بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة السودان للعلوم والتكنولوجيا

كلية التربية

قسم العلوم

شعبة الرياضيات

بحث تكميلي لنيل درجة بكلاريوس الشرف في الرياضيات

بعنوان:

إستخدام طريقة ليبانوف في إستقرار الأنظمة

Using the Libanov Method in Systems' Stabilizing .

إعداد الطلاب:

بشائر صديق احمد محمد

توسل محمد عدلان حمد

طارق البشير العبيد البشير

عبد الرحمن علي عبد الرحمن فضل المولي

اشراف الدكتور:

وليد محجـــوب

بسم الله الرحمن الرحيم

الآيـــــــة

قال تعالي:

﴿ وَقُلِ ٱعۡمَلُواْ فَسَيَرَى ٱللَّهُ عَمَلَكُمۡ وَرَسُولُهُۥ وَٱلۡمُؤۡمِنُونَۖ ﴾

صدق الله العظيـم

سورة التوبة: الاية(105)

الإهداء

الي

الذي وهب حياته تضحية

وعزماً وكفاحاً ليرى أبناءه شعلة تضيء الطريق وتنير

الدرب من بعده باذلاً قصارى جهده وعرقه ووقته من أجل ابناءه

.... أبي.

الي

التي ربت وساهرت الليالي وناضلت وكافحت من أجل أن تري

ثمرة جهدها وعصارة قلبها وفلذة كبدها أبناء ناضجين ننفع الناس

والعاملين ..... أمي.

الي

الذي وهب وقته وعقله وفكره وتجاربه وادراكه وعلمه وثقافته

وخبرته وحنكته ودرايته يغرسها غرساً جميلاً ناضراً يأمل ان

يري هذا الغرس شامخاً معلمي واساتذتي.

الي

كل طالب علم باحثاً عن الحقيقية وساعياً في أغوار الطبيعة بحثاً

عن الحقيقة وكل ما يثلج الصدر ويلبي الرغبات ويحيل الظلمات

وينير الطرقات امامهم ...

الشكر والتقدير

قال تعالي :(ولئن شكرتم لأزيدنكم)

وقال حبيب الله عليه افضل الصلاة والسلام (من لا يشكر الناس لا يشكر الله). نزف اسمى آيات الشكر والتقدير لأساتذتي الاجلاء وصوت شكر خاص استاذيالذي اشرف علي هذا البحث الا هو الدكتور / وليد محجوب وكان لنا خير معين حتى تم اخراج هذا البحث بهذه الصورة.

ونشكر كل من ساهم معنا او مد لنا يد العون.

الحمد لله الذي بيده تتم الصالحات الذي جعل الحمد ثمناً لنعمائه ومعاذاً من بلائه ووسيلاً الي جنانه وسبباً لزيادة احسانه.

الصلاة والسلام على رسوله نبي الرحمة وامام الهدي وعلى اهل بيته مصابيح الظلم وعصمة الامم.

انه لواجب الاعتراف بالجميل ورد بعضه ان نتوجه بشكرنا واعتزازنا الي اساتذتنا الاجلاء لما بذلوه من جهد وما بدوه من صبر ووقت فكانوا بحق مشرق.

والشكر لكل من قدم لنا اعانة او نصيحة.

مستخلص البحث:

تناول هذا البحث التعرف على المعادلات التفاضلية وطرق حلها، وذلك لتوضيح أن الممارسة المستمرة على المسائل تسهل من كيفية إختيار الطريقة المناسبة لحل المعادلات التفاضلية، وتعرفنا على إستقرار حلول المعادلات التفاضلية بمفهوم ليبانوف، كل ذلك تمهيد للتعرف على بعض الأنظمة وإستقرارها في مفهموم ليبانوف والتعرف على أهمية الأنظمة اللا خطية في الفيزياء والهندسة والميكانيكا وفي مطالعة الطقس وكثير من الظواهر الطبيعية.

ABSTRACT

The study tackled the differential equations and means of their solving, in order to explain that the continuing practicing on questions that facilitate selecting the appropriate means for solving the differential equations, and to uncover the stability of the solutions of differential equations in the Libanov's concept.

All this as a preamble to uncover some systems and stability in the Libanov's concept, to recognize the importance of the nonlinear systems in physics, engineering, mechanics, in weather reading and many natural phenomena.

فهرس الموضوعات

الموضـــوع		رقم الصفحة
البسملة		أ
الآية		ب
الإهداء		ج
الشكر والتقدير		د
المستخلص		هـ
Abstract		و
الفهرس		ز
الفصل الأول: خطة البحث		
(1-1)	المقدمة	1
(1-2)	مشكلة البحث	1
(1-3)	أهداف البحث	1
(1-4)	منهج البحث	2
(1-5)	أهمية البحث	2
(1-6)	مصطلحات البحث	2
الفصل الثاني: المعادلات التفاضلية		
(2-1)	المعادلة التفاضلية	4
(2-1-1)	رتبة المعادلة	4
(2-1-2)	درجة المعادلة	4
(2-2)	تشكيل المعادلة التفاضلية(تكوينها)	5
(2-3)	الحل العام والحل الخاص	7
(2-4)	المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولي	7
(2-4-1)	المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولي ذات المتحولات المنفصلة (فصل المتغيرات)	7

(2-4-2)	المعادلة التفاضلية من الرتبة الاولي المتجانسة	8
(2-4-3)	معادلات يمكن ارجاعها الى معادلة تفاضلية متجانسة	9
(2-4-4)	المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الاولي	11
(2-4-5)	معادلة داربو	14
(2-4-6)	معادلة برنولي	15
(2-4-7)	معادلة ريكارتي	15
(2-4-8)	المعادلة التفاضلية التامة	16
(2-4-9)	ارجاع بعض المعادلات التفاضلية الى معادلات تامة	18
(2-4-10)	معادلة لاجرانج	20
(2-4-11)	معادلة كليرو	21
(2-5)	المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية	21
(2-5-1)	الشكل العام للمعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية	21
(2-5-2)	المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية	25
(2-5-3)	المعادلة التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابته	26
(2-5-4)	طريقة إيجاد الحل الخاص بطرف ثاني بطريقة الثوابت	26
(2-5-5)	معادلة كوشي – أويلر الخطية من الرتبة الثانية	26
(2-5-6)	معادلة لوجندر الخطية من الرتبة الثانية	27
(2-6)	المعادلات التفاضلية من الرتبة n	29
(2-6-1)	المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n	29
(2-6-2)	المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة n ذات المعادلات الثابتة	32
الفصل الثالث: النقاط الحرجة والأنظمة اللاخطية		
(3-1)	المعادلات للانظمة اللاخطية	35
(3-2)	نماذج من المعادلات التفاضلية اللاخطية	37
(3-3)	من أهم خصائص الأنظمة اللاخطية	37
(3-4)	الصيغة العامة للمعادلات التفاضلية اللاخطية من الرتبة الثانية	38
(3-5)	بعض أنواع النقاط الحرجة	39

(3-6)	النقاط الحرجة والإستقرار في الأنظمة الخطية	43
(3-7)	معادلة لورينتز	46
(3-8)	خصائص النظم التي يحكمها الشواس	49
الفصل الرابع : الاستقرار		
(4-1)	الاستقرار	50
(4-2)	الأنظمة الخطية والاستقرار	50
(4-3)	الأنظمة غير الخطية والاستقرار	50
(4-4)	انواع الاستقرار	51
(4-5)	تعريفات الاستقرار ومفاهيمه	52
(4-6)	استقرار نظم المعادلات التفاضلية	56
(4-7)	استقرار النظم الذاتية	59
الفصل الخامس: طريقة ليبانوف		
(5-1)	طريقة ليابونوف في إستقرار الأنظمة	63
(5-2)	النقاط الحرجة في الأنظمة اللاخطية	64
(5-3)	مبرهنه ليبانوف	65
(5-4)	طريقة ليبانوف	66
(5-5)	الأنظمة الذاتية	66
(5-6)	الانظمة غير الذاتية	76
(5-7)	الخلاصة	78
(5-8)	النتائج	79
(5-9)	التوصيات	79
(5-10)	قائمة المصادر والمراجع	80

الفصـــــل الأول

خطة البحث

خطة البحث

(1-1) المقدمة:

إن مادة التحليل الرياضي هي عصب العلوم النشط وهي من أهم أفرع الرياضيات التي يعتمد عليها العلم الحديث وهي تشكل قفزة نوعية في مختلف العلوم ويجب أن لا ننسى قسم مهم من هذه المادة وهي المعادلات التفاضلية بأشكالها المختلفة وطرق حلها فهل تعرف شيئاً عن هذا الباب؟ الذي يفتح أفاق كثيرة بعده؟؟ فإن المعادلات التفاضلية هي أساس لكثير من المواد العلمية والتطبيقات الحياتية حيث تعتمد عليها الكثير من التطبيقات في الفيزياء ومختلف العلوم التطبيقية. حيث تظهر أهمية المعادلات التفاضلية غير الخطية في الفيزياء والهندسة وبالأخص الهندسة الميكانيكيه والتنبؤ بأحوال المناخ.

وددنا وضع هذا البحث في أيديكم كي تتمكنوا من التعرف على استقرار الأنظمة بمفهوم ليبانوف.

(1-2) مشكلة البحث:

توجد معادلات تفاضلية بأنواع مختلفة وأشكال كثيرة فهذا التعدد يشكل غموض في كيفية تكوينها وطرق حلها والتفريق بين أنواعها.

دراسة الاستقرار في الأنظمة باستخدام طريقة ليبانوف.

(1-3) **أهداف البحث:**

- التعرف على المعادلات التفاضلية وتكوينها وطرق حلها.

- كسب القدرة على حل المعادلات التفاضلية من الرتبة الأولى والرتبة الثانية والرتبة n.

- التعرف على استقرار الأنظمة وأنواعه.

- التعرف على طريقة ليبانوف في الاستقرار.

(1-4) **منهج البحث:**

المنهج الوصفي:

هو المنهج الذي يعتمد على دراسة الظواهر كماهي في واقعها وبعد ذلك يتم وصفها وصفاً دقيقاً يعبر عنها كيفياً وكمياً وتوضيح مقدار هذه الظواهر ودرجة ارتباطها مع الظواهر الأخرى.

(1-5) **أهمية البحث:**

- لكي يتم التعرف على مواضيع جديدة لم يتم التطرق لها من قبل.

- هذا الموضوع يشكل نواة لطالب الدراسات العليا.

(1-6) **مصطلحات البحث:**

المعادلة:

هي عبارة رياضية مؤلفة من رموز رياضية تنص على مساواة تعبرين رياضيين ويعبر عن هذه المساواة عن طريق علامة تساوي (=).

المعادلة التفاضلية:

هي معادلة تتضمن دالة مجهولة ومشتقاتها.

الإستقرار:

الاستقرار في الرياضيات هو حالة من حالات الأنظمة أو هو خاصية رياضية عادة ما تذكر إقتراناً بحل معادلة تفاضلية.

النظام:

هو مجموعة من المعادلات التفاضلية.

الفصـــــل الثاني

المعادلات التفاضلية

المعادلات التفاضلية

(2-1) المعادلة التفاضلية:

هي علاقة تساوي بين متغير مستقل وليكن x ومتغير تابع وليكن (x) y واحد أو أكثر من المشتقات التفاضلية y' , y'' أي انهما على الصورة

$$f(x , y, y' , y'' \ldots .) = 0$$

وهذه المعادلة تسمي معادلة تفاضلية عادية.

أما اذا كانت عدد المتغيرات المستقلة اكثر من واحد وليكن x،y مستقلان وكان z(x,y) متغير قابل للاشتقاق بالنسبة لكل من x, y جزئياً، سميت المعادلة المستقلة والمتغير التابع ومشتقاته الجزئية معادلة تفاضلية جزئية وهي على الصورة:

$$G\left(x , y , z \ , \frac{\partial z}{\partial x} \ , \frac{\partial z}{\partial y} \ , \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} \ldots \ldots \ldots .\right) = 0 \rightarrow \quad (2-1)$$

مثال (1):

$$1- \ y' + xy = x^2$$

$$2- \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + zxy \ \frac{\partial^2 z}{\partial xy} + \frac{\partial z}{\partial y} = x$$

(2-1-1) رتبة المعادلة:

هي رتبة اعلى معامل تفاضلي في المعادلة.

(2-1-2) درجة المعادلة:

هي درجة (قوة) اعلي عامل تفاضلي في المعادلة بشرط ان تكون جميع المعاملات التفاضلية خالية من القوي الكسرية.

مثال (2):

أوجد رتبة المعادلة:

$$y'' = (5 - zy')^{\frac{3}{2}} = 0$$

الحل:

المعادلة من الرتبة الثانية والدرجة الثانية

(2-2) تشكيل المعادلة التفاضلية(تكوينها):

إذا اعطينا الحل العام لمعادلة تفاضلية من الرتبةn لا نجد ان ذلك الحل يعتمد على n من الثوابت الاختيارية ويكون على الصورة.

$$f\ (x\ ,y\ ,c_1\ ,c_2\ \ ,\dots\dots\dots c_n) = 0$$

حيث $c_1\ ,c_2\ \ ,\dots\dots\dots c_n$ ثوابت اختيارية وللحصول على المعادلة التفاضلية للحل المعطي نجري n من المشتقات للمعادلة (2-1):

يكون لدينا (n+1) من المعادلات عبارة عن المعادلة (2-1) بالإضافة الى العمليات التفاضلية التي عددها n وبذلك يمكن حذف الثوابت الاختيارية منها نحصل على المعادلة التفاضلية المطلوبة.

مثال (3):

أوجد المعادلة التفاضلية التي حلها العام

$$y = c\sin x \quad _____(i)$$

الحل:

$$y' \ = c\cos x \ _____(ii)$$

نحذف (c) من المعادلتين وبقسمة (ii) على (i) تكون المعادلة التفاضلية هي:

$$y' = c\cos x$$

حل آخر:

يمكن لحذف c من (2) و (1) تستخدم المحددة:

$$\begin{vmatrix} y & \sin x \\ y' & \cos x \end{vmatrix} = 0 \rightarrow y\cos x - y'\sin x = 0$$

$$\therefore\ y' = y\cos x$$

مثال (4):

اوجد المعادلة التفاضلية التي حلها العام

$$y = c_1 + c_2\ x\ +\ x^2$$

الحل:

نضع الحل على الصورة $y - x^2 = c_1 + c_2\, x$

وتفاضل هذا الحل مرتين ثم تحذف c_1، c_2 فتحصل على:

$$\begin{vmatrix} y - x^2 & 1 & x \\ y' - 2x & 0 & 1 \\ y'' - 2 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

وتكون المعادلة المطلوبة هي:

$$\therefore\ y'' - 2 = 0 \rightarrow y'' = 2$$

(2-3) الحل العام والحل الخاص:

ان حل المعادلة التفاضلية هي خطوة لتركيبها وبالتالي فإن الحل العام المعادلة يجب ان يحوي عدداً من الثوابت الاختيارية مساوياً لرتبة المعادلة.

إذا اعطينا لهذه الثوابت الاختيارية قيماً معينة ينتج معنا حل نسميه حل خاص للمعادلة التفاضلية.

الحل العام لمعادلة تفاضلية من الرتبة n هو حل يحتوي على n من الثوابت وبالطبع يحقق المعادلة التفاضلية.

أما الحل الخاص هو اي حل يحقق المعادلة التفاضلية لا يشتمل على ثوابت اختيارية وقد نحصل عليه احياناً بالتعويض عن الثوابت الاختيارية في الحل العام.

(2-4) المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولي:

الشكل العام للمعادلة التفاضلية من الرتبة الاولى $f(x, y, y') = 0$ ان المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولى ذات اشكال متعددة ليست كلها قابلة للحل. نورد بعض أصناف هذه المعادلات.

(2-4-1) المعادلات التفاضلية من الرتبة الاولي ذات المتحولات المنفصلة (فصل المتغيرات):

في صنف هذه المعادلات تدرج المعادلات التي يمكن ارجاعها الى الشكل النظامي.

$$f(x)\,dx = g(y)dy$$

لحل هذا الصنف بمكاملة الطرفين وإضافة الثابت الاختياري

$$\int f(x)\,dx = \int g(y)\,dy + c$$

مثال (5):

حل المعادلة التفاضلية

$$y' = e^{x+y}$$

هذه المعادلة يمكن وضعها بالشكل

$$\frac{dy}{dx} = e^{x} \cdot e^{y}$$

أو

$$\frac{dy}{e^{y}} = e^{x}\, dx$$

$$e^{-y}\, dy = e^{x}\, dx \qquad \text{أو}$$

بمكاملة الطرفين نجد ان

$$-e^{-y} = e^{x} + c$$

(2-4-2) المعادلة التفاضلية من الرتبة الاولي المتجانسة :

وهي معادلة تفاضلية يمكن ارجاعها الى الشكل

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

هذا النوع من المعادلات يمكن ارجاعه الى معادلة تفاضلية من الرتبة الاولي ذات متحولات منفصلة وذلك بفرض

$$y = zx \qquad \text{أو} \quad z = \frac{y}{x}$$

باشتقاق الطرفين بالنسبة لـــ x نجد أن

$$y' = z'\, x + z$$

بالتعويض في المعادلة نجد ن:

$$f(z) = z + z'x$$

وبالتالي:

$$\frac{dz}{g(z)} = \frac{dx}{x}$$

وهي معادلة ذات متحولات منفصلة .

(2-4-3) معادلات يمكن ارجاعها الى معادلة تفاضلية متجانسة :

وهي المعادلات من الشكل :

$$(ax + by + c)dx = (a_1x + b_1 y + c_1)dy _____ (2-2)$$

ان العيب في هذه المعادلات هو وجود الثابتين c_1 , cنميز هنا حالتين :

$$ab_1 - a_1b \neq 0 _____ (i)$$

عندئذ المستقيمان $ax + by + c = 0$, $a_1 x + b_1 y + c$ متقاطعان في النقطة $M_0 (x_0 ، y_0)$ ننقل المحاور بالانسحاب بالمعادلات التالية :

$$x = x_0 + x$$

$$y = y_0 + y$$

فنحصل على معادلة تفاضلية جديدة يمكن ارجاعها الى معادلة متجانسة من الشكل.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{a\,x + by}{a_1\,x + b_1\,y}$$

مثال (6):

حل المعادلة التفاضلية:

$$(2x + y - 1)\, dy = (4x - y + 7)\, dx$$

ان المستقيمان:

$$2x + y - 1 = 0 \quad , \quad 4x - y + 7 = 0$$

متقاطعان في النقطة $M_0\,(-1\,,3)$ اناي

$$y_0 = 3\,, \qquad x_0 = -1$$

هي حل مشترك لجملة معادلتين. نجرى الانسحاب على المحاور بالمعادلات .

$$x = -1 + x$$

$$y = 3 + y$$

نعوض في المعادلة التفاضلية فنجد .

$$(2x + y)\, dy = (4x - y)\, dx$$

وبالتالي.

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4x - y}{2x + y}$$

نقسم بسط ومقام الطرف الثاني على x نجد ان

$$\frac{dy}{dx} = \frac{4 - \frac{y}{x}}{2 + \frac{y}{x}}$$

بفرض $y = 2\,x$ اي أن

$$y' = z'\,x + z$$

$$z'\,x + z = \frac{4 - z}{2 + z}$$

أو $$z'\,x = \frac{4 - 3z - z^2}{2 + z}$$

$$a\,b_1 - a_1\,b\ = 0_____(ii)$$

$$a\,x\ + by\ + c\ =\ 0$$

$$a_1\ x\ +\ \ b_1\,y + c_1\ = 0$$

هذا يعني ان $(a\ x + by) = a\ (a_1x + b_1y)$ اي ان المستقيمين الممثلين لهاتين المعادلتين متوازيان عندئذ نفرض .

$$a_1x + b_1\,y = z$$

فتعود المعادلة الى معادلة الى ذات متحولات منفصلة .

(2-4-4) المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الاولي :

ان الشكل العام لهذه المعادلة هو

$$\frac{dy}{dx} + p\ (x)y\ = Q\ (x)____(2-3)$$

فاذا كان $Q\ (x)$ اي الطرف الثاني للمعادلة مساوي للصفر سميت المعادلة معادلة تفاضلية خطية من الرتبة الأول متجانسة (أي بدون طرف ثاني) عندئذ تصبح المعادلة بالشكل .

$$\frac{dy}{dx} + p\ (x)y\ = 0____(2-4)$$

وهي معادلة ذات متحولات منفصلة .

$$\frac{dy}{y} = -p\ (x)dx$$

أو أن :

$$lin\ \frac{y}{c} =\ -p\ (x)dx$$

أو

$$y\ =\ c\ e^{-\int p\ (x)dx}$$

وهو الحل العام بدون طرف ثاني فإذا كان y_1 هو حل خاص للمعادلة

$$\frac{dy}{dx} + p\,(x\,)y = Q\,(x) _____ (2-5)$$

فإن الحل العام لها هو

$$y = ce^{-\int p(x)dx + y_1} _____ (2-6)$$

من أجل إيجاد حل خاص للمعادلة

$$\frac{dy}{dx} + p\,(x\,)y = Q\,(x)$$

نوجد اولاً الحل العام بدون طرف ثاني وهو

$$y = ce^{-\int p(x)dx} _____ (2-7)$$

لنعتبر الأن c ليس ثابتاً بل تابعاً لــ x عندئذ نجد بالاشتقاق أن

$$y' = c'e^{-\int p\,(x)dx} \qquad - p(x)ce^{-\int p(x)dx}$$

بالتعويض في المعادلة (2-5) نجد ان

$$c'e^{-\int p\,(x)dx} - p(x)ce^{-\int p(x)dx} + p\,(x)ce^{-\int p(x)dx} = Q(x)$$

بالتالي:

$$ce^{-\int p(x)dx} = Q(x)$$

$$c'e^{-\int p(x)dx} = Q(x)$$

$$c = \int e^{\int p\,(x)dx}\ Q(x)dx + c_1$$

بالتعويض في المعادلة (2-7) نجد ان

$$y = e^{-\int p(x)dx}\left[\int e^{p(x)dx}\ Q(x)dx + c_1\right] \ldots\ldots (2-8)$$

وهو الحل العام للمعادلة التفاضلية الخطية غير المتجانسة (2-5)

مثال (7) :

حل المعادلة التفاضلية

$$y' \sin - y\cos x = tg\ x$$

الحل:

هذه المعادلة يمكن كتابتها بالشكل

$$y' - c + gx\ .\ y = \frac{1}{\cos x}$$

وهي معادلة تفاضلية خطية غير متجانسة فيها

$$P\ (x) = -\frac{\cos x}{\sin x} \quad , \quad Q(x) = \frac{1}{\cos x}$$

والحل العام لها هو

$$y = e^{-\int p\ (x) d\ x}\left[\int e^{p(x)dx} \qquad a\ (x\ ) d\ x + c\ \right]$$

$$= e^{-\int -\frac{\cos x}{\sin x} dx}\left[\int e^{-\int \frac{\cos x}{\sin x} dx}\ \frac{1}{cos\ x}\ dx + c\ \right]$$

$$+\ lin \sin x\ \left[\int e^{-lin \sin x}\ \frac{1}{\cos x}\ d\ x + c\right]$$

$$= \sin x\ \left[\int \frac{1}{\sin x} . \frac{1}{cos\ x}\ d\ x + c\ \right]$$

$$= \sin x\ \left[\int \frac{1}{\frac{\sin x}{\cos x} . \cos^2 x}\ d\ x + c\ \right]$$

$$= \sin x\ \left[\int \frac{1}{\mathrm{tg}\ x} . sec^2\ x\ d\ x + c\ \right]$$

$$= \sin x\ [lin\ |\ tgx\ |\ + c\ ]$$

وهي معادلة برنولي

(2-4-5) معادلة داربو:

وهي معادلة يمكن اعادتها الى معادلة برنولي وهي معادلة من الشكل

$$f\left(\frac{y}{x}\right)dx + g\left(\frac{y}{x}\right)dy + kx^m(x\,dy - ydx) = 0 \quad _____ (2-9)$$

فإذا فرضنا الان متحولاً جديداً من الشكل:

$$\frac{y}{x} = u \quad \text{فان} \quad y = ux \quad \text{أو أن}$$

$$dy = ud\,x + x\,du$$

بالتعويض في المعادلة نجد ان:

$$f(u)dx + g(u)(udx + x\,du) + k\,x^m[x(ud\,x + x\,du) - uxdx] = 0$$

أو

$$\big(f(u) + ug(u)\big)dx + g(u)x\,du - kx^{m+2}\,dx$$

أو

$$\big(f(u) + u\,g(x)\big).\frac{dx}{du} + g(u)x = -kx^{m+2}$$

ومنه

$$\frac{dx}{du} + \frac{g(u)}{f(u) + ug(u)}\,x = -\frac{k}{f(u) + ug(u)}\,x^{m+2}$$

إن الشكل العام المعادلة داربو هو

$$(ax + by)dx + (a_1 x + b_1 y)dy + k\,x^m(a_2 x + b_2\,y)(xdy - ydx) = 0$$

حيث يمكن اعادة هذه المعادلة الى الشكل (2-9)

(2-4-6) **معادلة برنولي:**

الشكل العام لهذه المعادلة هو

$$y' + p\,(x).y = y^n\,Q\,(x)\ldots\ldots.(2-10)$$

هذه المعادلة تعود إلى معادلة خطية غير متجانسة نسبة اذا قسمنا الطرفين علي y^n واعتبرنا متحولاً جديداً $Z' = \frac{1}{y^{n-1}}$ فيكون

$z' = -(n-1)\frac{y'}{y^n}$ بالتعويض في المعادلة (2-10) نحصل على

$$-\frac{1}{(n-1)}z' + p\,(x)z = Q\,(x)$$

أو

$$\frac{Z'}{1-n} + p\,(x)z = Q\,(X)$$

أو

$$z' + (1-n)p(x)z = (1-n)Q(x)$$

(2-4-7) **معادلة ريكارتي:**

وهي معادلة من الشكل

$$y' + f(x)y^2 + g(x)y = h(x)_____(2-11)$$

اذا علم حل خاص y_1لهذه المعادلة نجرى التحويل

$$y = z + y_1_____(2-12)$$

فتصبح المعادلة بالشكل

$$z' + y_1' + f(x)(z^2 + 2\,y_1\ z + y_1^2) + g\,(x)(z + y_1) = h\,(x)$$

أو

$$z' + f\,(x)z^2 + g\,(x) + 2\,y_1\,f\,(x)z = 0$$

أو

$$z' + g\,(x) + 2\,y_1\ f\,(x)z = -f\,(x)z^2$$

وهي معادلة من نوع برنولي

(2-4-8) المعادلة التفاضلية التامة :

تسمي المعادلة التفاضلية

$$p\,(x\,,y)d\,x + Q\,(x\,,y\,)dy = 0 _____ (2-13)$$

تامة اذا وفقط اذا حققت الشرط التالي

$$\frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} _____ (2-14)$$

نعلم أنه اذا كانت $f(x,y)$ دالة قابلة للاشتقاق مرتين فان

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} d\,x + \frac{\partial f}{\partial y}\,d\,y$$

فان

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial\, x\, \partial y}$$

هذا يعني أنه اذا كانت المعادلة (2-13) تامة فانه توجد دالة $f(x,y)$ بحيث أن .

$$df = p(x,y)dx + Q(x,y)dy = 0$$

والحل العام لها هو

$$\frac{df}{dy} = Q \quad , \quad \frac{df}{dx} = p \qquad \text{حيث}$$

$$f(x,y) = c$$

أن

$$f(x,y) = \int p(x,y)dx + Q(y) _____ (2-15)$$

حيث تعتبر في هذا التكامل أن y هو وسيط ثابت حيث أن الدالة $\emptyset(y)$ (والتي مشتقها معدومة بالنسبة لـ x) تعين باشتقاق f جزئياً بالنسبة لـ y ووضع النتائج مساويه $Q(x,v)$ اي إنها تتعين من العلاقة .

$$\frac{\partial}{\partial y}\left[\int p(x,y)dx\right] + \emptyset(y) = Q(x,y)$$

أو

$$\emptyset(y) = o(x,y) - \frac{\partial}{\partial y}\left[\int p(x,y)dx\right]$$

إن الطرف الايمن من هذه المساواة بالتأكيد تابع لـy فقط وبالتالي بالمكاملة بالنسبة لـy نحصل على $\emptyset(y)$ بشكل مشابه كان بالإمكان حساب $f(x,y)$ من العلاقة المتشابهة وهي $f(x,y) = \int Q(x,y)dy + \varphi(x)$

حيث تعتبر في هذا التكامل أن x وسيط ثابت وتعين الدالة φ من العلاقة.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = p\ (x, y)$$

أو

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\int Q(x, y\ )dy\right] + {}^{1}/_{\varphi}\ (x) = p\ (x, y)$$

$${}^{1}/_{\varphi}\ (x) = p(x, y) - \frac{\partial}{\partial x}\left[\int o(x, y\ )dy\right]$$

أن الطرف الايمن من هذه المساواة يكون تابعاً لـx فقط بالمكاملة بالنسبة لـx نحصل على $\varphi(x)$.

(2-4-9) ارجاع بعض المعادلات التفاضلية الى معادلات تامة :

لنفرض المعادلة التفاضلية

$$p(x, y\ )dx + Q\ (x, y\ )d\ y\ = 0 _____ (2-16)$$

وأن هذه المعادلة غير تامة أي أن

$$\frac{\partial p}{\partial y} \neq \frac{\partial Q}{\partial x} _____ (2-17)$$

لنضرب طرفي هذه المعادلة بالمعامل $M(x\ , y)$ فنجد

$$M(x, y)p\ (x, y\ )dx\ + M\ (x, y)Q\ (x, y\ )dy = 0$$

حتى تكون هذه المعادلة التفاضلية تامة يجب أن تحقق الشرط

$$\frac{\partial}{\partial y}(M.p) = \frac{\partial}{\partial x}(M.Q)$$

أو

$$p\frac{\partial M}{\partial y} + M\frac{\partial p}{\partial y} = Q\frac{\partial M}{\partial x} + M\frac{\partial a}{\partial x}$$

$$p\frac{\partial M}{\partial y} - a\frac{\partial M}{\partial x} + M\left(\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial x}{\partial x}\right) = 0$$

فإذا كان

$$x = \frac{\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial \alpha}{\partial x}}{Q} _____ (2-18)$$

تابعاً لـ x فقط فإن $\frac{\partial M}{\partial y}$ أي ان Mتابع لـ x فقط يكون

$$M = e^{\int x dx} _____ (2-19)$$

و هو عامل تكميل تابع لـx فقط

اما إذا كان

$$\gamma(y) = \frac{\frac{\partial p}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x}}{p} _____ (2-20)$$

تابعاً لـ y فأن $\frac{\partial M}{\partial X} = 0$ أي أن M تابعاً لـ Y فقط يكون:

$$M = e^{\int \gamma dy} _____ (2-21)$$

(10-4-2) معادلة لاجرانج:

هي معادلة تفاضلية من النوع

$$y = x\, f\,(y) + g\,(y') \quad _____ (2-22)$$

لحل هذه المعادلة نفرض أن

$$y' = p$$

فيكون

$$y = x\, f\,(p\,) + g\,(p)$$

بالاشتقاق بالنسبة لـx نجد

$$p = f(p) + x\, f_p'(p).\frac{dp}{dx} + g_p'(p).\frac{dp}{dx}$$

أو

$$[p - f\,(p)]\frac{dx}{dp} = x\, f'(p) + g'(p)$$

أو

$$(f(p) - p)\frac{dx}{dp} + x\, f_p{}'(p) = g_p'\,(p)$$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الاولي بالنسبة لـ X فنجد عبارة x بدلالة p وهي من الشكل

$$x = c\, f(p) + Q\,(p)$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية نجد

$$y = c\, f_1(p) + Q\,(p)$$

(2-4-11) معادلة كليرو:

وهي معادلة تفاضلية من الشكل:

$$y = x\,y' + g\,(y') _____ (2-23)$$

مثل معادلة لاجرانج (وهي حالة خاصة منها) نفرض ان

$$y' = \mathrm{p}$$

ونعوض في المعادلة نشتق فنحصل على المعادلة

$$\left(x + g'(p)\right) \dots \frac{dp}{dx} = 0$$

ومنه يوجد حلين

1/ الحل العام وهو

$$\frac{dp}{dx} = 0 \;\rightarrow\; p = c$$

ويمثل حزمة من المستقيمان

2/ الحل الشاذ

$$y = xp + g(p) \quad , \quad x = -g\,(p)$$

(2-5) المعادلات التفاضلية من الرتبة الثانية:

(2-5-1) الشكل العام للمعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية:

الشكل العام للمعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية هو

$$f(x\,,y\;\;,y'\,,y'') = 0 _____ (2-24)$$

تميز منها الحالات الخاصة التالية:

i/ المعادلة التفاضلية (2-24) لا تحوى إلا y'', x وهي محلولة بالنسبة لـ y'' اي ان

$$y'' = g(x)$$

وبالتالي

$$y' = \int g(x)dx + c_1$$

$$\text{و} y = \int [\int g(x)dx + c_1]\, dx + c_2$$

ii/خفض الرتبة:

أ/ المعادلة التفاضلية (2-24) لا تحوي المتحول x والشكل العام للمعادلة هو

$$f(y, y', y'') = 0$$

عندئذ بفرض $y' = p$ نجد ان

$$y'' = \frac{dy'}{dx} = \frac{dy'}{dy}.\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$$

وبالتالي تصبح المعادلة (2-24) من الشكل

$$f\left(y, p, \frac{dp}{dy}\right) = 0$$

اي ان المعادلة التفاضلية تنقلب الى معادلة تفاضلية من الرتبة الاولي

مثال (8):

حل المعادلة التفاضلية

$$y(1-y)y'' + y'^2 = 0$$

الحل

إن هذه المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية لا تحوي المتحول x وبالتالي لحلها نفرض $y' = p$ فيكون

$$y'' = p\,\frac{dp}{dy}$$

بالتعويض في المعادلة نجد

$$y\,(1-y)p\frac{dp}{dy} + p^2 = 0$$

$$p\left[y(1-y)\frac{dp}{dy} + p\right] = 0$$

ومنه إما $p = 0$ اي $y' = 0$

أو

$$y\,(1-y)\frac{dp}{dy} + p = 0$$

$$\frac{dp}{p} = \frac{dy}{y(y-1)}$$

وهي معادلة تفاضلية ذات $y\,(y-1)$ متحولات منفصلة

أو

$$\frac{dp}{p} = \left(\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y}\right) dy$$

$$ln\ \frac{p}{c} = ln(y-1) - ln\, y$$

$$\ln\frac{p}{c} = ln\left(\frac{y-1}{y}\right) \quad , \quad p = c\left(\frac{y-1}{y}\right)$$

لكن $p = \frac{dy}{dx}$ وبالتالي

$$\frac{dy}{dx} = c\left(\frac{y-1}{y}\right) \quad , \quad \frac{ydy}{y-1} = cdx$$

$$y + ln\,(y-1) = cx$$

ب/ المعادلة التفاضلية لا تحوي y اي ان الشكل العام للمعادلة وهو :

$$f(x, y'\ , y'') = 0 _____ (2-25)$$

ايضاً في هذه الحالة نفرض $y' = p$ فيكون

$$y'' = \frac{dp}{dx}$$

بالتعويض في المعادلة (2) فإنها تصبح من الشكل

$$f\left(x\ , p\ , \frac{dp}{dx}\right) = 0$$

وهي معادلة تفاضلية من الرتبة الاولي

(2-5-2) المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الثانية :

وهي معادلة على الشكل

$$y'' + A\,(x)y' + B\,(x)y = Q\,(x)$$

اذا كان $Q(x) = 0$ سميت معادلة متجانسة او بدون طرف ثاني اما اذا كان $Q(x) \neq 0$ سميت معادلة تامة او غير متجانسة او بطرف ثاني .

(2-5-2-1) خواص المعادلة التفاضلية من الرتبة الثانية:

i/ إذا كان y_1 حلاً عاماً للمعادلة بدون طرف ثاني وكان y_2 حلاً بطرف ثاني فان

$$y = y_1 + y_2$$

حلاً عاماً للمعادلة

ii/ اذا كان y_1, y_2 حلين خاصين بدون طرف ثاني مستقلين عن بعضها البعض اي اذا كان معين رونسكي.

لهذين الحلين هو

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix}$$

مغاير للصفر

فإن

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2$$

حل عام بدون طرف ثاني للمعادلة

iii/ إذا كان y حلاً خاصاً للمعادلة الخطية (2-24) بدون طرف فان التحويل $y=$ zy_1

يحول المعادلة (2-24) الى معادلة تفاضلية من الرتبة الاولي

(2-5-3) المعادلة التفاضلية الخطية ذات المعاملات الثابته:

شكلها العام

$$y'' + a\,y' + by = Q(x)$$

حيث $a\,,\,b$ ثوابت

(2-5-4) طريقة إيجاد الحل الخاص بطرف ثاني بطريقة الثوابت:

يفرض ان المعادلة الخطية هي من الشكل

$$y'' + A\,(x)y' + B\,(x)y = Q(x)$$

وكان y_1, y_2 حلين خاصين مختلفين بدون طرف فإن الحل العام بدون طرف هو :

$$y = c_1y_1 + c_2y_2$$

عندئذ لإجاد الحل الخاص بطرف ثاني للمعادلة التفاضلية تعتمد طريقة تغيير الثوابت حيث تعتبر الثابتين $c_2\,,\,c_1$ تابعين (x) فنحصل عندئذ على

$$y = c_1y_1 + c_2y_2$$

(2-5-5) معادلة كوشي – أويلر الخطية من الرتبة الثانية:

الشكل العام لهذه المعادلة هو

$$x^2y'' + bxy' + cy = Q\,(x)_____(2-26)$$

لحل هذه المعادلة نجري التغير التالي

$$x = e^t$$

فان

$$\begin{cases} y' = \dfrac{dy}{dt} \cdot \dfrac{dt}{dx} = \dfrac{1}{x}\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{1}{x}\, y \\ y'' = \dfrac{1}{x^2}\dfrac{dy}{dt} + \dfrac{1}{x^2}\dfrac{d^2y}{dt^2}\ (y'' - y') \end{cases}$$

$$y'' = \frac{d^2y}{dt} \quad , \quad y' = \frac{dy}{dt}$$

(2-5-6) معادلة لوجندر الخطية من الرتبة الثانية:

الشكل العام لهذه المعادلة هو

$$(\alpha\, x + B)^2 y'' + b\,(\alpha\, x + B\,)y' + cy = Q\,(x) \quad _____ (2-27)$$

لحل هذه المعادلة نفرض $\alpha\, x + \beta = e^t$

فيكون:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{\alpha} e^t = \frac{1}{\alpha}\,(\alpha\,(x + \beta))$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{\alpha}{\alpha x + \beta}$$

$$y' = \frac{dy}{dt} \cdot \frac{dt}{dx} = \frac{\alpha}{an + B} y'$$

$$y'' = \frac{-\alpha^2}{(\alpha x + \beta)^2} y' + \frac{\alpha^2}{(\alpha x + \beta)} y'' = \frac{\alpha}{(\alpha x + \beta)} (y'' - y')$$

حيث:

$$y' = \frac{dy}{dt} \quad , y'' = \frac{d^2 y}{d^2 t}$$

بالتعويض في المعادلة التفاضلية (2-27) نحصل على معادلة تفاضلية لمعاملات ثابته المتحول فيها t.

(2-6) المعادلات التفاضلية من الرتبة n:

الشكل العام للمعادلة التفاضلية من الرتبة n هو

$$f(x, y, y', \dots y^n) = 0 \quad _____ (2-28)$$

نميز منها الحالات التالية

i/ المعادلة التفاضلية (2-28) لا تحوي الا $y^{(n)}$ و x اي ان المعادلة محلوله بالنسبة لـــ $y^{(n)}$ وهو من الشكل

$$y^{(n)} = g(x) _____ (2-29)$$

ويكون الحل العام لهذه المعادلة هو

$$y = \int (\dots (\int (\int g(x)dx + c_1)\ dx + c_2) + \cdots)\ dx + c_n$$

اي بالتكامل n مرة نحصل على y

ii/ خفض الرتبة:

المعادلة التفاضلية (2-28) لا تحوي المتحول x والشكل العام للمعادلة هو

$$f(x\ ,\ y' \dots \dots ,y^n) \quad = 0 ___ (2-30)$$

iii/ المعادلة التفاضلية (2-28) لا تحوي y ولا المشتقات $y^{(k-1)} , \dots . , y'$ اي المعادلة من الشكل .

$$f(x\ ,\ y^k \dots \dots ,y^n) \quad = 0$$

iv/ المعادلة التفاضلية (2-28) متجانسة بالنسبة لـــ $y\ , y', \dots . y^n$ وبالتالي امكن تخفيض الرتبة k مرة .

v/ المعادلة المتجانسة بالنسبة لـــ $x\ , y\ , y', \dots . y^n$.

(2-6-1) المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n:

الشكل العام للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n هو

$$y^{(n)} + A_1(x)y^{(n-1)} + A_2(x)y^{(n-2)} + \dots + A_{n-1}(x)y' + A_n(x)y = Q(x) _____ (2-31)$$

اذا كان $Q(x) = 0$ سميت المعادلة التفاضلية متجانسة او بدون طرف ثاني أما اذا كان $Q\ (x) \neq 0$ تسمي المعادلة عندئذ غير متجانسة أو بطرف ثاني .

(2-6-1-1) خواص المعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة n :

i/ إذا كان y_1 حلا عاما لـــ (2-31) بدون طرف ثاني و y_2 حلا خاصا بطرف ثاني فإن

$$y = y_1 + y_2$$

حل عام للمعادلة (2-31) بطرف ثاني

ii/ اذا كانت $y_1, y_2 \dots \dots y_n$ حلول خاصة للمعادلة (2-31) بدون طرف وكانت مستقلة عن بعضها البعض اذا كان معين رونسكي لهذه الحلول هو

$$\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & y_n \\ y_1' & y_2' & y_n' \\ y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & y_n^{(n-1)} \end{vmatrix} ____(2-32)$$

مغاير للصفر

فان $y = c_1 y_1 + c_2 y_2 \dots \dots \dots \dots c_n y_n$

حل عام للمعادلة (2-31) بدون طرف ثاني

iii/ اذا كان y_1 حلاً للمعادلة (2-31) بدون طرف فان التحويل $y = zy_1$ يحول المعادلة (2-31) الى معادلة تفاضلية من الرتبة (n-1) (اي تنخفض رتبة المعادلة مرة واحدة).

(2-6-2) المعادلات التفاضلية الخطية من الرتبة n ذات المعادلات الثابتة:

الشكل العام لهذه المعادلة هو

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots . + a_{n-1} y' + a_n y = Q(x) _____(2-33)$$

حيث $a_i \in R$ (بالحالة العامة $a_i \in C$)

لحل هذه المعادلة توجد الحل العام بدون طرف وحل خاص بطرف ويكون مجموع الحلين هو الحل العام للمعادلة (2-33).

أ/ حل المعادلة بدون طرف: اي نحل المعادلة:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots . + a_{n-1} y' + a_n\, y = 0 _____ (2-34)$$

حل هذه المعادلة نفتش عن حلول من الشكل

$$y\, e^{px}$$

بالتعويض في المعادلة (34-2) نجد

$$\emptyset(p) = p^n + a_1 \emptyset^{n-1} + \cdots + a_{n-1}\, p + a_n = 0 _____ (2-35)$$

تسمي هذه المعادلة المميزة للمعادلة (34-2) وهي معادلة من الدرجة (n) بالنسبة لـــp يوجد لها n جذور في c ولتكن $p_1 , p_2 , \ldots\ldots , p_n$.

ب/ ايجاد الحل بطرف ثاني:

في الحالة العامة نوجد الحل الخاص بطرف ثاني للمعادلة من الشكل (34-2) بطريقة تغيير الثوابت.

الطريقة الأولي: تغيير الثوابت:

لنفرض $y_1, y_2 \ldots\ldots y_n$ هي الحلول بدون طرف للمعادلة التفاضلية المتجانسة بمعاملات ثانية فاذا فرضنا الثوابت $c_1, \ldots\ldots, c_n$ الموجودة في عبارة الحل العام بدون طرف هي دوال تابعة للمتحول x واعتبرنا ان :-

$$c'_1 y_1 + c'_2 y_2 + \cdots + c'_n y_n = 0$$

$$c'_1 y'_1 + c'_2 y'_2 + \cdots + c'_n y'_n = 0$$

$$c'_1 y_1^{(n-2)} + c'_2 y_2^{(n-2)} + \cdots + c'_n y_n^{(n-2)} = 0$$

نجد بعد التعويض في المعادلة التفاضلية بطرف ثاني المعادلة

$$c_1' y_1^{(n-1)} + c_2' y_2^{(n-1)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-2)} = Q(X)$$

وبذلك نحصل على جملة n معادلة لـــn مجهول $(c_1' , c_2' , \ldots\ldots, c_n')$ هذه الجملة هي:

$$\begin{cases} c_1' y_1 + c_2' y_2 + \cdots c_n' y_n = 0 \\ c_1' y_1' + c_2' y_2' + \cdots c_n' y_n' = 0 \\ c_1' y_1^{(n-2)} + c_2' y_2^{(n-2)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-2)} = 0 \end{cases}$$

$$c_1' y_1^{(n-1)} + c_2' y_2^{(n-1)} + \cdots + c_n' y_n^{(n-1)} = Q(x)$$

لحل هذه الجملة فنجد

$$c_1' = g_1(x), c_2' = g_2(x), \ldots\ldots, c_n' = g_n(x)$$

متكاملة هذه المعادلات نجد

$$c_1 = c_1(x) , c_2 = c_2(x) \ldots\ldots, c_n = c_n(x)$$

بالتعويض عن $c_1, \ldots\ldots, c_n$ عبارة لحل العام بدون طرف نحصل على الحل الخاص بطرف ثاني للمعادلات التفاضلية غير المتجانسة .

الفصـــل الثالث

النقاط الحرجة والأنظمة اللاخطية

(1-3) المعادلات للانظمة اللاخطية:

لما للانظمة اللاخطية من أهمية في الفيزياء والهندسة وبالأخص هندسة الميكانيكا والكهرباء كذلك في مطالعة الطقس والنمو السكاني والإدارة والإقتصاد وكثير من الظواهر الطبيعية.

نسعى في نظرية المعادلات التفاضلية للحصول على أجوبة المعادلات بطرق تحليلية وأجوبة دقيقة بصورة دوال وتوابع صريحة، نواجه صعوبات في الحصول على هذا النوع من الأجوبة، كذلك نصل لبعض أجوبة المعادلات التفاضلية على شكل متسلسلات. احياناً نلجأ لطرق بعيدة كل البعد عن الطرق الكلاسيكية ونصل لأجوبة من خلال هذا النوع من المعادلة، نصل لجواب خاص لتلك المعادلة ثم نعممه على المعادلة، في نظرية المعادلات التفاضلية اللاخطية الطريقة تختلف عن طريقة المعادلات التفاضلية الخطية ترجع هذه الطريقة الي عالم الرياضيات الفرنسيهنري بوانكاريه الذي طالع هذا النوع من المعادلات اللاخطية في مطالعة الميكانيكي السماوي.

بدأت دراسة المعادلات التفاضلية الخطية مطلع القرن الثامن عشر، لكن لا يمكن تحديد فترة ظهور ومطالعة المعادلات التفاضلية اللاخطية في هذا البحث سأبحث المعادلات والأنظمة اللاخطية. لماذا المعادلات التفاضلية اللاخطية؟ كثير من الظواهر والانظمة الفيزيائية لا يمكن وصفها بالمعادلات التفاضلية الخطية

وتخضع للمعادلات التفاضلية اللاخطية اكثر المعادلات اللاخطية يمكن تقريبها لمعادلات تفاضلية خطية. وذلك من خلال حذف بغض المتغيرات أو تقريب بعض القيم لمقادير أخري للحصول على معادلة خطية يمكن حلها بطرق بسيطة، لكن سنصل الى جواب فيه نسبة من الخطأ وللحصول على جواب أدق يجب الخضوع للمعادلة التفاضلية اللاخطية وحلها. على سبيل المثال حركة البندول:

معادلة حركة البندول هي

$$\frac{d^2\,\theta}{dt^2} + \frac{g}{a}\sin\theta = 0$$

هذه معادلة تفاضلية غير خطية ومن الصعب حلها بالطرق العادية، لكن إذا فرضنا زاوية لتذبذب قليلة جداً

$$sin\,\theta \approx \theta$$

تصبح المعادلة بهذه الصورة

$$\frac{d^2\ \theta}{dt^2} + \frac{g}{a}\,\theta = 0$$

وهي معادلة تفاضلية عادية يمكن حلها بالطرق التقليدية

النظام اللاخطي هو النظام الذي معادلته لاخطية، هذه بعض النماذج من المعادلات الجبرية اللاخطية:

$$y = \sin x$$

$$y = x^2$$

$$Z = x^2 + y^2$$

(3-2) نماذج من المعادلات التفاضلية اللاخطية:

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + x = A\,sinwt$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + (x^2 - 1)\frac{dx}{dt} + x = 0$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{dx}{dt} + x + x^3 = 0$$

(3-3) من أهم خصائص الأنظمة اللاخطية:

هي عدم إمكان إستعمال مبدأ التراكب في هذه الأنظمة، أي إذا حصلنا على جوابين أو أكثر لنظام لا خطي مجموع هذه الأجوبة ليس جواب لهذا النظام اللاخطي، بينما في الأنظمة الخطية مجموعة الأجوبة هو جواب لذلك النظام الخطي.

(3-4) الصيغة العامة للمعادلات التفاضلية اللاخطية من الرتبة الثانية:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = f(x, \frac{dx}{dt})$$

لو فوضنا جسم كتلته واحد، تعبر هذه المعادلة عن القوة المؤثرة على هذا الجسم و $f(x, \frac{dx}{dt})$ دالة المتغيرات فيها الفاصلة x والسرعة $\frac{dx}{dt}$.

نفرض:

$$y = \frac{dx}{dt}$$

تصبح هذه المعادلة منظومة معادلاتية بهذا الشكل:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = y \\ \frac{dy}{dt} = f(x,y) \end{cases}$$

جواب هذه المنظومة الدوال x (t) , y (t)

الصيغة العامة لهذه المعادلة هي

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x,y) \end{cases}$$

G,F دوال متصلة، هذه الدوال مستقلة عن المتغير t .

إذا كان $\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases}$ جواب هذه المنظومة لكل عدد ثابت مثلC .

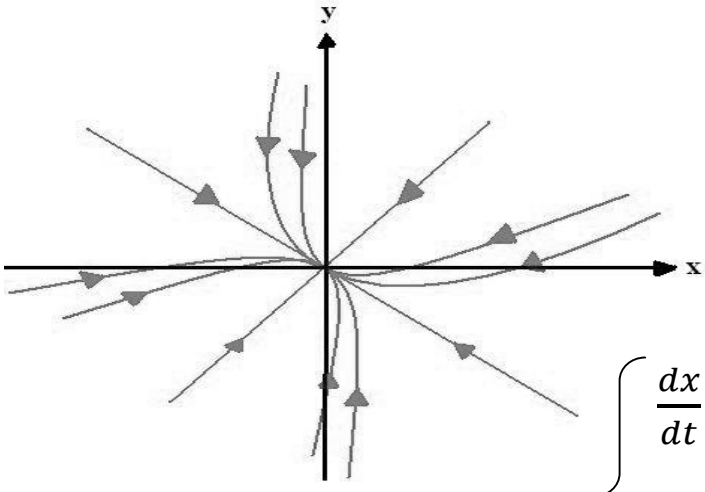
كذلك $\begin{cases} x = x(t + c) \\ y = y(t + c) \end{cases}$ هو جواب لهذه المنظومة .

تعتبر النقطة (x,y) نقطة حرجة إذا كان $f\ (x, y) = 0$ و $G(x, y) = 0$ يقع جواب هذه المعادلات على مسير بينما لا تقع النقاط الحرجة على أي مسير. تعبر النقاط الحرجة في الأنظمة الديناميكية عن حالة إستقرار المنظومة في تلك النقطة. ينتج عن حل المنظومة المعادلاتية أنواع النقاط الحرجة.

(3-5) بعض أنواع النقاط الحرجة:

(3-5-1) النقطة العقدية:

m_1 و m_2 أعداد حقيقية مختلفة علامتها مساوي (نقطة عقدية) كما بالشكل أدناه

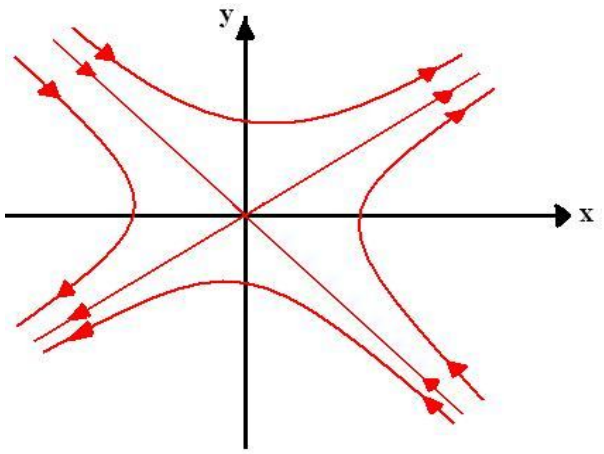


المثال (9):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = x \\ \frac{dy}{dt} = -x + 2y \end{cases}$$

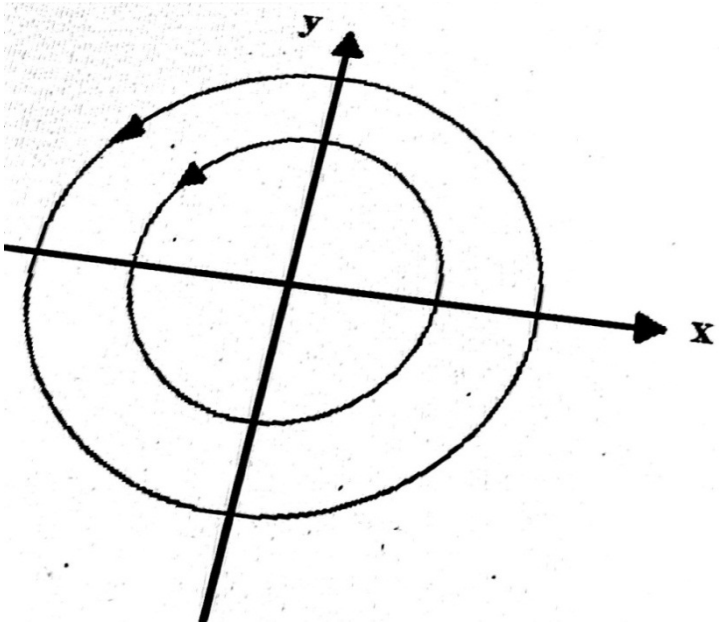
(3-5-2) النقطة السرجية:

m_1 و m_2 أعداد حقيقية مختلفة، علامتها مختلفة (نقطة سرجية) يمكن تمثيلها بالشكل:



(3-5-3) النقاط المركزية:

m_1، m_2 أعداد مركبة بهذا الشكل ib فإن النقطة الحرجة مركزية يمكن رسمها كما بالشكل أدناه



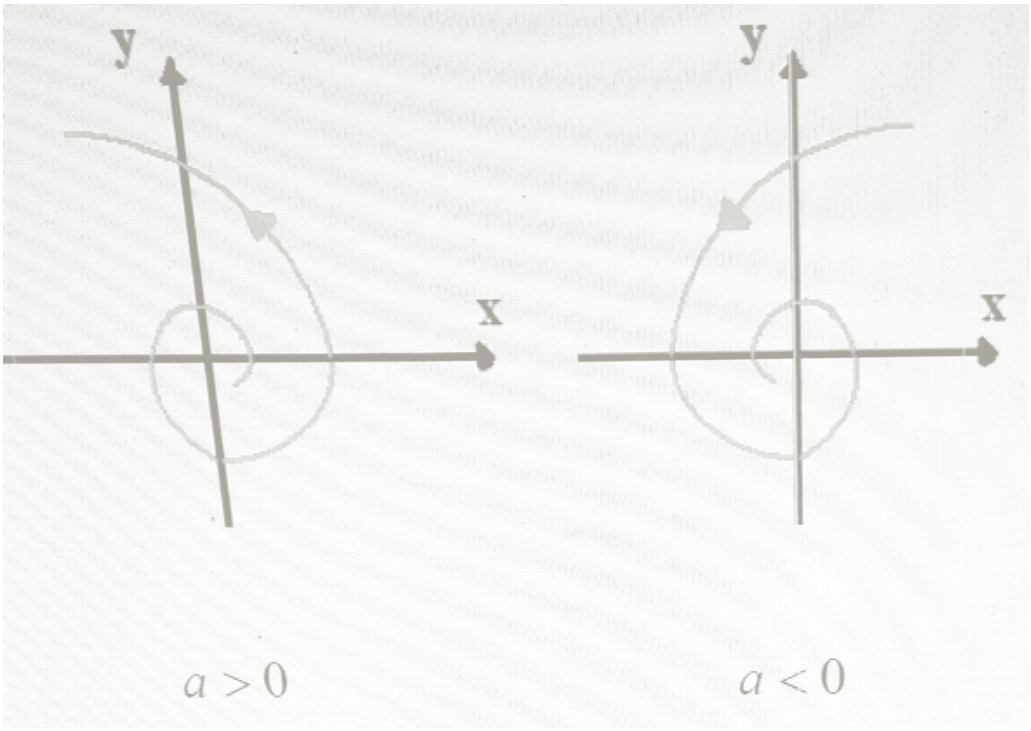
مثال (10):

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = -y \\ \dfrac{dy}{dt} = x \end{cases}$$

النقطة الحرجة لهذه المنظومة مبدأ الإحداثي وجواب المعادلة علي مسير دوائر حول هذه النقطة.

(3-5-4) النقاط الحلزونية:

الحالة الثالثة m_1 و m_2 أعداد مركبة بهذا الشكل u+iv (نقطة حلزونية) كما بالشكل أدناه



المثال (11):

نصل هذه المنظومة المعادلاتية من خلال الإحداثيات القطبية $\begin{cases} \frac{dx}{dt} = ax - y \\ \frac{dy}{dt} = x + ay \end{cases}$

إلى هذه المعادلة

$$\frac{dr}{d\theta} = ar$$

وجوابها $r = ce^{a}$ وهو عبارة عن مسير حلزوني

(3-6) النقاط الحرجة والإستقرار في الأنظمة الخطية:

يمكن مطالعة الأنظمة اللاخطية التي هي بصورة

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x,y) \\ \frac{dx}{dt} = G(x,y) \end{cases}$$

من خلال منظومة خطية، على سبيل المثال يمكن مطالعة هذه المنظومة الخطية .

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1 x + b_1 y \\ \frac{dx}{dt} = a_2 x + b_2 y \end{cases}$$

التي مبدأ الإحداثي فيها *(0.0)* نقطة حرجة نفرض .

$$\begin{pmatrix} a1 & b1 \\ a2 & b2 \end{pmatrix} \neq 0$$

الجواب المخالف للصفر لهذه المنظومة هو:

$$\begin{cases} x = A\, e^m \\ y = B e^m \end{cases}$$

M يمثل جواب هذه المعادلة

$$M^2 - (a_1+b_2)\, m + (a_1 b_2 - a_1 b_1) = 0$$

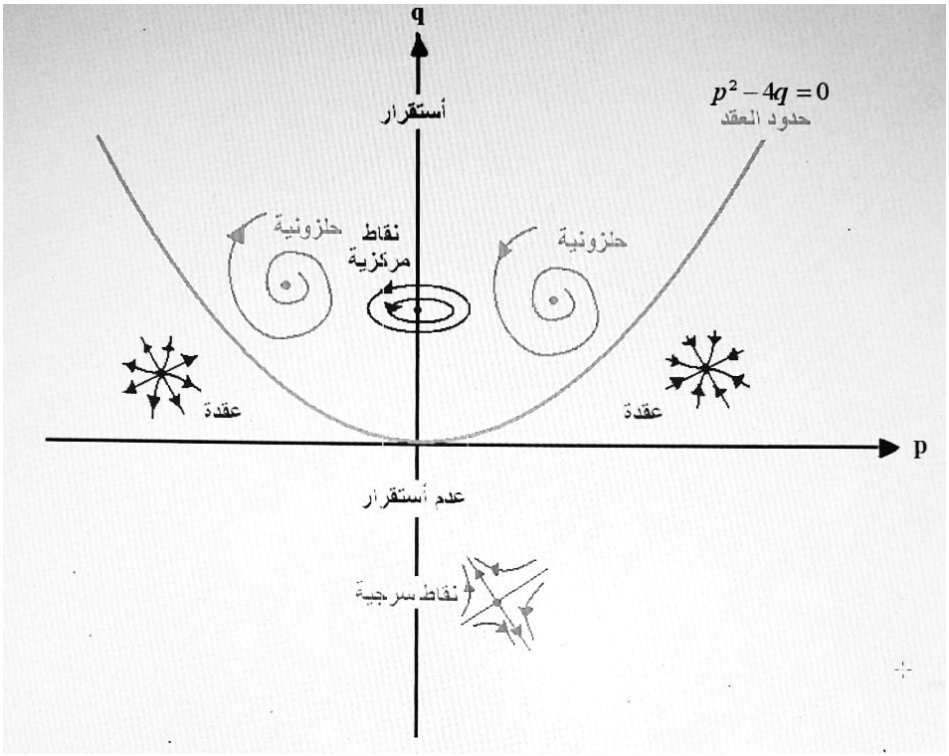
لو كتبنا جواب المعادلة

$$M^2- (a_1+b_2)\, m+(a_1b_2-a_2b_1)=0$$

بهذه الصورة

$$m_1 \& \ m_2= \frac{-p\pm\sqrt{p^2-4q}}{2}$$

ورسمنا حالات m_1 و m_2 على احداثي يكون فيه المحور الأفقي p والقائم q سنلاحظ حالات الإستقرار وعدم الإستقرار والنقاط الحرجة لهذه المنظومة كما في الشكل .



مثال (12):

هذه المنظومة اللاخطية

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + 3y + xy \\ \frac{dy}{dt} = -x + y - 2xy^2 \end{cases}$$

المنظومة الخطية المرتبطة بهذه المنظومة هي:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = -2x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = -x + y \end{cases}$$

معادلة جذور هذه المنظومة $m^2 + m + 1 = 0$ وجذورها هي:

$$m_1 \& m_2 = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}$$

هذه الأعداد مركبة بهذا الشكل $u + vi$ لذلك هي من النوع الثالث، والنقطة الحرجة (0,0) هي نقطة حلزونية للمنظومة الخطية، واستناداً على مبرهنة بوانكاريه النقطة الحرجة للمنظومة اللاخطية في هذا المثال هي كذلك من نوع النقطة الحلزونية.

(3-7) معادلة لورينتز:

أول من بحث في الشواس أو الفوضى عالم الارصاد، ادوارد لورينتز (عام 1960م. تعتبر معادلات لورينتز من المعادلات المهمة في نظرية الشواس، توصل لورينتر لهذه المعادلات عدد مطالعته حركة الموائع هذه المعادلات عبارة عن منظومة معادلاتها بهذا الشكل.

$$\frac{dx}{dt} = a\,(y-x)$$

$$\frac{dx}{dt} = x(b-z)-y$$

$$\frac{dx}{dt} = x\,y - c\,z$$

في هذه المعادلات a و b وc ثوابت قيمة كل منها اكبر من الصفر ، وهي a عدد برانتل و b عدد رابلي و c نسبة الطول الى العرض، جميع هذه الأعداد اعداد لا بعدية، لاحظ لورينتز فوضى وعدم انتظام في الأجوبة الحاصلة من هذه المعادلات لمقادير مختلفة من a و b و c في هذه المعادلات يوجد نوع من التناظر بحيث يمكن تبديل علامة كل من X و Y و Z . يمكن حل هذه المنظومة المعادلاتيه بطرق عددية كطريقة اوبلد مثلاً.

الحركة المتشابهة واللادورية سماها لورينتز الجاذب كثير من الناجمة عنها تعرف بالجوانب الغربية الجواب عبارة عن مجموعة من المسارات نهوي أو تميل لنقطة واحدة وثابته والجوانب الغربية هي تلك التي فيها الحوادث حساسة جداً بالشرائط البدئيه احد صنع العباده الشهيرة للورينتر والتي تعرف بتأثير الفراشة هي رفة جناحي فراشة في البرازيل قد تسبب اعصار في تكساس.

الجواذب الغربية هي السلوك الدوري الذي برزه النظام نتيجة المعادلات اللاخطية التي تحكمه الحساسية الشديدة بالنسبة للشرائط البدائية التي تحول دون معرفة مستقبل النظام بصورة دقيقة جميع التغيرات التي تطرأ على النظام من الوهلة الأولى تلقي تصور العشوائية في الأذهان لكن بمرور الزمن نرى نوع من النظم في صلب هذه العشوائية

على سبيل المثال مجموعة من الطيور تشكل نظام عشوائي ومضطرب تحكمه هذه القوانين:

- حركة الطيور غير تصادميه.
- حركة الطيور قريبة من بعضها.
- الطيور لا تبتعد كثيراً عن بعضها.

هذا النظام عشوائي ومضطرب ولا يمكن تعين مستقبله، ولا يمكن تعين موضع كل طير من الطيور لكن بحكمة نظام خاص.

تسبب الشرائط البدائيه حتى وان كانت بسيطة جداً في اكثر الأنظمة اللاخطية تغيرات شديدة على النظام ومستقبله في فترة زمنية ربما تكون طويلة هذه بعض النماذج التي تحدث لنا، حالات بسيطة ونتائج غير متوقعه.

- تأخير ثواني عن الباص يؤدي إلى التأخير عن السفر بالطائرة وإلغاء السفرة ونتائجها.
- جواب سؤال واحد خطأ يؤدي إلى هبوط المعدل وعدم إمكان القبول في الفرع الذي ترغبه في الجامعة والدخول بفرع آخر لا ترغبه أو حتى الحرمان من تحميل الدراسه
- مبلغ قليل من المال لا تعطيه لأخ وصديق هو بحاجته يؤدي إلى قطع العلاقة بيننا وبينه ونتحمل عواقب شديدة نتيجة هذا البخل.
- جرح بسيط في بدنك يؤدي إلى حالات صحية سيئة تؤدي إلى إعاقة أو وفاة لا سامح الله.
- شرخ بسيط في ناحية على جناح طائرة يؤدي إلى كسر في جناح الطائرة وتحطيمها.

- فقاعات صغيرة جداً من الهواء تنفجر على جدار سفينة أو مروحة سفينة في البحر تؤدي إلى كسر في تلك النقطة وإغراق السفينة.

حالات أخرى عديدة لا حصر لها من هذه النماذج البسيطة ذات النتائج الشديدة جداً

الأنظمة العشوائيه، حساسة للغاية بالشرائط البدائية وأي تغيير ولو بسيط أثره شديد جداً على نتائج النظام ومستقبله. أحيانا نلاحظ هذا السلوك العشوائي حتى على النظم القطعية التي شرائطها البدائية معينة وغير عشوائية.

(8-3) خصائص النظم التي يحكمها الشواس:

- التشابه الذاتي:

الجزء يشبه الكل.

- تأثير الفراشة:

تغييرات جزئية بسيطة في بادي الأمر ينتج عنها تغيرات شديدة في النهايه.

- محدود
- حساس جداً لقيم الثوابت.
- الجواذب الغربيه:

هي نماذج غير منتظمة ومضطربة من ناحية وذات نظم خاص من ناحية اخرى، كل مسير فيها لا يتكرر ثانيه.

في الأنظمة الخطية يمكن التنبؤ بمستقبل النظام لفترات زمنيه متصلة قريبة أو بعيدة بدقة عاليه.

في الأنظمة اللاخطية لا يمكن التنبؤ بمستقبل النظام لفترات زمنية طويله، وذلك لوجود نسبة من الخطأ في هذا النوع من التنبؤ. في الأنظمة اللامعينه التي لا يحكمها أي نوع من المعادلات الخطية واللاخطيه لا يمكن التنبؤ بمستقبل النظام بأي درجة من الدقة.

إذن الظواهر الطبيعية لا تخضع للصدفه وما يحدث فيها نعتبره صدفة هو سلوك عشوائي ومضطرب يخضع لقوانين خاصة.

الفصـــل الرابع

الاستقرار

(4-1) الاستقرار:

الاستقرار في الرياضيات هي حالة من حالات الانظمة أو بتعبير اخر هي خاصية رياضية عادة ما تذكر اقتراناً بحل معادلة تفاضلية حيث يقال حل المعادلة التفاضلية كذا وكذا مستقر أو غير مستقر.

(4-2) الأنظمة الخطية والاستقرار:

بالنسبة للأنظمة الخطية أو المعادلات التفاضلية الخطية يجب على القيمة الذاتية ان تكون سالبة أو بالاحرى إذا سلمنا بأن القيمة الذاتية هي عدد مركب فانه يجب ان يكون جزئه الحقيقي سالباً. اذا كان الجزء الحقيقي لهذا فإن النظام يسمى شبه مستقر اي انه لا يعود الى حالته السابقة، إذا قمنا بتغييرها تغيراً طفيفاً بل يبقى في الحالة التي وضعناه فيها، اما النظام المستقر فيعود الى حالته الأولى إذا ابعدناه عنها إبعاداً طفيفاً، فالنظام غير المستقر يبتعد اكثر فأكثر من حالته الأولية إذا ابعدناه عنها.

(4-3) الأنظمة غير الخطية والاستقرار:

بالنسبة للأنظمة غير الخطية من النوع

$$x^{\cdot} = f(x^t , u)$$

حيث f دالة خطية و x, u متجهان يصعب حساب القيمة الذاتية أو ان مفهوم القيمة الذاتية غير متعارف عليه في هذه الأنظمة. في هذه الحالة تكون احدى الطرق التي يمكن من خلالها معرفة إن كان النظام ما مستقر ام لا هو الاستعانة بمبرهنة ليبانوف وقبل تبيين طريقة لبابونوف فإنه يجدر بالذكر انه يمكن إخطاط خاصيات النظام أو المعادلة في نقطة معينة u_1 , x_1حساب القيمة الذاتية لهذا النظام الخطي فيها وعلى اساس القيمة الذاتية المتحصل عليها نقول ان النظام مستقر ام لا

(4-4) انواع الاستقرار:

(4-4-1) الاستقرار المحلي:

الاستقرار المحلي هوعندما تكون خاصية الاستقرار مرتبطة مدي أو مجال رياضي معين تكون خارجه منتفيه.

(4-4-2) الاستقرار الشامل:

الإستقرار الشامل هو ان تكون خاصية الاستقرار غير مرتبطة بمجال رياضي معين.

(4-4-3) شبه الاستقرار:

هي الحالة التي تعني ان نظاماً ما لا يعود إلى نقطة إنطلاقة إذا ابعدته منها بل بطل في النقطة التي دفعته إليها. يمكن تبسيطاً اعتبار هذه الحالة مستقرة لكن في الحقيقة هذه الحالة يمكن ان تكون مستقرة أو غير مستقرة.

(4-5) تعريفات الاستقرار ومفاهيمه:

ليكن لدينا المعادلة التفاضلية من الرتبة الاولي

$$\frac{dx}{dt} = f(t\,, x)_____(4-1)$$

حيث f دالة متصلة لكل $x \in D$ ، $t \in (a\ , \infty)$ ولها مشتقة جزئية $\frac{\partial f}{\partial x}$ متصله

ليكن $x = Q\ (t)$ حلا للمعادلة (4-1) الذي يحقق $x(t_0) = Q(t_0)$ حيث $t_0 > a$ ليكن $x = x(t)$ حلا ايضا لنفس المعادلة والذي يحقق

$$x\ (t_0) = x\ (t_0)$$

وافترضنا ان الحلين $Q(t)$ و $x(t)$ معرفين لجميع قيم $t \geq t_0$ اي أنه يمكن امتدادهما بدون حدود الى اليمين.

تعريف (1):

يسمي الحل $x = Q(t)$ للمعادلة (4-1) بانه مستقر في مفهوم ليبانوف عندما $t \to \infty$ اذا كان لاي $\varepsilon > 0$ يوجد $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ بحيث ان لاي حل $x = x\ (t)$ للمعادلة يكون.

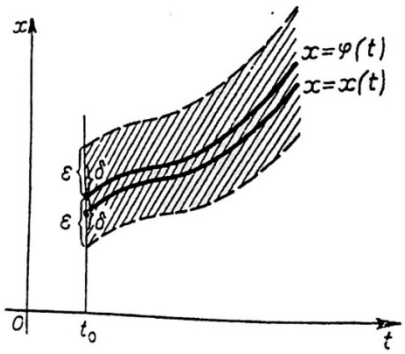
$$|x(t_0) - Q(t_0)| < \delta_____(4-2)$$

$$\to |x(t\ \ ) - Q(t\ \ )| < \varepsilon_____(4-3)$$

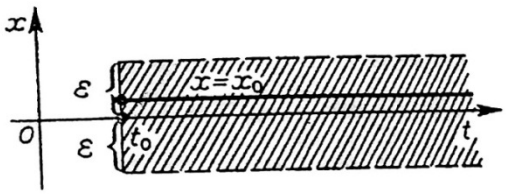
ولجميع $t \geq t_0$ يمكن دائما أن نفترض أن $\delta \leq \varepsilon$.

وهذا يعني أن جميع الحلول التي تكون قيمها الابتدائية قريبة من القيمة الابتدائية للحل $x = Q(t)$ تبقي قريبة ايضا لجميع $t \geq t_0$.

وهذا يعني هندسيا التالي : $x = Q(t)$ للمعادلة (4-1) يكون مستقرا، إذا كان الشريط (ε-band) الضيق يحتوي المنحني $x = Q(t)$، فان كل المنحنيات التكاملية (الحلول) $x = x(t)$ للمعادلة (4-1) تكون قريبة قربا كافيا له عند اللحظة الابتدائية $t = t_0$ والتي تكون محتواه في الشريط εلجميعt_0 $t \geq$ كما في الشكل ادناه:



شكل (١- أ)



شكل (١-ب)

أما إذا كان عندما $\delta > 0$ (الاختيارية الصغيرة) يوجد على الاقل حل واحد $x = x(t)$ للمعادلة (4-1) لا تتحقق له له المتباينة (4-3) فإنه يقال أن الحل $x = Q(t)$ غير مستقر.

تعريف (2):

يقال أن الحل $x = Q(t)$ للمعادلة (1) مستقر تقاريباً إذا كان .

i- تقاريباً

ii-يوجد$\delta_1 > 0$ بحيث أن أي حل $x = x(t)$ للمعادلة (1) يحقق الشرط

$$|x(t_0) - Q(t_0)| < \delta_1.$$

$$\lim_{t\to\infty}|x(t) - Q(t)| = 0$$

وهذا يعني أن جميع الحلول التي شروطها الابتدائية قريبة للحل المستقر تقاريباً $x = Q(t)$ لا تبقي فقط بالقرب منه عندما $t \geq t_0$ ولكن تقترب منه بدون حدود عندما $t \to \infty$

مثال (13):

ادرس استقرار الحل $x \equiv 0$ للمعادلة

$$\frac{dx}{dt} = -a^2 x ____ (4-4)$$

الحل:

حل المعادلة (4-4) الذي تحقق الشرط $x(t_0) = x_0$ هو

$$x_0 = x\delta^{-a^2(t-t_0)}$$

ولتكن $\varepsilon > 0$ نوجد الفرق بين الحل $x(t)$, $Q(t) = 0$

$$x(t) - Q(t) = x_0 e^{-a^2(t-t_0)} - 0 = (x_0 - 0)e^{-a^2(t-t_0)} \quad ____(4-5)$$

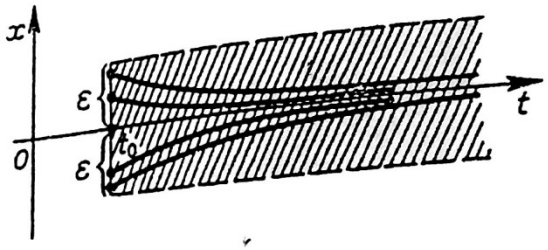
وحيث ان $e^{-a^2(t-t_0)} \leq 1$ لجميع $t \geq t_0$ فانه يتضح من (4-5) وجود $\delta > 0$، $\delta = \varepsilon$ ، بحيث أن $|x - 0| < \delta = \varepsilon$ فيكون لدينا .

$$|x(t) - Q(t)| = |x_0 - 0|e^{-a^2(t-t_0)} < \varepsilon, \forall t \geq t_0$$

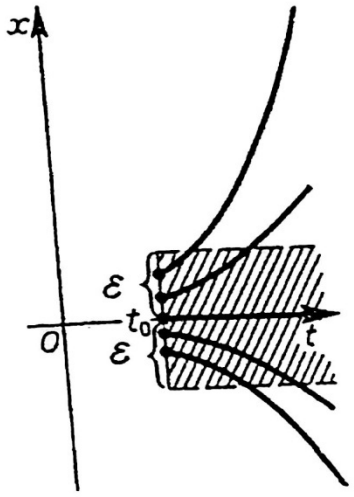
ومن التعريف هذا يؤدي الى ان الحل $Q(t) = 0$ للمعادلة (4-4) يكون مستقراً وايضاً حيث ان

$$\lim_{t\to\infty}|x(t) - Q(t)| = \lim_{t\to\infty} |x_0|e^{-a^2(t-t_0)} = 0$$

فإن الحل $Q(t) = 0$ يكون مستقراً تقاربياً انظر الشكل التالي:



شكل (٢- أ)



شكل (٢- ب)

مثال (14):

أثبت أن الحل $Q(t) = 0$ للمعادلة $\frac{dx}{dt} = a^2\, x$ غير مستقر

الحل :

لقيم $|x_0|$ الصغيرة اختيارياً يكون حل المعادلة المعطاه هو

$$x(t) = xe^{a^2(t-t_0)}$$ والذي لا يحقق الشرط هو

لقيم $t \geq t_0$ الكبيرة وعلاوة على ذلك لأي $x_0 \neq 0$ يكون لدينا

$|x(t)| \to \infty$ عندما $t \to \infty$ انظر الشكل. وبالتالي يكون الحل غير مستقر.

(4-6) استقرار نظم المعادلات التفاضلية:

نعتبر نظام المعادلات التفاضلية

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i(t, x_1\, , x_2 \dots , x_n) \quad i = 1,2 \dots \dots n \quad _____(4-4)$$

حيث f_i معرفة $a < t < +\infty$, $(x_1\, , x_2 \dots , x_n) \in D$ ويحقق شروط نظرية وجود ووحدوية حل مسألة كوشي. ونفترض ان جميع حلول (1) قد امتدت الى اليمين $t \geq t_0 > a$

تعريف (1) :

يقال ان الحل $Q_i\ (t)$ للنظام (1) مستقرا عندما $t \to \infty$ اذا كان لأي

$\varepsilon > 0$ يوجد $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ بحيث ان لأي حل $x_i(t)$, $i = 1,2 \ldots . n$

للنظام الذي قيمة الابتدائية تحقق

$$|x_i(t) - Q_i(t_0)| < \delta \quad , i = 1,2 \ldots n$$

فان المتباينة :

$$|x_i(t) - Q_i\ (t)| < \varepsilon _____ (4-5)$$

تتحقق لجميع $t \geq t_0$ أي أن الحلول ذات القيم الابتدائية القريبة تبقي قريبة لجميع قيم $t \geq t_0$.

واذا لم تتحقق المتباينة (2) لأي $\delta > 0$ الصغيرة الاختيارية على الاقل لواحد من

$x_i(t)$, $i = 1,2 \ldots \ldots . n$ فإنه يقال أن الحل $Q(t)$ غير مستقر.

تعريف (2) :

يقال ان الحل $Q_i(t)$ مستقر تقاربياً اذا كان.

i- مستقراً.

ii-يوجد $\delta_1 > 0$ بحيث أن أي حل $x_i(t)$, $i = 1,2 \ldots \ldots . . n$ للنظام حيث $|x_i(t_0) - Q_i(t_0)| < \delta_1$ يحقق الشرط

$$\lim_{x\to\infty} |x_i(t) - Q_i\ (t)| = 0 \quad , \quad i = 1,2 \ldots \ldots n$$

مثال (15):

استخدم تعريف الاستقرار في مفهوم ليبانوف لاثبات أن حل النظام

$$\frac{dx}{dt} = y \quad , \quad \frac{dy}{dt} = -x \quad _____ \quad (4-6)$$

تحت الشروط الابتدائية

$$x(0) = 0 \quad , y(0) = 0 \quad _____ \quad (4-7)$$

يكون مستقراً:

الحل :

حل النظام (4-6) والتي يحقق الشروط (4-7) هو $x(t) \equiv 0 \ , \ y(t) = 0$

وحل للنظام الذي يحقق الشرط $x\ (0) = x_0 \ , \ y(0) = y_0$ يكون على الصورة

$$x(t) = x_0\, cost + y_0 \,\text{sint} \ , y(t) = -x_0\, sint + y_0\, cost$$

وياخذ $\varepsilon > 0$ نثبت وجود $\delta\ (\varepsilon) > 0$ بحيث ان

$$|x_0 - 0| < \delta \quad , |y_0 - 0| < \delta$$

يكون لدينا

$$|x(t) - 0| = |x_0 cost + y\, sint| < \varepsilon$$

$$|y(t) - 0| = |-x_0 sint + y_0\, cost| < \varepsilon$$

لجميع $t \geq 0$ وهذا يعني من التعريف ان الحل $x \equiv 0 \ , y \equiv 0$ للنظام (*) يكون مستقراً . ومن الواضح أن .

$$|x_0 cost + y_0 sint| \leq |x_0 cost| + |y_0\ sint| \ \leq |x_0| + |y_0|$$

$$|-x_0 sint + y_0 cost| \leq |x_0 sint| + |y_0\ cost| \ \leq |x_0| + |y_0|$$

اذا اخذنا $\delta(\varepsilon) = \varepsilon/2$ فإنه لكل $|x_0| < \delta \ , |y_0| < \delta$ يكون لدينا

$$|x_0 cost + y_0 sint| \leq \varepsilon \quad , |-x_0 sint + y_0\ cost| \ \leq \varepsilon$$

لجميع $t \geq 0$ أي ان الحل الصغري يكون مستقراً في مفهوم ليبانوف هذا بالرغم من كون الاستقرار ليس تقريباً.

(4-7)استقرار النظم الذاتية:

يقال ان المعادلة التفاضلية ذاتية اذا كان الطرف الايمن منها f_i لا يحتوى على t صراحة ويكون على الصورة .

$$\frac{dx_i}{dt} = f_i\ (x_1, x_2 \dots \dots x_n) _____ \ (4-8)$$

وهذا يعني ان قانون تغير الدوال المجهولة الذي توصف بالنظام الذاتي لا تعتمد على الزمن كما في كثير من القوانين الفيزيائية.

تعريف (1):

يقال أن نقطة الاتزان $0 = n \ldots 1,2 = i$, للنظام

$\frac{dx_i}{dt} = f_i\ (x_1\ , x_2 \ldots , x_n)$ مستقرة ، إذا كان لأي $0 < \varepsilon$)

R) يوجد $0 < \delta = \delta(\varepsilon)$ بحيث أن أي مسار للنظام يبدأعند اللحظة الابتدائية

$t_0=0$ عند النقطة $(x(0)\ ,y\ (0)\ )$ يبقى دائما داخل الكرة $s(\varepsilon)$ كما في الشكل

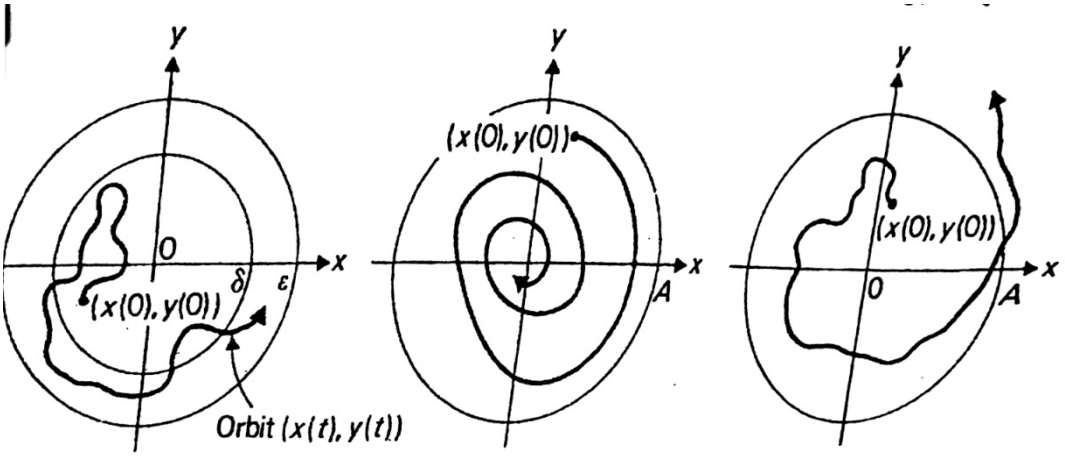
(4). كما تكون نقطة الاتزان مستقرة تقاربيا إذا كانت

i/ مستقرة :

ii/ يوجد$0 < \delta_1$بحيث أن أي مسار للنظام يبدأ عند نقطة $\delta(x(0),y(0))$ في

يوجد$s(\delta_1)$ تؤول إلى نقطة الأصل عندما $t \to \infty$ كما في الشكل (4) .

ويقال أنها غير مستقرة إذا لم تكن مستقرة كما في الشكل (4) .



مستقرة مستقرة تقاربيا غير مستقرة

مثال (16):

اعتبر النظام

$$\frac{dx}{dt} = y \ , \qquad \frac{dy}{dt} = -x$$

الحل:

المسار هنا دوائر متحدة المركز $x^2 + y^2 = h^2$ مركزها نقطة الأصل وهي نقطة الاتزان للنظام، فإذا أخذنا $\delta = \varepsilon$ فان اي مسار يبداء داخل الدائرة $S(\delta)$ يبقي دائماً داخل $S(\delta)$ وبالتالي يكون الحل مستقرا . ولكن المسارات لا تقترب من نقطة الأصل فهي ليست مستقرة تقاربياً.

مثال (17):

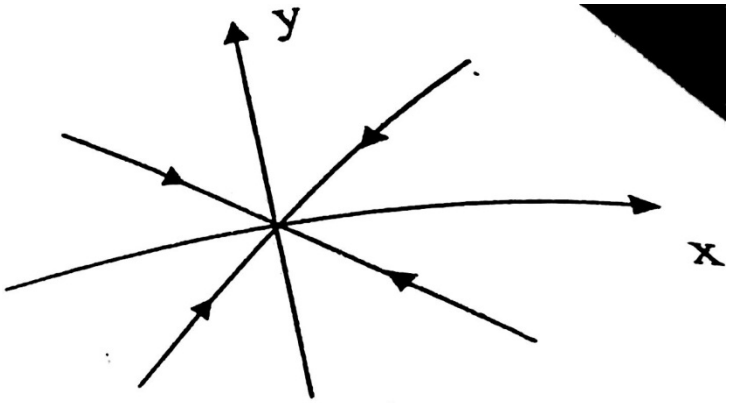
أعتبر النظام

$$\frac{dx}{dt} = -x \ , \qquad \frac{dy}{dt} = +y$$

الحل:

يكون حل النظام هو $x=Ae^{-t}$, $y=Be^{-t}$

وبالتالي يكون $\frac{y}{x} = \frac{B}{A} = K$ ثابتاً وبالتالي تكون المسارات أشعة تنهي عند نقطة الأصل. كما في الشكل (5) .



شكل (٥)

ويمكن ان نختار $\delta = \varepsilon$. وأي نقطة على المسار التي تقع في اللحظة الابتدائية داخل $S(\varepsilon)$ تبقى دائما داخل الدائرة $S(\varepsilon)$ وايضا تقترب إلى نقطة الأصل عندما $t \to \infty$ وبذلك تكون نقطة الاتزان مستقرة تقاربيا.

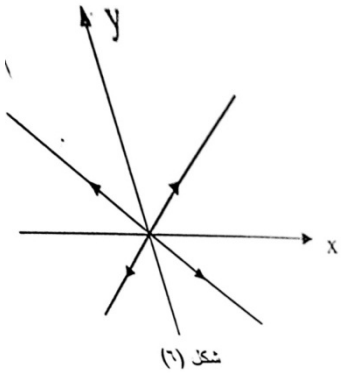
مثال (18):

اعتبر النظام

$$\frac{dx}{dt} = X \ , \qquad \frac{dy}{dt} = Y$$

الحل:

حل هذا النظام هو $y=Be^t$, $x= Ae^t$ ، (ثابت) $\frac{y}{x} = k$ والمسارات عبارة عن أشعة تنبعت من نقطة الأصل ولكن عكس المثال السابق تكون الحركة على الأشعة تبتعد عن المركز وبذلك تكون نقطة الاتزان غير مستقرة كما في الشكل(6)



شكل (٦)

الفصـــل الخامس

طريقة ليبانوف

(5-1) طريقة ليابونوف في إستقرار الأنظمة:

إذا طاقة نظام فيزيائي في نقطة توازن معينة في الحد الأدنى من وضعها، تعتبر هذه النقطة، نقطة مستقرة، نفرض هذه المنظومة.

تصبح هذه المعادلة منظومة معادلاتية بهذا الشكل:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x,y) \\ \frac{dy}{dt} = G(x,y) \end{cases} \quad \text{_____} \ (5-8)$$

(5-1-1) الفرضيات:

أ- النقطة الحرجة لهذه المنظومة نقطة منزوية (أي إذا رسمنا دائرة بمركز هذه النقطة لا توجد نقطة حرجة في هذه الدائرة عدا المركز) .

ب- هذه النقطة الحرجة مركز الإحداثي^2(0.0).

ج- المعادلة C= $[x(t),y(t)]$ هي إحدى المسارات للمنظومة (I) والدالة E(x,y) وتفاضلاتها الجزئية في هذا المسير متصلة ، بما أن x و y توابع المتغير فيها t كذلك E إذن يمكن كتابتها بهذا الشكل E(t) وتغيراتها بالنسبة إلى t هي :

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial y}\frac{\partial y}{dt}$$

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial E}{\partial t} f + \frac{\partial E}{\partial y} G$$

هذه هي الرابطة الأساسية في طريقة ليابونوف ، وهناك حالات عديدة لها ومن أهم القضايا التي تستند عليها في طريقة ليابونوف هي : في حالة وجود الدالة E(x, y) للمنظومة I ، في هذه الحالة النقطة الحرجة (0.0) هي نقطة إستقرار

(5-2) النقاط الحرجة في الأنظمة اللاخطية:

نفرض لهذه المنظومة الخطية والنقطة الحرجة والمنزوية فيها (0.0)

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = F(x\,, y) \\ \frac{dy}{dt} = G\,(x\,, y) \end{cases} _____ (5-9)$$

نكتب كل من F(x , y) و G(x,y) حسب متسلسلات من x و y بهذه الصورة:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = a_1\, x + b_1 y + c_1 x^2 + d_1\, xy + e_{\,1} y^2 + \cdots \\ \frac{dy}{dt} = a_2\, x + b_2\, y + c_2 x^2 + d_2\, xy + e_2\, y^2 + \cdots \end{cases} _____ (5-10)$$

لو إن مقادير $|x|$ و $|y|$ صغيرة جداً ، يمكن حذف العبارات الصغيرة الناجمة من هذه المقادير نتيجة ضربها ببعضها أو أسها أكبر من واحد أي يمكن حذف المقادير اللاخطية، ليصبح سلوك المنظومة اللاخطية(5-1) قرب النقطة الحرجة (0,0) شبيه بسلوك هذه المنظومة:

$$\begin{cases} \dfrac{dx}{dt} = a_1\, x + b_1\, y \\ \dfrac{dy}{dt} = a_2\, x + b_2\, y \end{cases}$$

(3-5) مبرهنه ليبانوف:

تقول مبرهنة ليابونوف الاتي:

اذا كان لدينا النظام الاتي:

$$\begin{bmatrix} \dot{x_1} \\ \dot{x_2} \\ \dot{x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x_1 \dots\dots\dots\dots x_n\,, u_1) \\ f_2(x_2 \dots\dots\dots\dots x_n\,, u_2) \\ f_n(x_n \dots\dots\dots\dots x_n\,, u_n) \end{bmatrix}$$

وإذا كان لهذا النظام في إطار (حال مستتب) موضع سكون. نسميه x_R مثلاً. فإن موضع السكون هذا مستقر إذا امكننا على ابعاد دالة تسمى دالة ليبانوف وهي دالة تتوفر فيها المواصفات التالية $V(x_1.....x_n) > 0$ اي ما يعرف رياضيات (تحدد موجب))اي ان الدالة V لا تكون صفراً إلا عند النقطة صفر(حال مستتب الذي يمكن بعملية خطية بسيطة المعروفة بعنوان الـــ" الانزلاق" أي نقل الدالة من نقطة x_n الى نقطة صفر . وفي ماعدا ذلك اكبر من الصفر).

$\dot{V} = (grad\, V(x))\dot{X} < 0$ أي تفاضل الدالة الرياضية يجب ان يكون سالباً في ماعدا النقطة صفر (0) اي ان تفاضل الدالة يتميز بخاصية التجدد السالب .

في حالة تمكننا من العثور على مثل هذه الدالة فإن النظام مستقر. ولنلاحظ بلى يمكن ايضا استعمالها في الطريقة لا يقتصر على الأنظمة الخطية بلى يمكن ايضا استعمالها في الأنظمة غير الخطية. اما في حالة عدم عثورنا على هذ الدالة فإنه لا يمكننا أن نجزم على ان النظام $\dot{x}=f(x)$

غير مستقر بل ما نستنتجه هو ان الدالة التي اخترناها لبرهنة الاستقرار لا تصلح لذلك ويجب علينا اختيار طريقة اخرى لهذا الفرض اي انه لا يمكننا بطريقة ليبانوف أن نبرهن على عدم استقرار نظام ما ولكن يمكننا أن نبرهن على عدم استقرار نظام ما.

(5-4) طريقة ليبانوف:

تستخدم طريقة ليبانوف للمعادلات التفاضلية الذاتية وغير الذاتية وغير الخطية وكذلك إمكانية ايجادها. وتستخدم طريقة ليبانوف لدراسة استقرار حلول المعادلات التفاضلية

(5-5) الانظمة الذاتية:

تعرضنا في الباب السابق لدراسة الاستقرار للنظم الخطية وغير الخطية بمقارنتها مع النظم الخطية. وفي احيان كثيرة تفشل هذه الطريقة وخصوصاً اذا كان النظام الخطي مستقراً فقط. وقد تغلب العالم الرياضي الروسي ليبانوف على هذه العقبات

لنفترض أنه لدينا نظام معادلات تفاضلية التي ينتج من وصف نظم فيزيائية. اذا كانت النقطة الحرجة تناظر نقطة اقل طاقة للنظام واذا كانت طاقة النظام ثابته أو تتناقص فانه يكون من المعقول أن نخمن بأن النقط الحرجة تكون مستقرة ومن الناحية الأخرى فإن النقطة الحرجة طبقاً لاقصي طاقة جهد فإن النقطة تكون غير مستقرة.

ليكن لدينا النظام الذاتي

$$x' = f(x\,,y)\ ,\qquad y' = g(x,y) \qquad (5-11)$$

حيث نفترض أن نقطة الأصل نقطة حرجة ليكن $V\ (x,y)$ دالة متغير حقيقي متصلة في المستوي xy مع مشتقات جزئية متصلة من الرتبة الأولي. ليكن D منطقة تحتوي نقطة الاصل وان

$$V\ (x\,,y) > 0، V\ (0,0) = 0 \qquad (5-12)$$

لجميع (x,y) الاخري في D فانه يقال ان $V\ (x,y)$ موجبة حتما فيD اذا كان $V\ (x\,,y) < 0، V\ (0,0) = 0$ لجميع (x,y) الاخري في D فانه يقال ان $V\ (x,y)$ سالبة حتما في D اذا كان , $V\ (x,y) \geq 0$ (او, $V\ (x,y) \leq 0$) فانه يقال أن $V\ (x,y)$ شبه موجبه حتماً (أو شبه سالبة حتماً) في D اذا كان $V\ (x,y)$ لا تحقق اي من هذه الشروط فانه يقال انها غير محدودة .

مثال (19):

أ/ الدالة $V(x,y)\frac{1}{2}(x^2+y^2)$ موجبة حتماً لجميع قيم x,y حيث x^2+y^2 هي مربع المسافة من النقطة (x,y) إلى نقطة الأصل.

(ب) الدالة $-(x^2+y^2)$ سالبة حتما.

(ج) الدالة $V(x,y)=x^2$ شبه موجبة حتماً لأن $V(0,\alpha)=0$ لأي قيمة للعدد الحقيقي α .

(د) الدالة $V(x,y)=-y^2$ شبة سالبة حتماً.

(هـــ) الدالة $V(x,y)=xy$ غير محددة لأن، $V(\alpha،-\alpha)=-\alpha^2<0$ لجميع الاعداد $\alpha>0$.

عادة الطاقة الكلية للنظام تتناسب مع x, y في الحالة التي تكون فيها النظرية التالية محققة.

نظرية (1):

تكون الدالة

$$V(x,y)=x^2+axy+by^2$$

(أ) موجبة حتماً اذا وفقط اذا كان $4b^2-a^2>0$

(ب) شبه موجبة حتماً اذا وفقط اذا كان $4b^2-a^2\geq 0$

البرهان:

اذا كان $4b^2 - a^2 > 0$ وبالكمال المربع نجد ان

$$x^2 + axy + bx^2 = \left(x + \frac{a}{2}y\right)^2 + \left(b - \frac{a^2}{4}\right)y^2 ____(5-13)$$

اذا كان $y \neq 0$ فان $\left[b - \frac{a^2}{4}\right]y^2 > 0$ من الافتراض وتكون $V(x,y)$موجبة حتماً . ومن الناحية الاخري نفترض ان $\left[b - \frac{a^2}{4}\right] \leq 0$ وباختيار اي y هي غير صفرية.

$x = -\frac{a}{2}y$ نجد أن التعبير (2) يكون اقل من أو يساوي الصفر والذي يتعارض مع الافتراض ، حيث v موجبة حتماً . وبالتالي $4b - a^2 > 0$ وهذا هو المطلوب أثباته (أ).

ملحوظة:

نلاحظ ان $V(x,y)$ سالبة حتماً اذا وفقط لاذا كان $-V(x,y)$ موجبة حتماً وعلي ذلك تكون النظرية السابقة صالحة في حالة سالبة حتماً وشبه حتماً .

مثال (20):

(أ) الدالة $x^2 - xy + 2y^2$ تكون موجبة حتماً لأن $4b^2 - a^2 = 7 > 0$

(ب) الدالة $V(x,y) = -x^2 + 4xy - 4y^2$ شبه سالبة حتماً ، لأن

$-V(x,y) = x^2 - 4xy + 4y^2$ ، $4b^2 - a^2 = 0$, $-V$ اكون شبه موجبه حتماً.

(ج) الدالة $x^2 + 4xy - 4y^2$ غير محددة حيث لا V، ولا $-V$ تنتمي إلى نوع من الأنواع الأربعة.

ليكن $V(x, y)$ دالة مجبة حتماً متصلة وقابلة للإشتقاق فإننا نعرف اشتقاق V على مسار النظام (1) بالعلاقة:

$$V'(x,y) = \frac{\partial V}{\partial x}\, x + \frac{\partial V}{\partial y} y = \frac{\partial V}{\partial x} f(x,y) + \frac{\partial V}{\partial y} g(x,y) ____ (5-14)$$

عندما تتحقق هذه العلاقة والنظام (5-11) فان $V(x,y)$ تسمي بدالة ليبانوف للنظام. وتؤكد أنه لكي تكون دالة ليبانوف للنظام (5-11) فانه يجب ان تحقق $V'(x,y)$ قابلية الاشتقاق وموجبة حتماً ولها مشتقات على مسارات معرفة بالعلاقة (5-3). ويجب ان تؤكد ان $V(x,y)$ تكون دالة ليبانوف للنظام (5-11) فقط عندما تكون $V(x,y)$ معرفة بالنسبة الى (5-11) طبقاً الى (5-3) يوجد اختيارات كثيرة لدالة ليبانوف، ولكن اغلبها غير مفيد.

والاهمية العظمي لتعريف مشتقة V على مسارات (5-11) يعطي بالنظرية التالية:

نظرية (2):

ليكن (x,y) دالة ليبانوف للنظام (5-11) فان.

(أ) اذا كان $V'(x,y)$ شبه سالبة حتماً فإن نقطة الاصل تكون مستقرة.

(ب) اذا كان $V'(x,y)$ سالبة حتماً فان نقطة الاصل تكون مستقرة تقاريباً.

(ج) اذا كان $V'(x,y)$ موجبة حتماً فان نقطة الاصل تكون غير مستقرة.

البرهان:

ليكن $\varepsilon > 0$ يجب أن نثبت انه اذا كان $(x,y)\ \varepsilon\ D$ وان $\sqrt{x_0^2 + y_0^2} < \delta$

فان الحل $\left(x(t,x_0).y\ (t,y_0)\right)$ يحقق المتباينة

$$\sqrt{[x\ (t\ ,x_0)]^2 + \ [y(t\ ,y_0)]^2} < \varepsilon$$

لجميع قيم $t \geq 0$ نعرف

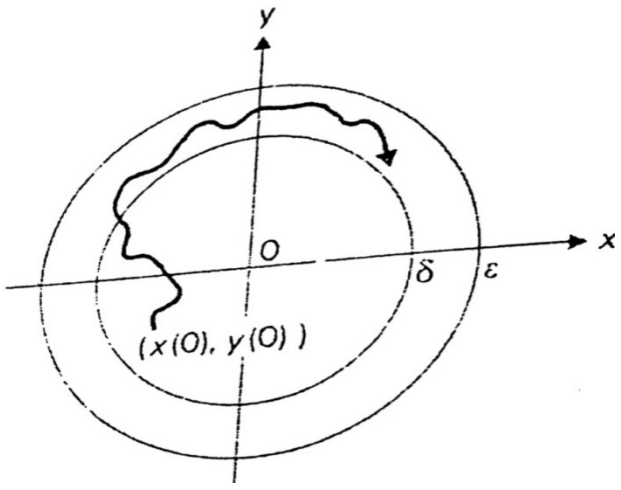
$$m = \frac{\min}{\sqrt{x^2 + y^2}} V(x,y)$$

وهذه القيمة الادني تكون موجودة لان $V(x,y)$ متصلة على الدائرة

$x^2 + y^2 = \varepsilon^2$ وعلاوة على ذلك من اتصال V وان $V\ (0,0) = 0$ فانه

يوجد $\delta > 0$ بحيث ان $V(x\ ,y) < m$ طالما $\sqrt{x_0^2 + y_0^2} < \delta$ (كما في

الشكل التالي:



نفترض انه يوجد عدد $t^* > 0$ بحيث $x^2(t^*,x_.)+y^2(t^*,y_.)= \varepsilon^2$. وبما أن

$$\frac{dv}{dt} = V'(x,y) \leq 0$$

يكون لدينا .

$$V(x(t,x_0),y(t,y_0)) \leq V(x_0, y_0) \ , \ t > 0$$

وبالتالي :

$$V(x(t^*,x_0),y(t^*,y_0)) \leq V(x_0, y_0) < m \leq V\ (x(t^*,x_0)\ ,y(t^*,y_0)$$

حيث أن m تكون أقل ما يمكن على الدائرة $x^2 + y^2 = \varepsilon^2$ وهذا التناقض يثبت

i- حيث أنه يبين أن $x(t,x_0)^2+y(t,u_0)^2 < \varepsilon^2$ لجميع قيم $t \geq 0$.

ii- من المعطيات أن V تتناقص عند تزايد t. وحيث أن V تكون موجبة لجميع قيم y,x وتتناقص على المسار فإنه يوجد .

$$\lim_{t\to\infty} v(x(t),y(t)) = \geq 0$$

وعلينا اثبات أن $\lambda = 0$ وحيث بالتالي (0,0) هي النقطة الوحيدة التي تكون عندها V=0 وبالضرورة يكون لدينا

$$\lim_{t\to\infty} x(t) = \lim_{t\to\infty} y(t) = 0$$

نفترض $\lambda > 0$ ، فإنه كما سبق يوجد $\tilde{n} > 0$ بحيث أن $V(x_0,y_0) < \lambda$

طالما $\sqrt{x_0^2 + y_0^2} < \tilde{n}$ الذي يعني أن المسار $(x(t),y(t))$ لا يدخل أبداً المنطقة الحلقية المعطاة $x^2+y^2<\varepsilon^2$. ليكن $\varepsilon > 0$ كما في *(i)* وليكن ايضا.

$$m_1 = \frac{min}{n \leq \sqrt{x^2 + y^2}} \leq \varepsilon - V'(x\,, y)$$

حيث أن $n > 0$ ، V سالبة حتما، يكون لدينا $m_1>0$ وبالتالي حيث أن $m_1 \leq -V'(x,y)$ يكون لدينا $V'\big(x(t), y\,(t)\big) \leq -m_1$ لجميع قيم $t \geq 0$ وبالتالي بالتكامل نحصل على .

$$\int_0^t V'\,\big(x(s), y\,(s)\big)ds \leq \int_0^t -m_1 ds$$

اي

$$V\,\big(x(t), y\,\big(y(t)\big) - V\,(x_0\,,\, y_0) \leq m_1\, t$$

اي

$$V\,\big(x(t), y(t)\big) \leq V(x_0\,,\, y_0) - m_1\, t$$

ولكن الطرف الأيمن من هذه المتباينة يصبح سالباً عندما $t \to \infty$ وهذا يتعارض مع كون V موجبة حتماً الا إذا كان $m_1 = 0$ اذا فقط واذا كان $n = 0$ والتي تتحقق اذا وفقط اذا كان $\lambda = 0$ وهذا يثبت *(ii)*.

مثال (21):

ليكن لدينا النظام

$$x' = y\,, y' = -x - \varepsilon y$$

وأن دالة ليبانوف هي $V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ وعلى ذلك

$$V'(x,y) = \frac{\partial V}{\partial x}\, x' + \frac{\partial V}{\partial y} y' = xy + y(-x - \varepsilon y) = -\varepsilon y^2$$

وهي شبه سالبة حتماً وبالتالي تكون نقطة الاصل مستقرة.

مثال (22):

اعتبر النظام

$$\dot{x} = -y + xy\,, \dot{y} = x - x^2$$

النقطة الحرجة هي نقطة الاصل . ليكن دالة دالة ليبانوف هي

$$V = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

فإن:

$$V' = (x\,, y) = \frac{\partial V}{\partial x} x' + \frac{\partial V}{\partial y} y' = x\,(-y + xy) + y\,(x - x^2) = 0$$

وحيث أن V موجبة وان $\dot{V} = 0$ فان دالة ليبانوف تكون موجودة وبالتالي تكون نقطة الاصل مستقرة تقريباً.

مثال (23) :

اعتبر النظام:

$$x' = -x - \frac{x^3}{3} - x\sin y\,,\; y' = -y - \frac{y^3}{3} \quad \text{_____(5 – 15)}$$

الحل :

نلاحظ ان نقطة الأصل نقطة حرجة (سكون) نعرف دالة ليبانوف كالتالي

$$V(x,y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$$

فان :

$$V'(x\,,y) = x\left[-x - \frac{x^3}{3} - x\sin y\right] + y\left[-y - \frac{y^3}{3}\right]$$

$$= -x^2 - \frac{x^4}{3} - y^2 - \frac{y^4}{3} - x^2 sin\, y$$

وحيث ان $|x^2 \sin y| \leq |x^2|$ بالتالي $x^2 + x^2 \sin y \geq 0$ على ذلك

$$V'(x\,,y) = -\frac{x^4}{3} - y^2 - \frac{x^4}{3} - (x^2 + x^2\sin y) \leq -\frac{x^4}{3} - y^2 - \frac{y^4}{3}$$

ومن ذلك نري ان 'V سالبة حتما وتكون نقطة الاصل مستقرة تقاربياً .

(5-6) الانظمة غير الذاتية:

تعريف: يمكن تعريف دالة ليبانوف $V(x\,,t)$ كما يلي:

أ/ تكون دالة ليبانوف $V(x\,,t)$ موجبة حتماً اذا كان

i- لجميع قيم $t\,,0 \geq t$ و $V(x\,,t) \geq w\,(x) > 0$ حيث $w\,(x)$ دالة مطردة التزايد في $x\,,$ $w\,(0) = 0$

ii- $V\,(0\,,t) = 0$

iii- $V(x\,,t)$ تكون متصلة ولها مشتقات جزئية من الرتبة الاولي متصلة .

ب/ تكون $V(x\,,t)$ سالبة حتما اذا كان V– موجبة حتما .

ج/ تكون $V(x\,,t)$ شبه موجبة حتماً اذا كان :

i- $V(x\,,t) \geq 0$ لجميع قيم $t \geq 0$

ii- $V(0\,,t\,) = 0$

iii- $v(x\,,t)$ دالة متصلة ولها مشتقات جزئية متصلة

مثال (24):

الدالة

$$V\ (x_1\ ,\ x_2\ \ ,t)\ =\ (\ x_1^2\ +\ x_2^2)e^{-t}$$

هي الدالة الوحيدة شبه موجبة حتما لأن $V\ \rightarrow 0$ عندما $t\ \rightarrow \infty$ لقيم $x_2\ ,\ x_1$ المحدودة .

واشتقاق $\dot{V}$ يعطي بالعلاقة .

$$\dot{V}\ =\ \frac{\partial V}{\partial t}\ +\ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}\frac{dx_i}{dt}$$

$$=\ \frac{\partial V}{\partial t}\ +\ \sum_{i=1}^{n}\frac{\partial V}{\partial x_i}f_i$$

(7–5) الخلاصة:

- تم التعرف على المعادلات التفاضلية وأنواعها وطرق حلها.
- قمنا بدراسة النقاط الحرجة وذلك بغرض التوصل إلى استقرار الأنظمة باستخدام طريقة ليبانوف.
- درسنا سلوك الأنظمة من حيث الإستقرار بمفهوم ليبانوف.

(5–8) النتائج:

من خلال البحث توصلنا لهذه النتائج التي تتلخص فيما يلي:

- التمكن من التعرف على المعادلات التفاضلية وطرق حلها وأنواعها.
- الممارسة المستمرة في حل المسائل تسهل كيفية إختيار الطريقة المناسبة لحل المعادلات التفاضلية.
- تظهر أهمية الأنظمة اللاخطية في الفيزياء والهندسة ومطالعة الطقس.

(5–9) التوصيات:

- التوسع في نظرية الاستقرار وتوفير الكتب اللازمة لها.
- ترجمة الكتب التي تتحدث عن الاستقرار.

(10–5) قائمة المصادر والمراجع

1. احمد حمزة الشيخه، 1996، المعادلات التفاضلية، الدارالعربية للنشر والتوزيع، الطبعة الأولى، ص1 –ص 90.

2. أ.د. عبد الشافي فهمي عباده، أ.د.حسن مصطفى العويضي،أ.د عفاف ابو الفتوح صالح، 2010م، المعادلات التفاضلية وتطبيقاتها، دار الفكر العربي، الطبعة الأولى، ص561– ص 594.

3. د. عبدالوهاب عباس رجب، د. سناء علي زراع، 2006، المعادلات التفاضلية الجزء الأول، دار الأمير عبدالله بن عبدالرحمن، الطبعة الأولى، ص10.

4. أ. ريتشارد برونسون، 2001، المعادلات التفاضلية، الدار الدولية للإستثمارات الثقافية، الطبعة الأولى، ص 10.

الانترنت:

5. http://www.abarry.ws/some%20requirements.pdf

6. www.google.com