الباب الثاني

الموثوقية

2-0 مقدمة:-

في هذا الفصل سوف يتم تناول نظرية الموثوقيه وجميع الحالات لها والصيغ الخاصه لها مع بيان جميع التوزيعات التي تستخدم في حسابها .

2-1 تعريف الموثوقية:

هي إحتمال أن يستمر جهاز في أداء عمله بصوره جيده لفتره معينةمن التشغيل ،ضمن شروط إستخدام محددة وإ ن مسأله ضمان الموثوقيه والمحافظه عليها لها جوانب مهمة عديدة ، إذ تشمل: التصميم الأساسي للجهاز، مراقبه الجودة أثناء الإنتاج ،الإختبارات الميدانية وتعديلات التصميم ، الخ...

وبما أن الموثوقيه هي إحتمال ،فإن المعالجه النظرية لها تعتمد علي قواعد علم الإحتمالات .

إن معظم الأنظمة التقنيه هي أنظمه تتألف من عناصر تعمل علي التسلسل أو التوازي أو في آن واحد علي التسلسل وعلي التوازي . فالأنظمه علي التسلسل تكون جميع عناصرها مترابطه بحيث يتوقف النظام عن العمل فقط إذا تعطلت أحد عناصرهُ .

تعريف موثوقية عنصر:

موثوقية عنصر أو نظام عند الزمن (t)، والتي سنرمز لها بالرمز $R(t)$:-

$$R(t) = p\left[T \succ t\right] \rightarrow (2-1)$$

حيث يمثل T عمر العنصر اوالنظام ونقول إن $R(t)$ وداله الموثوقيه عند الزمن T منحني هذه الداله تناقصي عن الفتره {0،∞}

$$R(0) = 1$$
$$R(\infty) = 0$$

يقول هذا التعريف إن موثوقيه عنصر هي إحتمال عدم تعطل للعنصر خلال الفترة {0، T}وهو مايكافئ القول بإن الموثوقيه هي إحتمال أن العنصر مازال يعمل حتي الزمن T .

فإذا كانت موثوقيه أحد الأنظمه عندالزمن $T\circ$

مثلا هي $R(t)=0.95$ $R(T\circ)$ يعني هذا ان 95% تقريباً من عناصر النظام ستظل تعمل حتي الزمن $T\circ$.

ويمكن التعبير عن داله الموثوقيه بدلاله الكثافه الاحتماليه $f(t)$ وداله التوزيع $F(T)$ للمتغير العشوائي T بالعلاقتين الآتيتين علي الترتيب:

$$R(t)=\int_{1}^{\infty} f1(s)ds \rightarrow (2-2)$$

$$R(t)=1-p\left[T\le t\right]=1-F1(t) \rightarrow (2-3)$$

فضلاً عن داله الموثوقيه $R(t)$ فان داله اخري –تسمي داله معدل التعطل (failure rate function) تلعب دوراً هاماً في وصف خصائص التعطل.

2-2 دالة المخاطرة:(hazard function)

تسمي أيضا معدل التعطل .

إن امكانيه تعطل آله ما في فتره زمنية محدده يمكن التعبير عنها بتابع عدم الموثوقيه.

$$\int_{t1}^{t2} f(t).dt=\int_{\infty}^{t2} f(t)dt-\int_{-\infty}^{t1} f(t)dt=F(t2)-F(t1) \rightarrow (2-4)$$

أويمكن التعبير عنه بتابع الموثوقيه :

$$\int_{t1}^{t2} f(t).dt=\int_{t1}^{\infty} f(t)dt-\int_{t2}^{\infty} f(t)dt=R(t1)-R(t1) \rightarrow (2-5)$$

ويسمي المعدل الذي تحصل عنده اعطال في فتره زمنيه محدد (t_1,t_2) بمعدل الاعطال خلال الفتره،وسنرمز ل t_1 لعدم حصول العطل في بداية الفتره وبالتالي ستكون معادله الاعطال علي الشكل:-

$$\frac{R(t1)-R(t2)}{(t2-t1).R(t1)} \rightarrow (2-6)$$

ويلاحظ تبعية معدل الاعطال للزمن فإذا رمزنا للفتره t_2 ب $t+\Delta t$ ،فتكون المعادله $(6-3)$ علي الشكل:

$$\frac{R(t)-R(t+\Delta t)}{\Delta t.R(t)} \rightarrow (2-7)$$

والمقصود بالمعدل هو عدد الاعطال في كل فتره زمنيه.

3-2 تابع Hazard:-

يعرف تابع hazard بانه حدود معدل الاعطال لفتره تقترب من الصفر اي انه تابع العطل الآني .وبالتالي يمكن كتابه معادلته علي الشكل التالي:

$$h(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{R(t)-R(t+\Delta t)}{\Delta t.Rt}=\frac{1}{R(t)}\left[\frac{dR(t)}{dt}\right]$$

$$h(t)=\frac{f(t)}{R(t)}\to(2-8)$$

لمعرفه امكانيه تعطل آله عمره t في فتره زمنيه $[t,t+\Delta t]$ فنكتب :

$$fpos=h(t).dt$$

وتبدو اهمية تابع hazard بانه يشير الي تغير في معدل العطل خلال عمر الآله،ولمعرفه تابع hazard لعينه من الآلات (N)والآله مكونه من N عنصر) سنفترض ان $Ns(t)$ هو متغير عشوائي يدل علي عدد الآلات العامله بنجاح عند الزمن t وبالتالي فإن ل $Ns(t)$ توزيع ثنائي الحد:

$$p\left[Ns(t)=n\right]=\frac{N!}{N!(N-n)!}.\left[R(t)\right]^{n}.\left[1-R(t)\right]^{N-n},n=0,1,2,...,N\to(2-9)$$

وتكون القيمه المتوقعه $Ns(t)$ هي :

$$p\left[Ns(t)=n\right]=\frac{N!}{N!(N-n)!}.\left[R(t)\right]^{n}.\left[1-R(t)\right]^{N-n},n=0,1,2,...,N$$

أو:

$$R(t)=\frac{E\left[(Ns(t)\right]}{N}=\frac{\overline{N(t)}}{N}\to(2-10)$$

وتكون الموثوقيه عند الزمن t هي الوسط الحدي لمعدل النجاح للالات عند الزمن t وبالتالي :

$$F(t)=1-R(t)=1-\frac{\overline{N}(t)}{N}=\frac{N-\overline{N}(t)}{N}\to(2-11)$$

ويكون معدل كثافه العطل يساوي:

$$f(t)=\frac{dF(t)}{dt}$$
$$=-\frac{1}{N}.\frac{d\overline{N}(t)}{dt}$$
$$=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{N}(t)-\overline{N}(t+\Delta t)}{N.\Delta t}\to(2-12)$$

امامعدل الاعطال فينتج بإستبدال Nب $\overline{N}(t)$:

$$h(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\overline{N}(t)-\overline{N}(t+\Delta t)}{\overline{N}(t).\Delta t}=\frac{N}{\overline{N}(t)}f(t)\to(2-13)$$

أو:

$$h(t)=\frac{f(t)}{R(t)}\to(2-14)$$

ويمكن ربط تابعي الموثوقية وHazard من المعادلة(2-13):

$$h(t)=\frac{-d\overline{N}(t)}{dt}.\frac{1}{\overline{N}(t)}=\frac{-d\left[Ln\overline{N}(t)\right]}{df}\to(2-14)$$

أو:

$$Ln\overline{N}(t)=-\int_0^1 h(t).df+c$$

حيث c هي ثابت التكامل وهكذا فإن:

$$\overline{N}(t)=e^c.EXP\left[-\int_0^1 h(t),df\right]$$

ويما أن $\overline{N}(0)$ يساوي Nويساوي e^c فينتج بالإحلال :

$$\overline{N}(t)=N.\exp\left[\int_0^1 h(t).df\right]$$

أو أن تابع الموثوقية سيرتبط بتابع Hazardبالمعادلة الأتية :

$$R(t)=\frac{\overline{N}(t)}{N}=\exp\left[-\int_0^1 h(t).dt\right]\to(2-15)$$

ومن المعادلتين (15-2) و(14-2)نحصل علي تابع كثافة الأعطال :

$$f(t) = h(t).\exp\left[-\int_0^1 h(t).dt \right] \rightarrow (2-16)$$

أي أن تابع كثافة العطل $f(t)$ وتابع الموثوقية $R(t)$وتابع $h(t)$ hazard مرتبط بعضها ببعض وكل منها يؤثر بالأثنين الآخرين .إن تطوير تابع hazard يشكل مدخلاً من وجهه نظر الإحتمالات الشرطيةفمثلا نرغب بإنقاذ آله ضمن الفتره $[0,t]$اي صيانتها الوقائية قبل الوصول الي إصلاحها ، فما هي الإمكانيات التي ستتعطل فيها الآله ضمن الفتره الزمنية $t,t1$؟لذلك نحن أمام إحتمالات شرطية :

$$p\left[t < t \le t / t < t \right] = \frac{p\left[\left(t < t \le t1 \right) \cap \left(t < t \right) \right]}{p(t > t)}$$

وبالتحقق:

$$(t < t \le t1) \cap (t > t) = t < t \le t1$$

فإن:

$$p\left[t < t \le t1 \right] = \frac{p(t < t \le t1)}{p(t > t)}$$
$$= \frac{F(t1) - F(t)}{1 - F(t)} = \frac{F(t1) - F(t)}{R(t)} \rightarrow (2-17)$$

باستبدال $t1$ ب: $t+\Delta t$في المعادلة(17) مقسمين كلا الطرفين علي Δtوبأخذ الحد $\Delta t \rightarrow o\bar{s}$ سنحصل على :

$$\lim_{\Delta \to 0} \frac{p\left[t > t \le t + \Delta t | t > t \right]}{\Delta t}$$
$$= \frac{1}{R(t)} \lim_{\Delta \to 0} \frac{f(t + \Delta t) - f(t)}{\Delta t}$$
$$= \frac{1}{R(t)} - \frac{df(t)}{df} = \frac{f(t)}{R(t)}$$

وسوف نستنتج أن :-

$$h(t) = \lim_{\Delta t \to 0} P\left[t < t \le t + \Delta t / t > t\right]$$

وبالتالي فإن تابع hazardهو معدل تغير الإحتمالات الشرطية للعطل والذي يعطي أن الآله تمت حمايتها حتي الزمن t .

ومن الجدير ملاحظة أن $f(t)$ هو زمن معدل التغير لإمكانيه العطل الطبيعي.

الموثوقية وتابع Hazard من اجل توابع التوزيع :

لكل تابع موثوقية تابع Hazard والعكس صحيح أي أن العلاقة بين التابعين أحادية .ولتبسيط الموضوع سوف نتناول تابعي كثافه الأعطال الأسي والطبيعي وذلك لأهميتهما.

4-2 التوزيع الطبيعي:

يأخذ منحني التوزيع الطبيعي شكل الجرس المعروف ويتمحور هذا التوزيع حول وسطه وفي هذه الحالة فإن التوزيع التراكمي:

$$F(t) = p\left[t \le t\right] = \int_{-\infty}^{t} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{T-\mu}{\sigma}\right)^2\right] dt$$

ويمكن استخدام جداول توزيع الكثافة الطبيعية لإيجاد احتمالات أي توزيع طبيعي. إن تابع الكثافة الاحتمالي Probability Density Function(PDF) يعطي بالعلاقه:

$$\theta(Z) = \frac{1}{\sqrt{2\Pi}} \exp(\frac{-Z^2}{2}), -\infty < z < \infty \to (2-18)$$

ومنه فإن تابع التوزيع التراكمي المعياري:Cumulative Distribution Function(CDF)

$$\theta(z) = \int_{-\infty}^{z} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(\frac{-T^2}{2}) dt \to (2-19)$$

ومن أجل متغير توزيع عشوائي t لوسط حسابي μ وانحراف معياري σ :

$$p(t \le t) = p\left(z \le \frac{t-\mu}{\sigma}\right) = \theta\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right) \to (2-20)$$

وتحسب θ باستخدام جداول التوزيع الطبيعية (الملحق) وبما أن تابع Hazard متذايد باستمرار ل t إذا يمكننا كتابة:

$$h(t)=\frac{f(t)}{1-(f)}$$

ومنه:

$$h'(t)=\frac{(1-F)f'+f^2}{(1-F)^2}$$

5-2 التوزيع الأسي:-

يستخدم التوزيع الأسي بكثرة في الموثوقية،ومن أجل ذلك استخدمنا المعادلات التالية والمشتقة من المعادلتين:(5،4)

$$f(t)=\frac{1}{\theta}e^{\frac{-t}{\theta}},t\geq 0$$

$$R(t)=e^{\frac{-t}{\theta}},t\geq 0$$

$$h(t)=\frac{f(t)}{F(t)}=\frac{1}{\theta}$$

6-2 تابع Hazard وعمر الآلة:

يتغير تابع Hazard خلال دورة من عمر الآلة ،حيث تنقسم هذه الدورة إلي ثلاث مراحل $\rightarrow t_2$، t_2-t_1، t_1-t_0، تمثل الفترة t_0-t_1 الأعطال المبكرة بسبب عيوب تصنيعية،وتمثل الفترة t_1، t_2 الأعطال المفاجئة بسبب الضغط المفاجئ أو الظروف الشديدة ...الخ ، وضمن هذه الفترة يكون Hazard ثابتاً . وهذا المجال يمثل أعطال الصدفة أو الأعطال المفاجئة ويصعب تحديد العطل خلال الزمن .فإذا كان تابعHazard يشكل λ عطل في وحدة الزمن:

$$h(t)=\lambda$$

حيث :

λ **ثابت .**

$$f(t) = h.\exp\left[-\int_0^t h(t).d(t)\right]$$

$$f(t) = \lambda.e^{-\lambda t} \to (2-21)$$

$$R(t) = \frac{f(t)}{h(t)} = e^{-\lambda t} \to (2-22)$$

*الفترة من t_2 وما بعد تمثل أعطال الاهتراء والتلف حيث يزداد معدل Hazard بشكل متزايد.لذلك إن أمكن ضبط وتوقع t_2 وجب استبدال الأصل قبل حدوث هذا التلف.وللتبسيط :

$$h(t) = ct \to (2-23)$$

حيث c هي ثابت موجب (للمحافظة علي التزايد) وبالتالي ستقود المعادلة (2-23) إلي :

$$f(t) = ct - \exp\left[-\int_0^t ct.dt\right] = ct.\exp\left[-\frac{ct^2}{2}\right], t \geq 0 \to (2-24)$$

$$R(t) = \frac{f(t)}{h(t)} = \exp\left[-\frac{ct^2}{2}\right] \to (2-25)$$

2-7 مقاييس الموثوقية:

إن احتمال العطل العطل هو تابع للزمن يمكن تعريفه كالتالي :

$$p(t \leq t) = F(t)......, t \geq 0 \to (2-26)$$

حيث t هي متغير عشوائي تدل علي زمن العطل ،أي أن F(t) رمز لإمكانية تعطل الآله في الزمن t ويسمي F(t) تابع عدم الموثوقية.فإذا عرفنا الموثوقية بأنها إمكانية عمل الآلة بنجاح خلال الزمن t، فنستطيع كتابة تابع الموثوقية علي الشكل التالي:

$$R(t) = 1 - F(t) = p(t > t) \to (2-27)$$

وا ٍذا رمزنا لتابع كثافة المتغير العشوائي ب:f(t) فنستطيع التعبير عن تابع الموثوقية علي الشكل التالي:

$$R(t) = 1 - F(t)$$
$$= 1 - \int_{\theta}^{t} f(t).dt = \int_{t}^{\infty} f(t).dt \rightarrow (2-28)$$

فإذا كان زمن العطل موصوفاً بتابع الكثافة الأسية فإن تابع الكثافة هو:

$$f(t) = \frac{1}{\theta} e^{\frac{-t}{\theta}} \text{.....}, t \geq 0, \theta > 0 \rightarrow (2-29)$$

لذلك يمكن إعادة صياغة تابع الموثوقية علي الشكل:

$$R(t) = \int_{t}^{\infty} \frac{1}{\theta} e^{\frac{-t}{\theta}} .dt = e^{-\frac{t}{\theta}} \text{......}, t \geq 0 \rightarrow (2-30)$$

8-2 معدل العطل :

إن إمكانية تعطل آلة ما في فترة زمنية محددة t_1، t_2 يمكن التعبير عنهما بتابع عدم الموثوقية:

العطل او توزيع العطل ومعدل العطل أومعدل أوتابع الصدفة،والتوزيعات الاكثر استخداماً والتي محل دراستنا وهي توزيعات العائله الاسية (التوزيع الطبيعي ،التوزيع الأسي ،توزيع جاما، توزيع ويبل) موضحه في الجدول ادناه:جدول رقم(1-2):

معدل الخطر $Z(t)$	تابع الموثوقية $R(t)$	توزيع العطل $f(t)$	نوع التوزيع
λ	$e^{-\lambda t}$	$\lambda e^{-\lambda t}$	الأسي
$\frac{a}{b} t^{a-1}$	$e^{-t^{\frac{a}{b}}}$	$\frac{a}{b} t^{a-1} e^{-t^{\frac{a}{b}}}$	ويبل
$\frac{t^{a-1} e^{-t/b}}{\int_{t}^{\infty} T^{a-1}.e^{-T/b} dt}$	$\frac{1}{(a-b)/b^a} \int T^{a-1} e^{-t/b} dt$	$\frac{1}{(a-b)} \left(\frac{t}{b} \right)^{a-1} e^{\frac{-t}{b}}$	غاما

الطبيعي	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{-(t-\theta)/2\sigma^2}$	$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_t^{\infty} e^{-(t-\theta)/2\sigma^2}dt$	$\frac{e^{-(t-\theta)/2\sigma^2}}{\int_t^{\infty} e^{-(t-\theta)/2\sigma^2}dt}$