الباب الأول

الفضاءات T_4 و الفضاءات الناظمية (السوية)

تعريف (١-١):

يقال عن فضاء طبولوجي (X,τ) أنه فضاء T_4 اذا تحقق الشرط التالي : أياً كانت المجموعتان FوF' المغلقتان و المنفصلتان في X ، فثمة جوار U_F ل F و جوار $U_{F'}$ ل F' بحيث $U_F \cap U_{F'} = \emptyset$. ويقال عن الفضاء (X,τ) إنه ناظمي (أو سوي) إذا كان فضاء T_4 و T_1 في آن واحد.

مثال :

إن اي فضاء متري هو فضاء طبولوجي T_4 ، بل و ناظمي كذلك.

مثال :

إن اي فضاء متقطع (X,τ) يتمتع بجميع الخواص فهو فضاء T_0 و T_1 و T_2 و T_3 و منتظم و T_4 ناظمي.وتجدر بنا الإشارة الي أن كون (X,τ) فضاء T_4 لا يترتب عليه أن (X,τ) فضاء T_3 بالضرورة . و بالعكس ، فلا ينجم عن كون (X,τ) فضاء T_3 أن يكون (X,τ) فضاء T_3.

كذلك ، فليس كل فضاء T_4 ناظمياً . وكمثال علي الحالة الأخيرة نورد الفضاء التافه الذي يحوي أكثر من نقطة ؛ فهذا الفضاء هو T_4 دون أن يكون ناظمياً.

سنقدم الآن معياراً للفضاءات T_4 ممثلاً بالمبرهنة التالية :

مبرهنة (١-٢) :

الشرط اللازم و الكافي كي يكون (X,τ) فضاء T_4 هو التالي : أياً كانت المجموعة F المغلقة في X و اياً كان الجوار U ل F ، فثمة جوار V ل F بحيث $Cl(V) \subseteq U$.

البرهان :

لنفترض أولاً ان (X,τ) فضاءT_4 ، و أن U جوار اختياري لمجموعة مغلقة ما F في (X,τ) . إن $X - U$ مجموعة مغلقة منفصلة عن المجموعة المغلقة F ؛ لذا ثمة جوار V ل F و جوار W ل $X - U$ بحيث $V \cap W = \emptyset$. نستنتج من هذا أن $V \subseteq X - W \subseteq U$. و يترتب علي هذه العلاقة أن $Cl(V) \subseteq Cl(X - W)$. لكن $Cl(X - W) = X - W$ لان $X - W$ مغلقة إذن $Cl(V) \subseteq X - W$. وبما أن $X - W \subseteq U$ ، فإننا نجد أن$Cl(V) \subseteq U$.

و بالعكس ، لنفترض أنه اياً كانت المجموعة F المغلقة في (X,τ) و اياً كان الجوار U ل F فثمة جوار V ل F بحيث $Cl(V) \subseteq U$ ، و لنثبت أن (X,τ) فضاء T_4 . لتكن F وF' مجموعتين مغلقتين و منفصلتين في هذا الفضاء. إذن $X - F$ مجموعة مفتوحة نحوي F' ؛ و بالتالي فهنالك جوار V ل F بحيث $Cl(V) \subseteq X - F$ ، الأمر الذي يترتب عليه أن $F \subseteq X - Cl(V)$. و هكذا نكون قد وجدنا جواراً V ل F' و جواراً $X - Cl(V)$ ل F ، وهذان الجواران منفصلان لأن $\left(X - Cl(V)\right) \cap V = \emptyset$. و بالتالي فإن (X,τ) فضاء T_4.

إذا كان (X,τ) فضاء T_i ، $i = 0,1,2,3$ ، فإن اي فضاء جزئي من (X,τ) هو فضاء T_i كذلك . ونعبر عن هذا عادة بالقول إن خاصية كون الفضاء الطبولوجي فضاء T_i وراثية ، ذلك أننا نقول عن خاصية ما P عنها وراثية إذا ترتب علي فضاء تمتع فضاء طبولوجي(X,τ) بهذه الخاصية أن اتسم بها اي فضاء جزئي

من (X,τ) . ومن الطبيعي أن يرد السؤال حول ما إذا كانت خاصية كون الفضاء T_4 وراثية. و كان أن وُجد بأنْ الأمر ليس كذلك ، إذ ليس لزاماً أن يكون كل فضاء جزئي من فضاء T_4 فضاء T_4 إلا أنه ترد المبرهنة الخاصة التالية :

مبرهنة (١-٣):

إذا كان (X,τ) فضاء طبولوجياً T_4 وكانت Y مجموعة جزئية مغلقة في (X,τ) ، فإن الفضاء الجزئي (Y,τ_Y) فضاء T_4.

البرهان :

لتكن F و F' مجموعتين منفصلتين و مغلقتين في (Y,τ_Y) نجد أن F و F' مجموعتان منفصلتان و مغلقتان في (X,τ). لما كان (X,τ) فضاء T_4 ، فثمة مجموعتان مفتوحتان في (X,τ) نرمز لهما بU_F و $U_{F'}$، نحويان F و F' علي الترتيب بحيث $U_F \cap U_{F'} = \emptyset$. و يترتب علي هذا أن $V_{F'} = Y \cap U_{F'}$ و $V_F = Y \cap U_F$ مجموعتان مفتوحتان في (Y,τ_Y) تحويان F وF' علي الترتيب بحيث $V_F \cap V_{F'} = \emptyset$؛ و هذا يعني ان (Y,τ_Y) فضاء T_4.

مبرهنة (١-٤) :

اذا كان فضاء الجداء $(\Pi_1 X_i,\tau)$ لجماعة قابلة للعد من الفضاءات الطبولوجية فضاء ناظمياً ، فإن (X_i,τ) فضاء ناظمي أياً كان i من I.

البرهان :

لن نفسد عمومية المبرهنة لو اثبتناها من أجل الفضاء (X_1,τ_1) لانه يمكن إعادة البرهان نفسه أياً كان i من I. لما كان $(\Pi_1 X_i,\tau_j)$ فضاء فضاء ناظمياً ، فهو فضاء T_1. و بالتالي فإن (X_i,τ_i) فضاء T_1 أياً كان iمن I ، بوجه خاص فإن (X_1,τ_1) فضاء T_1. هنالك هومومورفيزم بين (X_1,τ_1) و الفضاء الجزئي من فضاء الجداء $Y = X_1 \times \{y_2\} \times \ldots \times \{y_i\} \times \ldots.$ حيث $y_2,\ldots,y_i,\ldots.$ عناصر مثبتاً من $X_2,\ldots,X_i,\ldots.$ علي الترتيب . من السهل أن Y مجموعة مغلقة في فضاء الجداء . لذا فإن (Y,τ_Y) فضاء ناظمي . وهكذا قد نكون قد توصلنا إلي أن (X_1,τ_1) و (Y,τ_Y) فضاءان هومومورفيزميان و أن (Y,τ_Y) فضاء ناظمي و بالتالي ، فإننا نجد وفق المبرهنة (١-٤) أن(X_1,τ_1) فضاء ناظمي .

سمات الفضاءات الناظمية و الفضاءات المنتظمة تماماً:

اذا كان (X,τ) تطبيقاً مستمراً للفضاء (Y,τ') في الفضاء (W,τ_W) ، و كان (X,τ) اي فضاء جزئي من (X,τ)، فإن مقصور f علي W تطبيق مستمر للفضاء (W,τ_W) في الفضاء (Y,τ').

نفرض أن (W,τ_W) فضاء جزئي من الفضاء (X,τ) و أن g تطبيق مستمر للفضاء (W,τ_W) في الفضاء (Y,τ')، و لنطرح السؤال التالي : هل ثمة عدد مستمر للتطبيق g علي (X,τ)؟ و بعبارة آخري ، هل يوجد تطبيق مستمر f ل (X,τ) في (Y,τ') بحيث يكون f(w)=g(w) أياً كان w من W ؟ من الممكن إيراد أمثلة يكون التمديد فيها ممكناً و أمثلة آخري يكون فيها التمديد مستحيلاً . وجدنا أن الفضاءات الناظمية تتسم ببعض الخواص الهامة في تمديد التطبيقات . و تمثل المبرهنة التالية أول المبرهنات و أهمها في هذا الصدد .

مبرهنة (١-٥)(تمهيدية أوريسون):

الشرط اللازم و الكافي كي يكون (X,τ) فضاءً ناظمياً هو أن يكون T_1 و أن يتحقق الشرط التالي : اياً كانت المجموعتان غير الخاليتين A,B المنفصلتان و المغلقتان في (X,τ) ، فثمة تطبيق مستمر للفضاء (X,τ) في الفضاء $[0,1]$ (المزود بطبولوجيا الفضاء الجزئي من (R,II) بحيث يكون $f(A)=\{0\}, f(B)=\{1\}$.

ليكن (X,τ) فضاء ناظمياً و (W,τ_W) فضاءً جزئياً من (X,τ) ممثلاً باجتماع مجموعتين غير خاليتين A,B منفصلتين و مغلقتين في (X,τ). عندئذٍ يكون التطبيق g:W→[0,1] المعرف ب $g(B)=\{1\}, g(A)=\{0\}$ قابلاً للتمديد الي تطبيق مستمر f ل X في [0,1]. و فضلاً عن هذه المبرهنة (التي تمثل واحدة من ىاهم مبرهنات علم الطبولوجيا) هناك مبرهنة آخري لا تقل عنها أهمية هي مبرهنة تيتس

مبرهنة (١-٦)(مبرهنة تيتس في التمديد) :

ليكن(X,τ) فضاء طبولوجياً ناظمياً و F مجموعة جزئية مغلقة في (X,τ) و g تطبيقاً مستمراً ما للفضاء الجزئي (F,τ_F) في فضاء الأعداد الحقيقية المعتاد(R,II). عندئذٍ هنالك ممد مستمراً للتطبيق g من (X,τ) الي الفضاء (R,II).

مثال :

لنفرض X=[0,1] ، و لنزود هذه المجموعة بالطبولوجيا النسبية τ من فضاء الاعداد الحقيقية المعتاد (R,II). لنأخذ F=]0,1] و لنختر التطبيق g:F⟶R محدداً بالدستور g(x)=1/x. من الواضح أن (X,τ) فضاء ناظمي وأن المجموعة الجزئية F من X ليست مغلقة في (X,τ) وأن g مستمر واضح أن اي ممد g الي x لا يمكن أن يكون مستمراً.

تعريف (١-٧):

يقال عن فضاء طبولوجي (X,τ) إنه منتظم تماماً (أو إنه تيخونوف)إذا كان فضاء T_1 ، و تحقق فضلاً عن ذلك الشرط التالي : أياً كانت المجموعة الجزئية F غير الخالية و المغلقة في T_1 ، وأياً كانت النقطة x من X الخارجة عن F ، فثمة تطبيق مستمر f للفضاء (X,τ) في الفضاء [0,1] (المزود بطبولوجيا القيمة المطلقة) بحيث$f(x)=0, f(F)=\{1\}$.

مبرهنة (١-٨):

كل فضاء منتظم تماماً هو فضاء منتظم.

ملاحظة :

إن عكس هذه المبرهنة غير صحيح ، مثالاً علي فضاء منتظم دون أن يكون منتظماً تماماً.

و فضلاً عن الرابطة بين الفضاءات المنتظمة و الفضاءات المنتظمة تماماً ، فثمة رابطة بين الفضاءات الناظمية و الفضاءات المنتظمة تماماً ، ذلك أن كل فضاء ناظمي منتظم تماماً . إن هذه حقيقة تنتج من تمهيدية اوريسون إذا أخذنا المجموعة المغلقة A مجموعة و حيدة العنصر {وهذا ممكن } ، و التطبيق f هو نفس التطبيق الوارد في تعريف الفضاءات المنتظمة تماماً .أما العكس فغير صحيح ، ذلك أن الفضاء المنتظم تماماً ليس فضاءاً ناظمياً بالضرورة .

خاصية كون الفضاء الطبولوجي فضاء ناظمياً ليست خاصية وراثية ، بمعني أنه ليس لزاماً علي اي فضاء جزئي من فضاء ناظمي أن يكون ناظمياً . ألا أنه يبرهن بأن كل فضاء جزئي من فضاء منتظم تماماً {

وبالتالي من فضاء ناظمي } هو فضاء منتظم تماماً .
وقد بين تيخونوف أن وصف الفضاءات المنتظمة تماماً يتطابق مع وصف الفضاءات الجزئية من الفضاءات الناظمية . و بالتالي فإن خاصية كون الفضاء فضاء منتظماً تماماً هي خاصية وراثية.
وتشغل الفضاءات المنتظمة تماماً مركزاً مرموقاً في التحليل الرياضي ، ذلك أنه يمكن أن نعرف علي كل من هذه الفضاءات " عدداً كبيراً " ، من التطبيقات المستمرة ، إذ إنه يقابل اي نقطتين مختلفتين في فضاء منتظم تماماً تطبيق حقيقي مستمر علي هذا الفضاء ، بحيث يكون لهذا التطبيق قيمتان مختلفتان في هاتين النقطتين.

قابلية العد في الفضاءات الطبولوجية

الفضاءات المتمتعة بقابلية العد الأولى :

تعريف(١-٩):

يقال عن فضاء طبولوجي (X,τ) إنه يتمتع بقابلية العد الأولى في نقطة x منه ، أو أنه يحقق الموضوعة الأولى في قابلية العد في هذه النقطة ، اذا وجدت جملة جوارات أساسية محلية N_x للطبولوجيا بحيث تكون الجماعة N_x قابلة للعد.
ونقول عن (X,τ) أنه يتمتع بقابلية العد الأولى اذا كان يتمتع بهذه القابلية في كل نقطة منه.

مثال:

ليكن (X,D) اي فضاء متري ، و لنسند الي كل نقطة x من X الجماعة
$N_x = \{N(x,\frac{1}{n}) | n \in N\}$. من السهل التحقق بأن جملة الجماعاتN_x تشكل جملة جوارات أساسية محلية في x للطبولوجيا المولدة بالمتري D. ولما كانت N_x قابلة للعد ، فإننا نستنتج أن اي فضاء متري يتمتع بقابلية العد الأولى في كل نقطة منه ، اي انه يتمتع بقابلية العد الأولى.

مبرهنة (١-١٠):

إن الشرط اللازم و الكافي كي يكون التطبيق (X,τ) المتمتع بقابلية العد الاولى في الفضاء الطبولوجي (Y,τ') مستمراً في النقطة x' ، هو أن يقابل كل متتالية$\{x_n\}, n \in N$ في X متقاربة من x' متتالية $\{f(x_n)\}, n \in N$ متقاربة من $f(x')$.

البرهان :

مبرهنة (١-١١):

إن اي فضاء جزئي من فضاء طبولوجي متمتع بقابلية العد الاولى لابد ان يتمتع بقابلية العد الاولى.

البرهان:

ليكن (X,τ) فضاء طبولوجياً متمتعاً بقابلية العد الاولى . إذن اياً كانت النقطة x من X فإن الجماعة N_x قابلة للعد . الفضاء الجزئي (Y,τ_Y) من X فإن جملة المجموعات
$N'_y = (Y \cap N | N \in N_y\}$ عندما يمسح y المجموعة Y بأكملها بشكل جملة جوارات أساسية للطبولوجيا النسبية علي Y. و لما كان من الواضح أن المجموعة N'_y قابلة للعد ، فإن الفضاء الجزئي (Y,τ_Y) يتمتع بقابلية العد الاولي كذلك.

الفضاءات المتمتعة بقابلية العد الثانية

تعريف (١-١٢):

يقال عن فضاء طبولوجي (X,τ) إنه يتمتع بقابلية العد الثانية ، أو انه يحقق الموضوعة الثانية في قابلية العد، إذا و جدت قاعدة قابلة للعد للطبولوجيا.

مثال:

لنأخذ فضاء الاعداد الحقيقية المعتاد (R,II) . الجماعة القابلة للعد$B = \{\ \ ]a,b[\ |a,b \in Q\}$ تشكل قاعدة للطبولوجيا المولدة بمترك القيمة المطلقة ، و بالتالي فإن فضاء الاعداد الحقيقية المعتاد يتمتع بقابلية العد الثانية.

مثال:

ليكن (X,τ) فضاء طبولوجيا متقطعاً . من الواضح أن اي قاعدة للطبولوجيا المتقطعة τ يجب أن تحتوي علي كل المجموعات الوحيدة العنصر. و بالتالي فإذا كانت X غير قابلة للعد ، فإن اي قاعدة ل τ غير قابلة للعد ، و عندئذ لا يكون (X,τ) فضاء متمتعا بقابلية العد الثانية. أما اذا كانت X قابلة للعد ، فإن (X,τ) فضاء متمتع بقابلية لاعد الثانية ، إذ إن $B = \{\ \{x\}|x \in X\}$ تشكل عندئذ قاعدة قابلة للعد ل τ.

مبرهنة (١-١٣):

كل فضاء متمتع بقابلية العد الثانية لا بد و أن يتمتع بقابلية العد الاولى.

البرهان:

إذا كانت (X,τ) فضاء متمتعاً بقابلية العد الثانية ، فهنالك قاعدة B قابلة للعد للتبولوجياτ. فإن $N_x = \{B \in B\ |x \in B\}$ شكل جملة جوارات أساسية محلية في x للطبولوجيا τ و لما كانت B قابلة للعد ، فإن كل N_x قابلة للعد كذلك. اذن (X,τ) يتمتع بقابلية العد الاولى.

هذا و ليس من الضروري أن يكون الفضاء المتمتع بقابلية العد الاولى متمتعاً بقابلية العد الثانية . اي فضاء متقطع يجب أن يتمتع بقابلية العد الاولى ، في حين أن الفضاء المتقطع في حالة كون X مجموعة غير قابلة للعد لا يتمتع بقابلية العد الثانية .

الفضاءات القابلة للفصل

تعريف (١-١٤):

يقال عن فضاء طبولوجي (X,τ) إنه قابل للفصل إذا حوي مجموعة جزئية كثيفة و قابلة للعد (اي اذا وجدت مجموعة جزئية A من X قابلة للعد بحيث يكون $Cl(A) = X$).

مثال:

لتكن R مجموعة الأعداد الحقيقية . فإذا زودنا R بالطبولوجيا المعتادة ، فإن الفضاء الطبولوجي الناتج يغدو قابلاً للفصل ، ذلك أن مجموعة الأعداد العادية Q تشكل عندئذ مجموعة جزئية من R قابلة للعد و كثيفة في (R,II) . لنزود الآن R بالطبولوجيا المتقطعة . لما كانت كل مجموعة جزئية في هذه الحالة مغلقة ، فأياً كانت المجموعة الجزئية A من R ، فإن $Cl(A) = A$. و يترتب علي هذا أنه إذا كانت A مجموعة جزئية من R تحقق الشرط $Cl(A) = R$ فإن $A = R$ ؛ و هذا يعني أن المجموعة الجزئية الكثيفة الوحيدة في R هي المجموعة R نفسها. و لما كانت R غير قابلة للعد ، فإن فضاء الأعداد الحقيقية المنقطع ليس قابلاً للفصل. لنزود أخيراً R بتبولوجيا τ عن طريق جملة جوارات أساسية N بحيث نسند الي كل عنصر x

من R الجماعة $N_x = \{[x, a[\mid a \in R, x < a\}$. لتكن U اي مجموعة مفتوحة (بالنسبة ل τ) و غير خالية. فإذا كان x اي عنصر من U ، فهنالك عنصر $[x, a[$ من N_x بحيث $[x, a[\subseteq U$. و بما أن $[x, a[$ يتقاطع مع مجموعة الأعداد العادية Q ، فإننا نستنتج أن اي مجموعة مفتوحة (بالنسبة ل τ) و غير خالية لابد وأن تقاطع Q ، إذن Q مجموعة كثيفة في (R, τ) . و لما كانت ** قابلة للعد ، فإن الأعداد الحقيقة المزودة بالطبولوجيا Q قابل للفصل.

مبرهنة (١-١٥):

كل فضاء متمتع بقابلية العد الثانية لابد وأن يكون قابلاً للفصل.

البرهان:

إذا كان (X, τ) فضاء متمتعاً بقابلية العد الثانية ، فثمة قاعدة قابلة للعد B ل τ. لنأخذ في كل عنصر B من B نقطة ما x_B، و لنشكل المجموعة $A = \{x_B \mid B \in B\}$. لما كانت B قابلة للعد ،فإن A قابلة للعد. لتكن U اي مجموعة مفتوحة وغير خالية ، و لتكن x اي نقطة من U. إذن ثمة عنصر B من القاعدة يحوي x و محتوي في U (لان U اجتماع لعناصر من القاعدة). و استناداً إلي تعريف A ، فهنالك نقطة من A محتواة في B ، و بالتالي محتواة في U. و بهذا نكون قد وجدنا أنه إذا كانت U اي مجموعة مفتوحة و غير خالية في X ، فإن $U \cup A \neq \emptyset$ ؛ إذن A كثيفة في X. و لما كانت A قابلة للعد كذلك ، فإن (X, τ) فضاء قابل للفصل.

هذا و ليس من الضروري أن يكون الفضاء القابل للفصل متمتعاً بقابلية العد الثانية. و علي سبيل المثال ، لنأخذ مجوعة الأعداد الحقيقة R المزودة بالتوبولوجيا τ حيث الشرط اللازم و الكافي كي يكون عنصر ما منتمياً الي τ أن يكون هذا العنصر ∅ أو مجموعة جزئية من Rمتممتها مجموعة منتهية . من السهل ملاحظة أن أي مجموعة جزئيةغير منتهية في (R, τ) كثيفة في هذا الفضاء. و بالتالي فالمجموعة الجزئية القابلة للعد Q مثلاً كثيفة في (R, τ) ؛ إذن (R, τ) قابل للفصل .بيد أن هذا الفضاء لا يتمتع بقابلية العد الثانية . لأنه لو تمتع بقابلية العد الثانية لتمع بقابلية العد الأولى. و لكنه ليس كذلك.

مبرهنة (١-١٦):

(١) اي فضاء جزئي مفتوح من فضاء قابل للفصل لابد وأن يكون قابلاً للفصل.

(٢) الشرط اللازم و الكافي كي يكون فضاء جداء جماعة قابلة للعد من الفضاءات الطبولوجية غير الخالية قابلاً للفصل هو أن يكون كل فضاء من الجماعة قابلاً للفصل.

البرهان:

(١) لنفرض A مجموعة جزئية قابلة للعد و كثيفة في الفضاء (X, τ) القابل للفصل، و لنرمز ب U لمجموعة جزئية غير خالية من X مفتوحة في X و ب C للمجموعة غير الخالية $U \cup A$. و لتكن V اي مجموعة جزئية من U غير خالية و مفتوحة في U.بما أن U مفتوح في X و V مفتوحة في U فإن Vمفتوحة في X ، وبلتالي فإن $V \cup A \neq \emptyset$. و يترتب علي هذا أن $V \cap C = V \cap (U \cap A) = (V \cap U) \cap A = V \cup A \neq \emptyset$. وهكذا نري أن اي مجموعة V غير خالية و مفتوحة في U تتقاطع مع المجموعة الجزئية C من C. و هذا يعني أن المجموعة الجزئية C ممن U و القابلة للعد كثيفة فيU ؛ إذن U (المزودة بالطبولوجيا النسبية) فضاء جزئي قابل للفصل.

(٢) لنفرض أولاً أن $\{(X_i,\tau_i)\}, i \in I$ جماعة قابلة للعد من الفضاءات غير الخالية و القابلة للفصل ، و لنبرهن أن فضاء جدائها قابل للفصل كذلك. لتكن

$$A_1 = \{x^{11}, x^{21}, x^{31}, \dots, x^{n1}, \dots$$
$$A_2 = \{x^{12}, x^{22}, x^{32}, \dots, x^{n2}, \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$A_i = \{x^{1i}, x^{2i}, x^{3i}, \dots, x^{ni}, \dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$\begin{aligned}(\Pi_I V_i) \cap C &= (\Pi_I V_i) \cap (U_I C_i) \supseteq (\Pi_I V_i) \cap C_k \\ &= (V_1 \times V_2 \times \dots \times V_k \times X_{k+1} \times X_{k+2} \times \dots) \cap (A_1 \times A_2 \times \dots \times A_k \\ &\times \{(x^{(k+1)(k+1)}, x^{(k+2)(k+2)}, \dots)\} \\ &= (V_1 \cap A_1) \times (V_2 \cap A_2) \times \dots (V_k \cap A_k) \times (X_{k+1} \cap \{x^{(k+1)(k+1)}\}) \\ &\times \dots \times (X_i\{\cap x^{ii}\} \times \dots\end{aligned}$$

ولما كان $V_l \cup A_l \neq \emptyset$ ايا كان l من المجموعة $\{1,2,\dots,k\}$ (لان A_l مجموعة كثيفة في x_l و أن V_l مجموعة مفتوحة في (X_l) ، و كان $X_i \cap \{x^{ii}\} = \{x^{ii}\} \neq \emptyset$ ، فإن $(\Pi_I V_i) \cap C \neq \emptyset$. و بما أن $\Pi_I V_i \subseteq U$، فإن $U \cup C \neq \emptyset$.

اذا كانت المجموعة غير الخالية U المفتوحة في فضاء الجداء ، فإن U تتقاطع مع المجموعة الجزئية C من $\Pi_I X_i$ القابلة للعد. و هذا يعني أن المجموعة القابلة للعد ** كثيفة في فضاء الجداء . إذن فضاء الجداء قابل للفصل.

لنفرض الآن أن فضاء الجداء $(\Pi_I X_i, \tau)$ غير الخالي قابل للفصل ، و لنثبت أنه أياً كان i من I فإن (X_i,τ_i) قابل للفصل. لن تمس عمومية المسألة إن نحن برهنا أن (X_1,τ_1) قابل للفصل ، لأن البرهان نفسه يمكن أن يعاد علي أي من الفضاءات (X_i,τ_i). لما كان فضاء الجداء قابلاً للفصل ، فهنالك مجموعة A قابلة للعد و كثيفة فيه ، أي أن $Cl(A) = \Pi_I X_i$. فإذا كان $p_1: \Pi_I X_i \to X_1$ تطبيق الاسقاط لفضاء الجداء علي X_1 ، فسنبين بأن المجموعة $A_1 = p_1(A)$ قابلة للعد و كثيفة في (X_1,τ_1) . أما عن كون المجموعة A_1 قابلة للعد فالأمر واضح ، إذ أن A_1 تتألف من الاحداثيات من الاولى من عناصر المجموعة A القابلة للعد. بقي علينا إثبات أن A_1 كثيفة في (X_1, r_1) . لتكن U_1 مجموعة جزئية غير خالية من X_1 و مفتوحة في (X_1, r_1) ، و لنشكل المجوعة $U = U_1 \times X_2 \times X_3 \times \dots$. من الواضح أن U مجوعة جزئية غير خالية من فضاء الجداء و مفتوحة في هذا الفضاء و مفتوحة في هذا الفضاء (لانها عنصر من القاعدة ، بل القاعدة الجزئية ل r) . و بالتالي ، لما كانت A مجموعة كثيفة في $(\Pi_I X_i, r)$، فإن $U \cup A \neq \emptyset$. ولما كان

$$U \cup A = (U_1 \times X_2 \times X_3 \times \dots) \cap (A_1 \times A_2 \times A_3 \times \dots) = (U_1 \cap A_1) \times \dots$$

فإن $U_1 \cap A_1 \neq \emptyset$. و هكذا نرى أن اي مجموعة U_1 غير خالية مفتوحة في (X_1, r_1) تتقاطع مع المجموعة الجزئية A_1 من X_1 و القابلة للعد. وهذا يعني أن المجموعة القابلة للعد A_1 كثيفة في (X_1,τ_1) ؛ إذن (X_1,τ_1) فضاء قابل للفصل و بذا يتم إثبات المبرهنة.

و يجدر بنا التنبيه بأن الشق من (١) من هذه المبرهنة يبين أنه كي يكون فضاء جزئي من فضاء قابل للفصل فضاءاً قابلاً للفصل ، يكفي أن يكون الفضاء الجزئي مفتوحاً . و يبين المثال التالي أنه ليس من الضروري ان يكون كل فضاء جزئي من فضاء قابل للفصل قابلاً للفصل.

مثال:

لنأخذ مجموعة الأعداد الحقيقة R المزودة بطبولوجيا τ عن طريق جملة جوارات أساسية حيث نسند إلي كل عنصر x من R المجموعة $N_x = \{[x, a[\ |a \in R, x < a\}$. لقد رأينا في أن (R, τ) قابل للفصل . و استناداً الي الشق (٢) ، فإن فضاء جداء (R, τ) في نفسه ، و ليكن (R^2, τ') قابل للفصل . لنأخذ المجموعة الجزئية $Y = \{(x, y)|x + y = 0$ ، ولنزودها بالطبولوجيا النسبيةτ'_y . لما كانت كل مجموعة جزئية من الشكل $[x, a[\times [y, b[$ ،بفرض $x < a, y < b$ مفتوحة في (R^2, τ') ، لأنها عنصر من قاعدة ب ، فإننا نستنتج أن$U = Y \cap ([x, x + 1[\times [-x, -x + 1[)$ مجموعة مفتوحة في (Y, τ'_y) أياً كان $x \in R$. لكن من السهل التحقق بأن $U = \{(x, x)\}$ ؛ و بالتالي فإن اي مجموعة جزئية و حيدة العنصر من Y مفتوحة في (Y, τ'_y) ، أي أن الطبولوجيا النسبية τ'_y منقطعة. و بمناقشة مماثلة لتلك التي سردناها ، نستنتج أن المجموعة الجزئية الكثيفة الوحيدة في (Y, τ'_y) هي Yنفسها. ولما كانت Y غير قابلة للعد ، فإن الفضاء (Y, τ'_y) ليس قابلاً للفصل.

فضاءات ليندليوف

تعريف (١-١٧):

ليكن(X, τ) فضاءً طبولوجياً وA مجموعة جزئية من X فإذا كانت $\{U_i\}, i \in I$. جماعة المجموعات الجزئية من X بحيث $A \subseteq U_1 U_i$ ، فإننا نسمي الجماعة $\{U_i\}, i \in I$ تغطية (أو غطاء) ل A. و في حالة كون كل من عناصر التغطية مجموعه مفتوحة في (X, τ) ، فإنه يقال بأن $\{U_i\}, i \in I$ تشكل تغطية مفتوحة (أو غطاء مفتوحاً) لـA. و يترتب علي هذا أنه إذا كانت $\{U_i\}, i \in I$ جماعة من المجموعات المفتوحة في (X, τ)بحيث $U_1 U_i = X$ ، فإن هذه الجماعة تشكل تغطية مفتوحة للفضاء (X, τ). هذا و إذا شكلت $\{V_j\}, j \in J$ تغطية مفتوحة للفضاء (X, τ) وكانت هذه التغطية جماعة جزئية من التغطية المفتوحة $\{U_i\}, i \in I$ لهذا الفضاء فإننا نقول إن$\{V_j\}, j \in J$ تشكل تغطية جزئية من التغطية المفتوحة $\{U_i\}, i \in I$.

مثال:

لنأخذ فضاء الأعداد الحقيقة المعتاد (R, II). إن مجموعة الجوارات 1 ، أي المجموعة $\{N(x, 1)|x \in R\}$ ، تشكل تغطية مفتوحة لهذا الفضاء ، كما تشكل المجموعة $\{N(n, 1)|n \in Z\}$ تغطية جزئية من التغطية$\{N(x, 1)|x \in R\}$. هذا و لا تشكل التغطية المفتوحة $\{N(x, \frac{1}{2})|x \in R\}$ تغطية جزئية من $\{N(x, 1)|x \in R\}$ ، ذلك أن $\{N(x, \frac{1}{2})|x \in R\} \not\subseteq \{N(x, 1)|x \in R\}$

مثال:

ليكن (X, τ) فضاء طبولوجيا $A \subseteq X$. نقول عن الفضاء (A, τ_A) إنه فضاء ليندليوف إذا حوت كل تغطية مفتوحة لهذا الفضاء تغطية جزئية قابلة للعد.

نستنتج من هذا أن (X, τ) يكون فضاء ليندليوف اذا كانت $\{U_i\}, i \in I$ جماعة من عناصر τ بحيث يكون $X = U_1 U_i$ ، فهنالك جماعة جزئية منها قابلة للعد ، و لتكن $\{U_{j_k}\}, k \in K$ (K مجموعة قابلة للعد) بحيث يكون $X = U_k U_{j_k}$.

مبرهنة (١-١٨):

كل فضاء متمتع بقابلية العد الثانية لابد أن يكون فضاء ليندليوف.

البرهان :

إذا كان (X, τ) فضاء متمتعاً بقابلية العد الثانية ، فثمة قاعدة قابلة للعد B لـτ و لتكن $B = \{B_1, B_2, \dots, B_k, \dots\}$. لنفترض $\{U_i\}, i \in I$ اي تغطية مفتوحة ل (X, τ) . لما كان كل عنصر من عناصر هذه التغطية المفتوحة إجتماعاً لجماعة من عناصر B، فثمة عناصر من هذه التغطية $U_{i_1}, U_{i_2}, \dots, U_{i_k}, \dots$ بحيث يكون $B_1 \subseteq U_{i_1}, B_2 \subseteq U_{i_2}, \dots, B_k \subseteq U_{i_k}, \dots$. و بالتالي فإن $U_k B_k \subseteq U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \dots \cup U_{i_k} \cup \dots$ بفرض $K = \{1, 2, \dots, k, \dots\}$. لكن $U_k B_k = X$ (وفق تعريف القاعدة) ؛ إذن $U_{i_1} \cup U_{i_2} \cup \dots \cup U_{i_k} \cup \dots = X$. و هذا يعني أن $\{U_{i_k}\} \dots K = 1, 2, \dots$تغطية جزئية قابلة للعد من التغطية المفتوحة الإختيارية $\{U_i\}, i \in I$.إذن (X, τ) فضاء ليندليوف.

مبرهنة (١-١٩):

(١) اي فضاء جزئي مغلق من فضاء ليندليوف لابد أن يكون فضاء ليندليوف .

(٢) إن فضاء جداء جماعة قابلة للعد من فضاءات ليندليوف غير الخالية ليس بالضرورة فضاء ليندليوف. أما إذا كان فضاء جداء جماعة قابلة للعد من الفضاءات الطبولوجية فضاء ليندليوف ، وكان كل من عناصر هذه الجماعة فضاء T_1 ، فلا بد أن يكون كل من عناصر هذه الجماعة فضاء ليندليوف.

مبرهنة (١-٢٠):

اذا كان (X, D) فضاء مترياً ، فإن الدعاوي التالية متكافئة:

(١) الفضاء (X, D) هو فضاء ليندليوف.

(٢) الفضاء (X, D) قابل للفصل.

(٣) الفضاء (X, D) يتميع بقابلية العد الثانية.

الباب الثاني

التراص في الفضاءات الطبولوجية

تشغل مبرهنة هايني بوريل $Heine - Borel$ في التحليل الرياضي مركزا مرموقا نظرا للنتائج الباهرة المترتبة عليها. وتنص هذه المبرهنة على أنه إذا كان $[a , b]$ أي مجال مغلق و محدود في فضاء الأعداد الحقيقة المعتاد(R , II)،وكانت $\{U_i\}, i \in I$أي تغطية ل $[a , b]$ مؤلفة من مجالات مفتوحة، فإن هذه التغطية تحوي تغطية جزئية منتهية و تحافظ مبرهنة هايني بوريل على صحتها عند افتراض التغطية $\{U_i\}, i \in I$ مؤلفة من مجموعات مفتوحة R في دون أن تكون هذه المجموعات مجالات مفتوحة بالضرورة.

الفضاءات المتراصة

تعريف(٢-١):

يقال عن فضاء طبولوجي إنه متراص (X , τ) إذا حوت كل تغطية مفتوحة لهذا الفضاء تغطية منتهية.[*]

و إذا كانتA مجموعة جزئية من X، فإننا نقول عن A إنها متراصة إذا حوت كل تغطية لـ A بمجموعات مفتوحة في A تغطية جزئية منتهية.

يمكن التحقق من أن الشرط اللازم و الكافي كي تكون المجموعة A متراصة هو أن يكون الفضاء الجزئي (A, τ_A) متراصا، ذلك أن الشرط اللازم والكافي كي تشكل الجماعة$\{ A \cap U_i\}, i \in I$ من المجموعات والمفتوحة في A تغطية مفتوحة للمجموعة الجزئية هو أن تشكل الجماعة من المجموعات المفتوحة في تغطية مفتوحة للفضاء الجزئي (A, τ_A).

كذلك ، يمكن التحقق من أنه اذا كانتA , B مجموعتين جزئيتين في A بحيث $B \subseteq A$ فان الشرط اللازم والكافي كي تكون B متراصة في A هو أن تكون متراصة في X.

مثال:

لتكن X مجموعة غير منتهية ، ولنرمز ب τ لاجتماع المجموعة $\{\emptyset\}$ مع جماعة كل المجموعات الجزئية من X التي كل منها مؤلف من جميع عناصر X بإستثناء عدد منته منها، من السهل التحقق بأن (X , τ) فضاء طبولوجي. لتكن$\{U_i\}, i \in I$ أي تغطية مفتوحة ل X ، ولنختر أي عنصر يختلف عن $\emptyset$ من هذه التغطية، و ليكن U_{i_0} عندئذ تحوي المجموعة الجزئية U_{i_0} جميع نقاط X باستثناء عدد منته من نقاط X، ولتكن النقاط $x_1, x_2, \cdots\cdots, x_k$. لما كانت$\{U_i\}, i \in I$ تغطية مفتوحة لـ X ، فإن كل نقطة من X تنتمي

إلى واحد على الاقل من عناصر التغطية، وبالتالي، فثمة عناصر $U_{i_1}, U_{i_2}, \cdots\cdots, U_{i_k}$ من $\{U_i\}, i \in I$

بحيث $x_1 \in U_{i_1}, x_2 \in U_{i_2} \cdots\cdots, x_k \in U_{i_k}$ لذا فإن

$X = U_{i_0} \cup U_{i_1} \cup \cdots \cup U_{i_k}$. وهكذا فإن $\{U_{i_0}, U_{i_1}, \cdots\cdots, U_{i_k}\}$ تمثل تغطية جزئية منتهية من التغطية المفتوحة الاختيارية لـ (X, τ) ، إذن (X, τ) فضاء متراص.

ومن تعريف فضاءات ليندليوف أن كل فضاء متراص هو فضاء ليندليوف. ويبين المثال التالي عدم صحة عكس هذه النتيجة.

مثال :

نأخذ فضاء الأعداد الحقيقية المعتاد$(\mathbf{R}, \mathbf{II})$، و لتكن $A =]0,1[$. لما كان $(\mathbf{R}, \mathbf{II})$ فضاء متمتعا بقابلية العد الثانية، فإن الفضاء الجزئي $(A, \mathbf{II}_A)$ يتمتع بقابلية العد الثانية كذلك وبالتالي فإن هذا الفضاء الجزئي هو فضاء ليندليوف بيد أن هذا الفضاء الجزئي ليس متراصا، ذلك أنه يمكن التحقق من أن الجماعة $]\frac{I}{n+1}, 1[, n = 1,2 \cdots$ تشكل تغطية مفتوحة لـ $]0,1[$ ، دون أن تحوي هذ التغطية تغطية جزئية منتهية.

مبرهنة(٢-٢)(هايني – بوريل):

إن أي مجال مغلق و محدود $[a, b]$ في فضاء لأعداد الحقيقية المعتاد متراص.

البرهان:

لتكن $\{U_i\}, i \in I$ تغطية مفتوحة ما ل$[a, b]$، حيث كل من U_i مجموعة مفتوحة في$(\mathbf{R}, \mathbf{II})$، ولنرمز بـ A لمجموعة العناصر x من$[a, b]$ بحيث يكون ل$[a, x]$ تغطية جزئية منتهية من التغطية$\{U_i\}, i \in I$. إن Aغير خالية ، إذ أنها تحوي العنصر a على الأقل. كذلك، فإن A محدودة من الاعلى، إذ إن bعنصر حاد من الاعلى ل A. نستنتج أن ل A حدا أعلى، أي أن ثمة عددا m بحيث $m = \sup A$. سنبين أن m ينتمي إلى$[a, b]$. من المعلوم أن أي جوار للحد الأعلىm ل A لابد و أن يقاطع A.لكن $A \subseteq [a, b]$ ؛ إذن أي جوار لـ m لابد وأن يقاطع مع $[a, b]$، و بالتالي فإن$m \in Cl([a, b])$ لكن $Cl([a, b]) = [a, b]$ لأن$[a, b]$ مغلقة في $(\mathbf{R}, \mathbf{II})$، إذن $m \in [a, b]$

لنفرض أن عنصر التغطية $\{U_i\}, i \in I$ الذي يحويm هو U_{i_0}. لما كان هذا الجوار لm لابد و أن يتقاطع مع A، فثمة عنصر K من A بحيث$K \leq m$ وبحيث $K \in U_{i_0}$. و إستنادا إلى تعريف A، هنالك تغطيةجزئية منتهية ل$[a, K]$ من التغطية المفتوحة $\{U_i\}, i \in I$. فإذا كانت هذه التغطية الجزئية هي

$\{U_{i_1},\cdots,U_{i_n}\}$ ،فإننا نستنتج أن $\{U_{i_0},U_{i_1},\cdots,U_{i_n}\}$ تشكل تغطية جزئية منتهية لـ $[a,m]$ من التغطية المفتوحة$\{U_i\},i\in I$ ل$[a,b]$. فإذا أثبتنا أن $m=b$، فإننا نكون قد أتممنا إثبات المبرهنة. في الحقيقة، إذا افترضنا مؤقتا أن $m<b$، فإن هنالك عناصر أكبر منm في $[a,b]$ محتواة في U_{i_0}. وهذا يعني أن هنالك عناصر من A أكبر من m (لأنهذه العناصر التغطية $\{U_{i_0},U_{i_1},\cdots,U_{i_n}\}$ نفسها) ،الامر الذي لا يمكن أن يقع لان $m=\sup A$وبالتالي فإن $m=b$.

تعريف (٢-٣):

لتكنX مجموعة ما$\{A_i\},i\in I$ و جماعة من المجموعات الجزئية من A.نقول عن $\{A_i\},i\in I$، إنها جماعة متمركزة (أو جماعة متمتعة بخاصة التقاطع المنتهي) إذا كان لأي جماعة جزئية منتهية من $\{A_i\},i\in I$ تقاطع غير خال.

مبرهنة(٢-٤):

الشرط اللازم والكافي كي يكون (X,τ) فضاء متراصا هو أن يكون لأي جماعة متمركزة $\{A_i\},i\in I$، من المجموعات الجزئية المغلقة في(X,τ) تقاطع غير خال.

البرهان:

ليكن (X,τ) فضاء متراصا، ولتكن $\{F_i\},i\in I$، أي جماعة متمركزة من المجموعات الجزئية المغلقة في (X,τ)، ولنبين أن $\cap_I F_i\neq\emptyset$. لنفرض مؤقتا أن $\cap_I F_i=\emptyset$،عندئذ يكون $X-\cap_I F_i=X$، أو$\cup_I(X-F_i)=X$. ولما كانت $X-F_i$ مجموعة مفتوحة في (X,τ) أيا كان iمن I،فإننا نستنتج أن $\{X-F_i\},i\in I$ تشكل تغطية مفتوحة لـ (X,τ). لكن (X,τ) فضاء متراص، إذن ثمة تغطية جزئية منتهية ، ولتكن $\{X-F_{i_1},\ldots\ldots X-F_{i_n}\}$ من التغطية المفتوحة $\{X-F_i\},i\in I$، للفضاء (X,τ). ويترتب على هذا أن $X=\left(X-F_{i_1}\right)\ldots\ldots\cup\left(X-F_{i_n}\right)$، أو$X=X-(F_{i_1}\cap\ldots\cap F_{i_n}$ ، الامر الذي ينجم عنه $F_{i_1}\cap X-F_{i_2}\cap\ldots\cap F_{i_n}$ ولكن هذا يعني أن الجماعة $\{F_i\},i\in I$ غير متمركزة ، وهذا مناقض للفرض،وبالتالي فإن $\cap_I F_i\neq 0$.

وبالعكس ، لنفرض أن لأي جماعة متمركزة من المجوعات الجزئية المغلقة في الفضاء (X,τ) تقاطعا غير خال ،ولنثبت أن (X,τ) فضاء متراص. لتكن$\{U_i\},i\in I$ أي تغطية مفتوحة لهذا الفضاء. عندئذ يكون

$X - U_I V_I = \emptyset$ ، أو $\cap_I (X - U_I)$. ولما كانت $X - U_{i1}$ مجموعة مغلقة في (X,τ)، فإننا نستنتج أن جماعة المجوعات الجزئية من X المغلقة ليست متمركزة. بالتالي نجد أن هنالك عددا منتهيا

$X - U_{i_1}, \dots, X - U_{i_k}$ من عناصر الجماعة $\{X - U_i\}, i \in I$ بحيث $(X - U_{i_1}) \cap \dots \cap (X - U_{i_k})$ أو $X - (U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k})$، الامر الذي يتعين عليه أن

$U_{i_1} \cup \dots \cup U_{i_k} = X$ ولكن هذا يعني أن $\{U_{i_1} \dots \dots U_{i_k}\}$ تشكل تغطية جزئية منتهية من التغطية المفتوحة الاختيارية $\{U_i\}, i \in I$ للفضاء (X,τ)، أي أن فضاء (X,τ) متراص.

تبين المبرهنه التالية أن التراص يحفظ بالتطبيقات المستمرة.

نتيجة:

اذا كان f تطبيقا مستمرا للفضاء المتراص (X,τ) على (Y,τ') الفضاء فإن (Y,τ') فضاء متراص.

اذا كان (X,τ) و (Y,τ') فضاءين هومومورفيزميين ، وكان احد هذين الفضاءين متراصا، فإن الفضاء الآخر متراص بالضرورة.

مبرهنة(٢ – ٤):

(١) إن أي فضاء جزئي مغلق من فضاء متراص لابد و أن يكون متراصا.

(٢) الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاء جداء جماعة قابلة للعد من الفضاءات غير الخالية متراصا هو أن يكون كل فضاء من الجماعة متراصا.

البرهان:

(١) ليكن (X,τ) فضاءا متراصا ، ولتكن A مجموعة جزئية مغلقة في (X,τ).ولنفترض $\{F_i\}, i \in I$ أي جماعة متمركزة من المجموعات الجزئية من A والمغلقة في (A,τ_A). ولما كانت A مغلقة في (X,τ) وكانت F_i مغلقة في (A,τ_A)أيا كان i من I، فإن F_i أيا كان i مغلقة في (X,τ).

وبالتالي فإن $\{F_i\}, i \in I$ جماعة متمركزة من المجموعات الجزئية المغلقة في (X,τ). ولما كان (X,τ) متراصا ، فإن $\cap_I F_i \neq \emptyset]$ اي جماعة متمركزة من المجموعات الجزئية المغلقة في (A,τ_A) تقاطعا غير خال. إذن فالفضاء الجزئي (A,τ_A) متراص.

(٢) لنفترض أن $\{(X_i,\tau_i)\}, i \in I$ جماعة قابلة للعد من الفضاءات التبولوجية ، ولنفترض أن فضاء جدائها $(\mathbf{II}_I X_i, \tau)$ متراص.لما كان تطبيق الاسقاط $p_i: \mathbf{II}_i X_i \to X_i$ مستمرا وغامرا أيا كان i من I فإنه يترتب أن (X_i,τ_i) فضاء متراص أيا كان i من I.

وهكذا ولن نتعرض الآن للبرهان على العكس الذي ينص على أنه إذا كان كل من الفضاءات (X_i,τ_i) متراصا أيا كان i من I فإن فضاء جدائها $(\mathbf{II}_I X_i, \tau)$ متراص.

إن الشق (١) من النظرية السابقة يؤكد بأنه كي يكون فضاء جزئي من فضاء متراص متراصا يكفي أن يكون هذا الفضاء الجزئي مغلقا. ويبين المثال التالي أن ليس لزاما على أي فضاء جزئي من فضاء متراص أن يكون متراصا، أي أن خاصة التراص ليست وراثية.

مثال:

نأخذ فضاء الاعداد الحقيقية المعتاد (R,II). إن مبرهنة هايني_بوريل تؤكد بأنه إذا أخذنا المجموعة المزودة $X=[0,1]$ بالطبولوجيا النسبية II_x فإن الفضاء (X,II_x) متراص . نأخذ المجموعة الجزئية $]0,1[$ من X.

إن $]0,1[$ مجموعة مفتوحة (وغير مغلقة) في (X,II_x) لأنها تقاطع X مع المجموعة المفتوحة $]0,1[$ في (R,II).لكن المجموعة $]0,1[$ غير متراصة (X,II_x)(لماذا؟) ؛ إذن فالمجموعة الجزئية (غير المغلقة) $]0,1[$ من الفضاء المتراص (X,II_x) ليست متراصة.

إن عكس الشق(١) ليس صحيحا في الحالة العامة. بيد أنه ترد المبرهنة التالية:

مبرهنة(٢-٥):

إذا كان (X,τ) فضاء T_2، وكانت A مجموعة جزئية متراصة في (X,τ) فإن A مغلقة في (X,τ)

البرهان:

ليكن x عنصرا اختياريا مثبتا في $X-A$ وليكن y عنصرا من A.لما كان (X,τ) فضاء T_2، فثمة جوار U_y لـ x وجوار V_y لـ y بحيث $U_y \cap V_y = \emptyset$. إن الجماعة $y \in A$ ، $\{V_y\}$ تشكل تغطية مفتوحة لـ A بعناصر من τ.ولما كانت A متراصة، فثمة عدد منته من النقاط y في A ولتكن $y_1, \ldots, y_n$ بحيث تشكل $\{V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}\}$ تغطيه مفتوحة ل A.لنفرض أن $U = U_{y_1} \cap \ldots \ldots \cap U_{y_n}$ و

$V = V_{y_1} \cup \dots \cup V_{y_n}$. ومن الواضح أن $x \in U$ و$A \subseteq V$ و $U \cap V = \emptyset$ بالتالي نكون قد وجدنا أنه أيا كان العنصر x من $X - A$ ،فثمة جوار لـ x هو U بحيث $U \subseteq X - A$؛إذن $X - A$ مفتوحة [23- 10]،أي أن A مغلقة.

هذا ، وإذا لم يكن(X, τ) فضاء T_2،فليس من الضروري أن تكون كل مجموعة جزئية متراصة من X مغلقة كما يبين المثال التالي:

مثال:

لتكن N مجموعة الاعداد الطبيعية، ولنرمز بτ لاجتماع المجموعة $\{\emptyset\}$ مع جماعة كل المجموعات الجزئية من N التي كل منها مؤلف من جميع عناصر N باستثناء عدد منته منها، (N, τ) فضاء طبولوجي وأن هذا الفضاء ليس فضاء T_2.

لتكن U مجموعة مفتوحة غير خالية في X و لا تساوي X. من الممكن التحقق من ان U مجموعة جزئية متراصة في الفضاء(N, τ) رغم كونها ليست مغلقة .

مبرهنة(٢ -٦):

اذا كان f تطبيقا مستمرا متباينا و غامرا للفضاء المتراص (X, τ)على فضاء هاوسدورف (Y, τ'). فان fهوميومورفيزم .

البرهان :

كي نبين ان f هومومورفيزم ، يكفي اثبات استمرار f^{-1}. اذا كانت F اي مجموعة جزئية مغلقة في(X, τ)، فان F متراصة و بالتالي فان$f(F)$ متراصة كذلك .و استنادا الى فان $f(F)$ مغلقة في(Y, τ'). لما كان $f(F) = (f^{-1})^{-1}(F)$، فاننا نستنتج ان الخيال العكسي وفق f^{-1} لاي مجموعة جزئية مغلقة Fفي (X, τ)هو مجموعة مغلقة في (Y, τ') لذا فانf^{-1} مستمر .

الفضاءات المتراصة موضعيا

تعريف(٢ -٦):

نقول عن فضاء طبولوجي (X,τ) انه متراص موضعيا اذا وجد لاي عنصر x من X جوار ذو لصاقة متراصة. ويقال عن مجموعة جزئية A من انها متراصة موضعيا اذا كان الفضاء الجزئي (A,τ_A) متراصا موضعيا .

مثال:

ناخذ فضاء الاعداد الحقيقية المعتاد $(\mathbf{R},\mathbf{II})$، و ليكن x اي عنصر من $\mathbf{R}$. نلاحظ ان المجال المفتوح $]x-1,x+1[$ جوار لـ x ، و ان لصاقة هذا الجوار هي المجال المغلق و المحدود .

$[x-1,x+1]$ بما ان $[x-1,x+1]$ متراص وفق **مبرهنة هايني**–بوريل، فان الفضاء $(\mathbf{R},\mathbf{II})$ متراص موضعيا. و تجدر بنا ملاحظة ان هذا الفضاء ليس متراصا.

و على سبيل المثال ، لا يمكن ان نستخلص من التغطية المفتوحة $\{]k,k+2[|k\in Z\}$ للفضاء $(\mathbf{R},\mathbf{II})$ تغطية جزئية منتهية .

مبرهنة(٢–٧):

كل فضاء متراص لابد ان يكون متراصا موضعيا .

مبرهنة(٢–٨):

ليكن (X,τ) فضاء متراصا موضعيا ، لتكن Aمجموعة جزئية من x. عندئذ :

(١)اذا كانت A مغلقة في (X,τ)، فان متراصة موضعيا .

(٢)اذا كانت Aمفتوحة في (X,τ)و كان (X,τ)فضاء T_3(فضلا عن كونه متراصا موضعيا) فان A متراصة موضعيا .

البرهان:

لتكن A مجموعة مغلقة في الفضاء (X,τ) المتراص موضعيا ، وليكن x عنصرا اختيارا من A. اذن هنالك جوار U لـ x- في (X,τ) بحيث تكون $Cl(U)$ متراصة . نلاحظ ان $(A\cap U)$ مجموعة مفتوحة في A تحوي x، و انه:

$$Cl(A\cap U)_{\text{في }A} = A\cap[Cl\,(A\cap U)_{\text{في }X}]$$

لما كان $A\cap[Cl\,(A\cap U)_{\text{في }X}]\subseteq Cl(U)$، فاننا نستنتج استنادا الى المساواة السابقة ان

$Cl(A\cap U)$ في A محتواه في $Cl(U)$. و لما كانت $Cl(U)$ مجموعة متراصة في X و كانت $Cl(A)$ في A مغلقة في A و بالتالي في X، فاننا نستنتج ان المجموعة $Cl(A\cap U)$ في A مجموعة جزئية مغلقة في المجموعة المتراصة $Cl(U)$ ؛ويترتب على هذا استنادا الى ان $Cl(A\cap U)$ في A مجموعة متراصة . اذن نكون قد وجدنا انه ايا كان x من A، فهنالك مجموعة $(A\cap U)$ تحوي x و مفتوحة في A، بحيث تكون $Cl(A\cap U)$ في A مجموعة متراصة . اذن A متراصة موضعيا.

(٢) ليكن x عنصرا من المجموعة A المفتوحة في (X,τ). لما كان (X,τ) الفضاء متراصا موضعيا ، فهنالك جوار V للنقطة x في (X,τ) بحيث تكون $Cl(V)$ متراصة . و بما ان (X,τ) فضاء T_3 و أن $A\cap V$ مجموعة مفتوحة في (X,τ) تحوي x، فثمة مجموعة U مفتوحة في (X,τ) بحيث $x\in U\subseteq$ $A\cap V \supseteq Cl(U)$. اذن ايا كان العنصر x من A، فثمة مجموعة U مفتوحة في A تحتوي x بحيث تكون $Cl(U)$ متراصة في (X,τ) (لان $Cl(U)\subseteq Cl(V)$، الامر الذي يعني ان $Cl(U)$ متراصة لانها مجموعة جزئية مغلقة من فضاء متراص

رص الفضاءات الطبولوجية

تعريف(٢-٩):

يقال عن فضاء طبولوجي متراص (Y,τ') انه رص للفضاء الطبولوجي (X,τ) اذا وجد هومومورفيزم بين (X,τ) و فضاء جزئي كثيف من (Y,τ'). و يتم في الغالب رص (X,τ) الفضاء باضافة نقطة او اكثر الى X، ثم بتزويد المجموعة الموسعة Y بطبولوجيا τ' بحيث يغدو الفضاء الموسع (Y,τ') متراصا ، و بحيث يكون (X,τ) فضاء جزئيا كثيفا من (Y,τ').

مثال : لناخذ فضاء الاعداد الحقيقية المعتاد (R,II)، و لنضف الى R نقطتين جديدتين سنرمز لهما بـ$-\infty$, ∞ . تسمى المجموعة $R^*=R\cup\{-\infty,\infty\}$ ممدد المحور الحقيقي . و من الممكن توسيع علاقة الترتيب المعرفة على R بحيث تشمل R^*، و ذلك بافتراض $-\infty<\alpha<\infty$ ايا كان α من R. من السهل التحقق بان جماعة كل المجموعات الجزئية من R^* ذات النمط $[-\infty ,a[\ ,\ ]b ,\infty]\ ,\ ]a,b[$ تشكل قاعدة لطبولوجيا II^* على R^* بحيث يكون (R,II). فضاء جزئيا كشفا من (R^* , II^*)

نبين ان (R^* , II^*)فضاء متراص . لتكن $\{U\}, i \in I$ تغطية مفتوحة ما لـR^* . اذن هنالك عنصر U_{i_0} من هذه التغطية يحوي $-\infty$ و عنصر اخر U_{i_1} من هذه التغطية يحوي ∞ و بالتالي فثمة عنصر$[-\infty, a[$ من القاعدة محتوى في U_{i_0}، و عنصر اخر $]b, \infty]$من القاعدة محتوى في U_{i_1}. ان $R^* - ([-\infty , a [U]b , \infty]) = [a , b]$ مجموعة متراصة في (R, II).

ولما كان(R, II) فضاء جزئيا من(R^* , II^*) ، فان $\{R \cap U_i\}, i \in I$ تشكل تغطية مفتوحة للفضاء الجزئي (R, II). و بما ان $[a , b]$ مجموعة متراصة في (R, II)،فان $[a , b]$محتواة في اجتماع جماعة جزئية منتهية $\{R \cap U_{i_2}, \cdots, R \cap U_{i_n}\}$ من $\{R \cap U_i\}, i \in I$ من الواضح بعد هذا ان نرى بان تشكل تغطية جزئية منتهية من التغطية المفتوحة للفضاء(R^* , II^*) . اذن (R^* , II^*) فضاء متراص .

سنهتم بوجه خاص برص الفضاءات T_2 المتراصة موضعيا لسببين : اولهما ان هذا الصنف من الفضاءات يرد على نطاق واسع في الهندسة و التحليل الرياضي ، و ثانيهما ان رص هذه الفضاءات يمكن ان يتم باضافة نقطة وحيدة اليها الامر الذي تبينه المبرهنة التالية :

مبرهنة(٢-١٠):

ليكن (X, τ)فضاء T_2ومتراصا موضعيا و غير متراص و ليكن ∞شيئا ما غير منتم الىX ، ولنشكل المجموعة $X_\infty = X \cup \{\infty\}$ لتكن τ_∞جماعة من المجموعات الجزئية من X_∞مؤلفة من المجموعات التالية :

(أ) عناصر τ

(ب) متممات المجموعات الجزئية المتراصة في (X, τ)(المتممات في X_∞)

(ج) المجموعةX_∞ باكملها . عندئذ:

(١) تشكل τ_∞طبولوجيا على X_∞،كما يؤلف (X, τ) فضاء جزئيا كثيفا من(X_∞ , τ_∞)

(٢) (X_∞ , τ_∞) فضاء متراص .

(٣) (X_∞ , τ_∞)فضاء T_2

البرهان :

(٢) لتكن $\{U_i\}, i \in I$اي تغطية مفتوحة للفضاء(X_∞ , τ_∞)

فاذا كانت X_∞ عنصرا من هذه التغطية ، فان $\{X_\infty\}$ تغطية جزئية منتهية من $\{U_I\}, i \in I$. لنفرض الان ان X_∞ ليست من عناصر التغطية $\{U_I\}, i \in I$ اذن كل من عناصر هذه التغطية من النمط (أ) او من النمط (ب). ولما كان احد هذه العناصر ، و لنفترض U_{i_0} لابد و ان يحوي النقطة ∞، فان U_{i_0} هو من النمط (ب) بالضرورة ؛ و بالتالي فان $X_\infty - U_{i_0}$ مجموعة جزئية من X متراصة في (X,τ) و من ثم متراصة في (X_∞, τ_∞). و لما كانت $\{U_I\}, i \in I$ تغطية للفضاء (X_∞, τ_∞) باكمله فان $X_\infty - U_{i_0}$ محتواه في اجتماع جماعة جزئية منتهية $\{U_{i_1}, \cdots, U_{i_n}\}$من هذه التغطية المفتوحة من الواضح بعد هذا ان نرى بان $\{U_{i_1}, \cdots, U_{i_n}\}$ تشكل تغطية جزئية منتهية من التغطية المفتوحة $\{U_i\}, i \in\div I$ للفضاء.(X_∞, τ_∞)اذن (X_∞, τ_∞) فضاء متراص.

(٣) بما ان (X,τ) فضاء T_2، فان اي عنصرين مختلفين من X_∞ منتميين الى X يقعان في مجموعتين مفتوحتين في(X,τ) و منفصلتين ، و بالتالي يقعان في مجموعتين مفتوحتين في (X_∞, τ_∞)من النمط (أ) و منفصلتين.

فلاثبات ان(X_∞, τ_∞) فضاء T_2 يكفي اذن التحقق من انه اذا اخذنا اي نقطة x منX و النقطة ∞، فهنالك مجموعتان مفتوحتان في(X_∞, τ_∞) و منفصلتان تحوي احداهماx والاخرى ∞ لما كان (X,τ) متراصا موضعيا ، فثمة جوارUلـ x بحيث تكون $Cl(U)$ في (X,τ) متراصة في.(X,τ)

و لما كان $X - Cl(U)$ جوارا في X_∞ للنقطة ∞ من النمط (ب) ، فاننانسنتتج أن Uو$Cl(U) - X_\infty$ جواران في(X_∞, τ_∞) للنقطتين xو∞ على الترتيب ؛ وواضح أن هذين الجواريين منفصلان.إذن(X_∞, τ_∞) فضاء T_2.

نسمي الفضاء (X_∞, τ_∞)المتراص و المرتبط بالفضاء (X,τ)المتراص موضعيا و T_2 وفق الاسلوب السابق **رص الكسندروف أو رصا وحيد** النقطة(X,τ) للفضاء، كما تسمى ∞ النقطة المثالية أو النقطة في اللانهاية.

إن رص الكسندروف للفضاء (X,τ).

مبرهنة(٢-١١):

إذا كان(X,τ) فضاء ومتراصا موضعيا فهو فضاء منتظم.

البرهان:

إن رص ألكسندروف (X_∞ , τ_∞) للفضاء(X,τ) و فضاء وتراص. إذن (X_∞ , τ_∞) فضاء T_3 وفضاءT_1(لأنه T_2)، أي أن (X_∞ , τ_∞) فضاء منتظم. ولما كان كل فضاء جزئي من فضاء منتظم منتظما فإن (X,τ) فضاء منتظم.

الفضاءات المتراصة عدا والمتراصة بالتوالي

تعريف(٢-١٢):

نقول عن فضاء طبولوجي أنه متراص عدا اذا وجد لكل مجموعة جزئية غير منتهية فيه نقطة تجمع واحدة على الاقل.

مبرهنة(٢-١٣):

كل فضاء متراص ابد أن يكون متراصا عدا.

البرهان:

لتكن A مجموعة جزئية غير منتهية من X، ولنرمز بـE للمجموعة التي عناصرها ليست نقاط تجمع لـx. إذن أيا كان x من E، فثمة جوار لـx بحيث تكون المجموعة $A \cap U_x$ منتهية. لنفترض مؤقتا أن $E = X$ عندئذ تشكل تغطية $\{U_x\}, x \in E$ مفتوحة لـX ،ولما كان (X,τ)متراصا فثمة تغطية جزئية منتهية لـX من هذه التغطية، ولتكن$\{U_{x_1}, \cdots, U_{x_n}\}$.

وبالتالي فإن $A = \left(A \cap U_{x_1}\right) \cup \dots \dots \cup \left(A \cap U_{x_n}\right)$، الامر الذي يترتب عليه أن A منتهية، وهذا خلاف الفرض. إذن $E \neq X$، أي أن لـA نقطة تجمع واحدة على الاقل.

إن عكس هذه المبرهنة غير صحيح في الحالة العامة، إذ أن هنالك فضاءات لكل مجموعة جزئية غير منتهية فيها نقطة تجمع واحدة على الاقل، دون أن تكون هذه الفضاءات متراصة بالضرورة.

مبرهنة(٢-١٤):

ليكن(X,τ) فضاء طبولوجي.عندئذ تكون الدعاوي التالية متكافئة:

(١)الفضاء (X,τ) متراص عدا.

(٢)لكل جماعة متمركزة وقابلة للعد من المجموعات الجزئية المغلقة فيX تقاطع غير خال.

(٣)كل تغطية مفتوحة وقابلة للعد للفضاء $(X,\tau.)$ تحوي تغطية جزئية منتهية.

البرهان:

لنفرض صحة (١)، ولنبين صحة (٢). لتكن $\{F_n\}, n \in N$ جماعة متمركزة وقابلة للعد من المجموعات الجزئية االمغلقة في X، ولنبين أن $\cap_N F_n \neq \emptyset$.ليكن $\Phi_n = \cap_{k=1}^{n} F_k$ لما كانت $\{F_n\}, n \in N$ جماعة متمركزة ، فإن $\Phi_n \neq \emptyset$ أيا كان n من N. ومن الواضح أن $\Phi_1 \supseteq \Phi_2 \supseteq \cdots\cdots$ وأن $\cap_N \Phi_n = \cap_N F_n$. من الممكن أن يردها هنا حالتان:

(أ) فقد يوجد عدد n_0 من N بحيث يكون $\Phi_{n_0} = \Phi_{n_{0+1}} = \cdots\cdots$؛ عندئذ يكون $\cap_N \Phi_n = \Phi_{n_0} \neq \emptyset$ وبالتالي $\cap_N F_n \neq \emptyset$.

(ب) وقد يوجد بين Φ_n عدد غير منته من العناصر المتغايرة. من الواضح عندئذ أنه يكفي لإيجاد $\cap_N \Phi_n$ دراسة الحالة التي تكون فيها جميع المجموعات Φ_n مختلفة إحداها عن الاخرى. ليكن $x_n \in \Phi_n - \Phi_{n+1}$؛ عندئذ تتألف المتتالية $\{x_n\}, n \in N$ من مجموعة غير منتهية من العناصر المختلفة في X.

ولما كان (X,τ) متراصا عدا، فمن الضروري وجود نقطة تجمع(واحدة على الاقل) لهذه المتتالية ،ولتكن هذه النقطة x_0.أنبما Φ_n تحوي جميع النقاط $x_n, x_{n+1}, \cdots\cdots$ فإن x_0 هي نقطة تجمع لـ Φ_n أيا كان n من N. وإذا لاحظنا أن Φ_n مغلقة، فإن $x_0 \in \Phi_n$ أيا كان n من N. وبالتالي فإن $x_0 \in \cap_N \Phi_n$، أي أن $\cap_N \Phi_n \neq \emptyset$. إذن $\cap_N F_n \neq \emptyset$.

لنفرض الآن صحة (٢) ولنبين صحة (١). لنفرض جدلا أن (X,τ) يحوي مجموعة غير منتهية قابلة للعد A_1 ليس لها نقطة تجمع ولتكن $A_1 = \{a_1, a_2, \ldots\ldots\}$.عندئذ تشكل الجماعة $\{A_1\}$، حيث $A_n = \{a_n, a_{n+1}, \ldots\ldots\}$ جماعة متمركزة وقابلة للعد من المجموعات المغلقة (لعدم وجود نقاط تجمع لها) في X كما أن $\cap_N A_n = \Phi$، وهذا مناقض للفرض.

مبرهنة(٢-١٥):

إذا كان الفضاء (X,τ) المتراص عدا متمتعا بقابلية العد الثانية ،فإنه فضاء متراص.

البرهان:

لما كان فضاء (X,τ) متمتع بقابلية العد الثانية هو فضاء ليندليوف، فإننا نستنتج أن كل تغطية مفتوحة ل(X,τ) تحوي تغطية جزئية قابلة للعد. فإذا كان (X,τ) فضاء متمتعا بقابلية العد الثانية ومتراصا عدا، فإننا نسنتنج أن كل تغطية مفتوحة ل(X,τ) تحوي تغطية جزئية منتهية، أي أن فضاء متراص.

تعريف(٢-١٦):

يقال عن فضاء طبولوجي (X,τ) إنه متراص بالتوالي إذا كان كل متتالية في X تحوي متتالية جزئية متقاربه.

مبرهنة(٢-١٧):

كل فضاء متراص بالتوالي لابد أن يكون متراص عدا.

البرهان:

لتكن Aأي مجموعة جزئية غير منتهية من الفضاء (X,τ) المتراص بالتوالي. عندئذ ثمة متتالية $x_1, x_2 \cdots\cdots$ فيX ذات عناصر مختلفة. وبما أن (X,τ) متراص بالتوالي ، فإن المتتاية المذكورة تحوي متوالية جزئية $xi_1, xi_2 \cdots\cdots$ ذات عناصر مختلفة متقاربة من النقطةx_0 في X.

إذن أيا كان الجوار لx_0 ، فإن هذا الجوار يحوي جميع عناصر هذه المتتالية الجزئية باستثناء عدد منته من هذه العناصر. ولما كانت هذه العناصر مختلفة،فإننا نتسنتج أن أي جوار لx_0 يحوي عددا غير منته من عناصر A. إذنx_0 نقطة تجمع لA؛ وهذا يعني أن (X,τ) فضاء متراص عدا.

مبرهنة(٢-١٨):

كل فضاء متري متراص عدا لابد و أن يكون متراصا بالتوالي.

البرهان:

لتكن $\{X_n\}, n \in N$ متتالية مافي الفضاء المتري (X,D) المتراص عدا. فإذا كانت المجموعة $A = \{X_n | n \in N\}$ منتهية، فإن إحدى النقط ،ولتكن x_{n_0}، تحقق الشرط $x_{n_0} = x_i$ من أجل عدد غير منته من العناصر i المنتمية الى N.وبالتالي فإن $\{x_{n_0}\}$ تشكل متتالية جزئية من المتتالية $\{X_n\}, n \in N$، ومن هذه المتتالية الجزئية متقاربة x_{n_0} من في(X,D). أما إذا كانت المجموعة $A = \{X_n | n \in N\}$ غير

منتهية ، فاستنادا إلى كون (X,D) متراصا عدا، يجب أن يكون للمجموعة A نقطة تجمع x_0 في X.
لنفترض $U_n = N\left(x_0 , \frac{1}{n}\right)$ أن أيا كانت $n \in N$. عندئذ تكون المجموعة $U_n \cap A$ غير منتهية أيا كان nمن N. لنخترA $x_{n_1} \in U_{n_1} \cap$ ثم $x_{n_2} \in U_{n_2} \cap A$، حيث $n_1 < n_2$، وبوجه عام $x_{n_k} \in U_{n_k} \cap$ Aحيث $n_{k-1} < n_k$. من الواضح عندئذ أن $x_{n_1}, x_{n_2}, \dots\dots$ تشكل متتالية جزئية من المتوالية $\{X_n\}, n \in N$، وأن هذه المتتالية متقاربة من x_0؛ ومن ثم فإن (X,D) فضاء متراص بالتوالي.

تعريف(٢–١٩):

ليكن(X,D) فضاء متريا. لنفترض ε عددا موجبا ما وA مجموعة جزئية منتهية من X. نقول عن A إنها شبكةε ل X إذا قابل كل نقطة x من X نقطة (واحدة على الاقل) aمن A بحيث $D(x, a) < \varepsilon$. ويسمى فضاء محدودا كليا، إذا وجدت له شبكة ε أيا كان العدد الموجب ε.

مبرهنة(٢–٢٠):

كل فضاء متري محدود كليا لابد و أن يكون فضاء قابلا للفصل.

البرهان:

لنفرض (X,D) فضاء متريا محدودا كليا. إذن يقابل كل عدد صحيح موجب n شبكة $\frac{1}{n}$ لـX نرمز لها بـ$S\frac{1}{n}$. عندئذ من الواضح أن $S = U_N S\frac{1}{n}$ تشكل مجموعة جزئية من X قابلة للعد (لأن S اجتماع قابل للعد لجماعات منتهية) .بقي علينا إثبات أن S مجموعة كثيفة في (X,D).
ليكن x أي عنصر من X وε أي عدد موجب. لنرمز بـM للعدد الصحيح الموجب بحيث $\frac{1}{M} < \varepsilon$. إذن هنالك عنصر y من $S\frac{1}{M}$بحيث $D(x,y) < \frac{1}{M} < \varepsilon$، أي ان هنالك عنصرا y من S بحيث $y \in N(x, \varepsilon)$. يترتب على هذا بوضوح أنه أيا كان الجوار غير الخالي للنقطة x في (X,D)، فإن هذا الجوار يتقاطع مع S. إذن S كثيفة في [20−10](X,D)، وهذا يكمل برهاننا بأن (X,D) قابل للفصل.

مبرهنة(٢–٢١):

كل فضاء متري متراص عدا لابد و أن يكون محدودا كليا.

البرهان:

لنفرض أن (X,D) فضاء متري متراص عدا دون أن يكون محدودا كليا. إن هذا يعني عدم وجود شبكة ε_0 لـX من أجل عدد موجب ε_0. لتكن x_1 نقطة ما من X. إذن توجد في X نقطة واحدة على الاقل، ولتكن x_2، بحيث $D(x_1,x_2) \geq \varepsilon_0$ (و إلا كانت $\{x_1\}$شبكة ε_0 لـX). كذلك توجد في X نقطة x_3 بحيث $D(x_2,x_3) \geq \varepsilon_0$ و $D(x_1,x_3) \geq \varepsilon_0$ (و إلا كانت $\{x_1,x_2\}$ شبكة ε_0 لـX). ولنفترض أننا سرنا على هذا النحو وحصلنا على النقاط $x_1,x_2,\ldots\ldots,x_k$، فإننا نحكم بوجود نقطة في X، ولتكن x_{k+1}، بحيث $D(x_i,x_{k+1}) \geq \varepsilon_0$، بفرض $i=1,2,3,\ldots\ldots,k$. إن هذا الأسلوب يعطينا مجموعة جزئية غير منتهية $x_1,x_2,\ldots\ldots$ دون أن يكون لها أي نقطة تجمع، لأن $D(x_i,x_j) \geq \varepsilon_0$ عندما $i \neq j$. ولكن هذا يعني بأن (X,D)ليس متراصا عدا، وبالتالي فلابد أن يكون الفضاء متري (X,D) المتراص عدا فضاء محدود كليا.

مبرهنة(٢-٢٢):

كل فضاء متري متراص عدا لابد و أن يكون متراصا.

البرهان:

إن إثبات هذه المبرهنة يتضح من خلال سلسلة الاقتضاءات التالية:

الفضاء المتري (X,D) متراعدا(X,D) $\Leftarrow$ فضاء محدود كليا(X,D) $\Leftarrow$فضاء قابل للفصل $\Leftarrow$ (X,D)فضاء متمتع بقابلية العد الثانية (X,D) $\Leftarrow$ فضاء متراص.

إن هذه المبرهنة هي آخر مايلزم لإثبات المبرهنة التالية:

مبرهنة(٢-٢٣):

إذا كان (X,D) فضاء متريا ، فإن الدعاوى الثلاث التالية متكافئة:

(١) (X,D) فضاء متراص.

(٢) (X,D) فضاء متراص عدا.

(٣) (X,D) فضاء متراص بالتوالي.

الاتصال (الترابط) في الفضاءات الطبولوجية

الفضاءات المتصلة (المترابطة)

تعريف(٢-٢٤):

يقال عن فضاء طبولوجي (X,τ)انه متصل او مترابط اذا لم يكن X اجتماعا لمجموعتين جزئيتين غير خاليتين منفصلتين و مفتوحتين في و اذا لم يتحقق هذا الشرط ، فاننا نقول ان (X,τ) فضاء غير متصل ، اي ان الفضاء غير المتصل (X,τ) هو الذي يمكن ان نعبر عنه باجتماع مجموعتين جزئيتين غير خاليتين منفصلتين و مفتوحتين في X. هذا ، و نقول عن مجموعة جزئية Aمن X انها متصلة (غير متصلة) في X اذا كان الفضاء الجزئي (X,τ_A) متصلا (غير متصل) .

نتيجة:

من الواضح انه اذا كان $X = U \cup V$ حيث U, V مجموعتان منفصلتان و مفتوحتان في X، فان U , V مجموعتان مغلقتان ايضا في X. و يترتب على هذا وعلى التعريفان الشرط اللازم و الكافي كي يكون الفضاء (X,τ)غير متصل (متصلا) ، هو ان يكون (لا يكون) بالامكان التعبير عن X باجتماع مجموعتين جزئيتين غير خاليتين منفصلتين و مغلقتين فيX.

مثال:

لناخذ مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbf{R}$، و لنسند الى كل نقطة x من $\mathbf{R}$ المجموعة $N_x = \{[x , a[| a \in \mathbf{R} , x < a\}$. ان جماعة المجموعات N_x تشكل جملة جوارات اساسية لتوبولوجيا τ على R من الواضح ان كل من $]-\infty , 0[, [0,\infty[$ تشكل مجموعة مفتوحة في R بالنسبة τ.

لما كان $R =]-\infty, 0[\cup [0,\infty[$ فان (R,τ) فضاء غير متصل ، لانه امكن التعبير عن R باجتماع مجموعتين جزئيتين غير خاليتين منفصلتين و مفتوحتين بالنسبة الى لنزود الان Rبالطبولوجيا التافهة τ. لما كانت المجموعتان المفتوحتان الوحيدتان بالنسبة ل τ'هما $R, \emptyset$ فلا يمكن التعبير عن Rباجتماع مجموعتين مفتوحتين الا بالشكل $R = R \cup R$او بالشكل $R = R \cup \emptyset$ ان R في الحالة الاولى اجتماع لمجموعتين غير منفصلتين ، و في الحالة الثانية اجتماع لمجموعتين احداهما خالية . و بالتالي فلا

يمكن التعبير عن R باجتماع مجموعتين جزئيتين غير خاليتين منفصلتين و مفتوحتين بالنسبة لτ اذن فالفضاء (R,τ') متصل .

مبرهنة(٢–٢٥):

ليكن (R,II) فضاء الاعداد الحقيقية المعتاد،ولتكن A مجموعة جزئية من R. إن الشرط اللازم والكافي كي تكون A متصله هو أن تكون مجالا.

البرهان:

لنفترض أولا أن A متصله، ولنثبت أنها مجال. لنسلم جدلا أن A ليست مجالا.إذن هنالك أعداد ثلاثة $x , y z$ بحيث $x < y < z$ وبحيث $x,z \in A$ و$y \notin A$.من الواضح عندئذ أن $A = (A \cap]-\infty, y[\,) \cup (A \cap]y, \infty[\,)$.

ويترتب على هذا أن Aاجتماع مجموعتين جزئيتين غير خاليتين(لأن $z \in A \cap]y , \infty[\,, x \in A \cap]-\infty , y[$) منفصلتين ومفتوحتين في A وفق تعريف الطبولوجيا النسبية).يعني هذا أن غير متصلة خلافا للفرض، إذن A لابد و أن تكون مجالا.

وبالعكس ،لنفرض الآن A مجالا، ولنثبت أن A متصله. لنسلم جدلا أن A غيرمتصله ،إذن $A = U \cup V$ حيث UوV مجموعتان جزئيتان من A غير خاليتين، منفصلتان ومغلقتان، فهنالك نقطتان x,z من U,V على الترتيب (لأن U,V غير خاليتين) بحيث $x \neq z$،(لأنU,V منفصلتان) ويمكننا دون مس للعمومية افتراض أن $x < z$.

لما كانت A مجالا، فإن $[x,z] \subseteq A$،كما أن كل عنصر من $[x,z]$ موجود في Uأو في V.لنرمز بـ y للعنصر $y = \sup([\,x , z] \cap U)$.إن yموجود، ذلك أن المجموعة $[x,z] \cap U$غير خالية (لانها تحوي العنصر x على الاقل) ولأن هذه المجموعة محدودة من الاعلى بالعنصرz. لما كان أي جوار للحد الاعلى لمجموعة لابد وأن يقاطع هذه المجموعة، فإن أي جوار لy في Aلابد وأن يتقاطع مع $[x,z] \cap U$. وبالتالي فإن أي جوار y ل A في يجب أن يقاطع U،وهذا يعني أن y عنصر من $Cl(U)$ في A. لكن U مغلقة في A؛ إذن لا فرق بين Uو$Cl(U)$ في A، الامر الذي يترتب عليه أن $y \in U$. نستنتج من هذا أن $y < z$، ذلك أنه لو كان $y = z$ ،لوجدنا أن $y \in V$(لأن $z \in V$)هذا لا يمكن أن يتم لأن U , Vمنفصلتان. لنفترض

الآن ε أي عدد موجب بحيث $y+\varepsilon \le z$.إن يجب أن $y+\varepsilon$ ينتمي إلى V،ذلك أنه إذا لم يتم ذلك، فإن $y+\varepsilon \in U$؛ وعندئذ نستنتج $y+\varepsilon \in [x,z] \cap U$.

وهذا يعني أن ثمة عنصرا $y+\varepsilon$ أكبر من yفي المجموعة $[x,z] \cap U$ التي حدها الاعلىy، وهذا غير ممكن. وبالتالي فإن $y+\varepsilon \in V$. ويترتب على هذا أن أي جوار لy في Aلابد و أن يتقاطع مع V، وهذا يعني أن yعنصر من$\mathrm{Cl}(U)$ في A. لكن Vمغلقة في A، إذن لا فرق بين Vو $\mathrm{Cl}(V)$ في A، الامر الذي يتعين عليه أن $y \in V$. ونكون بهذا قد وقعنا في تناقض ، ذلك أن $y \in U \cap V$، في حين أن $U \cap V$.وبالتالي فلابد أن يكون المجال A مجموعة متصلة. وبهذا يتم إثبات المبرهنة.

تعريف(٢–٢٦):

ليكن (X,τ) فضاء طبولوجي ، وليكن A,B مجموعتين جزئيتين من X. نقول عن A,B إنهما منفصلتان بالتبادل إذا كان $\mathrm{Cl}(A) \cap B = \mathrm{Cl}(B) \cap A = \emptyset$. وإذا كانت المجموعة الجزئيةY من X اجتماعيا لمجموعتين غي خاليتين ومنفصلتان بالتبادل A,B، فإننا نقول إن $\{A,B\}$ تشكل فصلا لY(في X). لاحظ أننا لا نشترط في A و B أن تكونا مفتوحتين أو مغلقتين في Y.

مثال:

لنأخذ فضاء الاعداد الحقيقية المعتاد $(\mathbf{R},\mathbf{II})$، ولتكن

$A =]-1,0[\,, B = |0,1[\,, C = |0\,,1|$.لما كان $\mathrm{Cl}(A) \cap B = [-1,0] \cap 0,1[= \emptyset$،

$A \cap \mathrm{Cl}(B) =]-1,0[\cap [0,1] = \emptyset$ فإن A,B، منفصلتان بالتبادل. وبما أن

$\mathrm{Cl}(A) \cap C = \{0\} \neq \emptyset$، فإن $A\,,C$ ليستا منفصلتين بالتبادل.

مبرهنة(٢–٢٧):

إذا كان (X,τ) فضاء طبولوجي ،فإن الدعاوى الأربع التالية متكافئة:

(١) الفضاء (X,τ) متصل.

(٢) المجموعتان $X,\emptyset$ هما المجموعتان الجزئيتان الوحيدتان في X المفتوحتان والمغلقتان في أن واحد.

(٣) أيا كانت المجموعة الجزئية A من Xالمغايرة لكل من$\emptyset$ وX فإن $\mathrm{Fr}(A) \neq \emptyset$.

(٤) لا يوجد فصل لـX.

البرهان:

لنبرهن أولا أن (أ) تقتضي (ب). لتكن A مجموعة جزئية من X مفتوحة ومغلقة في آن واحد ، ولنفرض جدلا أن $X \neq A \neq \emptyset$. عندئذ تكون $X - A$ مفتوحة ومغلقة معا، كما يكون $X - A \neq \emptyset$. لما كان $X = (X - A) \cup A$، فإنه يترتب على هذا أن من الممكن التعبير عن X باجتماع مجموعتين غير خاليتين منفصلتين ومفتوحتين في X، أي أن (X, τ) غير متصل ، وهذا خلاف ما فرضناه .إذن (أ)$\Longrightarrow$ (ب).

لنثبت أن (ب) تقتضي (ج) . لتكن A مجموعة جزئي من X مغايرة ل X و لـ$\emptyset$ ، ولنفرض جدلا أن $Fr(A) = \emptyset$. لما كان $Cl(A) = Int(A) \cup Fr(A)$، فإن $Cl(A) = Int(A)$. وبما أن هذه مساواة بين مجموعة مغلقة $Cl(A)$ ومجموعة مفتوحة $Int(A)$، فإننا نجد استنادا الى الفرض أنه إما أن يكون $Cl(A) = Int(A) = \emptyset$ أو $Cl(A) = Int(A) = X$. وبالتالي ، فإما أن يكون $Int(A) = X$ أو $Cl(A) = \emptyset$. لكن $Int(A) \subseteq A$ و $A \subseteq Cl(A)$. إذن إما أن يكون $A = X$ أو $A = \emptyset$، وهذا خلاف الفرض . إذن (ب) $\Longrightarrow$(ج).

نبين الآن أن (ج) (أ) . لنفرض جدلا أن (X, τ) فضاء غير متصل ؛ إذن $X = U \cup V$، حيث U, V مجموعتان جزئيتان غير خاليتن منفصلتان ومفتوحتان في X.

نلاحظ أن $Cl(U) - Int(U) = Fr(U)$ لذا فإن $Fr(U) = \emptyset$ ولما كانت $X \neq U \neq \emptyset$ فنكون قد وقعنا في تناقض . إذن (ج) $\Longrightarrow$(أ).

سنبرهن الآن بأن (أ) $\Longrightarrow$(د). لنسلم جدلا أن $\{A, B\}$ تشكل فصلا لـX ، أي أن $X = A \cup B$، حيث A, B مجموعتان جزئيتان غير خاليتين في X بحيث [5−26] $Cl(A) \cap B = A \cap Cl(B)$. عندئذ يكون:

$$Cl(A) = Cl(A) \cap X = Cl(A) \cap (A \cup B) = (Cl(A) \cap A) \cup (Cl(A) \cap B)$$

وبما أن $Cl(A) \cap A = A$ (لأن $A \subseteq Cl(A)$)، وأن $Cl(A) \cap B = \emptyset$ فرضا ، فإن $Cl(A) = A \cup \emptyset$. ويترتب على هذا أن A مجموعة مغلقة. ونجد بصورة مماثلة أن B مجموعة مغلقة. ونكون بهذا قد توصلنا إلى أن X اجتماع لمجموعتين جزئيتين A, B غير خاليتين منفصلتين (لأن كلا منهما منفصل عن لصاقة

الاخرى) ومغلقتين في X، أي أن (X,τ) فضاء غير متصل [26−2]، وهذا خلاف الفرض. إذن (أ) ⟸(د).

لأتمام إثبات المبرهنة. يكفي إثبات أن (د) ⟸(أ) لنفرض مؤقتا أن الفضاء (X,τ)غير متصل . إذن $X = A \cup B$ حيث AوBمجموعتان جزئيتان من X غير خاليتين منفصلتان ومغلقتان في X، وبالتالي فإن $Cl(A) = A\,, Cl(B) = B$، .ويترتب على هذا و على كون $A \cap B = \emptyset$ أن $Cl(A) \cap B = A \cap Cl(B) = \emptyset$.و هذا يعني أن X اجتماع لمجموعتين $A\,, B$ وغير خاليتين ومنفصلتين بالتبادل ، أي أن $\{A, B\}$ تشكل فصلا لX وهذا خلاف الفرض(د) . إذن (X,τ) لابد و أن يكون فضاء متصلا ، أي أن (د)⟸ (أ)، وبهذا يتم إثبات المبرهنة.

مثال:

لتكن X مجموعة غير منتهية ، ولنرمز بτ لاجتماع المجموعة $\{\emptyset\}$ مع جماع كل المجموعات الجزئية منX المؤلف كل منها من جميع عناصر X باستثناء عدد منته من هذه العناصر.

لإثبات أن الفضاء الطبولوجي (X,τ) متصل:

(أ) إن (X,τ) متصل وفق التعريف المباشر للفضاءات المتصلة، ذلك أن أي مجموعتين غير خاليتين ومفتوحتين في X متقاطعتان ؛ وبالتالي فلا يمكن التعبير عن باجتماع مجموعتين غير خاليتين منفصلتين و مفتوحتين في X، أي أن (X,τ) متصل.

(ب) لنفرض أن A أي مجموعة جزئية منX مغايرة لكل من $\emptyset$ و X، ولنثبت أن A لا يمكن أن تكون مفتوحة ومغلقة في آن واحد.

(١) إذا كانت A منتهية، فإن A مغلقة (لأن متممتها مفتوحة) لكن Aلا يمكن أن تكون مفتوحة (لأن كل مجموعة مفتوحة مغايرة ل$\emptyset$ يجب أن تكون غير منتهية).

(٢) لنفترض الآن أن Aغير منتهية. فإذا كانت متممتها منتهية، فإن A مفتوحة (تعريفا)، لكن Aلا يمكن أن تكون مغلقة (لأن كل مجموعة مغلقة مغايرة ل X يجب أن تكون منتهية). وإذا كانت متممة Aغير منتهية ، فإن Aغير مفتوحة وغير مغلقة.

وهكذا نكون قد وجدنا أن أي مجموعة جزئية من X مغايرة ل $\emptyset$ و X لا يمكن أن تكون مفتوحة ومغلق في آن واحد، أي أن $\emptyset$ و X هما المجموعتان الوحيدتان المفتوحتان والمغلقتان في آن واحد، إذن (X,τ) فضاء متصل.

(ج) لتكن Aأي مجموعة جزئية من X مغايرة لكل من $X,\emptyset$، ولنثبت أن :

(١) إذا كانت A منتهية، فإن A مغلقة وبالتالي يكون $Cl(A) = A$. ولما كانت $Int(A)$ في اجتماع المجموعات المفتوحة المحتواه في A، وكانت $\emptyset$ هي المجموعة المفتوحة الوحيدة المحتواة في A، فإن $Int(A) = \emptyset$. وبناء على الدستور $Cl(A) = Int(A) \cup Fr(A)$ (الوارد في إثبات المبرهنة [2−26]) ، فإننا نستنتج أن $Fr(A) = A$. لكن $A \neq \emptyset$، إذن $Fr(A) \neq \emptyset$.

(٢) لنفرض الآن أن A غير منتهية. لما كانت المجموعة المغلقة الوحيدة التي تحوي A هي X ،فإن $Cl(A) = X$. واستنادا الى الدستور $Cl(A) = Int\ (A) \cup Fr(A)$، نستنتج في هذه الحالة أن $X = Int(A) \cup Fr\ (A)$. إن $Fr(A) \neq \emptyset$،ذلك أنه لو فرضنا العكس لكان $X = Int(A)$. وبما أن $Int\ (A) \subseteq A$، إذن لكان $X \subseteq A$، الامر الذي يترتب عليه أن $X = A$، و هذا خلاف الفرض. إذن $Fr(A) \neq \emptyset$ عندما تكون Aغير منتهية كذلك.

وهكذا نكون قد وجدنا أنه أيا كانت المجموعة الجزئية A من Xالمغايرة لكل من $\emptyset$، Xفإن $Fr(A) \neq \emptyset$. إذن (X,τ) فضاء متصل.

(د) لنقبل جدلا أن $\{A, B\}$ فصل ل X. إذن $X = A \cup B$، حيث A , B مجموعتان جزئيتان من Xغير خاليتين بحيث $Cl(A) \cap B = A \cap Cl(B) = \emptyset$. لما كانت X غير منتهية ،فإن إحدى المجموعتين ، ولتكن A، مجموعة غير منتهية. بما أن المجموعة المغلقة الوحيدة التي تحوي A هي X، فإننا نستنتج عندئذ أن $Cl(A) = X$. إذن $Cl(A) \cap B = X \cap B = B$. لكن B غير خالية فرضا، إذن يكون $Cl(A) \cap B \neq \emptyset$، وهذا مناقض للفرض.

وهكذا نجد أنه لا يوجد فصل ل X . إذن (X,τ) فضاء متصل.

مبرهنة(٢−٢٨):

إذا كان f تطبيقا مستمرا للفضاء المتصل (X,τ) في الفضاء (Y,τ')، فإن مجموعة جزئية متصلة في (Y,τ').

البرهان:

لنفرض جدلا أن $f(X)$ ليست متصلة. إذن $f(X) = S \cup T$، حيث S , T مجموعتان جزئيتان من $f(X)$ غير خاليتين منفصلتين ومفتوحتان في $f(X)$. واستنادا الى تعريف المجموعات المفتوحة في الفضاءات الجزئية، فهنالك مجموعتان V،U مفتوحتان فيY بحيث $S = f(X) \cap U$ و $T = f(X) \cap V$. لكن

$$f^{-1}(S) = f^{-1}(f(X) \cap U) = f^{-1}\big(f(X)\big) \cap f^{-1}(U) = X \cap f^{-1}(U) = f^{-1}(U)$$

ونجد بصورة مماثلة $f^{-1}(T) = f^{-1}(V)$. ولما كان من الواضح أن $f^{-1}(S) \cup f^{-1}(T)$، فإن $f^{-1}(U) \cup f^{-1}(V)$. وبما أن S, T غير خاليتين ومنفصلتان .فإن $f^{-1}(S), f^{-1}(T)$.غير خاليتين ومنفصلتين. وإذا أضفنا إلى هذا أن المجموعتين الاخيرتين مفتوحتان في X (لأن $f: X \to Y$مستمر)، فإننا نستنتج أن (X, τ) فضاء غير متصل، وهذا خلاف الفرض ،وبالتالي فلابد أن تكون المجموعة الجزئية $f(X)$ متصله في (Y, τ').

نتيجة:

إذا كان f تطبيقا مستمرا للفضاء المتصل (X, τ) على الفضاء (Y, τ')، فإن (Y, τ') فضاء متصل.

نستنتج كذلك أنه إذا كان(X, τ) و (Y, τ') فضائين هومومورفيزميين وكان أحد هذين الفضائين متصلا، فإن الفضاء الآخر متصل بالضرور.

مبرهنة(٢-٢٩):

الشرط اللازم والكافي كي يكون الفضاء الطبولوجي (X, τ) متصلا هو أن لا يوجد تطبيق مستمر للفضاء (X, τ)على الفضاء$(\{0,1\}, \tau')$، حيث τ'هي الطبولوجيا المتقطعة.

البرهان:

لنفرض أولا أن (X, τ) فضاء متصل . فإذا قبلنا بوجود تطبيق مستمر ل(X, τ) على الفضاء المتقطع $(\{0,1\}, \tau')$، كان $(\{0,1\}, \tau')$ فضاء متصلا . ولما كان الفضاء الاخير (مثله مثل كل فضاء متقطع) غير متصل (لأن $\{0,1\} = \{0\} \cup \{1\}$، أي أن $\{0,1\}$ اجتماع مجموعتين غير خاليتين منفصلتين ومفتوحتين في $\{0,1\}$)، فإننا نكون قد توصلنا الى تناقض. وبالتالي فلا يوجد تطبيق مستمر للفضاء المتصل على الفضاء المتقطع $(\{0,1\}, \tau')$).

وبالعكس ،لنفرض عدم وجود تطبيق مستمر للفضاء (X,τ) على الفضاء المتقطع $(\{0,1\},\tau')$، ولنثبت أن (X,τ) فضاء متصل. لنفرض مؤقتا أن (X,τ) غير متصل . إذن $X = U \cup V$ حيث U, V مجموعتان غير خاليتين منفصلتان ومفتوحتان في X. لنعرف تطبيقا $f: X \to \{0,1\}$ بالدستور :

$$f(x) = \begin{cases} 0 & (\text{عندما } x \in V) \\ 1 & (\text{عندما } x \in V) \end{cases}$$

لما كان $f^{-1}(\{1\}) = V$ ،$f^{-1}(\{0\}) = U$ فإن fمستمر، وهذا خلاف الفرض .إذن (X,τ) فضاء متصل.

الفضاءات الجزئية وفضاءات الجداء المتصلة

مبرهنة(٢ - ٣٠):

ليكن (X,τ) فضاء طبولوجيا و Y مجموع جزئية من X. إن الشرط اللازم والكافي كي تكون Y متصلة X هو أن لا يوجد فصل لY فيX.

البرهان:

لنفترض أنه يوجد فصل Yو X، ليكن $\{A, B\}$ إن هذا يعني أن $y = A \cup B$ حيث $Cl(A) \cap B = Cl(B) \cap A = \Phi, A \neq \Phi \neq B$، .فإذا عوضنا A, B في المسألتين الاخيرتين ب$Y \cap A$, $Y \cap B$ على الترتيبربطنا أن $Y \cap Cl(A) = Cl_{\vee}(A)$ ،$Y \cap Cl(B) = Cl_{\vee}(B)$ فإننا نستنتج أن $\{A , B\}$، وهذا يعني وفق المبرهنة أن غير مترابطة في X.

مثال:

لنختر في فضاء الاعداد الحقيقية المعتاد $(\mathbf{R},\mathbf{II})$ المجموعتين $A = [-1,0[, B =]0,1[$. ومن الواضح أن الجماعة $\{A, B\}$ تشكل فصلا للمجموعة $Y = A \cup B$في X، ذلك أن $A \neq \emptyset$ و $B \neq \emptyset$ وأن $Cl(A) \cap B = [-1,0] \cap 0,1[= \emptyset$ و $A \cap Cl(B) = [-1,0[\cap [0,1] = \emptyset$ وبالتالي فإن Y مجموعة غير متصل في X.

مبرهنة(٢–٣١):

ليكن (X,τ) فضاء طبولوجيا ، ولتكن Y, Z مجموعتين جزئيتين من X بحيث $Z \subseteq Y \subseteq X$. إن الشرط اللازم والكافي كي تكون Zغير متصل في Xهو أن تكون Z غير متصلة في Y.

البرهان:

إن الشرط اللازم والكافي لكي Z تكون غير متصلة في X هو أن يوجد فصل $\{A, B\}$ لـ Z ، أي أن يكون $Z = A \cup B$. حيث A, B مجموعتان جزئيتان من Z غير خاليتين وحيث $\mathrm{Cl}(A) \cap B = \mathrm{Cl}(B) \cap A = \emptyset$ لكن

$$\mathrm{Cl}(A) \cap B = \mathrm{Cl}(A) \cap (Y \cap B) = (\mathrm{Cl}(A) \cap Y) \cap B = \left[\mathrm{Cl}(A)\ \text{في}\ Y\right] \cap B$$

$$A \cap \mathrm{Cl}(B) = (A \cap Y) \cap \mathrm{Cl}(B) = A \cap \left(Y \cap \mathrm{Cl}(B)\right) = A \cap [\mathrm{Cl}(B)\ \text{في}\ Y]$$

وبالتالي نكون قد وجدنا أن الشرط اللازم والكافي كي تكون Z غير متصلة في X هو أن يكون $Z = A \cup B$، حيث A, B مجموعتان جزئيتان من Y غير خاليتين ، وحيث $\mathrm{Cl}(A) \cap B = A \cap \mathrm{Cl}_{v}(B)$ أي أن يوجد فصل$\{A, B\}$ لـZ في Y.

مبرهنة(٢–٣٢):

ليكن (X,τ) فضاء طبولوجيا ، ولتكن Y, Z مجموعتين جزئيتين من X بحيث $Z \subseteq Y \subseteq X$. لنفرض $Y = U \cup V$، حيث U, V مجموعتان جزئيتين غير خاليتين منفصلتان ومفتوحتان في X(عندئذ تكون Y غيرمتصلة في X). فإذا كانت Z متصلة فإما $Z \subseteq U$ أو $Z \subseteq V$.

البرهان:

لنفترض جدلا أن $Z \cap V \neq \emptyset$، $Z \cap U \neq \emptyset$ عندئذ تكون $Z \cap V$، $Z \cap U$ مجموعتين جزئيتين من Z غير خاليتين منفصلتين ومفتوحتين في Z.ولما كان $Z = (Z \cap U) \cup (Z \cap V)$ فإننا نجد أن Z غير متصلة خلافا للفرض. وبالتالي فإما $Z \cap U = \emptyset$ وعندها $Z \subseteq V$، أو$Z \cap V = \emptyset$ وعندها $Z \subseteq U$.

مثال:

لنأخذ فضاء الاعداد الحقيقية المعتاد (R, II). لنفرض أن $Y = R\_ \cup R_+$ (R_-, R_+ هما مجموعتا الاعداد الحقيقية الموجبة والسالبة على الترتيب). إذا كانت Z أي مجموعة متصلة في Y، فإن Z يجب أن تكون محتواة بكامله.وبما أن Z يجب ان تكون متصلة في X

،فإن Z لابد أن تكون مجالا محتوى بكامله في R_+ أو في $R\_$.

من الواضح أن ليس من الضروري بأن تكون أي مجموعة جزئية من فضاء متصل بمجموعة متصلة.

مبرهنة(٢-٣٣):

ليكن (X, τ) فضاء طبولوجيا، ولتكن Y, Z مجموعتين جزئيتين من X بحيث $Z \subseteq Y \subseteq X$. لنفترض $\{A, B\}$ فصلا لـY في X(عندئذ تكون Y غير متصلة في X). فإذا كانت Z متصلة، فإما $Z \subseteq A$ أو $Z \subseteq B$.

البرهان:

لدينا فرضا $Y = A \cup B$حيث A, B مجموعتان غير خاليتين بحيث

$Cl(A) \cap B = A \cap Cl(B) = \emptyset$. لنسلم جدلا أن $Z \cap B \neq \emptyset$ و $Z \cap A = \Phi$. ولما كان $(Z \cap A) A Cl(Z \cap B) \subseteq A \cap ClB = \Phi$. فإن $(Z \cap A) \cap Cl(Z \cap B) = \emptyset$. ونجد بصورة مماثل أن $Cl(Z \cap A) \cap (Z \cap B) = \emptyset$ وهكذا فإن افترضنا بأن $Z \cap A \neq \emptyset Z \cap B \neq \emptyset$, يؤدي الى أن الجماعة $\{Z \cap A , Z \cap B\}$ تشكل فصلا لـ Z في X، وهذا يعني أن Z غير متصلة، وسبب هذا التناقض يعود الى قبولنا بأن $Z \cap B \neq \emptyset$، $Z \cap A \neq \emptyset$ إذن لابد أن يكون $Z \subseteq A$أو $Z \subseteq B$.

مبرهنة(٢-٣٤):

ليكن (X, τ) فضاء طبولوجيا، ولتكن S مجموعة جزئية متصلة في X.فإذا كانت Y مجموع جزئية من X تحقق الشرط $S \subseteq Y \subseteq Cl$، فإن Y مجموعة جزئية متصل في X كذلك.

البرهان:

لنفرض مؤقتا أن Yغير متصل في X. إذن ثمة فصل لـY في X، أي أن $Y = A \cup B$، حيث A, B مجموعتان غير خاليتين بحيث $Cl(A) \cap B = A \cup Cl(B) = \emptyset$ لما كانت Sمتصلة في X،فإما

$S \subseteq A$ أو $S \subseteq B$[7−27]. لنفرض $S \subseteq A$.عندئذ $Cl(S) \subseteq Cl(A)$، وبالتالي $Y \subseteq Cl(A)$. ولما كان $Y = A \cup B$، فإن $B \subseteq Cl(A)$. ويترتب على هذا أن $Cl(A) \cap B = B \neq \emptyset$، ونكون بهذا قد وقعنا في تناقض . وبالتالي فإن Y لابد و أن تكون متصل في X.

نتيجة:

إذا حوى فضاء (X, τ)مجموعة جزئية متصلة و كثيفة في X، فإن (X, τ)فضاء متصل.

البرهان:

لنفترض S مجموعة جزئية متصلة وكثيفة في X.لما كان $S \subseteq X = Cl(S)$ ،فإنه يترتب على المبرهنة أن (X, τ) فضاء متصل من الواضح أن اجتماع أي مجموعات جزئية متصلة في فضاء طبولوجي ليس بالضرورة مجموعة متصلة. وعلى سبيل المثال، فإذا أخذنا الفضاء الاقليدي ذا البعدين فإن كلا من $\{(x, y)|x^2 + y^2 < 1\}$ و$\{(x, y)|(x-5)^2 + y^2 < 1\}$ مجموعة جزئية متصلة في هذا الفضاء، في حين أن اجتماعهما ليس مجموعة متصلة .

مبرهنة(٢-٣٥):

ليكن (X, τ) فضاء طبولوجيا، ولتكن $\{Y_i\}, i \in I$ جماعة من المجموعات الجزئية المتصلة في X بحيث $\cap_i Y_i \neq \emptyset$. عندئذ تكون $Y = \cup_i Y_i$ مجموعة جزئية متصلة في X.

البرهان:

لنفترض جدلا أن Y مجموعة غير متصلة عندئذ هنالك فصل $\{A, B\}$ لـ Y في X. لما كانت كل من A, B مجموعة غير خالية، فثمة عنصر a من A وعنصر b من B. وبما أن $\cup_i Y_i = A \cup B$، فهنالك عنصران Y_i, Y_j من الجماعة $\{Y_i\}, i \in I$ بحيث $a \in Y_i$ و $b \in Y_j$ لكن $Y_i \cap Y_j \neq \emptyset$ فرضا، إذن ثمة عنصر ، وليكن y، بحيث $y \in Y_i \cap Y_j]$ فإن $Y_i \subseteq A$ لوجود نقطة a منY_i واقعة في A. ونجد بصورة مماثلة أن $Y_j \subseteq B$ ولما كان $y \in Y_i \cap Y_j$، فإن $y \in A \cap B$. ونكون بهذا قد وقعنا في تناقض (لأن كلا من A, B منفصلة عن لصاقة الاخرى) . إذن $Y =\cap_i Y_i$ مجموعة جزئية متصلة في X.

مثال:

إن الفضاء الاقليدي الثنائي $(\mathbf{R}^2, D)$ البعد متصل، ذلك أنه اجتماع كل المستقيمات المارة من نقطة ما فيه، وكل من هذه المستقيمات مجموعة متصلة لوجود هومومورفيزم بين أي من هذه المستقيمات وفضاء الاعداد الحقيقية المعتاد $(\mathbf{R}, \mathbf{II})$.

مبرهنة(٢ – ٣٦):

ليكن (X, τ) فضاء طبولوجيا بحيث تكون أي نقطتين من X واقعتين في مجموعة جزئية متصلة في X. عندئذ يكون (X, τ) فضاء متصلا.

البرهان:

ليكن x_0 عنصرا مثبتا من X.أيا كانت النقطة xمن X ،فثمة مجموعة جزئية متصلة $Y(x_0, x)$ في X تحوي $x x_0$, عندئذ تكون $\{Y(x_0, x) | x \in X\}$ جماعة من المجموعات الجزئية المتصلة في X اجتماعها يساوي X وذات تقاطع غير خال (لأن هذا التقاطع يحوي x_0 على الاقل) . وبالتالي، فإن (X, τ) فضاء متصل.

مبرهنة(٢ – ٣٧):

الشرط اللازم والكافي كي يكون فضاء جداء جماعة غير خالية وقابلة للعد من الفضاءات الطبولوجية متصلا هو أن يكون كل من مركبات الجداء فضاء متصلا.

البرهان:

لتكن $\{(X_i, \tau_i)\}, i \in I$ جماعة غير خالية وقابلة للعد من الفضاءات المتصلة، ولنبرهن أن فضاء جدائها $(II_i X_i, \tau)$ متصل. لنفرض جدلا أن فضاء الجداء هذا غير متصل.إذن $II_i X_i = U \cup V$، حيث U, V مجموعتان جزئيتان من $II_i X_i$ غير خاليتين منفصلتان ومفتوحتان في $II_i X_i$. لنختر عنصرا u من U وآخر v من V. لما كانت U مفتوحة في $II_i X_i$، فثمة عنصر من القاعدة لـ τ، وليكن $II_i W_i$، بحيث $II_i W_i \subseteq U$،علما بأن W_i مجموعة جزئية مفتوحة في X_i، وأن $W_i = X_i$ أيا كان i من I باستثناء عدد منته من عناصر I ولتكن $i_i, \dots \dots, i_n$.لنعين عنصرا من $II_i X_i$ وهو $c^0 = (c_1^0, \dots, c_i^0, \dots)$ بحيث $c_i^0 = v_i$.(بفرض v_i الإحداثي الi لـ v) عندما $i \neq i_1, \dots \dots, i_n$، وبحيث $c_i^0 = u_i$ عندما

$i = i_1, \dots, i_n$. عندئذ $c^0 \in \Pi_i W_i \subseteq U$. لنعين عنصرا من $\Pi_i X_i$ وهو c^1 بحيث $c_i^1 = v_i$ عندما $i \neq i_1, \dots \dots, i_n$،وبحيث $c_i^1 \neq v_i$ عندما $i = i_1$ وبحيث $c_i^1 = u_i$ عندما $i = i_1, \dots \dots, i_n$. وبوجه عام، لنعين عنصرا c^m من $\Pi_i X_i$ بحيث $c_i^m = v_i$ عندما $i \neq i_{m+1}, \dots \dots, i_m$، وبحيث $c_i^m = u_i$ عندما $i = i_{m+1}, \dots \dots, i_m$ عندئذ $c_n = v$. لتكن

$A_m = \{x | x_i = v_i$ عندئذ فيما عدا ذلك $x_{i_{m+1}} = u_{i_{m+1}}, \dots, x_{i_n} = u_{i_n}$، و x_{i_m} كيفي$\}$

$c^{m-1} \in A_{m-1} \cap A_m$،حيث $1 \leq m \leq n$ و$v = c^n \in A_n$.إن $A_1, \dots \dots, A_n$ تشكل (سلسالا) من Uالى V، ذلك أنه لما كان $c^m \in A_m \cap A_{m+1}$،فإن $A_m \cap A_{m+1} \neq \emptyset$.

سنبين الآن أن كلا من A_i مجموعة متصلة . لنعرف تطبيقا لX_{i_m} على A_m كما يلي : إن $g(X_{i_m})$ هي النقطة من A_m التي احداثيها ال i_m هو x_{i_m} ،وإحداثيها ال i_{m+1} هو $u_{i_{m+1}}$ وإحداثيها الـ i_n هو u_{i_n}، ومن أجل الـ i المتبقية، فإن إحداثيها ال i هو v_i. إن g_m مستمرة، بل وهو ميومورفيزم كذلك (لأنه عكس تطبيق الاسقاط ل A_m علىX_{i_m}). لما كان كل من X_{i_m} متصلا، فإن كلا من A_m مجموعة متصلة. من السبل التحقق عندئذ بأن $\cup_{i=1}^m A_m$ مجموعة متصلة. وبما أن $\cup_{i=1}^m A_m$ تلاقي كلا من المجموعتين غير الخاليتين المنفصلتين والمفتوحتين U, V، فإننا نكون بذلك قد وقعنا في تناقض، وبالتالي فلابد أن يكون فضاء الجداء متصلا.

وبالعكس ، لنفرض أن فضاء الجداء $(\Pi_i X_i, \tau)$ متصل، لما كان تطبيق الاسقاط p_i لـ $\Pi_i X_i$ على X_i مستمرا فإن X_i متصل .

المركبات والفضاءات غير المتصلة كليا

تعريف(٢ –٣٨):

ليكن (X, τ)فضاء طبولوجي و A مجموعة جزئية من X. نقول عن Aإنها مركبة لـ X إذا كانت A مجموعة جزئية متصلة أعظمية في X، أي إذا كانت A مجموعة جزئية متصلة في X غير محتواة تماما في أي مجموعة جزئية متصلة أخرى في X.

مثال:

إن لكل فضاء متصل (X,τ) مركبة واحدة هي X.أما في الفضاء المتقطع، فإن كل مجموعة وحيدة العنصر تشكل مركبة لهذا الفضاء.

مبرهنة(٢–٣٩):

إذا كان (X,τ) فضاء طبولوجيا ما ، فإن الدعاوى التالية صحيحة:

(١) كل نقطة من X محتواة في مركبة واحدة فقط لـ X.

(٢) كل مجموعة جزئية غير خالية متصلة في محتواة في مركبة واحدة لـ X.

(٣) كل مجموعة جزئية غير خالية و مفتوحة ومغلقة في آن واحد هي مركبة لـ X.

(٤) كل مركبة لـ X مجموعة مغلقة.

(٥) تشكل مجموعة المركبات لـ X تجزئة لـ X.

البرهان:

(١) لتكن نقطة x من X، ولتكن $\{A_i\}, i \in I$ جماعة كل المجموعات المتصلة في X والتي تحوي x.إن هذه الجماعة غير خالية، لأن $\{x\}$ نفسها متصلة. اذا كان

$A = \cup_i A_i$ مجموعة جزئية متصلة في X تحوي x. من الواضح أن A أعظمية ، وبالتالي فهي مركبة لـ X، ذلك أن كل مجموعة جزئية متصلة في X حاوية ل A هي إحدى المجموعات A_i، وهي بالتالي محتواة في A.لنبين أخيرا أن Aهي مركبة الوحيدة ل X التي تحوي x. إذا افترضنا جدلا أن B مركبة أخرى لـ X تحوي x،فمن الواضح أن B يجب أن تكون إحدى المجموعات A_i، ومن ثم فإن B محتواة في A. لكن B أعظمية باعتبارها مجموعة جزئية متصلة في X، إذن $B = A$.

(٢) إن هذه الدعاوى سهلة الاثبات.

(٣) لتكن C مجموعة جزئية متصلة في X مفتوحة ومغلقة في آن واحد. تبين الدعوى (٢) أن C محتواة في مركبة ماA ل X. فإذا كانت C محتواة تماما في A، فمن السهل عندئذ ملاحظة أن

$A = (A \cap C) \cup [A \cap (X - C)]$، حيث$A \cap (X - C)$ ، $A \cap C$ مجموعتان جزئيتان غير خاليتين منفصلتان ومفتوحتان في A. لكن هذا مناقض لحقيقة كون A مجموعة متصلة (لأن A مركبة). وبالتالي فإن $C = A$، أي أن C مركبة لـ X.

(٤) لتكن A مركبة لـ X. لما كان $A \subseteq Cl(A) \subseteq Cl(A)$، فتكون $Cl(A)$ مجموعة متصلة في X. وبما أن $A \subseteq Cl(A)$ و A مجموعة متصلة أعظمية، فإن $A = Cl(A)$، وهذا يعني أن A مغلقة.

(٥) لتكن $\{A_i\}, i \in I$ مجموعة مركبات X .لما كانت كل نقطة من X محتواة في مركبة لـ X وفق الدعاوى (١)، فإن $X = U_I A_i$.

إذا افترضنا جدلا أنه توجد مركبتان مختلفتان A_j، A_iبحيث يكون $A_i \cap A_j \neq \emptyset$ لاستنتجنا أن $A_i \cup A_j$ مجموعة جزئية متصلة في X تحوي كلا من A_i, A_j ومن السهل أن نرى حينئذ أن هذا يقتضي $A_i = A_j$، ونكون بذلك قد وقعنا في تناقض.

تعريف(٢-٤٠):

يقال عن فضاء طبولوجي (X, τ) إنه غير متصل كليا إذا تحقق الشرط التالي: أيا كانت النقطتان المختلفتان a, b من X، فثمة مجوعتان منفصلتان A, B ومفتوحتان في X بحيث $b \in B$ ،$a \in A$،

$X = A \cup B$.

يترتب على هذا التعريف أن أي فضاء غير متصل كليا هو فضاء T_2، وأنه إذا كان حاويا على أكثر من نقطة واحدة ، فهو فضاء غير متصل.

مثال:

لنأخذ مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbf{R}$.إن جماعة كل المجالات نصف المفتوحة من الشكل$]p, q]$ تشكل قاعدة لطبولوجيا τ على $\mathbf{R}$. لكن a, b أي عنصرين مختلفين من $\mathbf{R}$، ولنفرض أن مثلا أن $a < b$. عندئذ تكون $A =]-\infty, a], B =]a, \infty[$، مجوعتين منفصلتين مفتوحتين (بالنسبة لـ τ) بحيث $a \in A , b \in B$ و $\mathbf{R} = A \cup B$.وبالتالي فإن غير متصل كلي ا$(\mathbf{R}, \tau)$.

مثال:

لنأخذ مجموعة الاعداد العادية $\mathbf{Q}$،ولنزودها بالطبولوجيا النسبية المعتادة $\mathbf{II_Q}$. ليكن a, b أي عنصرين مختلفين من $\mathbf{Q}$، ولنفرض مثلا أن $a < b$. من المعلوم أن ثمة عددا غير عادي p بحيث $a < p < b$. عندئذ تكون

$$A = \{x \in \mathbf{Q} | x < p\} \text{ و } B = \{x \in \mathbf{Q} \quad x > p\}$$

مجموعتين منفصلتين مفتوحتين تنتميان الى الطبولوجيا النسبية بحيث $a \in A , b \in B$ و $\mathbf{Q} = A \cup B$، وبالتالي فإن $(\mathbf{Q}, \mathbf{II_Q})$ غير متصل كليا.

مبرهنة(٢ – ٤١):

إن مركبات فضاء غير متصل كليا (X, τ) هي مجموعاته الجزئية التي تحوي كل منها نقطة واحدة من X.

البرهان:

لتكن C مركبة لـ X، ولنفرض a, b عنصرين من C بحيث $a \neq b$. ولما كان (X, τ) غير متصل كليا ، فثمة مجموعتان منفصلتان A, B ومفتوحتان في X بحيث .

$a \in A , b \in B$ و $X = A \cup B$ [4–28] من السهل عندئذ ملاحظة أن $C \cap A, C \cap B$ مجموعتان غير خاليتين منفصلتان ومفتوحتان في C بحيث $C = (C \cap A) \cup (C \cap B)$.لكن هذا يعني بأن C مجموعة غير متصلة، وهذا يناقض كون C مركبة (لأن كل مركبة مجموعة متصلة). وبالتالي فإن C تحوي نقط واحدة.

إن خاصة كون الفضاء الطبولوجي فضاء T_2 تشكل إحدى أهم الخواص التي يمكن أن يتمتع بها فضاء طبولوجي. وتوفر المبرهنة التالية شرطا كافيا كي يكون فضاء T_2 فضاء غير متصل كليا.

مبرهنة(٢ – ٤٢):

ليكن (X, τ) فضاء T_2.فإذا وجدت قاعدة B لـ τ عناصرها مجموعات مغلقة أيضا في X، (X, τ) غير متصل كليا.

البرهان:

لتكن a, b أي نقطتين مختلفتين في X. لما كان (X, τ) فضاء T_2،فهنالك جوار U لـ b لا يحوي a. وبالتالي فيوجد عنصر B من B بحيث $b \in B \subseteq U$. واستنادا إلى الفرض فإن B مغلقة أيضا في X.من

السهل عندئذ ملاحظة أن B ،$X - B$ مجموعتان منفصلتان ومفتوحتان في X بحيث $a \in X - B$ و $b \in B$ و $X = B \cup (X - B)$، وهذا يعني أن (X, τ) فضاء غير متصل كليا.

مثال:

لنأخذ مجموعة الاعداد الحقيقية $\mathbf{R}$ ولنزود كل نقطة x من $\mathbf{R}$ بالمجموعة $N_x = \{ [x, a[\; | a \in \mathbf{R}, x < a\}$.رأينا أن جماعة المجموعات N_x تشكل جملة جوارات أساسية لطبولوجيا τ على $\mathbf{R}$ [5−9].إن $(\mathbf{R}, \tau)$ فضاء T_2.كذلك ،فإن جماعة المجموعات الجزئية من $\mathbf{R}$ والمحتواة في N تشكل قاعدة B لـ τ[3−9] ؛ومن السهل التحقق بأن كلا من عناصر B مجموعة مفتوحة ومغلقة في آن واحد. وبالتالي فإن $(\mathbf{R}, \tau)$ فضاء غير متصل كليا.

إن خاصة كون الفضاء الطبولوجي متراصا تشكل واحدة من أهم الخواص التي يمكن أن يتحلى بها فضاء طبولوجي.

مبرهنة(٢ −٣ ٤):

ليكن (X, τ) فضاء متراصا و T_2. إن الشرط اللازم و الكافي كي يكون (X, τ) فضاء غير متصل كليا هو أن توجد قاعدة B لـ τ عناصرها مجموعات مغلقة أيضا في X.

البرهان:

إذا كان (X, τ) فضاء غير متصل كليا، فإن جماعة كل المجموعات الجزئية من X المفتوحة والمغلقة في آن واحد تشكل قاعدة لـ τ .لتكن a نقطة من X و U مجموعة مفتوحة تحوي a. من الواضح أننا نبلغ هدفنا إذا بينا أن ثمة مجموعة B مفتوحة ومغلقة في آن واحد بحيث $a \in B \subseteq U$.من الممكن افتراض أن $U \neq X$، ذلك أنه لو كان $U = X$، فمن الممكن تحقيق غرضنا بأخذ B مساوية لـ X . إن $X - U$ مجموعة جزئية مغلقة في X. ولما كان (X, τ) فضاء متراصا فإن $X - U$ مجموعة متراصة كذلك.X.ولما كان (X, τ) غير متصل كليا فرضا، فيوجد لكل نقطة b من $X - U$ مجموعة V_b مفتوحة ومغلقة في X آن واحد في وحاوية لـ b دون a. وبما أن $X - U$ متراصة فثمة جماعة جزئية منتهية من $\{V_b \; | b \in X - U\}$، ولتكن $\{V_{b_1}, \dots\dots, V_{b_n}\}$، بحيث $X - U \subseteq V_{b_1} \cup \dots \cup V_{b_n}$ وبحيث $a \notin V_{b_1} \cup \dots \cup V_{b_n}$. لتكن $V = V_{b_1} \cup \dots \cup V_{b_n}$ ونلاحظ أنه لما كانت V اجتماعا منتهيا لمجموعات

مغلقة فضلا عن كونها مفتوحة، فإن V مفتوحة ومغلقة في آن واحد ، كما أن $V \subseteq X - U$ وأن $a \notin V$.

فإذا عرفنا الآن B على أنها $X - V$، فإن B مجموعة مفتوحة ومغلقة في آن واحد ، بحيث $a \in B \subseteq U$، ونكون بذلك قد توصلنا الى ما كنا نبغي.

الفضاءات المتصلة موضعيا

تعريف(٢-٤٤):

يقال عن الفضاء طبولوجي (X, τ) أنه متصل موضعيا في نقطة x منه إذا وجد لكل جوار U للنقطة x جوار متصل V للنقطة x محتوى في U. و إذا كان (X, τ) متصلا موضعيا في كل من نقاطه، فإننا نسميه فضاء متصلا موضعيا. ونقول عن مجموعة جزئية Y من هذا الفضاء إنها متصلة موضعيا إذا كان الفضاء Y متصلا موضعا.

مثال:

كل فضاء متقطع متصل موضعيا وغير متصل.

مثال:

نأخذ الفضاء الاقليدي ثنائي البعد، ولنختر في هذا الفضاء المجموعة الجزئية .

$$Y = \left\{(x, y) \middle| y = \sin\frac{1}{x}, x > 0\right\} \cup \{0,0\}.$$

نبين أن Y المزودة بالطبولوجيا النسبية مجموعة متصلة. في الحقيقية إذا فرضنا $A = Y - \{(0,0)\}$ وعرفنا تطبيق f ا لـ $\{x|x > 0\}$ في $\mathbf{R}^2$ بالدستور $f(x) = (x, \sin\frac{1}{x})$، فمن السهل التحقق بأن f مستمر. لما كانت المجموعة $\{x|x > 0\}$ متصلة ، فان خيالها وفق f، أي A،مجموعة متصلة . ومن الواضح أن $(0,0) \in Cl(A)$ ذلك أن أي جوار لـ $(0,0)$ يتقاطع مع A. وبالتالي فإن $A \subset Y \subseteq Cl(A)$؛

مبرهنة(٢-٤٥):

الشرط اللازم والكافي كي يكون الفضاء الطبولوجي (X, τ) متصلا موضعيا هو أن تكون أي مركبة لكل فضاء جزئي مفتوح في X مفتوحة.

البرهان:

ليكن الفضاء (X,τ) متصلا موضعيا ،وليكن (U,τ_U) فضاء جزئيا مفتوحا في X و Cمركبة مال U.
سنبين أن C مفتوحة في X.

لنفترض x نقطة ما من C. لما كان (X,τ) متصلا موضعيا و U مفتوحة في X، فثمة جوار V لـ x متصل في X بحيث $V \subseteq U$ لكن المجموعة V متصلة كذلك فيU؛إذن $V \subseteq C$،لأن C مركبة لـ U ، وV مجموعة متصلة في U .وهكذا نكون قد وجدنا أنه أيا كانت النقطة x من C، فثمة مجموعة مفتوحة V فيX تحوي x بحيث $V \subseteq C$.

من السهل التحقق بأن هذا يعني أن C اجتماع لجماعة من المجموعات المفتوحة في X، أي أن المركبة الاختيارية C لـ U مفتوحة في X (أو مفتوحة فيU).

وبالعكس ، لنفرض أن أي مركبة لكل فضاء جزئي مفتوح في (X,τ) مفتوحة ، ولنثبت أن (X,τ) متصل موضعيا. لتكن xنقطة ما من X، وليكن Uأي جوار لـ x . لنفترض أن C هي مركبة U التي تحوي x. عندئذ تكون C مفتوحة فرضا ، وبالتالي فإن C جوار متصل لـ x بحيث $C \subseteq U$. إذن (X,τ) فضاء متصل موضعيا.

نتيجة:

إذا كان الفضاء الطبولوجي (X,τ) متصلا موضعيا،فإن أي مركبة لـ X مفتوحة. ولما كانت كل مركبة مغلقة كذلك،فإننا نستنتج أنه إذا كان (X,τ) متصلا موضعيا، فكل مركبة فيه مفتوحة ومغلقة في آن واحد.

إن الاتصال موضعيا لا يحفظ بالتطبيقات المستمرة. إلا أن إخضاع التطبيق المستمر لشرط إضافي يؤدي إلى حفظ الإتصال موضعيا، الأمر الذي تبينه المبرهنة التالية:

مبرهنة(٢–٤٦):

ليكن (X,τ) فضاء متصلا موضعيا و (Y,τ') فضاء ما. فإذا كان f تطبيقا مستمرا مفتوحا لـ (X,τ) على (Y,τ')،فإن (Y,τ') لابد أن يكون متصلا موضعيا أيضا.

البرهان:

لتكن yنقطة ما من Y، وليكن V أي جوار لـ y . لما كان f تطبيقا غامرا ، فثمة نقطة x من X بحيث $f(x) = y$. وبما أن f مستمر، فإن $f^{-1}(V)$ جوار في X لـ x. واستنادا الى كون (X, τ) فضاء متصلا موضعيا فثمة جوار متصل U لـ x بحيث $U \subseteq f^{-1}(V)$.ولما كان f تطبيقا مستمرا ومفتوحا ، فإن $f^{-1}(U)$ جوار متصل لـ y . و إذا لاحظنا فضلا عن ذلك أن $f^{-1}(U) \subseteq V$، فإننا نستنتج أن (Y, τ') فضاء متصل موضعيا.

$f^{-1}(U) \subseteq V$ فإننا نستنتج أن (Y, τ') فضاء متصل موضعيا.

الباب الثالث

تقارب الشبكات و المرشحات

الشبكات

تعريف(٣-١):

لتكن A مجموعة غير خالية و$\leq$ علاقة ترتيب جزئي على A. نقول عن المجموعة المرتبة جزئيا $(A, \leq)$ إنها مجموعة موجهة إذا تحقق الشرط التالي:

أيا كان العنصران α, β من A ، فثمة عنصر γA من بحيث $\beta \leq \gamma$ و $\alpha \leq \gamma$.

يترتب على هذا التعريف أن كل مجموعة موجهة، ذلك أنه إذا كانت مرتبة كليا، و كان α, β أي عنصرين من A، فإما أن يكون$\alpha \leq \beta$ أو$\beta \leq \alpha$ ؛فإذا افترضنا مثلا أن $\alpha \leq \beta$، فإن $\beta \leq \beta$و$\alpha \leq \beta$.

مثال:

لتكنX مجموعة ما ، ولنرمز ب$P(X)$ لمجموعة قوة X (أي لجماعة كل المجموعات الجزئية من X).

لنعرف ترتيبا على$P(X)$ على النحو التالي:U, V إذا كانت مجموعتين جزئيتين من X ، فإن $U \leq V$ إذا كان $V \subseteq U$. من السهل التحقق بأن $\leq$ علاقة ترتيب جزئي على $P(X)$. سنبين الآن أن $(P(X), \leq)$مجموعة موجهة، أيا كان العنصران U, V من $P(X)$، فهنالك عنصر $U \cap V$ من $P(X)$ بحيث $U \leq U \cap V, V \leq U \cap V$. لنفرض الآن x عنصرا ما من X، ولنرمز ب $P(X, x)$ للمجموعة $P(X, x) = \{W \in P(X) | x \in W\}$. ومن الواضح عندئذ أن

$(P(X, x) \leq)$ مجموعة موجهة كذلك.

مثال:

ليكن (X, τ) فضاء طبولوجيا ما ، ولنرمز بF لجماعة كل المجموعات الجزئية المغلقة في X. عندئذ يكون كل من $(F, \supseteq)$و $(F, \subseteq)$ و $(\tau, \supseteq)$ و $(\tau, \subseteq)$ مجموعة موجهة.

مثال:

لتكن $(A',\leq')$و $(A,\leq)$ مجموعتين موجهتين، ولنعرف على $A\times A'$ علاقة $\ll$ بحيث يكون $(\alpha,\alpha')\ll(\beta,\beta')$عندما $\alpha\leq\beta,\alpha'\leq\beta'$، . من السهل التحقق بأن $\ll$هي علاقة ترتيب جزئي على $A\times A'$. ولإثبات أن $(A\times A',\ll)$ مجموعة موجهة، نختار أي عنصرين $(\alpha,\alpha'),(\beta,\beta')$، من $A\times A'$. لما كان α,β عنصرين اختياربن من A وكان α',β'عنصرين إختيارين من A'، فهنالك عنصر γ من A وعنصر γ' من A'بحيث $\alpha\leq\gamma,\beta\leq\gamma$ و $\alpha'\leq'\gamma',\beta'\leq'\gamma'$. ويترتب على هذا وعلى التعريف $\ll$أن ثمة عنصرا (γ,γ')من $A\times A'$ بحيث $(\alpha,\alpha')\ll(\gamma,\gamma')$و $(\beta,\beta')\ll(\gamma,\gamma')$،أي أن $(A\times A',\ll)$ مجموعة موجهة.

لما كانت مجموعة الاعداد الطبيعية $\mathbf{N}$ موجهة بعلاقة الترتيب المعتادة$\leq$،فمن الممكن ان عد المتتالية تطبيقا مجموعة تعريفه هي مجموعة موجهة معينة وما الشبكة الا تعميم للمتتالية بحيث يمكن لمجموعة التعريف ان تكون مجموعة موجهة تحكمية ، دون ان تكون بالضرورة المجموعة الموجهة $(N,\leq)$ كما هو موضح في التعريف التالي :

تعريف(٣-٢):

لتكنX مجموعة ما ، ولتكن$(A,\leq)$ مجموعة موجهة . يسمي كل تطبيق s لـ $(A,\leq)$ في X الشبكة (او متتالية معممة او متتالية مور – سميث $(\text{Moore}-\text{Smith})$ في X . وكما هو الحال في المتتاليات ، فسنستخدم الرمز s_α للدلالة على$s(\alpha)$ كما سنرمز للشبكة ذاتها بـ $\{s_\alpha\},\alpha\in A$

مثال:

لتكنX مجموعة ما . لما كانت كل متتالية في X تطبيقا للمجموعة الموجهة $(N,\leq)$فيX ، فان كل متتالية هي شبكة .وهكذا فالشبكة تمثل حقا تعميما للمتتالية .

مثال:

لتكنX مجموعة ما. عرفنا في المجموعة$P(X,x)$، كما عرفنا علاقة ترتيب جزئي $\leq$ عليها ، ووجدنا ان $(P(X,x))$ تشكل مجموعة موجهة . لنعرف تطبيقا s في X بالشكل التالي :

ايا كانت W من $P(X,x)$ ،فان $s(W) \in W$ ان s (الذي يسمي احيانا تطبيق الاصطفاء) يعطينا شبكة في Xهي $\{s_W\}, W \in P(X,x)$ هذا واذا زودنا X بطبولوجيا ، ورمزنا ب$T(X,x)$ للمجموعة= $T(X,x)$ $\{U|U \in \tau, x \in U\}$ فمن السهل التحقق بان $(T(X,x), \leq)$ تشكل مجموعة موجهة ، وان التطبيقs،ل$T(X,x)$ في X, حيث $s(U) \in U$أيا كان Uمن $T(X,x)$ يعطينا شبكة في X هي$\{s_U\}, U \in$ $T(X,x)$ نسمي $(T(X,x)$المجموعة الموجهة لجوارات x.

تعريف(٣-٣):

لتكن X مجموعة ما$\{s_\alpha\}, \alpha \in A$.شبكة في X، ولتكن K خاصية ما ، نقول ان هذه الشبكة تتمتع بالخاصية K بصورة متبقية (في نهاية المطاف) اذاوجد عنصر α_0 من A بحيث يتمتع العنصر s_α بالخاصية K ايا كان العنصر α من A الذي يحقق الشرط$\alpha_0 \leq \alpha$ كذلك ، فاننا نقول بان الشبكة $\{s_\alpha\}, \alpha \in A$ تتمتع بالخاصية K بصورة متكررة (متواترة)اذاتحقق الشرط التالي :

ايا كان العنصران α, β من، فثمة عنصرγ من A يحقق الشرط $\alpha \leq \gamma, \beta \leq \gamma$ بحيث يتمتع العنصر s_γ بالخاصية K.

من السهل التحقق بان الشرط اللازم والكافي كي تتمتع الشبكة $\{s_\alpha\}, \alpha \in A$ بالخاصية بصورة متكررة وهو التالي:

ايا كان العنصرα من A، فثمة عنصرγ منA بحيث $\alpha \leq \gamma$.وبحيث يتمتع s_γ بالخاصة K.

مثال:

نأخذ مجموعة الاعدعد الحقيقة **R**، ولتكن $\{s_n\}, n \in N$ متتالية في **R** معرفة بالدستور.$s_n = (-1)^n$

فاذا زودنا **R** بأي طبولوجيا τ فان المتتالية $\{s_n\}, n \in N$ تتمتع بالخاصية وجودها في كل جوار للعدد١بصورة متكررة. ان هذه المتتالية تتمتع بخاصية وجودها في كل جوار للعدد -1 بصورة متكررة كذلك .الا ان هذه المتتالية لا تتمتع بخاصية وجودها في كل جوار لـ ١ بصورة متبقية الا اذا كان كل جوار ل$1-$ يحوي العدد $1-$ ايضا .

الشبكات الجزئية و الشبكات الاعظمية

تعريف(٣-٤):

لتكن $\{s_\alpha\}, \alpha \in A$ شبكة في مجموعة X، ولنفرض B مجموعة موجهة و k تطبيقا ل B في A يحقق الشرطين التاليين:

(١) إذا كان $\beta \leq \beta'$، فإن $k(\beta) \leq k(\beta')$.

(٢) يوجد لكل عنصرين α, α' من Aعنصر β من Bبحيث يكون $\alpha' \leq k(\beta), \alpha \leq k(\beta)$ عندئذ يسمى التطبيق المركب sok لـ B في X شبكة جزئية من الشبكة $\{s_\alpha\}, \alpha \in A$.ويشار عادة للشبكة الجزئية sok بالرمز $\{s_{k_\beta}\}, \beta \in B$

من السهل التحقق بان الشرط (٢) يكافئ الشرط التالي يوجد لكل عنصر α من A,عنصرβ من B بحيث

$$\alpha \leq k(\beta)$$

مثال:

لتكن $\{s_n\}, n \in N$ متتالية ما ، و لتكن $B = \{5n \mid n \in N\}$ لنرمز بـ k للتطبيق المطابق للمجموعة B في N نلاحظ اولا انه اذا كان β, β'عددين من B بحيث $\beta \leq \beta'$ فان $k(\beta) \leq k(\beta')$ (لان $k(\beta) = \beta, k(\beta') = \beta'$) كذلك ، فاذا كان n اي عدد طبيعي ، فمن الواضح ان هنالك عنصرا B من اكبر من n، اي ان هنالك عنصرا m من B بحيث $n \leq k(m) = m$ لذا فالتطبيق sok هو شبكة جزئية من $\{s_n\}, n \in N$ و في الحالة الي تكون فيها الشبكة الجزئية المتتالية ، فقد اصطلح على تسمية الشبكة الجزئية متتالية جزئية .

مثال:

لتكن $\{s_\alpha\}, \alpha \in A$ شبكة بفرض A مجموعة الاعداد الحقيقية التي تكبر او تساوي ١ . ان $(A \times A, \ll)$ مجموعة موجهة . لنعرف تطبيقا لهذه المجموعة الموجهة في A معرفا بالدستور $k(\alpha, \alpha') = \alpha\alpha'$.

سنتحقق الان من ان التطبيق k يحقق الشرطين (١) و (٢) الواردين في التعريف

(١) اذا كان$(\alpha_1, \alpha_2) \ll (\alpha'_1, \alpha'_2)$، فان $\alpha_1 \leq \alpha'_1 \alpha_2 \leq \alpha'_2$ وبالتالي فان$\alpha_1 \alpha_2 \leq \alpha'_1 \alpha'_2$أو $k(\alpha_1, \alpha_2) \leq k(\alpha'_1, \alpha'_2)$

(٢) اذا كان α, α' اي عنصرين من A، فيمكن ان نفرض دون مس للعمومية ان $\alpha \leq \alpha'$.و لما كان كل من α, α' يكبر او يساوي ١ ، فان $\alpha' \leq \alpha^2, \alpha \leq \alpha'^2$؛ اذن $\alpha \leq k(\alpha', \alpha'), \alpha' \leq k(\alpha', \alpha')$ وبالتالي sok شبكة جزئية من الشبكة $\{s_\alpha\}, \alpha \in A$

ان اهم خواص الشبكات الجزئية تشكل فحوى المبرهنتين التاليتين :

مبرهنة(٣-٥):

اذا كانت $\{s_\alpha\}, \alpha \in A$ شبكة متمتعة بالخاصية K بصورة متكررة ، فثمة شبكة جزئية $\left\{s_{k_\beta}\right\}, \beta \in B$ من $\{s_\alpha\}, \alpha \in A$ تتمتع بالخاصة K بصورة متبقية .

البرهان:

نرمز بـ B لمجموعة العناصر β من المجموعة الموجهة $(A, \leq)$ بحيث يتمتع s_β بالخاصية K لما كانت K خاصية متكررة للشبكة $\{s_\alpha\}, \alpha \in A$ فانه يوجد لاي عنصرين β, β' من B، عنصر β'' من A يحقق الشرطين $\beta \leq \beta'', \beta' \leq \beta''$ بحيث يتمتع العنصر s_β بالخاصية K و استناد الى التعريف B نستنتج ان $\beta'' \in B$ و يترتب على هذا انه يوجد لكل عنصرين β, β' من B عنصر β'' من B بحيث $\beta \leq \beta'', \beta' \leq \beta''$ و هذا يعني ان المجموعة المرتبة جزئيا $(B, \leq)$ هي مجموعة موجهة . لنرمز الان بـK للتطبيق المطابق لـB في A . من الواضح انه اذا كان β, β' اي عنصرين من B بحيث $\beta \leq \beta'$ فان $k(\beta) \leq k(\beta')$ اذن فالشرط (١) محقق . هذا و لما كانت الشبكة $\{s_\alpha\}, \alpha \in A$ تتمتع بالخاصية K بصورة متكررة ، فانه يوجد لكل عنصرين α, α' من A عنصر β من A بحيث $\alpha \leq \beta, \alpha' \leq \beta$، و بحيث يتمتع العنصر s_β بالخاصية K لكن هذا يعني ان ينتمي الى B .وبعبارة اخرى ، فانه يوجد لكل عنصرين α, α' من A عنصر β من B بحيث $\alpha \leq k(\beta), \alpha' \leq k(\beta)$

و بالتالي فان الشرط (٢) محقق كذلك . اذن sok شبكة جزئية $\left\{s_{k_\beta}\right\}, \beta \in B$ من الشبكة $\{s_\alpha\}, \alpha \in A$.

و لما كان تعريفنا لـB يقتضي كون جميع عناصر هذه الشبكة الجزئية متمتعة بالخاصة K فان الشبكة الجزئية $\left\{s_{k_\beta}\right\}, \beta \in B$ تتمتع بالخاصية K بصورة متبقية .

مبرهنة(٣-٦):

اذا كانت $\{s_\alpha\}, \alpha \in A$ شبكة متمتعة بالخاصية K بصورة متبقية ، فان اي شبكة جزئية من $\{s_\alpha\}, \alpha \in A$ تتمتع بالخاصية Kبصورة متبقية .

البرهان :

لما كانت الشبكة$\{s_\alpha\}, \alpha \in A$ تتمتع بالخاصية K بصورة متبقية ، فثمة عنصر α_0 من A بحيث اذا كان $\alpha_0 \leq \alpha$ فان s_α يتمتع بالخاصية K لتكن.$\left\{s_{k_\beta}\right\}, \beta \in B$ شبكة جزئية من $\{s_\alpha\}, \alpha \in A$. و بالتالي فهنالك عنصر β_0 من B بحيث .$\alpha_0 \leq k(\beta_0)$ ليكن βعنصرا من B بحيث $\beta_0 \leq \beta$. اذن يجب ان يكون $k(\beta_0) \leq k(\beta)$ (وفق الشرط (١) و بالتالي نستنتج وجود عنصر β_0 من Bبحيثانه اذا كان $\beta_0 \leq \beta$فان$\alpha_0 \leq k(\beta)$، اي $\alpha_0 \leq k_\beta$. ولكن هذا يعني انs_{k_β} يتمتع بالخاصية K. اذن نستنتج ان هنالك عنصرا β_0 من B بحيث اذا كان $\beta_0 \leq \beta$ فان s_{k_β} يتمتع بالخاصة K. و هذا يعني ان الشبكة الجزئية $\left\{s_{k_\beta}\right\}, \beta \in B$ تتمتع بالخاصية Kبصوة متبقية .

التعريف(٣-٧):

نقول عن شبكة $\{s_\alpha\}, \alpha \in A$ في المجموعة X انها شبكة أعظمية اذا تحقق الشرط التالي :

ايا كانت المجموعة الجزئية C من X , فان $\{s_\alpha\}, \alpha \in A$ موجودة بصورة متبقية اما في C او في $X - C$.

مثال:

لتكن X مجموعة ما و x عنصرا من X. اذا كانت $(A, \leq)$ مجموعة موجهة ، فان الشبكة $\{s_\alpha\}, \alpha \in A$المعرفة بالدستور $s_\alpha = x$ ايا كان α من A تشكل شبكة اعظمية في X . في الحقيقة ، إذا كانت C مجموعة جزئية ما من X فاما ان يكون $x \in C$او $x \in X - C$. و بالتالي فان الشبكة $\{s_\alpha\}, \alpha \in A$ موجودة بصورة متبقية اما في C او في $X - C$.

مبرهنة(٣-٨):

ليكن f تطبيقا غامرا لمجموعة X على مجموعة Y. فاذا كانت $\{s_\alpha\}, \alpha \in A$ شبكة اعظمية في X, فان $\{f(s_\alpha)\}, \alpha \in A$ شبكة اعظمية فيY .

البرهان :

لتكن C مجموعة جزئية من Y .عندئذ تكون $\{s_\alpha\}, \alpha \in A$ موجودة بصورة متبقية اما في $f^{-1}(C)$ او $X - f^{-1}(C)$. و بالتالي فان $\{f(s_\alpha)\}, \alpha \in A$ موجودة بصورة متبقية اما في Cاو في $Y - C$، اي ان $\{f(s_\alpha)\}, \alpha \in A$ شبكة اعظمية في Y .

تقارب الشبكات

تعريف(٣-٩):

ليكن (X, τ) فضاء طبولوجيا و $\{s_\alpha\}, \alpha \in A$ شبكة فيX, ليكن xعنصرا من X.نقول ان الشبكة $\{s_\alpha\}, \alpha \in A$ تتقارب من x اذا وجدت هذه الشبكة في اي جوار لـ x بصورة متبقية . و اذا كانت $\{s_\alpha\}, \alpha \in A$ متقاربة من x فاننا نقول ان x نهاية الشبكة $\{s_\alpha\}, \alpha \in A$ و نكتب $s_\alpha \to x$.

من الممكن النص على هذا التعريف كما يلي :

تتقارب الشبكة $\{s_\alpha\}, \alpha \in A$من x اذا وجد لكل جوار U للنقطة x عنصر α_0 من A بحيث يكون $s_\alpha \in U$ ايا كان α من A الذي يحقق الشرط $\alpha_0 \le \alpha$

مثال:

ليكن (X, τ) فضاء طبولوجيا و $(T(X,x), \le)$ المجموعة الموجهة لجوارات عنصر ما x من X[7−30]وجدنا انه اذا كان s تطبيقا ل $T(X,x)$ فيX بحيث $s(U) \in U$ أيا كانU من $T(X,x)$فإن $\{s_U\}, U \in T(X,x)$ تشكل شبكة في X. لإثبات أن هذه الشبكة متقاربة من x، علينا ان تبين انه إذا كان Vجوارا ما لـ x ، فإن شبكتنا موجودة في X بصورة متبقية . في الحقيقة ليكن U اي جوارا لـ x بحيث $V \le U$. إن هذا يعني أن $U \subseteq V$. ولما كان $s_U \in U$ أيا كان Uمن $T(X,x)$ فإن $s_U \in V$. وهكذا نكون قد وجدنا أن هنالك عنصرا Vمن $T(X,x)$ بحيث أيا كان U من $T(X,x)$ الذي يحقق الشرط $V \subseteq U$، فإن $s_U \in V$.

سنورد الآن بعض المبرهنات الرئيسية في تقارب الشبكات .

مبرهنة(٣-١٠):

ليكن (X,τ) فضاء طبولوجيا و $\{s_\alpha\}, \alpha \in A$ شبكة في X متقاربة من x.عندئذ يجب ان تكون اي شبكة جزئية من الشبكة $\{s_\alpha\}, \alpha \in A$ متقاربة من x كذلك .

البرهان :

لما كانت الشبكة $\{s_\alpha\}, \alpha \in A$ متقاربة منx، فهي موجودة في اي جوار ل x بصورة متبقية . إن اي شبكة جزئية من $\{s_\alpha\}, \alpha \in A$ يجب ان تتمتع بخاصية وجودها في اي جوار لـ x بصورة متبقية أيضا ،أي أنها متقاربة من x كذلك .

مبرهنة(٣-١١):

ليكن (X,τ) فضاءا طبولوجيا و Y مجموعة جزئية من X. إن الشرط اللازم والكافي كي ينتمي عنصر xمن X إلى Cl (Y) هو ان توجد شبكة $\{s_\alpha\}, \alpha \in A$ تنتمي كل عناصرها الىY متقاربة من x.

البرهان :

لنفرض أولآ ان $x \in Cl\ (Y)$. إذن ايا كان الجوار U لـ x فإن $U \cap Y \neq \emptyset$. ليكن s تطبيقا ل $T(X,x)$ في X بحيث $s(U) \in U \cap Y$ أيا كان U من $T(X,x)$. إن هذا التطبيق موجود (لأن $U \cap Y \neq \emptyset$ أيا كانU من $T(X,x)$) وبالتالي فإن $\{s_U\}, U \in T(X,x)$ هي شبكة تنتمي جميع عناصرها الى Y. وبسلوك طريقة مماثلة لتلك التي أوردناها في نستنتج ان هذه الشبكة متقاربة من x.

وبالعكس ، لنفرض $\{s_\alpha\}, \alpha \in A$ شبكة من عناصر Y متقاربة من x. إذن هذه الشبكة موجودة في اي جوار لـ x بصوة متبقية ؛ ويترتب على هذا ان اي جوار لـ x يحوي عناصر من هذه الشبكة . ولما كانت عناصر الشبكة منتمية الى Y، فإننا نستنتج ان اي جوار لـ x يلاقي Y، اي ان $x \in Cl\ (Y)$.

في الفضاء المتري لايمكن لمتتالية ان تتقارب في اكثر من نهاية واحدة .ويمكن التحقق بسهولة تامة انه حتى في حالة الفضاءات الطبولوجيا من النوع T_2(التي تشكل الفضاءات المترية صفا منها) ، فلا يمكن ان يكون لمتتالية فيها اكثر من نهاية واحدة كذلك. إلا أن هذه الخاصة ليست مميزة للفضاءات T_2، بمعنى انه إذا تقاربت كل متتالية في فضاء طبولوجي من نهاية واحدة على الأكثر ، فليس من الضروري أن يكون هذا

الفضاء فضاء T_2. بيد انه بمقدورنا تمييز الفضاءات T_2 باستخدام المتتالية المعممة (اي الشبكات)، الأمر الذي تبينه المبرهنه التالية :

مبرهنة(٣-١٢) :

الشرط اللازم والكافي كي يكون (X,τ) فضاءا طبولوجيا هو T_2 ان تتقارب كل شبكة فيه من نهاية واحدة على الأكثر .

البرهان :

لنفرض أولا أن (X,τ) فضاء T_2، وان ثمة شبكة $\{s_\alpha\}, \alpha \in A$ متقاربة من نهايتين مختلفتين x, y. لما كان (X,τ) فضاء T_2، فثمة جواران U, V ل x, yعلى الترتيب بحيث $U \cap V = \emptyset$. وبما ان x نهاية للشبكة $\{s_\alpha\}, \alpha \in A$ فثمة عنصر α_0 من A بحيث $s_\alpha \in U$ ايا كان α من A الذي يحقق الشرط $\alpha_0 \leq \alpha$. كذلك ، بما ان y نهاية للشبكة ، فثمة عنصر α'_0 من Aبحيث $s_\alpha \in V$ ايا كان α من A الذي يحقق الشرط $\alpha'_0 \leq \alpha$ ولما كانت A مجموعة موجهة ، فثمة عنصرβ من A بحيث $\alpha_0 \leq \beta$, $\alpha'_0 \leq \beta$ وبالتالي يكون $s_\beta \in U$، $s_\beta \in V$ اي ان $U \cap V \neq \emptyset$، وهذا خلاف الفرض.

وبالعكس ، لنفرض ان لكل شبكة في X نهاية واحدة على الأكثر ولنثبت، ان (X,τ) فضاء T_2. لنقبل جدلا ان (X,τ) ليس فضاء T_2. إذن ثمة عنصران مختلفان x, y في X بحيث يتقاطع اي جوار لـ x مع اي جوار ل y. إذارمزناب$(\leq)$، $(T(X,y),\leq)$ ،$(T(X,x),\leq)$ للمجموعتين الموجهتين لجوارات x, yعلى الترتيب ، ان $(T(X,x) \times T(X,y),\ll)$ مجموعة موجهة. وبالتالي فإذا عرفنا تطبيق اs لـ $T(X,x) \times T(X,y)$ في Xبحيث $s(U,V) \in U \cap V$، فإن

$$\{s_{(U,V)}\}, (U,V) \in T(X,x) \times T(X,y)$$

تشكل شبكة في X. ومن السهل التحقق بان هذه الشبكة متقاربة من العنصرين المختلفين x, y، وهذا خلاف الفرض . إذن (X,τ) فضاء T_2.

مبرهنة(٣-١٣):

إذا وجد لكل شبكة جزئية من الشبكة $\{s_\alpha\}, \alpha \in A$ شبكة جزئية متقاربة من x، فإن $s_\alpha \to x$.

البرهان :

لنفترض جدلا ان x ليست نهاية للشبكة $\{s_\alpha\}, \alpha \in A$إذن يوجد جوار U لـ x يقابله عدم وجود α_0 من A بحيث ان $\alpha_0 \leq \alpha$ يقتضي $s_\alpha \in U$. لنرمز بـ B للمجموعة$B = \{\beta \in A \mid s_\beta \notin U\}$ وبـ k للتطبيق المطابق لـ B في A. من السهل التحقق عندئذ ان sok شبكة جزئية من الشبكة $\{s_\alpha\}, \alpha \in A$ وبما ان كلا من s_{k_β} لاينتمي الى U فمن غير الممكن وجود شبكة جزئية من $s_{k_\beta}, \beta \in B$ متقاربة من x وهذا خلاف الفرض . إذن $s_\alpha \to x$.

مبرهنة(٣-١٤):

الشرط اللازم والكافي كي يكون التطبيق f للفضاء الطبولوجي (X,τ) في الفضاء الطبولوجي (Y,τ') مستمرا في النقطة x_0 من X هو أن يقابل كل شبكة $\{s_\alpha\}, \alpha \in A$ في X متقاربة من x_0 شبكة $\{f(s_\alpha)\}, \alpha \in A$في Y متقاربة من $f(x_0)$.

البرهان:

ليكن التطبيق f مستمرا في النقطة x_0.لتكن $\{s_\alpha\}, \alpha \in A$ شبكة فيX متقاربة من x_0،ولنفرض جدلا أن الشبكة $\{f(s_\alpha)\}, \alpha \in A$، غير متقاربة من $f(x_0)$. عندئذ توجد شبكة جزئية من $\{f(s_\alpha)\}, \alpha \in A$ بحيث أن جزئية منها $f(x_0)$. لتكن هذه الشبكة الجزئية هي $\left\{f(s_{k_\beta})\right\}, \beta \in B$، . إذن هنالك جوار f لـ $f(x_0)$بحيث لا توجد فيه $\left\{f(s_{k_\beta})\right\}, \beta \in B$، بصورة متبقية.

ولما كان fمستمرا. فإن $f^{-1}(V)$ جوار لـ x_0 . وبما أن $s_\alpha \to x_0$، فإن$\{s_\alpha\}, \alpha \in A$ موجودة في $f^{-1}(V)$ بصورة متبقية. لكن $\left\{s_{k_\beta}\right\}, \beta \in B$ و شبكة جزئية من $\{s_\alpha\}, \alpha \in A$ وليست موجودة بصورة متبقية في $f^{-1}(V)$، إذن نكون قد وقعنا في تناقض.

وبالعكس ،لنفترض أنه إذا كانت $\{s_\alpha\}, \alpha \in A$. أي شبكة في X بحيث $s_\alpha \to x_0$ فإن $f(s_\alpha) \to f(x_0)$، ولنثبت أن f مستمر، لنقبل مؤقتا أن fغير مستمر ؛إذن هنالك جوار V ل$f(x_0)$ بحيث أنه لا يوجد أي جوار U لـ x_0 يحقق الشرط $f(U) \subseteq V$. لنرمز كالمعتاد ب$(T(X,x_0),\leq)$ للمجموعة الموجهة الجوارات x_0،وليكن sتطبيقا ل$T(X,x_0)$ في Xبحيث $f(s(U)) \notin V$أيا كان Uمن $T(X,x_0)$. عندئذ $s_\tau \to x_0$، في حين لا تتقارب $U \in T(X,x_0)$، $\{f(s_U)\}$من $f(x_0)$، وهذا خلاف للفرض؛ إذن f مستمر .

المرشحات وتقاربها

تعريف(٣-١٥):

لتكن X مجموعة ما . نقول عن جماعة A من المجموعات الجزئية غير الخالية من X إنها مرشحة على X إنها تحققت الشروط التالية:

(١)$A \neq \emptyset$.

(٢) أيا كان العنصران C, D من A فإن $C \cap D \in A$.

(٣) إذا كان $C \in A$ وكان $C \subseteq D$، فإن $D \in A$(أي انه اذا كانت Cعنصرا من A، فأي مجموعة جزئية من X حاويه لـ C يجب أن تنتمي الى A)

مثال:

لتكن X مجموعة ما و x عنصرا من X. لنرمز $P(X,x)$ لجماعة كل المجموعات الجزئية من X التي تحوي x. إن تشكل مرشحة على X،ذلك أن كل عنصر من $P(X,x)$غير خال. كذلك:

(١) لما كانت $\{x\} \in P(X,x)$، فإن $P(X,x) \neq \emptyset$.

(٢) أيا كان العنصران C, D من $P(X,x)$، فإن $x \in D$و $x \in C$؛إذن $x \in C \cap D$ وبالتالي فإن

$$C \cap D \in P(X,x)$$

(٣) إذا كان $C \in P(X,x)$، فإن $x \in C$. وبالتالي فإن كان $C \subseteq D$ فإن $x \in D$، أي أن $D \in P(X,x)$.

ويمكن التحقق بصورة مماثلة أنه إذا رمزنا بـ $P(X,Y)$ لجماعة كل المجموعات الجزئية من X التي تحوي المجموعة الجزئية غير الخالية Y من X، فإن $P(X,Y)$ مرشحة على X كذلك.

هذا ولو زودنا بطبولوجيا τ،فإن جماعة كل جوارات x، أي $T(X,x) = \{U \mid U \in \tau, x \in U\}$ لا تشكل مرشحة على X، ذلك أنه إذا كان U جوارا لـ x، فليس لزاما على كل مجموعة جزئية من X تحوي U أن تكون جوارا لـ x أيضا. أما إذا رمزنا ب$Q(X,x)$ لجماعة كل المجموعات الجزئية D من X بحيث تحوي Dجوارا لـ x ، فمن السهل التحقق بأن $Q(X,x)$ تشكل مرشحة على X.

مثال:

لتكن Xمجموعة غير منتهية. إن متممات كل المجموعات الجزئية المنتهية من Xتشكل مرشحة على X.وعنما تكون Xمجموعة الأعداد الطبيعيةN، فإن هذه المرشحة تعى مرشحة فريشية$Fre'chet$.

تعريف(٣-١٦):

لتكن X مجموعة ما و B جماعة غير خالية من المجموعات الجزئية غير الخالية من X. يقال عن Bإنها قاعدة لمرشحة على X إذا تحقق الشرط التالي:

أيا كان العنصران C, D من B فثمة عنصر Eمن B بحيث $E \subseteq C \cap D$.

مبرهنة(٣-١٧):

لتكن X مجموعة ما ، ولتكن B قاعدة لمرشحة على X .عندئذ تشكل المجموعة $A = \{C \mid D \subseteq C , D \in B\}$مرشحة على X. تسمى Aالمرشحة على Xالمولد بالقاعدة B.

مثال:

ليكن (X, τ) فضاء طبولوجيا و x عنصرا ما من X. من الواضح أن $T(X,x)$، أي جماعة كل جوارات العنصر x، تشكل قاعدة لمرشحة على X، وأن هذه القاعدة تولد المرشحة $P(X,x)$.

تعريف(٣-١٨):

ليكن (X, τ)فضاء طبولوجي و A مرشحة على X، وليكن x عنصرا من X. نقول إن المرشحة A تتقارب من x إذا كان كل جوار لـ x عنصرا من A.وإذا كانت A متقاربة من x،فإننا نقول إن x نهاية المرشحة A، وتكتب $A \to x$.

مبرهنة(٣-١٩):

ليكن (X, τ) فضاء طبولوجيا و A مرشحة على X بحيث $A \to x$. فإذا كانت A^* أي مرشحة على X تحوي A، فإن $A^* \to x$ كذلك.

سنورد الآن مبرهنة تبين الرابطة الوثيقة بين التقارب و المرشحات.

مبرهنة(٣-٢٠):

ليكن (X, τ) فضاء طبولوجيا و $\{s_\alpha\}, \alpha \in A$ شبكة في Xو A مرشحة على X مولدة بالشبكة

$\{s_\alpha\}, \alpha \in A$ عندئذ يكوون الشرط اللازم والكافي كي تتقارب الشبكة $\{s_\alpha\}, \alpha \in A$، من x هو أن تتقارب المرشحة A من x.

البرهان:

لنفترض أولا أن $s_\alpha \to x$.عندئذ أيا كان الجوار u لـ x ، فثمة عنصر β من A بحيث تكون D_β مجموعة جزئية من U. ولما كان U∈A، $D_\beta \subseteq U$ فكل جوار ل x عنصر من A، أي أن $A \to x$.

وبالعكس ،لنفترض الآن $A \to x$.عندئذ أيا كان الجوار U لـ x،فثمة عنصر β من A بحيث $D_\beta \subseteq U$.

وبالتالي فإذا كان $\beta \le \alpha$، فإن $s_\alpha \in U$. وهكذا فإن الشبكة $\{s_\alpha\}, \alpha \in A$ موجودة في كل جوار لـ x بصورة متبقية ، أي أن $s_\alpha \to x$.

نجد أن الشرط اللازم والكافي كي يكون (X, τ) فضاء T_2 هو أن تتقارب كل شبكة فيه من نهاية واحدة على الأكثر.

مبرهنة(٣-٢١):

الشرط اللازم والكافي كي يكون (X, τ) فضاء طبولوجيا T_2 هو أن تتقارب كل مرشحة على X من نهاية واحدة على الأكثر.

المرشحات الاعظمية

تعريف(٣-٢٢):

المرشحة الاعظمية على مجموعة X هي مرشحة $\bar{A}$ على X بحيث أنه لو كانت A أي مرشحة أدق من $\bar{A}$ $(\bar{A} \subseteq A)$ فإن $\bar{A} = A$.

مثال:

لتكن X مجموعة ما و x عنصرا ما من X. عندئذ تشكل جماعة كل المجموعات الجزئية من X والتي تحوي x مرشحة أعظمية $\bar{A}$ على X. وفي الحقيقة ، إذا إفترضنا A أي مرشحة أدق من A وكان $A \in A$. فإما أن يكون $x \in A$ أو $x \notin A$.فإذا كان $x \in A$، فإن $A \in \bar{A}$، وإذا كان $x \notin A$، فإن $x \in X - A$، الأمر الذي يترتب عليه أن $X - A \in \bar{A} \subseteq A$. بيد أنه عند ذلك يكون

$A \in \emptyset = (\mathrm{X} - \mathrm{A}) \cap \mathrm{A}$ وهذا مناقض لحقيقة كون كل عنصر من $\bar{A}$ غير خال. وبالتالي فإن xنقطة من أي عنصر من A، أي أن $A \subseteq \bar{A}$؛ ويتعين على هذا أن $\bar{A} = A$.

مبرهنة(٣-٢٣):

إن أي مرشحة على مجموعة X يجب أن تكون محتواة في مرشحة أعظمية.

البرهان:

لتكن A مرشحة على X و G جماعة كل المرشحات A' على X بحيث $A \subseteq A'$. لنعرف علاقة ترتيب جزئي $\leq$ على G بحيث يعني $A'_2 \leq A'_1$ أن $A'_1 \subseteq A'_2$، ولنفرض أن $H = \{A'_{\mathrm{k}}\}, \mathrm{k} \in \mathrm{K}$ مجموعة جزئية من G مرتبة كليا. سنبين أن المجموعة $B = \{\mathrm{B} | \mathrm{B} \in A'_{\mathrm{k}}, \mathrm{k} \in \mathrm{K}\}$ تشكل قاعدة لمرشحة A'' على X. من الواضح قبل كل شيء أن B جماعة غير خالية من المجموعات الجزئية غير الخالية، ذلك أن كلا من A_{k} جماعة غير خالية.

ليكن $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2$عنصرين من B. عندئذ $\mathrm{B}_2 \in A'_{\mathrm{k}_2}$، $\mathrm{B}_1 \in A'_{\mathrm{k}_1}$ حيث $\mathrm{k}_1, \mathrm{k}_2$ عنصران من K. ولما كانت H مرتبة كليا ، فإما أن يكون $A'_{\mathrm{k}_2} \subseteq A'_{\mathrm{k}_1}$ أو $A'_{\mathrm{k}_1} \subseteq A'_{\mathrm{k}_2}$. لنفترض مثلا أن $A'_{\mathrm{k}_2} \subseteq A'_{\mathrm{k}_1}$.عندئذ يكون كل من $\mathrm{B}_1, \mathrm{B}_2$ في A'_{k_1}؛ وبالتالي فإن $\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}_2 \in A'_{\mathrm{k}_1}$، الأمر الذي يترتب عليه $\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}_2 \in B$. لذا فإن B تشكل حقا قاعدة لمرشحة A'' على X.من الواضح أن A'' أدق من أي عنصر في H. وبالتالي فإن A'' حد أعلى في H لـ G.وهكذا نكون قد وجدنا أن لكل مجموعة جزئية من G مرتبة كليا حدا أعلى. واستنادا الى نظرية زورن Zorn(التي تنص على أنه إذا كانت $(\mathrm{G}, \leq)$ (مجموعة جزئية غير خالية مرتبة جزئيا بحيث يكون لكل مجموعة جزئية مرتبة كليا من G حدا أعلى ،فثمة عنصر أعظمي ل G في G) نستنتج أن G تحوي عنصرا أعظميا $\bar{A}$. ونكون بذلك قد برهنا على أن$\bar{A}$ مرشحة أعظمية تحوي المرشحة A على X.

مبرهنة(٣-٢٤):

لتكن $\bar{A}$ مرشحة على X مجموعة . إن الشرط اللازم و الكافي كي تكون $\bar{A}$ مرشحة أعظمية على X هو التالي: أيا كانت المجموعة الجزئية A من X، فإما أن يكون $\mathrm{A} \in \bar{A}$أو $\mathrm{X} - \mathrm{A} \in \bar{A}$.

البرهان:

لتكن $\bar{A}$ مرشحة على X تحقق الخاصة التالية:

أيا كانت المجموعة الجزئية A من X فإما $\mathrm{A} \in \bar{A}$ أو $\mathrm{X}-\mathrm{A} \in \bar{A}$ ولتكن A' مرشحة على X أدق من $\bar{A}$. كي نثبت أن $\bar{A}=A'$ يكفي أن نبين أن كل عنصر من A' يجب أن ينتمي إلى $\bar{A}$. ليكن A' عنصرا ما من A'. فإذا كان $\mathrm{A}' \in \bar{A}$ تم المطلوب. أما إذا كان $\mathrm{A}' \notin \bar{A}$ فإن $\mathrm{X}-\mathrm{A}' \in \bar{A} \subseteq A'$. ولكننا نجد عندئذ ان A' و $\mathrm{X}-\mathrm{A}$ عنصران من A'، الأمر الذي يترتب عليه ان $\mathrm{A}' \cap (\mathrm{X}-\mathrm{A}')=\emptyset$ عنصر من A'، وهذا مستحيل . وبالتالي فلابد ان يكون $\bar{A}=A'$، اي ان $\bar{A}$ مرشحة أعظمية على X.

وبالعكس ، لنفرض ان $\bar{A}$ مرشحة أعظمية على X، إلا انه توجد مجموعة جزئية A من X بحيث لا ينتمي اي من A او $\mathrm{X}-\mathrm{A}$ الى $\bar{A}$. إذا كان $\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \neq \emptyset$ ايا كان B من $\bar{A}$، فمن الممكن ان نعتمد المجموعة $B=\{\mathrm{A} \cap \mathrm{B} \mid \mathrm{B} \in \bar{A}\}$ كقاعدة لمرشحة A' ادق تماما من A (لان $\mathrm{A} \in A'$ في حين $A \notin \mathrm{A}$). اما إذا اتفق وجود عنصر B_1 من A بحيث $\mathrm{A} \cap \mathrm{B}_1=\emptyset$، فسنتبين عندئذ ان $(\mathrm{X}-\mathrm{A}) \cap \mathrm{B} \neq \emptyset$ ايا كان B من A. لنفترض ان $(\mathrm{X}-\mathrm{A}) \cap \mathrm{B}_2=\emptyset$ من اجل عنصر ما B_2 من A.

عندئذ يكون

$$\begin{aligned}\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}_2 &= \big((\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}_2) \cap \mathrm{A}\big) \cup \big((\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}_2) \cap (\mathrm{X}-\mathrm{A})\big) \\ &\subseteq (\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{A}) \cup \big(\mathrm{B}_2 \cap (\mathrm{X}-\mathrm{A})\big)=\emptyset\end{aligned}$$

وهذا مستحيل لان $\mathrm{B}_1 \cap \mathrm{B}_2$ عنصر من $\bar{A}$ ولا يمكن ان يكون خاليا. وبالتالي فإن $\{(\mathrm{X}-\mathrm{A}) \cap \mathrm{B} \mid \mathrm{B} \in \bar{A}\}$ قاعدة لمرشحة A' على أدق تماما من $\bar{A}$ (لأن A' تحوي $\mathrm{X}-\mathrm{A}$) . وهكذا نكون قد وجدنا في جميع الأحوال انه إذا قبلنا بوجود مجموعة جزئية A من X بحيث لاينتمي اي من A او $\mathrm{X}-\mathrm{A}$ الى $\bar{A}$، فإننا نجد مرشحة ادق تماما من المرشحة الأعظمية $\bar{A}$، وهذا مستحيل.

مبرهنة(٣-٢٥):

الشرط اللازم والكافي كي يكون الفضاء الطبولوجي (X,τ) متراصا هو ان تكون كل مرشحة اعظمية على X متقاربة.

البرهان :

لنفرض اولا ان الفضاء (X,τ) متراص . لتكن $\bar{A}$ مرشحة اعظمية على X، ولنقبل مؤقتا ان $\bar{A}$غ ير متقاربة . عندئذ يقابل اي عنصر xمن X جوار U_x لـ x بحيث $U_x \notin \bar{A}$. فإن $X - U_x \in \bar{A}$. من الواضح ان $U_x, x \in X$ تشكل تغطية مفتوحة لـ X وان $U_x \notin \bar{A}$. وبما ان (X,τ) متراص ، فثمة تغطية جزئية منتهية$\{U_{x_1}, \dots\dots, U_{x_n}\}$ لـ X . ولما كان $(i = 1,2,\dots,n)$ $X - U_{x_i} \in \bar{A}$، فإن $(X - U_{x_1}) \cap \dots.\cap (X - U_{x_n}) \neq \emptyset$ بسبب كون $\bar{A}$ مرشحة.

واذا لاحظنا ان:

$$\left(X - U_{x_1}\right) \cap \dots.\cap \left(X - U_{x_n}\right) = X - \left(U_{x_1} \cup \dots.\cup U_{x_n}\right) = X - X = \emptyset$$

فاننا نكون قد وقعنا في تناقض . وبالتالي فإن $\bar{A}$ لابد ان تكون متقاربة.

وبالعكس ، لنفترض ان كل مرشحة اعظمية على X متقاربة ، ولنثبت ان(X,τ) متراص. لتكن $\{F_i\}, i \in I$ اي جماعة متمركزة من المجموعات الجزئية المغلقة في X. لما كان لاي جماعة جزئية منتهية من $\{F_i\}, i \in I$ تقاطع غير خال ، فإن جماعة كل التقاطعات المنتهية لعناصر $\{F_i\}, i \in I$ تشكل مرشحة A^*على X فثمة مرشحة اعظمية $\bar{A}$على X تحوي A^*. وبالرجوع الى الفرض ، فإن A^* يجب ان تتقارب من نقطة ما a في X. سنبين الآن ان $a \in \cap_i F_i$. إذا قبلنا مؤقتا ان $a \notin \cap_i F_i$، فهنالك عنصر i_0 من Iبحيث $a \in X - F_{i_0}$. لدينا $X - F_{i_0} \in \bar{A}$ بسبب تقارب $\bar{A}$ من a ولأن $X - F_{i_0}$ جوارا ل a، كما ان $F_{i_0} \in \bar{A}$. ولما كان F_{i_0}و $X - F_{i_0}$عنصرين من $\{F_i\}, i \in I$، فإننا نستنتج ان $F_{i_0} \cap (X - F_{i_0}) \neq \emptyset$، وهذا مستحيل . إذن $a \in \cap_I F_i$، اي ان $\cap_I F_i \neq \emptyset$. فإن (X,τ) فضاء متراص .لما كانت كل مرشحة على مجموعة X محتواه في مرشحة اعظمية ،

مبرهنة(٣-٢٦):

الشرط اللازم والكافي كي يكون الفضاء الطبولوجي متراصا هو ان تكون كل مرشحة على Xمحتواه في مرشحة متقاربة.

مبرهنة(٣-٢٧) :

لتكن$\{(X_i,\tau_i)\}, i \in I$ جماعة قابلة للعد من الفضاءات الطبولوجية ، ولتكن... مرشحة على فضاء جدائها $(II_i X_i, \tau)$. لتقابل كل عنصر iمن I بالمرشحة...... (الشق (١) من المبرهنة السابقة). عندئذ يكون

الشرط اللازم والكافي كي تتقارب ....من نقطة xفي $\Pi_i X_i$ هو ان تتقارب ....من نقطة x_iفي X_iايا كان iمن I حيث ($x_i = p_i(x)$).

مبرهنة(٣-٢٨):

إذا كانت $\{(X_i, \tau_i)\}, i \in I$ جماعة قابلة للعد من الفضاءات الطبولوجية المتراصة ، فإن فضاء جدائها $(\Pi_i X_i, \tau)$ متراص ايضا.

البرهان :

لإثبات المبرهنة يكفي ان نبين بان كل مرشحة اعظمية على $\Pi_i X_i$ متقاربة لتكن A اي مرشحة اعظمية على $\Pi_i X_i$، ولتقابل كل عنصر i من I بالمرشحة $\overline{A_i} = \{p_i(A) | A \in \bar{A}\}$ على X_i. لما كان تطبيق الإسقاط p_i غامرا ايا كانت i من I، ان $\overline{A_i}$مرشحة اعظمية على X_i. وبما ان X_i فضاء متراص ايا كان i من I، تدل على ان $\overline{A_i}$ تتقارب من نقطة x_i في X_i. فإن $\bar{A}$ تتقارب من نقطة x في $\Pi_i X_i$، وبذا يتم اثبات المبرهنة.

ان مبرهنة تيخونوف صحيحة ايا كانت جماعة الفضاءات الطبولوجية، دون ان تكون هذه الجماعة قابلة للعد بالضرورة . الا ان اقتصارنا على دراسة فضاء جداء الجماعات القابلة للعد من الفضاءات الطبولوجية يفرض علينا اثبات المبرهنة في هذه الحالة.

الباب الرابع

تطبيـــــــــــقات

مثال (٤-١):

قابلية التعبير المتري تستلزم السواء

الحل :

لتكن BوA مغلقتين في الفضاء المتري (X, d) ولا تتقاطعان . بما أن B مجموعة مغلقة حينئذٍ $\forall a \in A$ ، ثمة $\varepsilon_a > 0$ بحيث أن القرص المفتوح $B(a; \varepsilon_a)$ لا يقاطع B. بنفس الحجة $\forall b \in B$ ثمة قرص مفتوح $B(b; \varepsilon_b)$ لا يقاطع A.

لنضع $V = B\left(b; \frac{\varepsilon_b}{3}\right) \cup_B$ و ، $U = B\left(a; \frac{\varepsilon_a}{3}\right) \cup_A$

من الواضح أن U وV جواران مفتوحان لـ AوB علي التوالي. لنفرض جدلاً أن $x \in U \cap V$.إذن ثمة $a \in A$،$b \in B$ بحيث أن $x \in B\left(a; \frac{\varepsilon_a}{3}\right) \cap B\left(b; \frac{\varepsilon_b}{3}\right)$، مما يترتب عليه أن

$$d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) \leq \frac{2}{3} \max\{\varepsilon_a, \varepsilon_b\}$$

و هذا يتناقض مع تعريف ε_a و ε_b. إذن U لا يقاطع V. من ثم ، فإن X فضاء سوي.

مثال (٤-٢):

ليكن X فضاء T_1. حينئذٍ يكون X سوياً إذا وفقط إذا كلما كانت A مغلقة في X ، وكان U جواراً مفتوحاً لـ U، فثمة جوار مغلق V لـ A بحيث أن U تحوي V.

الحل :

لنفرض أن X سوي. لتكن A مجموعة مغلقة في X ، و U جوار مفتوحاً لـA . إذن U^c مجموعة مغلقة لا تقاطع A . بما أن X سوي ، فثمة جوار مفتوح U_1 لـ A ، و جوار مفتوحW لـ U^c ، بحيث أن U_1 لا يقاطع W . إذن U_1 محتواة في W^c ، ولذا فإن $\overline{U_1}$ محتواة في W^c .إذن $\overline{U_1}$ جوار مغلق لـ A تحويه U .

نأتي الآن لإثبات العكس . لنفرض أن BوA مغلقتان فيX و لا تتقاطعان . من ثم ، فإن B^c جوار مفتوح لـ A ، وإذن فثمة جوار مغلق V لـ A تحويه B^c . إذا و ضعنا $V^c = W$ ، يكون لدينا جوار مفتوح لـ Aهو V^0 و جوار مفتوح لـ B و هو W ، و لا يقاطع W . إذن فضاء X سوي.

مثال (٤-٣):

إذا كان فضاء ليندیلوف و كان منتظماً ، فحينئذٍ يكون فضاء سوياً.

الحل :

لتكن A, B مجموعتين مغلقتين ، غير خاليتين ، فيX ، بحيث أن لا تقاطع B . نظراً لا نتظام X ، فيترتب أنه $a \in A$، ثمة جوار مغلق محتوي في المجموعة المفتوحةB^c . من ثم ، فإن
$G = \{G : G$ جوار مغلق لنقطة في A ، و G لا يقاطع $B\}$ غطاء لـ A. أيضاً:

$H = \{H : H$ جوار مغلق لنقطة في B بحيث ان H لا يقاطع $A\}$ غطاء لـB . يترتب علي ذلك أن :

$$\{(A \cup B)^c\} \cup \{H^0 : H \in H\} \cup \{G^0 : G \in G\}$$

غطاء مفتوح لـX . بما أن X فضاء ليندیلوف ، فثمة $G_1, G_2 \in G$ و $H_1, H_2 \in H$ بحيث أن:

$$X = \left(\bigcup_1^\infty G_n^0\right) \cup \left(\bigcup_1^\infty H_n^0\right) \cup (A \cup B)^c$$

نعرف المجموعات U_n و V_n علي النحو التالي:

$$U_n = G_n^0 - (\cup_1^n H_k)$$

$$V_n = H_n^0 - (\cup_1^n G_i)$$

الأن نلاحظ ما يلي :

(أ) U_n وV_n مفتوحتان في $X, \forall n \in N$.

(ب)إذا كانت $m \leq n$ ، حينئذٍ U_n لا تقاطع H_mو لذا فإن U_n لا يقاطع V_m .

(ج) إذا كانت $m \geq n$ ، حينئذٍ V_m لا تقاطع G_n ، ولذا فإن U_n لا تقاطع V_m .

بما أنH_k لا تقاطع $A, \forall k \in N$ محتواة في$U = U_n \cup_1^\infty$. بحجة مشابهة ، فإن B محتواة في $V = V_n \cup_1^\infty$. في ضوء الملاحظات (أ) ، (ب) و (ج) ، نري أن U جوار مفتوح لـ A وV جوار مفتوح لـ B وU لا يقاطع V . إذن X فضاء سواء.

مثال (٤-٤):

اذا كان X فضاء تبولوجياً قابلاً للعد و متصلاً ، حينئذٍ لا يكون X ناطقاً لدالة مستمرة غير ثابتة.

الحل :

لتكن f دالة مستمرة علي X فإن $f(x)$ مجموعة جزئية متصلة من R. إذن $f(x)$ فترة في R. بما أن X مجموعة قابلة للعد ،من ثم ، فإن $f(x)$ قابلة للعد ، من ثم ، فإن $f(x)$ تحوي نقطة واحدة ، اي أن f دالة ثابتة.

مثال (٤-٥):

ليكن X فضاء تبولوجيا متصلا ، ولتكن $f: X \to R$ مستمرة. لتكن $x_1, x_2 \in X$ و ليكن λ عددا حقيقيا بحيث أن $f(x_1) < \lambda < f(x_2)$. حينئذٍ توجد $x \in X$ بحيث أن $f(x) = \lambda$.

الحل :

فإن $f(x)$ فترة في R بما ان $f(x_1), f(x_2) \in f(x)$ و $f(x_1) < \lambda < f(x_2)$ ، اذن $\lambda \in f(x)$.

مثال (٤-٦):

النقطة الثابتة لبراود في البعد ١ . اذا كان $f: D^1 \to D^1$ راسما مستمرا فحينئذٍ ثمة نقطة ثابتة x لـ f.

(اي ان $f(x) = x$).

(القرص المغلق $D^1 = [-1,1]$)

الحل :

اذا كان $f(-1) = 1$ او $f(1) = 1$ ، حينئذٍ -1 او 1 نقطة ثابتة لـ f.

لنفرض أن $f(-1) \neq -1$،و$f(1) \neq 1$ يترتب علي ذلك أن $-1 < f(-1)$ او $f(1) < 1$ لنعتبر الدالة $g: D^1 \to R$ حيث $g(x) = f(x) - x, \forall x \in D^1$. بما أن D^1 فضاء متصل ، و $g(-1) >$ 0 و $g(1) < 0$ حينئذٍ ثمة $x \in D^1$ بحيث أن $g(x) = 0$ ، اي أن $f(x) = x$.

مثال (٤-٧):

اذا كانت $f: S' \to R$ دالة مستمرة ، حينئذٍ توجد $x \in S'$ بحيث أن $f(x) = f(-x)$.

الحل :

لتكن a النقطة $(0,1)$ في S' اذا كانت $f(a) = f(-a)$، فنأخذ $x = a$.

لنفرض أن $f(a) \neq f(-a)$ لنعتبر ان الدالة $g: S' \to R$ حيث $g(x) = f(x) - f(-x), \forall x \in$

S' لنلاحظ أن g دالة مستمرة ، و ان احد العددين $g(a)$ و $g(-a)$ موجب و الآخر سالب . بما أن S'

فضاء متصل ، فأن هنالك $x \in S'$ بحيث أن $g(x) = 0$ ، اي أن $f(x) = f(-x)$.

مثال (٤-٨):

الفضاء االغير متقطع (X, I) هو فضاء محكم.

الحل :

حيث أن $I = \{X, \emptyset\}$ فإن اي غطاء مفتوح للمجموعة X يجب أن يكون علي الصورة $\mathcal{G} = \{X\}$ وهو غطاء منتهي لانه لا يحتوي الا علي عنصر واحد وهو X.

مثال (٤-٩):

بين أن فضاء النقطة المستبعدة (X, E) بدون نقطة p هو فضاء محكم.

الحل :

حيث أن $E_p = \{X, U \subseteq X : p \notin U\}$ واذا كانت $\mathcal{G}$ غطاء مفتوح للمجموعة X، $p \in X$ فإنه توجد $G_{io} \in \mathcal{G}$ بحيث تكون $p \in G_{io}$ لكن المجموعة X هي المجموعة الوحيدة المفتوحة التي تحتوي p و لهذا فإن $X \in \mathcal{G}$ لكل غطاء مفتوح $\mathcal{G}$ للمجموعة X و بالتالي فإن $\{X\}$ غطاء جزئي منتهي إذاً X فضاء محكم.

مثال (٤-١٠):

كل فضاء تبولوجي منتهي يكون محكم .

الحل :

نفرض (X, τ) فضاء تبولوجي ، X مجموعة منتهية و لتكن

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$$

اذا كانت $\mathcal{G} = \{G_i : i \in N\}$ غطاء مفتوح للفضاء X فإنه لكل $x_i \in \mathrm{X}$ توجد مجموعة $G_{ij} \in \mathcal{G}$ بحيث أن $x_j \in G_{ij}$ و من هذا نجد أن :

$$x_1 \in G_{i1}, x_2 \in G_{i2}, \dots, x_n \in G_{in}$$

ومن ثم فإن $\mathrm{X} = (\mathrm{x}_1, x_2, \dots, x_n\} \subseteq G_{i1} \cup G_{i2} \cup \dots . \cup G_{in}$

اي أن $\mathcal{G}^* = \{G_{ij}\}_{j=1}^{n}$ غطاء جزئي منتهي للمجموعة X .

المراجـــــــــــــع

- مقدمة في الطبولوجيا د. محمد عبد المنعم إسماعيل
- أساسيات الطبولوجيا العامة تأليف وليام تيرفن ، ترجمة الدكتور : عطا الله ثامر العاني مدرس / قسم الرياضيات.
- طبولوجيـــا الأعداد الحقيقة الدكتور : عربي حسين الزويعي ، الدكتور : محمد جواد سعد الدين