ذلك نقول أن برمجة الأهداف تقوم على قاعدة أساسية مفادها: (أي تحسين يمكن أن يؤدي إلى تحسين في هدف مستوى الأولوية الأعلى فإنه ينبغي إجراؤه بغض النظر عن الأثر الذي سيحدثه على أهداف الأولويات الأقل) .

– لتحديد المتغير المرشح للخروج من الحل :

$$\text{Min}\ (2200/1 = 2200,\ 9000/5 = 1800) = 1800$$

أي أن المتغير المرشح للخروج هو d_1^- وعنصر الدوران هو (5) ، وبالتالي فإن اختيار d_1^- كمتغير مرشح للخروج ، يشير إلى أن هدف الربح كمستوى أولوية أولى سوف يتم الوفاء به كاملاً في الجدول التالي ، لأن خروجه سيجعله متغيراً غير أساسي وقيمته الصفر.

الجدول رقم (5) : جدول الحل الرابع

معاملات الهدف للمتغيرات الأساسية P_1	P_2	المتغيرات الأساسية	القيم	X_1	X_2	S_1	d_1^-	d_1^+	d_2^-	d_2^+
0	0	X_1	400	1	0	2	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	0	0
1	0	d_2^+	1800	0	0	-1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	-1	1
0	0	X_2	6400	0	1	-3	$\frac{2}{5}$	$-\frac{2}{5}$	0	0
دالة الهدف		P_1	C_j	0	0	0	1	0	0	0
			Z_j	0	0	0	0	0	0	0
0			$C_j - Z_j$	0	0	0	1	0	0	0
دالة الهدف		P_2	C_j	0	0	0	0	0	0	1
			Z_j	0	0	-1	$\frac{1}{5}$	$-\frac{1}{5}$	-1	1
1800			$C_j - Z_j$	0	0	1	$-\frac{1}{5}$	$\frac{1}{5}$	1	0

يتضح من هذا الجدول ما يلي :

1- إن قيمة دالة هدف مستوى الأولوية الأولى تساوي الصفر ، وهذا يعني أن هدف الأولوية الأولى قد تم تحقيقه بالكامل بدون أي انحراف غير مرغوب فيه ، ويمكن التأكد من ذلك بالنظر إلى السطر ($C_j - Z_j$) عند مستوى تلك الأولوية ، ونجد أن كل معاملات هذا السطر إما قيماً موجبة أو صفرية.

2- كذلك يتبين أن هدف الأولوية الثانية لم يتم تحقيقه بالكامل ، إذ نجد أن قيمة دالة هدف تلك الأولوية مساوية للقيمة 1800 وحدة ، وهذا يعني أن الحل الذي يمثله الجدول الرابع سيتم وفقاً له إنتاج 1800 وحدة زيادة عن مستوى الحد الأقصى للمخزون ، ووفقاً لهذا الحل سيتم إنتاج 400 وحدة من X_1 و 6400 وحدة من X_2، أي أن إجمالي الإنتاج يزيد بمقدار 1800 وحدة عن مستوى المخزون المحدد بعدد 5000 وحدة .

3- بالنظر إلى السطر($C_j - Z_j$) عند مستوى الأولوية الثانية (P2) ، نجد أن المتغير (d_1^-) له قيمة سالبة ، ولذلك هل يمكن اختيار (d_1^-) كمتغير مرشح للدخول حتى يمكن تخفيض الانحراف غير المرغوب فيه عن هدف الأولوية الثانية ؟

إن حقيقة الأمر أن اختيار (d_1^-) كمتغير مرشح للدخول في المرحلة التالية للحل سيؤدي إلى تخفيض الانحراف عن هدف الأولوية الثانية ، ولكن قبل أن يتم الاختيار ، علينا أن نتساءل عن أثر اختياره كمتغير مرشح للدخول على دالة هدف الأولوية الأولى ، فإن قيمة المتغير (d_1^-) في السطر ($C_j - Z_j$) عند مستوى الأولوية الأولى هي (1 +) ، وهذا يعني أن دخول هذا المتغير إلى الحل في المرحلة التالية للحل سيؤدي إلى وجود انحراف غير مرغوب فيه في هدف الأولوية الأولى ، وحيث أن القاعدة السابقة تقرر أنه لا ينبغي أن يكون تحسين هدف الأولوية الثانية على حساب هدف الأولوية الأعلى ، لذلك فإن الحل الذي يقدمه الجدول رقم (5) أي جدول الحل الرابع هو الحل المرضي.

مع ملاحظة الحل الأمثل نصل اليه عندما يتحقق الهدف المطلوب بالضبط .

الحل المرضي عندما نصل الى حل قريب من الهدف المطلوب.

(2-4) تحليل الحساسية: Sensitivity Analysis { [15]، [28] }

تحليل الحساسية لنموذج برمجة الأهداف:

هو التحليل الأمثل لمعرفة ومعالجة الإختلافات التي يمكن أن تحدث في متغيرات النموذج وأثرها على الحل، فهو تحليل مكمل لتفسير مشكلة برمجة الأهداف ويساعد على إظهار المدى الذي يكون فيه الحل معرض- أو غير معرض- للتغيير.

كما يعرف بانه أسلوب يقيس أو يتنبأ بأثر التغيرات في مدخلات نموذج برمجة الأهداف على مخرجات النموذج.

وتعد متابعة حل نموذج برمجة الأهداف بتحليل حساسيتها على درجة عالية من الأهمية بالإضافة إلى الفهم العميق لما ستكون عليه النتائج في حالة تغير بعض عناصر المشكلة ، بالإضافة إلى أنه يمكن تقسيم تحليل الحساسية في برمجة الأهداف لثلاثة حالات:

- تحليل حساسية التغير في المستوى الموضوع للهدف
- تحليل حساسية التبادل النسبي بين الأهداف
- تحليل حساسية التغير في مراتب الأولويات.

مداخل إجراء تحليل الحساسية

يمكن القول بأن هناك مدخلين لإجراء تحليل الحساسية وهما:

1 – مدخل المحاولة و الخطأ: Trial and error approach

وفقاً لهذا المدخل يتم تغيير بيانات الإدخال و من ثم تكوين نموذج جديد ، و يعني ذلك إعادة حل المشكلة و مقارنة النتائج مع نتائج النموذج الأصلي ، ويوجه هذا المدخل بعض العيوب أهمها :

- يستغرق هذا المدخل مدة طويلة جداً خاصة إذا كان عدد المتغيرات المحتملة في البيانات كبيراً
- يتطلب إعادة حل المشكلة مزيد من النفقات و الوقت في حالة المشاكل ذات الحجم الكبير

2 – استخدام المدخل التحليلي: Analytical approach

في ظل هذا المدخل ليس هناك حاجة إلى إعادة حل النموذج كلياً في كل مرة يحدث فيها تغير، وسنقوم بتوضيح هذا المدخل بالأمثلة و ذلك من خلال حالتين :

أ- حالة أكبر ربح (Max):

لنفترض انه لدينا نموذج معين وكان جدول الحل الأمثل لهذا النموذج كما يلي :

	X_1	X_2	---	---	S_1	S_2	---	B
Z	Z_1	Z_2	--	--	--	--	--	--
X_1	C_{11}	C_{12}	C_{13}	--	--	--	--	B_1
X_2	C_{21}	C_{22}	C_{23}	--	--	--	--	B_2
---	--	--	--	--	--	--	--	--
X_n	C_{n1}	C_{n2}	C_{n3}	--	--	--	--	B_n

ويمكن القول بأننا نستطيع الحصول على مدى التغير لأحد المتغيرات الأساسية عن طريق تطبيق العلاقة التالية :

$$X_n - Min^+\left|\frac{z}{X_n}\right| \le X \le X_n + Max^-\left[\frac{z}{X_n}\right]$$

حيث X_n : معامل المتغير المدروس في دالة الهدف

$\frac{Z}{X}$: حاصل قسمة كل قيمة من سطر z على القيم المقابلة لها في سطر المتغير المدروس

$Max^-\left|\frac{z}{X_n}\right|$: أكبر قيمة سالبة من نواتج القسمة بالقيمة المطلقة

$Min^+\left[\frac{z}{X}\right]$: حاصل أصغر قيمة موجبة من نواتج القسمة

و لتوضيح طريقة تطبيق هذه العلاقة نفترض المثال التالي :

$Max \rightarrow Z = 10X_1 + 8X_2$

Subject to

$30X_1 + 20X_2 \le 120$

$2X_1 + 2X_2 \le 9$

$4X_1 + 6X_2 \le 24$

$X_1 \cdot X_2 \ge 0$

و ليكن جدول الحل الأمثل لهذا النموذج هو التالي :

	X1	X2	S1	S2	S3	B
Z	0	0	1/5	2	0	42
X1	1	0	1/10	−1	0	3
X2	3	1	−1/10	3/2	0	3/2
S3	0	0	1/5	−5	1	3

وسوف نقوم بإجراء تحليل الحساسية وفقاً للتغيرات في :

أولاً– بالنسبة لمعاملات المتغيرات الأساسية :

نوجد الحد الأعلى و الحد الأدنى لمدى التغير بالنسبة لكل متغير من المتغيرات الأساسية على حد و ذلك بالتباع الخطوات التالية :

1– نقوم بقسمة سطر الحل Z على سطر المتغير الذي نقوم بدراسته ، و ليكن هنا المتغير الأساسي X1 .

سطر دالة الهدف Z	0	0	1/5	2	0
سطر X1	1	0	1/10	−1	0
حاصل القسمة	/	/	2	−2	/

2– لإيجاد الحد الأدنى نأخذ أصغر حاصل قسمة موجبة و نطرحه من معامل المتغير X1 الموجود في دالة الهدف في النموذج (ماعدا قيم B) ، و نجد أن حاصل القسمة هو2 ويكون الحد الأدنى هو

$10 - 2 = 8$

3– لإيجاد الحد الأعلى نقوم بأخذ أكبر حاصل قسمة سالبة و نجمعه بالقيمة المطلقة مع معامل المتغير في دالة الهدف ، وفي مثالنا نجد أكبر حاصل قسمة سالب هو 2– و يكون الحد الأعلى هو $10+|-2|=12$ و يكون مدى التغير لـ X1 هو:

$$10 - 2 \le X_1 \le 10 + |-2|$$

$$8 \le X_1 \le 12$$

و نقصد بهذا المدى أنه إذا حصل تعديل على معامل X1 وأصبح بعد هذا التغير ضمن المدى [8،12] فإن الحل الأمثل يبقى أمثل أما إذا أصبح معامل X1 بعد التغير خارج هذا المدى فإن هذا الحل لم يعد أمثل و يحتاج إلى إعادة حل من جديد.

أما بالنسبة للمتغير X2 فنقوم بنفس العمليات السابقة

سطر دالة الهدف	0	0	1/5	2	0
سطر X2	3	1	−1/10	3/2	0
حاصل القسمة	0	/	−2	4/3	/

الحد الأدنى لـ X2 هو 8−4/3=20/3

الحد الأعلى لـ X2 هو $10 = |-2| + 8$

ويكون مدى التغير بالنسبة لـ X2 هو :

$$8 - \frac{4}{3} \leq X_2 \leq 8 + |-2|$$

$$\frac{20}{3} \leq X_2 \leq 10$$

ثانياً – حساب مدى التغير في الإمكانيات المتاحة (ثوابت القيود):

لحساب مدى التغير بالنسبة للإمكانيات المتاحة نطبق العلاقة التالية :

$$B_n - Min^{+}\left|\frac{B}{S}\right| \leq B \leq B_n + Max^{-}\left|\frac{B}{S}\right|$$

حيث :

B_n : قيمة الإمكانيات في القيد n في النموذج

B مدى التغير المسموح

$\frac{B}{S}$: حاصل قسمة كل قيمة من عمود الإمكانيات B في جدول الحل الأمثل على القيم المقابلة لها في عمود المتغير المدروس

$Min^{+}\left|\frac{B}{S}\right|$: أصغر حاصل قسمة موجب

$Max^{-}\left|\frac{B}{S}\right|$: أكبر حاصل قسمة سالب

و لتطبيق هذه العلاقة على المثال السابق و ليكن بالنسبة لـS1 نقوم بقسمة قيم عمود الإمكانات (B) على قيم عمود المتغير S1 كما في الجدول التالي :

	B	S1	حاصل القسمة
X1	3	1/10	30
X2	3/2	−1/10	−15
S3	3	1/5	15

نحصل على الحد الأدنى و الحد الأعلى كما حصلنا عليها بالنسبة للمتغيرات الأساسية ،وذلك كما يلي :

الحد الأدنى هو : 105 = 15 − 120

الحد الأعلى هو : $135 = |-15| - 120$

و يكون مدى التغير بالنسبة للإمكانيات في القيد الأول هو :

$$120-15 \leq B_1 \leq 120+|-15|$$

$$105 \leq B_1 \leq 135$$

بالنسبة لـ S2 نقوم بنفس الخطوات السابقة أي قسمة عمود الإمكانيات (B) في جدول الحل الأمثل على عمود S2 كما في الجدول التالي :

حاصل القسمة	S2	B	
-3	-1	3	X1
1	3/2	3/2	X2
$-3/5$	-5	3	S3

و يكون الحد الأدنى هو : $9 - 1 = 8$

و الحد الأعلى يكون : $9+\left|\frac{-3}{5}\right| = \frac{48}{5}$

ويكون مدى التغير في إمكانيات القيد الثاني هو :

$$9-1 \leq B_2 \leq 9+\left|\frac{-3}{5}\right|$$

$$8 \leq B_2 \leq \frac{48}{5}$$

بالنسبة لـ S3 نجد أن له قيمة في عمود الإمكانات وتساوي (3) أي أنه فائض و بالتالي لا نوجد له مدى و نكتفي بالقول أن أي زيادة في S3 سوف تؤدي إلى خسائر مؤكدة .

ثالثاً – بالنسبة للمتغيرات غير الأساسية

بالعودة إلى جدول الحل الأمثل نجد أن المتغيرات غير الأساسية هي S1 ، S2 و بالنسبة للمتغير الأول S1 ، و بالنظر إلى جدول الحل الأمثل نجد أن الأرباح المحققة من S1 هي 1/5 و يمكن القول أن هذا الحل يبقى هو الحل الأمثل مادام هذا الربح أقل أو يساوي 1/5 أي أن مدى التغير هو

$$-\infty \leq \Delta 1 \leq \frac{1}{5}$$

كذلك الأمر بالنسبة للمتغير Y2 مدى التغير هو $2 \leq \Delta 2 \leq \infty-$ $-\infty$

ب– حالة أقل التكاليف (min)

يمكن الحصول على مدى التغير للمتغيرات الأساسية في حالة min بنفس طريقة max فتكون العلاقة :

$$y_n - Min^{+}\left|\frac{w}{Y}\right| \leq Y \leq y_n + Max^{-}\left|\frac{w}{Y}\right|$$

حيث :

X_n: معامل المتغير المدروس في دالة الهدف

X: مدى التغير المسموح في معامل المتغير

$\frac{z}{X}$: حاصل قسمة كل قيمة من سطر الحل z في جدول الحل الأمثل على القيم المقابلة لها في سطر المتغير المدروس

$Min^{+}\left|\frac{w}{X}\right|$: أصغر حاصل قسمة موجب

$Max^{-}\left|\frac{w}{X}\right|$: أكبر حاصل قسمة سالب

وسوف نوضح طريقة تحليل الحساسية لحالة min عن طريق مثال ، ليكن لدينا نموذج البرمجة الخطية التالي المعبر عن حالة أقل التكاليف :

$$Min \rightarrow W = 19X_1 + 13X_2 + 15X_3 + 18X_4$$

$$2X_1 + 2X_2 + 3X_3 \geq 7$$

$$3X_1 + X_2 + 3X_3 \geq 5$$

$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

وليكن جدول الحل الأمثل لهذا النموذج هو :

	X1	X2	X3	S4	S1	S2	B
W	0	0	−6	−3	−5	−3	50
X1	1	0	3/4	−3/4	1/4	−1/2	3/4
X2	0	1	−5/2	9/4	−3/4	1/2	11/4

أولاً – مدى التغير للمتغيرات الأساسية

1– بالنسبة لـ X1 نقوم بقسمة سطرW على سطر X1 كما يلي :

سطر دالة الهدف	0	0	−6	−3	−5	−3
سطر X1	1	0	3/4	−3/4	1/4	−1/2
حاصل القسمة	0	/	−8	4	−20	6

لإيجاد الحد الأدنى نقوم بأخذ أصغر حاصل قسمة موجبة و نقوم بطرحها من معامل المتغير X1 في دالة الهدف فنجد :

الحد الأدنى 15 = 4 − 19 ، الحد الأعلى $19+|-8|=27$

و يكون مدى التغير بالنسبة لـ X1 هو :

$$19-4 \leq X_1 \leq 19+|-8|$$

$$15 \leq X_1 \leq 27$$

2 − بالنسبة لـ X2 نقوم بقسمة سطر W على سطر Y2 كما يلي :

سطر دالة الهدف	0	0	−6	−3	−5	−3
سطر X2	0	1	−5/2	9/4	−3/4	1/2
حاصل القسمة	/	/	12/5	−12/9	20/3	−6

لإيجاد الحد الأدنى نقوم بأخذ أصغر حاصل قسمة موجبة و نقوم بطرحها من معامل المتغير X2 في دالة الهدف فنجد : الحد الأدنى 53/5 = 12/5 − 13

ولإيجاد الحد الأعلى نأخذ أكبر حاصل قسمة من القيم السالبة و هي هنا (12/9−) و نقوم بجمعها بالقيمة المطلقة مع معامل المتغير X2 في دالة الهدف فنجد:

الحد الأعلى $13+\left|-\frac{12}{9}\right|=\frac{129}{9}$

و يكون مدى التغير بالنسبة لـ Y2 هو :

$$13-\frac{12}{5} \leq X_2 \leq 13+\left|-\frac{12}{9}\right|$$

$$\frac{53}{5} \leq X_2 \leq \frac{129}{9}$$

3 − بالنسبة لـ X3 : نلاحظ أنه متغير أساسي لكنه لم يشارك بالحل ، لأن التكاليف منه مرتفعة لذلك لا نقوم بإيجاد مدى التغير له و لكن يمكن القول بأن X3 يمكن أن يشارك بالحل عندما تنخفض تكاليفه لتصبح أصغر أو تساوي ناتج طرح قيمة هذا المتغير (X3) في دالة الهدف في جدول الحل من معامل X3 في النموذج أي يمكن أن يشارك بالحل إذا أصبحت التكاليف منه أصغر أوتساوي

15 − 6 = 9

وبنفس الطريقة بالنسبة لـ X4 يمكن أن يشارك بالحل عندما تصبح التكاليف منه أصغر أو تساوي

$$18 - 3 = 15$$

ثانياً – مدى التغير للإمكانيات المتاحة (ثوابت القيود) :

نستطيع الحصول على مدى التغير للإمكانيات بالنسبة لكل قيد على حدا بتطبيق العلاقة التالية :

$$B_n + Max^{-}\left[\frac{B}{X}\right] \leq B \leq B_n + Min^{+}\left[\frac{B}{X}\right]$$

حيث :

B_n : قيمة الإمكانيات في القيد n في النموذج

B: مدى التغير المسموح

$\frac{B}{X}$: حاصل قسمة كل قيمة من عمود الإمكانيات B في جدول الحل الأمثل على القيم المقابلة لها في عمود المتغير المدروس

$Min^{+}\left|\frac{B}{X}\right|$: أصغر حاصل قسمة موجب

$Max^{-}\left|\frac{B}{X}\right|$: أكبر حاصل قسمة سالب

و بالتطبيق على المثال السابق يمكن أن نحصل على مدى التغير في الإمكانيات المتاحة في جميع القيود كما يلي :

1– بالنسبة لـ X_1: نقوم بقسمة قيم عمود الإمكانات B على قيم عمود المتغير X_1 كمايلي :

حاصل القسمة	عمود X_1	قيم عمود الإمكانات B
3	1/4	3/4
−11/3	−3/4	11/4

ولإيجاد الحد الأدنى نقوم بأخذ أكبر حاصل قسمة سالبة و نقوم بجمعها مع قيمة الإمكانات في القيد الأول في النموذج فنجد الحد الأدنى $7+(-11/3)=10/3$

ولإيجاد الحد الأعلى نقوم بأخذ أصغر حاصل قسمة موجبة و نقوم بجمعها مع قيمة الإمكانات في القيد الأول في النموذج فنجد الحد الأعلى $7+3=10$

ويكون مدى التغير لإمكانيات القيد الأول هو :

$$7+(-11/3) \leq X_1 \leq 7+3$$

$$\frac{10}{3} \leq X_1 \leq 10$$

2- بالنسبة لـ X2 : بنفس الطريقة نقوم بقسمة قيم عمود الإمكانات B على قيم عمود المتغير X_2 كمايلي :

حاصل القسمة	عمود X_2	قيم عمود الإمكانات B
$-3/2$	$-1/2$	$3/4$
$11/2$	$1/2$	$11/4$

فيكون الحد الأدنى هو : $5 + -3/2 = 7/2$

و يكون الحد الأعلى هو : $5 + 11/2 = 21/2$

وبالتالي مدى التغير بالنسبة لـ X2 هو : $\frac{7}{2}$

$$\frac{7}{2} \leq X_2 \leq \frac{21}{2}$$