الفصل الأول

(1-1) المقدمه:

أدرك الرياضيون و العلماء أن كثير من القوانين الفيزيائيه يعبر عنها بصوره أفضل بواسطة معادلات و لاتحتوي فحسب علي المتغيرات المجهوله و إنما أيضاً علي مشتقاتها او علي معدلات تغيرها اللفظي.

ولا يزال الاهتمام بالمعادلات التفاضليه وتطبيقاتها مستمراً حتي الان و قد نتجة عن الجهود التي بذلت لحل مختلف الموضوعات النظريه المتعلقه بالمعادلات التفاضليه إثراًء للتحليل الرياضي و خاصةً دراسة العمليات اللانهائيه و أستمر الباحثون في إكتشاف تطبيقات جديده للمعادلات التفاضليه ليس في العلوم الفيزيائيه فقط بل في شتي المجالات .

والمعادلات التفاضليه :

هي معادله تحتوي علي الدوال ومشتقاتها , إذا كانت الدوال حقيقيه في متغير واحد فإن المشتقات التي تظهر تكون مشتقه عاديه و تسمي بالمعادله التفاضليه العاديه , و توجد بعض الطرق التي تسهم في حل المعادلات التفاضليه ومن هذه الطرق طريقة لابلاس , و تحويل لابلاس نسبة لعالم الرياضيات و الفيزياء الفرنسي ببير سيمون لابلاس .

والتحويل بصفه عامه هو أداء لتحويل الدوال والمعادلات من شكلها الاصلي إلي شكل أخر أبسط منه علي الاقل معروف لدينا , فتحويل لابلاس هو تحويل تكاملي عند تأثيره علي الداله يحويلها إلي داله أخري مختلفه تماماً عن الداله الاصليه حيث يتم تحويل المتغير المستقل للداله إلي متغير أخر و بالتالي يغير نطاق و مدى الداله الاصليه .

تعتمد تحويلات لابلاس إعتماداً كلياً علي التكامل لذلك لابد من معرقة التكامل معرفه جيده .. أي ان تحويل لابلاس معرف كتكامل علي المدى من الصفر إلي ما لانهايه ,ويكون تحويل لابلاس فعالاً بوجه خاصه في حل مسائل القيمه الابتدائيه المحتويه علي معادلات تفاضليه خطيه بمعاملات ثايته .

ان نطاق المؤثر التفاضلي D هو فئة الدوال القابله للتفاضل ويستعان بالمؤثر D لحل المعادلات التفاضليه والمؤثر التكاملي y المعروف بالتحويل اللابلاسي يعطي طريقه أخري لحل المعادلات التفاضليه .

(2-1) مشكلة البحث:

في بعض الاحيان نجد ان هناك بعض المسائل في المعادلات التفاضليه يصعب حلها بالطرق المعروفه لذلك نلجا الي طرق أخري لحل هذه المعادلات ومنها حل المعادله التفاضليه بإستخدام تحويل لابلاس .

(3-1) أهمية البحث:

- تحويل لابلاس يساعد علي حل الدوال المتصله علي فترات التي يمكن الحصول علي حلولها بإستخدام طرق تقليديه .
- عند تغير شكل الداله الاصليه المعقده إلي شكل أخر يكون أسهل وأبسط في التعامل معها بتحويل المعادله التفاضليه إلي معادله جبريه يمكن حلها , و بإيجاد تحويل لابلاس العكسي نحصل علي حل المعادله التفاضليه الاصليه.
- يستخدم لابلاس في حل بعض المسائل التفاضليه و التكامليه و كذلك في معالجة نظرية الاحتمالات .
- تستخدم المعادله التفاضليه في الوسائل التحليله المفيده لحل المشاكل الهندسيه ويكون موجب حلها بواسطة لابلاس.

- تساعد المعادلات التفاضليه في فهم كثير من الظواهر المعقده في حياتنا اليوميه ابرزها الظاهره الكهرومغنطيسيه .

(4-1) أهداف البحث:

- حل المسائل التي حلها غير متجانس .
- تحويل لابلاس يمكن من معرفة بعض الحقائق الاساسيه عن التكاملات و خاصة التكاملات المعتله .
- يهدف تحويل لابلاس إلي معرفة المتسلسلات المتقاربه والمتباعده .
- يساعد تحويل لابلاس في حل مسائل القيمه الابتدائيه المعطاه بمعادلات تفاضليه خطيه ذات معاملات ثابته .

(5-1) أسئلة البحث:

- هل يساعد تحويل لابلاس في إيجاد حل المعادلات التفاضليه بطريقه اسرع و اسهل ؟
- هل يساعد تحويل لابلاس في التطبيقات الفيزيائيه والهندسيه و الكيميائيه ؟

(6-1) منهج البحث:

يستخدم الباحثون في هذا البحث المنهج الوصفي والمنهج التجريبي .

(1-7) مصطلحات البحث:

***المعادله التفاضليه:**

هي علاقة تساوي بين متغير مستقل ليكن x ومتغير تابع ليكن y واحد أوكثر من المشتقات التفاضليه y', y'' .

***تحويلات لابلاس:**

هو تحويل تكاملي يغير تأثيره علي الداله ويحوله إلي داله اخري مختلفه تماماً عن الداله الاصليه .

***الحل العام للمعادله التفاضليه:**

(1) $y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$ إذا كان y'', y' دالتين مستقلتين للمعادله (1) فإن

***رتبة المعادله:**

هي أعلى معامل تفاضلي في المعادلة .

***درجة المعادلة:**

هي درجه قوه أعلي معامل تفاضلي في المعادله بشرط أن تكون جميع المعاملات التفاضليه خاليه من القوة الكسريه .

***الحل العام للمعادله التفاضليه من الرتبه n:**

الحل العام لمعادلة تفاضليه من الرتبه n هو حل يحتوي علي n من الثوابت الاختياريه وبالطبع يحقق المعادلة التفاضليه .

***الحل الخاص:**

هو اي حل يحقق المعادله التفاضليه لا يشمل علي أي ثوابت إختياريه و قد نحصل عليه احياناً بالتعويض عن الثوابت الاختياريه في الحل العام بقيم محدوده .

الفصل الثاني

المعادلات التفاضلية وتحويل لابلاس

(1-2) المعادلة التفاضلية :

(1-1-2) تعريف المعادلة التفاضلية :

هي علاقة تساوي بين متغيرين مستقل وليكن x ومتغير تابع وليكن$y(x)$ واحد أو أكثر من المشتقات التفاضلية $y'\ y''$ إي أنها علي الصورة العامة

ومن هذه المعادلة تسمى معادلة تفاضلية عادية إذا إحتوى علي توابع ذات متغير مستقل واحد ومستقات هذا المتغير أما جزئية فهي تحتوي علي دوال رياضية لأكثر من متغير مستقل مع مستقاتها الجزئية (ليست محل دراستنا).

رتبة المعادلة :

هي أعلي معامل تفاضلي في المعادلة .

درجة المعادلة :

هي درجة أعلي معامل تفاضلي في المعادلة بشرط أن تكون جميع المعادلات التفاضلية خالية من القوة الكسرية([1]) .

(2-1-2) حل المعادلات التفاضلية :

كما درسنافي الكورسات او الفصول السابقة بعض أنواع المعادلات التفاضلية وسوف نذكر بعض منها للتذكر .

1/طريقة فصل المتغيرات :

الصورة العامة لها أو نضع المعادلة علي الشكل الأتي :

$$F(x)\,dx + g(x)dy = 0$$

ثم بعد ذلك نستخدم التكاملات المباشرة فيكون الحل

2/ المعادلة التفاضلية المتجانسة :

يقال أن المعادلة التفاضلية

$$M(x,t)\,dx + N(N,y)dy = 0$$

[1] - أ.د حسن مصطفى العويضي – المعادلات التفاضلية – دار النشر مكتبة الرشد – الطبعة الاولى – 1427هـ - 2006م – ص80.

متجانسة إذا كان كل من M, N دالة متجانسة في نفس الدرجة علماً بأن $F(X, y)$ دالة متجانسة من الدرجة n إذا كان

$$f(\lambda x \lambda y) = \lambda^2 f(x, y) \qquad \lambda \epsilon R$$

3/ معادلات تفاضلية عادية تؤول إلي معادلات متجانسة تكون هذه المعادلات التفاضلية العادية علي الصورة:

$$\frac{dy}{dx} = (a_1x + b_1y + c_1)/(a_2x + b_2y + c_2)$$

حيث أن $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ ثوابت

4/ المعادلات التفاضلية التامة :

المعادلات التفاضلية للدالة $f(x, y)$تكون علي الصورة:

$$df(x, y) = \frac{dy}{dx}dx + \frac{df}{dy}dy$$

إي أن

$$M(x, y)dx + w(x, y)dy = 0$$

أنها تامة إذا كان طرفها الأيسر تفاضلاً تاماً وإذا كان المعادلة تامة فإنه يوجد تابع $U(x, y)$

حيث أن $du = M(x, y)dx + w(x, y)dy$.

ويكون بالتالي $u(x, y) = c$ حيث c ثابت .

5/ المعادلات التفاضلية الخطية :

سوف نزكر علي هذه الجزئية ونفصلها لأنها موضوع بحثنا ، والمعادلة التفاضلية تكون خطية إذا كان المتغير التابع ومشتقاته من المعادلة من الدرجة الأولى ([1]).

فالصورة العامة للمعادلة التفاضلية الخطية من الرتبة الأولى تكون

$$\frac{dy}{dx} + P(x,y) = Qx$$

وتسمى خطية في y

والمعادلة من الرتبة الأولى خطية في x علي الصورة :

$$\frac{dx}{dy} + a(y)x = B(y)$$

تطبيق (2-1):

أوجد حل المعادلة :

$$x\frac{dy}{dx} + 2y = x^3$$

الحل :

نضع المعادلة علي الصورة :1) $\frac{dy}{dx} + p(x) = Q(x)$

[1] - أ.د حسن مصطفى العويضي – المرجع السابق – ص81-85.

إي أن $\frac{dy}{dx} + \frac{2}{x}y = x^2$ (2

بمقارنة مع (2) (1) نجد بأن

$$Q(x) = x^2, P(x) = \frac{2}{x}$$

نجد :

$$1 - \int p(x)dx = \int \frac{2}{x}dx = lnx^2$$

$$I(x) = e^{\int p(x)d(x)} = e^{lnx^2} = x^2$$

$$2 - \int u(x)Qxdx = \int x^2\, x^2 dx = \int x^4\, dx = \frac{1}{5}x^5$$

ويكون حل المعادلة المعطاه هو $I(y) = \int IQdx + C$

اي ان $xy^2 = \frac{1}{5}x^5 + c$

6/معادلات تفاضلية تؤول إلي خطية :

1/ **معادلة برنولي** :

تكون المعادلة علي الصورة : $\frac{dy}{dx} + P(x) = Q(x)y^n$

حيث $n \neq 0,1$ تسمى معادلة برنولي n عدد حقيقي ، وهذه المعادلة يمكن أن تتحول إلي معادلة خطية :

1/ بالقسمة علىy^nنجد أن :

$$y^{-n}\frac{dy}{dx} + p(x)y^{-n+1} = Q(x) \quad (1)$$

2/ نفرض أن $y^{-n+1} = z$ ثم باشتقاق الطرفين بالنسبة إلي x نحصل علي

$$dz/dx = (-n+1)y - n\,dy/dx$$

3/ بضرب طرفي (1)في $(-n+1)$وبالتعويض عن y بدلالة Z نجد أن

$$\frac{dz}{dx} + (-n+1)p(x)z = (-n+1)Q(x)$$

4/ نضع $(-n+1)Q(x) = qx,\ (-n+1)p(x) = p(x)$

نضع المعادلة في الصورة : $\frac{dz}{dx} + p(x)z = q(x)$

وهي معادلة تفاضلية خطية في z

5/ حل المعادلة هو $I(x)z = \int I(x)q(x)dx + c$

6/ ثم استبدال $Z = Y^{-n+1}$

$$I(x)y^{-n+1} = \int I(x)q(x)dx + c$$

حيث أن $I(x) = e^{\int p(x)dx}$

تطبيق(2-2):

$$dy + zxydx = xe^{-x^2}y^3dx$$

الحل :

يمكن وضع المعادلة علي الصورة

وهي معادلة برنولي ..

وبالضرب في y^{-3} نحصل علي

$$y^{-3}\frac{dy}{dx} + 2xy^{-2} = xe^{-x^2} \qquad (1)$$

بوضع $y^{-2} = z$ نجد أن

$$-2y^{-3}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

نضرب المعادلة (1) في -2 وبالتعويض عن y بدلالة z فيكون :

$$\frac{dz}{dx} - 4xz = 2xe^{-x^2}$$

وهي معادلة خطية علي الصورة :

$$\frac{dz}{dx} + p(x)z = q(x)$$

$$p(x) = -4x \quad , q(x) = 2xe^{-x^2}$$

$$\int p(x)\,dx = -2x^2$$

فيكون $\int I(x)\, q(x) dx = \int e^{-2x^2} \left(-2xe^{-x^2}\right) dx$

$$-2\int xe^{-3x^2}\, dx = \frac{1}{3}e^{-3x^2}$$

حل المعادلة علي الصورة

$$I(x)z = \int u(x)\, q(x) dx + c$$

اي أن $e^{-2x^2}z = \frac{1}{3}e^{-3x^2} + c$

وحيث ان $z = y^{-2}$ فيكون

$$e^{-2x^2}y^{-2} = \frac{1}{3}e^{-3x^2} + c \quad \text{او} \quad e^{x^2}y^{-2} = \frac{1}{3}ce^{3x^2}$$

تطبيق(2-3):

أو جد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$\frac{dy}{dx} - \left[1 + \frac{1}{x}\right] y = -2e^x y^2$$

الحل :

المعادلة المعطاه في صورة برنولي والضرب في y^{-2}

نحصل $y^{-2}\frac{dy}{dx} - \left[1 + \frac{1}{x}\right] y^{-1} = -2e^x$

نضع $z = y^{-1}$ فيكون y^{-2}

$$-y^{-2}\frac{dy}{dx} = \frac{dz}{dx}$$

وبضرب المعادلة في (1-) بالتعويض عن y بدلالة Z تصبح المعادلة علي الصورة :

وهي معادلة خطية الصورة

حيث $G(x) = 2e^{x} p(x) = 1 + \frac{1}{x}$

فيكون $\int p(x)dx = \int [1 + \frac{1}{x}]dx = x + \ln x$

$$I(x) = e^{x+lnx} = xe^{x}$$

بالتكامل التجزئة $dv = e^{2x}dx$ $u = 2x$

في الحل العام للمعادلة : $x^3 \frac{x}{xy-1} = -\frac{1}{4}x^4 + c$

$$xy - 1 = \frac{4x^4}{4c - x^4} xy \Rightarrow y = \frac{4x^3}{4c - x^4} + \frac{1}{x}$$

2/ معادلة ريكاتي :

تأخذ معادلة الصورة$\frac{dy}{dx} = p(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$

حيث P, Q, R دوال في X فقط

ونجد أن معادلة ريكاتي أعم من معادلة برنولي والمعادلة الخطية ،ولإيجاد حل معادلة ريكاتي لابد من أن نعلم حلا خاص وليكن Y_1 حيث $y_1 = y_1(x)$

ويكون الحل العام لمعادلة ريكاتي باستخدام التعويض $y = y_1 + \frac{1}{z}$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy_1}{dx} - \frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}$$

وبتعويض المعادلة $\frac{dy_1}{dx} - \frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} = p(x)\left[y_1 + \frac{1}{z}\right]^2 + Q(x)\left[y_1 + \frac{1}{z}\right] + R(x)$

$$\frac{dy_1}{dx} - \frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} = p(x){y_1}^2 + 2p(x)y_1\frac{1}{z} + p(x)\frac{1}{z^2} + Q(x)y_1 + Q(x)\frac{1}{z}$$

حيث أن y_1 حلاً خاصاً للمعادلة فإن :

$$\frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx} = 2p(x)y_1\frac{1}{z} + p(x)\frac{1}{z^2} + Q(x)\frac{1}{z}$$

وبالضرب علي z^2 نحصل علي

$$\frac{dz}{dx} + (2p(x)y_1 z + Q(x)z = -p(x)$$

وهي معادلة خطية في z

تطبيق (2-4):

أوجد الحل العام للمعادله

حيث $y = \frac{1}{x}$ حل خاص لها

الحل

بوضع المعادلة علي الصورة $\frac{dy}{dx} = y^2 + \frac{1}{x}y - \frac{3}{x^2}$

وهي معادلة ريكاتي $\frac{dy}{dx} = p(x)y^2 + Q(x)y + R(x)$

التي تتحول إلي لمعادلة الخطية:

$$\frac{dz}{dx} + p(x)y_1 + Q(x)z = -p(x)$$

حيث $Q(x) = \frac{1}{x}y_1 = \frac{1}{x}$ $\quad p(x) = 1$

إي أن $\frac{dz}{dx} + \left[\frac{2}{x} + \frac{1}{x}\right]z = -1$

حيث $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$

وهي معادلة خطية علي الصورة $\frac{dz}{dx} + \frac{3}{x}z = -1$

$$q(x) = -1 \qquad\qquad p(x) = \frac{3}{x}$$

$$\int p(x)d(x) = \int \frac{3}{x}dx = lnx^3$$

وبالتاليفإن $I((x) = e^{\ln x^3} = x^3$

وبذلك نحصل علي $\int I(x)q(x)d(x) = \int -x^3\,dx = \frac{1}{4}x^4$

إي أن حل المعادلة المعطاه هو $x^3 z = -\frac{1}{4}x^4 + c$:

حيث أن $y = \frac{1}{x} + \frac{1}{z}$

حل المعادلة $Iz = \int Iqdx + c$

إي أن:

$$xe^{2x}z = e^{2x}\left[x - \frac{1}{2}\right] + c$$

حيث أن $z \neq y^{-1}$

في الحل العام $\frac{x}{y}e^{x} = e^{2x}\left[x - \frac{1}{2}\right] + c$

تطبيق(2-5):

أوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :

$$2x^2\frac{dy}{dx} = (x-1)(y^2-x^2) + 2xy$$

حيث $y = x$ حل خاص لها

الحل :

بالتحقيق نجد أن $y = x$ حلاً للمعادلة في نفترض أن $y = x + \frac{1}{2}$

$$\frac{dy}{dx} = 1 - \frac{1}{z^2}\frac{dz}{dx}$$

حيث أن المعادلة معادلة ريكاتي في التعويض في المعادلة نجد أن :

$$2x^2\left[2 - z^2\frac{dz}{dx}\right] = (x-1)\left[\left(x+\frac{1}{z}\right)^2 - x^2\right] + 2x(x+\frac{1}{z})$$

$$2x^2 - 2\frac{x^2}{z^2}\frac{dz}{dx} = (x-1)\left[\frac{2x}{z} + \frac{1}{z^2}\right] + 2x^2 + \frac{2x}{x}$$

$$2x^2 - 2\frac{x^2}{z^2}\frac{dz}{dx} = 2\frac{x^2}{z} + \frac{x}{z^2} - \frac{2x}{z} - \frac{1}{z^2} + \frac{2x}{z}$$

$$\frac{dz}{dx} = -z - \frac{1}{2x} + \frac{1}{2x^2}$$

$$\frac{dz}{dx} + z = \frac{1}{2x^2} - \frac{1}{2x}$$

وهي معادلة خطية علي الصورة: $\frac{dz}{dx} + p(x)z = q(x)$

$$p(x) = 1 \qquad\qquad q(x) = \frac{1}{2}[\frac{1}{x^2} - \frac{1}{x}]$$

$$\int p(x)dx = x \Longrightarrow I(x) = e^x$$

$$\int I(x)q(x)dx = \frac{1}{2}[\frac{e^x}{x^2} - \frac{e^x}{x}]dx$$

توجد $\int \frac{e^x}{x} dx$ بالتجزئة

$u = \frac{1}{x}$, $dv = e^x$, $du = \frac{1}{x^2}dx, v = e^x$

$$\int I(x)q(x)d(x) = \frac{1}{2}[\int \frac{e^x}{x^2}dx - \frac{e^x}{x} - \int \frac{e^x}{x^2}dx]$$

$$= -\frac{1}{2}\frac{e^x}{x}$$

إي أن حل المعادلة علي الصورة

$$= \int 1(x)q(x)dx + c$$

$$e^x z = -\frac{1}{2}\frac{e^x}{x} + c$$

$$y = x + \frac{1}{z} \Longrightarrow \frac{1}{z} = y - x \Longrightarrow z = \frac{1}{y - x}$$

إي أن الحل العام للمعادلة يكون (1):[1]

$$\frac{e^x}{y-x} = \frac{1}{2}\frac{e^x}{x} + c$$

(2-2) تحويل لابلاس

(2-2-1) تعريفات :

1/ تحويل لابلاس : هو تحويل تكاملي عند تأثيره علي الدالة يحولها إلي دالة أخرى مختلفة تماماً عن الدالة الأصلية .

2/ وتحويل لابلاس يعني تحويل المتغير المستقل للدالة الأصلية إلي المتغير آخر وبالتالي يتغير نطاق ومدى الدالة الأصلية .

3/ يحول شكل المقعد إلي شكل اخر أبسط وأسهل .

4/ يعرف تحويل لابلاس للدالة $f(t)$ ويرمز له بالرمز $f(t)$:

علي أنه:

5/ من التعريف السابق نستنتج أن تحويل لابلاس ماهو إلا مؤشر تكاملي للدالة $f(t)$ ويحولها إلي دالة أخرى $f(s)$ وأيضاً هو مؤشر تكاملي متصل ومؤشر تقاربي .

[1]- أ.د حسن مصطفى العويضي – المرجع السابق – ص 86-90.

6/ هو تحويل معرف كتامل علي المدى من العنصر إليها لانهاية ([1]).

(2-2-2) خواص تحويلات لابلاس :

لتحويل لابلاس الخصائص التالية حيث نفرض أن :

$$f(s) = [f(t)]$$

1/ الخاصيه الخطية

$$\mathcal{L}[c_1 + f(t) + c_2 g(t)] = c_1\mathcal{L}(t) + c_2\mathcal{L}[g(t)] = c_1 f(x) + c_2 G(x)$$

تطبيق (2-6) :

أوجد تحويل لابلاس للدالة الأتية :

الحل:

$$\mathcal{L}[3\sin 5t - 2\cos 4t] = \boldsymbol{\mathcal{L}}[3\sin 5t] - \boldsymbol{\mathcal{L}}[2\cos 4t]$$

$$= 3\boldsymbol{\mathcal{L}}\,[sin\,5t] - 2\boldsymbol{\mathcal{L}}\,[cos\,2t]$$

$$= -\frac{25}{s+16} = \frac{15}{s^2+25}$$

[1]- د. أميل صبحي سعد شكر الله – المعادلات التفاضلية العادية وتحويلات لابلاس – القاهرة دار النشر بالجامعات – ط1 2007- ص58.

2/ خاصية الانتقال الأول "الإزاحة " :

$$\boldsymbol{\mathcal{L}}[e^{at}f(t)] = f(s-a)$$

تطبيق (2-7):

أوجد التحويل لابلاس للدالة e^{kt}

$$= \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t) dt$$

بما أن $f(t) = e^{kt}$

$$= \mathcal{L}[e^{kt}] = \int_0^\infty (e^{-st})(e^{kt}) dt$$

$$\mathcal{L}[e^{kt}] = \int_0^\infty e^{-(s-k)} dt = [\frac{e^{-(s-k)t}}{-(s-k)}]_0^\infty$$

$$= \frac{O}{-(s-k)} + \frac{e^0}{s-k} = \frac{1}{s-k}$$

$$\mathcal{L}[e^{-kt}] = \frac{1}{s+k}$$

حيث ان k هو ثابت

3/ خاصية الانتقال الثاني :

$$g(t) = \begin{cases} f(t-a), & t > a \\ 0, & t < a \end{cases}$$

فإن:

$$\mathcal{L}[g(t)] = e^{-as} f(s)$$

$$f(x) = \begin{cases} x & 0 < x < 4 \\ 6 & x > 4 \end{cases}$$

$$\mathcal{L}[f(x)] = \int_0^\infty e^{-sx} f(x)dx = \int_0^4 e^{-sx}\, xdx + \int_4^\infty e^{-sx}\, 6dx$$

$$= \left[\frac{-xe^{-x}}{s} - \frac{e^{-sx}}{s^2}\right]_0^4 - \left[\frac{6e^{-sx}}{s}\right]_4^\infty$$

$$= \frac{2}{s} e^{-4s} - \frac{e^{-4s}}{s^2} - \frac{1}{s^2}$$

4/ خاصية تغير المقياس :

$$\mathcal{L}[f(at)] = \frac{1}{a} f(\frac{s}{a})$$

$$\int (at)[f(t)] = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt = f(s)$$

$$\mathcal{L}[fat] = \int_0^\infty e^{-st} fa(t)dt$$

$$U = at \quad t = 0 \to \infty \quad du = adt \quad u = 0 \to \infty$$

$$\mathcal{L}[f(a.t)] = \int_0^\infty e^{\frac{-s}{a}u} f(u) \frac{du}{a}$$

$$= \frac{1}{a} \int_0^\infty e^{\frac{-s}{a}u} f(u) du$$

6/ خاصية الضرب معامل t^n

$$f(s) = \mathcal{L}[f(t)] = \int_0^\infty f(t)\, e^{-st} dt$$

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d}{ds^n} f(s)$$

n = 1,2,3........

تطبيق(2-8):

أوتحويل لابلاس للدالة :

$$z(t) = t^2 e^{-3t}$$

الحل

ناخذ

$$\mathcal{L}[t^n f(t)] = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} [\mathcal{L}[e^{-3t}] f(t) = e^{-3t}$$

$$n = 2$$

$$\frac{d^2}{ds^2}[\frac{1}{s+3}]$$

$$\frac{d}{ds} = \frac{-1}{(s+3)^2} = \frac{2}{(s+3)^3}$$

6/ خاصية القسمة عليt

$$\mathcal{L}\left[\frac{f(t)}{t}\right] = \int_{f}^{\infty} f(s)\, ds$$

السلوك عندما $s \to \infty$

$$\lim_{s\to\infty} f(s) = 0$$

تطبيق(2-9):

أوجد : $\mathcal{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right]$

الحل:

$$\mathcal{L}[\sin at] = \frac{1}{s^2+1}$$

وبما أن نهاية $1 = \lim_{t\to 6}\left[\frac{sint}{t}\right]$ إي أن النهاية هي حقيقية وموجوده وبتطبيق

$$\mathcal{L}\left[\frac{\sin t}{t}\right] = \int_s^{\infty} \frac{du}{u^2 + 1} = [\tan^{-1} u]_s^{\infty} = \tan^{-1}\frac{1}{s}$$

7/ خاصية تحويل التكامل([1]) :

$$\mathcal{L}\left[\int_0^1 (f(u)du\right] = F\frac{(s)}{s}$$

تطبيق(2-10):

أوجد :

$$\mathcal{L}\left[\int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{1}} \sin 2udu\right]$$

الحل:

بما أن :

$$\mathcal{L}[\sin 2udu] = \frac{2}{s^2 + 4}$$

فيكون :

$$\mathcal{L}[\int_0^1 sin2udu] = \frac{2}{s(s^2 + 4)}$$

[1]- د.أمجد شحادة م.محمد رياض – دار النشر مصر العربية – ط1 – ص90-91 – (94-97).

8/ خاصية تحويل المشتقة :

بالنسبة للمشتقة الأولى :

إذا كان $f(t)$ متصل علي $[0, N]$ وذو رتبة أسية لجميع $t > n$ وإذا $f(t)$ متصلة علي أجزاء

$[0, N]$فإن :

$$\mathcal{L}[f(t)] = sf(s) - f(0)$$

تطبيق (2-11) :

جد تحويل لابلاس للدالة الأتية بواسطة المشتقات

$$f(t) = e^{2t} \quad ,f((t) = e^{2t}, f'(x) = 2e^{2t} \Rightarrow a = 2$$

$$\mathcal{L}[f'(t)] = s\mathcal{L}[f(t) - f(0)$$

$$\mathcal{L}[2e^{2t} = s\mathcal{L}[e^{2t}] - f(0)$$

$$2\mathcal{L}[e^{2t}] - s\mathcal{L}[e^{2t}] = -1$$

$$\mathcal{L}[e^{2t}](2 - s) = -1$$

$$\mathcal{L}[e^{2t}] = \frac{-1}{2 - s} = \frac{1}{s - 2}$$

والمشتقة الثانية : $\mathcal{L}[f(t)] = s^2 f(s) - sf(0) - f'(0)$

تطبيق(2-12):

جد تحويل لابلاس للدالة التالية [1]:

$$g(t) = cosat \Rightarrow g'(t) = -asinat$$

$$\mathcal{L}[g''(x)] = -a^2cosat$$

$$[\mathcal{L}[g''(t)] = s^2\boldsymbol{\mathcal{L}}[cosat] - s(cos0) - (-\text{asin}(0))$$

$$-a^2\mathcal{L}cosat = s^2\boldsymbol{\mathcal{L}}[cosat] - s$$

$$\mathcal{L}[\cos at](s^2 + a^2) = s$$

$$\mathcal{L}[\cos at] = \frac{s}{s^2 + a^2}$$

(2-2-3) تحويل لابلاس العكسي :

تعريف :

يعرف تحويل لابلاس العكسي للدالة f(s) ويرمز له بالرمز $\mathcal{L}^{-1}$ علي أنه مؤثر عكسي للمؤثر التكاملي $\mathcal{L}$

فإذا أثر المؤثر$\mathcal{L}$علي الدالة f(t) فحولها إلي الدالة f(s) فإن المؤثر العكسي$\mathcal{L}^{-1}$

يؤثر علي الدالة f(s) فيحولها إلي شكلها الأصلي f(t) إي أن :-

$$\mathcal{L}(f(t) = f(t) \Leftrightarrow \mathcal{L}^{-1}(f(s)) = f(t)$$

---

[1]- مواري ر.شبيجيل – الرياضيات المتقدمة للهندسين والمعلين – دار ماكجروهيل للنشر مصر – الطبعة العربية 1982م – ص129-130.

خواص تحويل لابلاس العكسي :

في حالة وجود كل من تحويلات $(\mathcal{L}f(t)$ ، $\mathcal{L}(g)$ للدالتين $g(t)$ ،$f(t)$ وتحويل لابلاس العكسي لـ :

$\mathcal{L}^{-1}(f(s))$ و$\mathcal{L}^{-1}G(s)$ ، فإن :

$$(1)\quad \mathcal{L}((f(t)+g(t))=\mathcal{L}(f(t))+\mathcal{L}(g(t))=f(s)+G(s)$$

$$(2)\qquad \mathcal{L}(af(t))=a\mathcal{L}\big(f(s)\big)=af(s)$$

$$(3)\mathcal{L}^{-1}(f(s)+G(s))=\mathcal{L}^{-1}(f(s))+\mathcal{L}^{-1}(G(s))$$

$$=f(t)+g(t)$$

$$(4)\mathcal{L}^{-1}(af(s)=a\mathcal{L}^{-1}(f(s))=af(t)$$

5/ الشرط الكافي لوجود تحويل لابلاس :

إذا كانت الدالة $f(t)$ متصلة علي فترات أو متقطعة الأتصال علي كل فترة محدودة :

$$[0\ ,b];b>0$$

وكان :

$$|f(t)|\le Ce^{Bt}\ \ \forall\ t\ge t_0$$

حيث أنt_0، B، C ثوابت فإنه يوجد للدالة $f(t)$ تحويل لابلاس $\mathcal{L}(f(t))$ وذلك فإن لكل

. $S>b$

ولكن ليس بالضرورة أن تكون للدالة متصلة علي فترة محمدة $[0, b]$وذلك لأن هذه الدالة تعطي قيمة لانهائية عند$t = 0$.

تطبيق(2-13) :

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$$

الحل:

$$\int_0^b \frac{1}{\sqrt{t}} dt = \lim_{a\to 0} \int_a^b t^{-2} = 2\sqrt{t}_a^b$$

$$\lim_{a\to 0}\left[2\sqrt{b} - 2\sqrt{a}\right] = 2\sqrt{b}$$

تحويل لابلاس لهذه الدالة هو :

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-st} dt = \int_0^\infty t^{-\frac{1}{2}} e^{-st} dt$$

لإجراء هذا التكامل نستخدم التكامل بالتعويض :

$$st = y \;\; \Rightarrow t = \frac{y}{s}, dt = \frac{dy}{s}$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = s^{-\frac{1}{2}} \int_0^\infty y^{-\frac{1}{2}} e^{-y} = \frac{1}{\sqrt{s}} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$$

وهذا الرمز Γ يعني دالة جاما الذي درسناه مسبقا وبما أن دالة جاما تعرف علي أنها التكامل المعتل أو الشاذ

$$\Gamma(x) = \int_{o}^{\infty} y^{x-1} e^{-y} dy ; \Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\Pi}$$

$$\mathcal{L}\left(\frac{1}{\sqrt{t}}\right) = \frac{1}{\sqrt{s}}\sqrt{\Pi} = \sqrt{\frac{\Pi}{s}} \; ; s > 0$$

تطبيق(2-14):

أوجد تحويل لابلاس العكسي للدالة التالية:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-7s}}{5s+6}\right]$$

الحل:

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-7s}}{5s+6}\right] = e^{-7s} f(s) \qquad ; f(s) = \frac{1}{5s+6}$$

$$a = 7$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-2s}}{5s+6}\right] = w(t-7) f(t-7)$$

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}(f(s)) = \mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{5s+6}]$$

$$= \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+\frac{6}{5}}\right] = \frac{1}{5}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s-(\frac{-6}{5})}\right] = \frac{1}{5} e^{-\frac{6}{5}t}$$

$$f(t-7) = \frac{1}{5} e^{-\frac{6}{5}(t-7)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{e^{-7s}}{5s+6}\right] = w(t-7)e^{-\frac{6}{5}(t-7)}$$

تطبيق(2-15):

أو جد تحويل لابلاس العكسي للدالة التالية :

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(-3s+2)e^{-2s}}{s^2-2s+6}\right]$$

الحل :

$$\mathcal{L}^{-1}[e^{-2s}f(s)] = w(t-2)f(t-2)$$

حيث :

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(-3s+2)}{s^2-2s+6}\right] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-3(s-1)-1}{(s-1)^2+5}\right]$$

$$= -3e^t\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2+5}\right] - \frac{1}{\sqrt{5}}e^t\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{\sqrt{5}}{s^2+5}\right]$$

$$= \left[-3e^t\cos\sqrt{5}\,t - \frac{e^t}{\sqrt{5}}\sin\sqrt{5}\,t(t-2)\right]$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{(-3s+2)e^{-25}}{s^2-2s+6}\right] = e^{t-2}w(t-2)$$

$$= \left[-3\cos(\sqrt{5}\,(t-2)) - \frac{1}{\sqrt{5}}\sin\left(\sqrt{5}(t-2)\right)\right]$$ [1]

الفصل الثالث

(1-3) مقدمة :-

في الفصل السابق تحدثنا عن المعادلات التفاضلية العادية من الرتبة الاولى و تحويل لابلاس ومعكوساته وان تحويل لابلاس ذات فائدة كبيرة وخاصة في حل المعادلات التفاضلية ذات المعاملات الثابته معالشروط الابتدائيه المرافقة وهذا يؤدي الي معادلة جبرية في تحويل لابلاس للمعادلة المطلوبة,وبالحل نحصل على تحويل لابلاس ثم اجراء التحويل العكسي وبذلك نحصل على الحل المطلوب.

وفي هذا الفصل سوف نتحدث عن المعادلات التفاضلية من رتب عليا مع وجود بعض الطرق المساعدة في حلها مثل طريقة المؤثر وطريقة البارامترات وبعض النظريات.

(2-3)المعادلات التفاضلية من الرتبة النونية:-

(1-2-3) تعريفات:

اذا كان y^n يرمزللمشتة النونية $y(n)$ فان المعادلة التفاضلية من الرتبة النونية يمكن وضعها الشكل $F(x, y, y', y'', \dots\dots, y^{(n)}) = 0$ حيث $y(n)$ هو الحل الذى نبخث عنه .

تعريف الحل العام :-

اذا كان $y'' + a_1y' + a_2y = 0$ ———————— (1) و y_1, y_2 حلين مستقلين للمعادلة(1) فان $y = c_1y_1 + c_2y_2$ يمثل الحل العام للمعادلة(1) حيث c_1, c_2 ثابتين اختياريين.

المعادلات التفاضلية الخطية من الرتب العليا "الرتبة النونية " :-

---

[1]- أ.د اميل صبحي سعد شكر الله – المرجع السابق – ص209-220.

تكون المعادلة خطية من الرتبة النونية اذا امكن وضعها على الشكل الاتي:

$$y^{(n)} + p_{n-1}(x)y^{(n-1)} + p_{n-2}(x)y^{(n-2)} + \cdots \ldots \ldots + p_1 y' + p_0(x)y = f(x); x \in I$$

وكذلك اذا كانت الدالة $f(x)$ غير صفرية على الاقل لقيمة واحده من قيم المتغير المستقل x سميت معادلة غير متجانسة .

اما اذا كانت الدالة $f(x)$ صفرية لجميع قيم المتغير المستقل x في الفترة I سميت معادلة متجانسة.

حل المعادلة التفاضلية الخطية المتجانسة من الرتب العليا وتكون على الصورة الاتية :-

$$a_0 y^n + a_1 y^{n-1} + a_2 y^{n-2} + \cdots \ldots \ldots . + a_{n-1} y' + a_n = 0$$

نفرض ان $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة المعطاه ,فتكون المعادلة المساعدة هي:

والتى نحصل منها على الجذور $a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + \cdots \ldots \ldots . a_{n-1}\lambda + a_n = 0$

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots \ldots \ldots , \lambda_n$$

ونحصل على الحلول المختلفة حسب العلاقة بين تلك الجذور :

1-اذا كانت $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3 \neq \cdots \ldots \ldots . \neq \lambda_n$ (اعدادا حقيقية)

فان الحل العام هو:-

2-اذا كانت جميع الجذور حقيقية وواحد من الجذور مكرر K من المرات

الحل العام يكون $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots \dots \dots = \lambda_k, \lambda_{k+1} \neq \cdots \dots .. \neq \lambda_n$

$$y = [c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \cdots \dots \dots + c_k x^{k-1}] e^{\lambda x} + c_k e^{\lambda(k+1)x} + \cdots \dots \dots + c_n x^{\lambda n x}$$

3-اذا كانت الجذور اعداد تخيلية:-

$$y = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \propto + iB$$

فانه يوجد $\lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6 = \propto - iB$ ويكون الحل العام الناظر لتلك الجذور

$$y = e^{\propto x}[(c_1 + c_2 x + c_3 x^2) \cos Bx + (c_4 + c_5 x + c_6 x^2) \sin Bx]$$

(3-2) المعادلات الخطية المتجانسة:-

تطبيق(3-1):

اوجد الحل العام للمعادلة:-

$$y'' + 9y = 0$$

الحل:

في هذه الحالة نجد ان $B = 9$, $A = 0$ وبالتالي فان المعادلة المميزة هي:

$$\lambda^2 + 9 = 0 \;, \lambda_1, \lambda_2 = 0 \pm 3i$$

∴ الجذران تخيليان

$$y_c(x) = e^{0(x)}(c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x))$$

$$= c_1 \cos(3x) + c_2 \sin(3x)$$

اما اذا كان الجذران حقيقيان $\lambda_2 = +3$, $\lambda_1 = -3$

فان:

$$y_c(x) = c_1 e^{-3x} + c_2 e^{3x}$$

تطبيق(3-2):

اوجد الحل العام للمعادلة:-

$$y^{(4)} + 3y^{(3)} - 16y'' + 12y' = 0$$

الحل:

المعادلة المميزة هي :

$$\lambda^4 + 3\lambda^3 - 16\lambda^2 + 12\lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda^3 + 3\lambda^2 - 16\lambda + 12) = 0$$

بالتحليل نجد ان $\lambda(\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 6) = 0$

الجذور الاربعة هي $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = 1, \lambda_3 = 2, \lambda_4 = -6$

الحل العام هو:

$$y_g(x) = c_1 + c_2 e^{x} + c_3 e^{2x} + c_4 e^{-6x}$$

(3-3)المعادلات الخطية غير المتجانسة :-

وتكون على الصورة الاتية :

$$n_0 y^n + a_1 y^{n-1} + \cdots \ldots \ldots a_{n-1} y + a_n = f(x) a_0 \neq 0$$

تطبيق(3-4):

اوجد حل المعادلة:

$$y^{(3)} + 2y'' - 3y' = 4e^x - 3\cos(2x)$$

الحل:

المعادلة المميزة هي:

$$\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 + 2\lambda - 1) = 0$$

الجذور هي: $\lambda_1 = 0 \ , \ \lambda_2 = -1 + \sqrt{2} \ , \ \lambda_3 = -1 - \sqrt{2}$

الحل العام هو:- $y_c = c_1 + c_2 e^{(-`+\sqrt{2})x} + c_3 e^{(-1-\sqrt{2})x}$

ويمكن الحصول على الحل الخاص باستخدام طريقة المقارنة للمعاملات ونفرض الحل الخاص على الشكل

$$y_p(x) = Ae^x + B\cos(2x) + C\sin(2x)$$

وبالتفاضل نحصل على :-

$$y'_p(x) = Ae^x - 2B\sin(2x) + 2C\cos(2x)$$

$$y''_p(x) = Ae^x - 4B\cos(2x) - 4\sin(2x)$$

$$y'''_p(x) = Ae^x + 8B\sin(2x) - 8C\cos(2x)$$

بالتعويض عن y'''_p , y''_p , y'_p في المعادلة الاصلية نجد ان :-

$$A = 2\ , \qquad B = \frac{6}{41}\ , \qquad C = \frac{15}{82}$$

الحل الخاص هو $y_p = 2e^x + \frac{6}{41}\cos(2x) + \frac{15}{82}\sin(2x)$

وبالتالي الحل العام هو ([1]):

$$y_c(x) = c_1 + c_2e^{(-1+\sqrt{2})} + c_3e^{(-1-\sqrt{2})} + 2e^x + \frac{6}{41}\cos(2x) + \frac{15}{82}\sin(2x)$$

(4-3) طريقة البارامترات (الوسائط- الثوابت):-

تعريف:

تستخدم هذه الطريقة بصفة عامة لايجاد الحل الخاص y_p للمعادلة التفاضلية وذلك بمعلومية حل المعادلة المتجانسة y_n اننا نعتبر الثوابت الاختيارية دوال في المتغير x

والان سوف نشرح هذه الطريقة على معادلات تقاضية من الرتبة الثانية مع ملاحظة انه يمكن تطبيقها على المعادلات التفاضلية ذات الرتب العليا .

$$y'' + a_1y' + a_2y = F(x) - - - - - - - - (1$$

[1]- أ.د أميل صبحي سعد شكر الله – المرجع السابق – ص59-71.

حيث a_2 , a_1 ثابتان و $F(x)$ دالة في المتغير المستقل x وتكون المعادلة المتجانسة هي :-

بافتراض ان حل المعادلة المتجانسة على الصورة $y_n = Ay_1 + By_2$

حيث كل من y_2 , y_1 حلين للمعاد لة المتجانسة (2)

والان لايجادالحل الخاص y_p للمعادلة التفاضلية فاننا نعتبر ان كل من A, B دوال في المتغير x ويكون

الحل الخاص على الصورة :

$$y_n = A(x)y_1 + B(x)y_2 --------- (3$$

بتفاضل(3) بالنسبة ل $\boldsymbol{x}$ نحصل على :

$$y'_p = Ay'_1 + By_2 + A'y_1 + B'y_2$$

نختا ر A, B بحيث ان :

$$A'y_1 + B'y_2 = 0 ----------- (4$$

ومنها يكون $y'_p = Ay'_1 + By'_2$ وبالتفاضل مرة اخرى بالنسبة ل x نحصل على :

$$y''_p = Ay''_1 + A'y'_1 + By''_2 + B'y'_2$$

وبالتعويض عن كل من y''_p, y'_p, y_p في المعادلة التفاضلية (1) نحصل على :

$$Ay''_1 + A'y_2 + By''_2 + B'y'_2 + a_1(Ay'_1 + By'_2) + a_2(Ay_1 + By_2) = F(x)$$

ومنها :-

$$A(y''_1 + a_1y' + a_2y_1)A'y_1 + B(y''_2 + a_1y'_2 + a_2y'_2 + a_2y_2) + A'y'_1 + B'y'_2 = F(x)$$

حيث كل من y_2 , y_2 حلين للمعادلة المتجانسة (2) فان

$$y'_1 + a_1y'_1 + a_2y_1 = 0$$

$$y''_2 + a_1y'_2 + a_2y_2 = 0$$

بذلك يكون :- $A'y'_1 + B'y''_2 = F(x) -------- (5$

وبحل المعادلتين (4) و(5) في الدالتين A , B فاننا نحصل على كل منها وبمعرفتهما نكون قد تحصلنا على الحل الخاص (3) وبذلك يمكن ايجاد الحل العام.

$y_c = y_n + y_p$ للمعادلة التفاضلية (1) مع ملاحظة ان هذه الطريقة تستخدم بصفة خاصة اذا كانت الدالة $F(x)$ على احدى الصور:-

$$\frac{e^x}{x}, \sec x, \cot x, \tan x, \ln x, \sin^{-1} x, \dots \dots \dots$$

والان سوف نطبق هذه الطريقة في التطبيق التالي :-

تطبيق(3-5) :

اوجد الحل العام للمعادلة التفاضلية :-

$$y'' - y = \frac{2}{1 + e^{x}}$$

الحل:

المعادلة المتجانسة هي : $y'' - y = 0$

نفرض ان حلها هو $y = e^{\lambda x}$ بالتفاضل نجد ان حل المعادلة المساعدة هو :- $\lambda^2 - 1 = 0$

وبالتحليل نجد ان جذري المعادلة هما: $\lambda_1 = 1 \;,\; \lambda_2 = -1$

ويكون حل المعادلة المتجانسة هو: $y_n = Ae^{x} + Be^{-x}$

نفرض ان الحل الخاص y_p على الصورة: $y_p = A(x)e^{x} + B(x)e^{-x}$

حيث $A(x), B(x)$ دالتين في x نفاضل بالنسبة ل x

نختار كل من B , A بحيث ان :-

$$Ae^{x} + Be^{-x} = 0$$

ومن هذا يكون : $y'_p = Ae^{x} - Be^{-x}$

نفاضل مرة اخرة بالنسبة ل x: $y''_p = Ae^{x} + A'e^{x} + Be^{-x} - B'e^{-x}$

بالتعويض عن كل من y_p, y'_p, y''_p في المعادلة المعطاه نجد ان :-

$$Ae^{x} + A'e^{x} + Be^{-x} - B'e^{-x} - Ae^{x} - Be^{-x} = \frac{2}{1+e^{x}}$$

ومنها نجد ان :-

$$A'e^{x} + B'e^{-x} = \frac{2}{1+e^{x}} -------(2$$

بجمع المعادلتين (1) و(2) نجد ان :- $2A'e^{x} = \frac{2}{1+e^{x}}$

نفصل المتغيرات : $dA = \frac{dx}{e^{x}(1+e^{x})}$

نكامل :-

$$\int dA = \int \frac{dx}{e^{x}(1+e^{x})} = \int \frac{dx}{e^{x}} - \int \frac{dx}{1+e^{x}}$$

$$= -e^{-x} - \int \frac{e^{-x}dx}{e^{-x}+1}$$

ومنها:

$$A = -e^{x} + \ln(1+e^{x})$$

بطرح (2) من (1): $B'e^{-x} = \frac{-1}{1+e^{x}}$

وبفصل المتغيرات: $\int dB = -\int \frac{e^{x}}{1+e^{x}} dx$

$$B = -\ln(1+e^{x})$$

$$y_p = e^x(-e^x + \ln(1+e^x)) - e^{-x}\ln(1+e^x)$$

$$= -1 + e^x\ln(1+e^{-x}) - e^{-x}\ln(1+e^x)$$

.: الحل العام هو:-

$$y_c = Ae^x + Be^{-x} - 1 + e^x\ln(1+e^{-x}) - e^{-x}\ln(1+e^x)$$

حيث A , B ثابتان اختيا ريان .

نظرية (1) :-

اذا كان $y = e^{\lambda x}$ حلا للمعادلة المتجانسة فان λ تكون حلا للمعادلة الجبرية :

$$a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots \ldots \ldots + a_n = 0$$

البرهان:

من الحل $y = e^{\lambda x}$ بالتفاضل نجد ان :-

$$\boldsymbol{y' = \lambda e^{\lambda x}, y'' = \lambda^2 e^{\lambda x}, y''' = \lambda^3 e^{\lambda x}, \ldots \ldots \ldots, y^n = \lambda^n e^{\lambda x}}$$

ومن هذه التفاضلات بالتعويض المباشر في المعادلة نحصل على المعادلة الجبرية

$$a_0\lambda^n e^{\lambda x} + a_1\lambda^{n-1}e^{\lambda x} + a_2\lambda^{n-2}e^{\lambda x} + \cdots \ldots \ldots . + a_n e^{\lambda x} = 0$$

$$\Rightarrow (a_0\lambda^n + a_1\lambda^{n-1} + a_2\lambda^{n-2} + \cdots \ldots \ldots + a_n) = o$$

وهذه تسمى المعادلة الجبرية للدوال المكملة او المعادلة المساعدة او المعادلة المميزة ([1]) .

[1]- أ.د حسن مصطفى العويضي –المرجع السابق – ص 95-100.

(3-5) طريقة المؤثر التفاضلي :

تعريف:-

يعرف المؤثر التفاضلي من الرتبه الأولي على أنه المؤثر الذي يأخذ الشكل$D = \frac{d}{dx}$ وإذا أثر على داله

ماكان ناتج المشتقه الاولى dx لها.

بالمثل يمكن تعريف المؤثر ات التفاضليه من الرتبه الثانيه والثالثه ....,

يمكن تعريف الرتبه النونيه على أنها :-

$$D^2 = \frac{d^2}{dx^2} \qquad ; D^3 = \frac{d^3}{dx^3} \qquad , \dots \dots . D^n = \frac{d^n}{dx^n}$$

$$L(D) = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + D_{n-2} D^{n-2} + \cdots + a_0$$

حيث:

$$[a_i]_{i=0}^{n}$$

هي معاملات $L(D)$

نظريه(2):-

إذا كان $L(D)$ مؤثر تفاضلي فإ ن النظريات الأتية كلها صحيحه

$$1 - L(D)e^{ax} = e^{ax}l(a)$$

البرهان:-

$$L(D)e^{ax} = (a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots + a_0)e^{ax}$$

$$= a_na^ne^{ax} + a_{n-1}a^{n-1}e^{ax} + \cdots a_1ae^{ax} + a_0e^{ax}$$

$$e^{ax}(a_na^n + a_{n-1}a^{n-1} + \cdots + a_0) = e^{ax}L(a)$$

$$2 - L(D)e^{ax}f(x) = e^{ax}L(D + a)f(x)$$

البرهان:-

$$D(e^{ax}f(x) = e^{ax}Df(x) + ae^{ax}f(x)$$

$$e^{ax}(Df(x) + af(x) = e^{ax}(D + a)f(x)$$

$$\therefore L(D)e^{ax}f(x) = (a_nD^n + a_{n-1}D^{n-1} + \cdots a_1D + a_0)e^{ax}f(x)$$

$$= e^{ax}(a_n(D + a)^n + a_{n-1}(D + 1)^{n-1} + \cdots + a_0)f(x)$$

$$= e^{ax}(a_n(D + a)^n + a_{n-1}(D + a)^{n-1} + \cdots + a_0)f(x)$$

$$= e^{ax}L(D + a)f(x)$$

$$3 - L(D^2)\cos 3t = L(-k^2)\cos kt$$

البرهان:-

$$D^2(\cos(kt)) = D(-k\sin kt) = -k^2\cos(kt)$$

تطبيق (3-6):

أوجد الحل العام للمعادله التفاضليه:-

$$y'' - 7y' + 12y = 8e^{3x}\sin(3x)$$

الحل

المعادلة المميزه تعطى :-

$$\lambda^2 - 7\lambda + 12 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 3, \lambda_2 = 4$$

إذا الحل الممكن هو

$$y_c = c_1e^{3x} + c_2e^{4x}$$

والحل الخاص هو

$$y_p = \frac{1}{D^2 - 7D + 12}$$

$$= \frac{8e^{3x}}{(D+3)^2 - 7(D+3) + 12} \sin(2x) = \frac{8e^{3x}}{D^2 - D} \sin(2x)$$

$$= \frac{2}{5} e^{3x} (2\cos(2x) - 4\sin(2x)$$

إذا الحل العام للمعادله المعطاه هو:-

$$y_p = c_1 e^{3x} + c_2 e^{4x} + \frac{2}{5} e^{3x} (2\cos(2x) - 4\sin(2x)$$

نظريه(3):-

هذه النظريه تدرس طريقة إيجاد الحل الخاص y_p عندما تكون $Q(x)$ عباره عن دالتين إحداهما الدالهX والأخرى داله ما ولتكن $h(x)$ أي ان:-

$$Q(x) = x.h(x)$$

فإن االخاص لها يكون على الصوره

$$y_p = \frac{1}{f(D)} xh(x) = x \frac{1}{f(D)} h(x) - \frac{f(D)}{[f(D)]^2} h(x)$$

البرهان:-

بالتأثير على الداله بالمؤثر $\frac{1}{F(D)}$ عدد من المرات نحصل على

$$Dxh(x) = xDh(x) + h(x)$$

$$D^2xh(x) = xD^2(x) + 2Dh(x)$$

$$D^nxh(x) = xD^2h(x) + \lambda D^{n-1}h(x)$$

إذا كانت صورة المؤثر هى:

$$F(D) = \sum_{\lambda=0}^{n} a_\lambda D^\lambda$$

فإن:-

$$F(D)xh(x) = \sum_{\lambda=0}^{n} a_\lambda D^\lambda xh(x)$$

$$= \sum_{\lambda=0}^{n} a_\lambda (xD^\lambda h(x) + \lambda D^{\lambda-1}h(x)$$

$$\Rightarrow F(D)xh(x) = xF(D).h(x) + F'(D).h(x)$$

نفرض أن

$$h(x) = \frac{1}{F(D)} H(x)$$

بتعويض هذه العلاقه فى العلاقه السابقه:-

$$F(D)x\left[\frac{1}{F(D)}H(x)\right] = xH(x) + F'(D)\ldots\left[\frac{1}{F(D)}\right]H(x)$$

ومنها نحصل على:-

$$xh(x) = F(D)x\frac{1}{F(D)}h(x) - \frac{f'(D)}{f(D)}[H(x)]$$

بالتأثير على الطرفين بالمؤثر $\frac{1}{F(D)}$ نحصل على

$$\left[\frac{1}{F(D)}xh(x)\right] = x\frac{1}{F(D)}H(x) - \frac{F'(D)}{[F(D)]^2}[H(x)]$$

حيث أن الحل الخاص هو([1]):

$$y_p = \frac{1}{F(D)}xh(x) = x\frac{1}{F(D)}h(x) - \frac{F'(D)}{[F-(D)]^2} = h(x)$$

وهي العلاقه المطلوبه.

(3-6) قارن المعادلات الأتية بالطريقتين (الطريقة العادية – طريقة تحويل لابلاس):

تطبيق (3-7):

حل المعادلة التفاضلية الاتية

$$\frac{dT}{dt} + KT = 100K, \quad T(0)$$

حيث k ثابت

الحل: -

اولا: - حل المعادلة بالطريقة العادية: -

[1]- د. عبد الكريم عبد الحليم سليمان – المعادلات التفاضلية الجزء الاول – دار النشر مصر العربية – ص 107-115 (205-214) .

نفرض ان $p(t) = K$

$$I(t,T) = e^{\int Kdt} = e^{Kt}$$

نضرب المعادلة التفاضلية بالمعامل $I(t,T)$ فنحصل على

$$d(Te^{Kt}) = 100Ke^{Kt} \text{او} \; Te^{Kt} + Ke^{Kt}T = 100e^{Kt}$$

نكامل الطرفين فنحصل على $Te^{Kt} = \int 100Ke^{Kt}dt = 100e^{Kt} + c$

$$T = 100 + Ce^{-Kt} \Rightarrow 50 = 100 + c \quad \Rightarrow c = -50$$

ثانيا:-

حل المعادلة بإستخدام تحويل لابلاس:-

باخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة وبوضع($\mathcal{L}[T] = t(s)$

نحصل على $\mathcal{L}\left[\frac{dT}{dT}\right] + K\mathcal{L}[T] = 100K\mathcal{L}[1]$

$$t(s) = \frac{50}{s+K} + \frac{100K}{S(S+K)} \text{او} \; [st(s) - 50] + Kt(s) = 100K\left(\frac{1}{s}\right)$$

ناخذ تحويل لابلاس العكسي $T = \mathcal{L}^{-1}[st(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s+K}\right] + \left[\frac{100K}{S(S+K)}\right]$

نستخدم الكسور الجزئية $= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{50}{S+K} + \frac{100}{S} + \frac{-100}{S+K}\right]$

$$= \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{-50}{s+k} + \frac{100}{s}\right] = -50\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s+k}\right] + 100\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{s}\right]$$

$$\therefore -50e^{-Kt} + 100$$

تطبيق(3-8):

أوجد حل المعادلة الاتية :

$$\frac{dQ}{dt} + 0.04Q = 3.2e^{-0.04t}$$

الحل:-

اولا:- حل المعادلة بالطريقة العادية :-

نفرض ان:-

$$p(t) = 0.04 \text{ , و} I(T,Q) = e^{\int 0.04dt} = e^{0,04t}$$

نضرب المعادلة $I(t,Q)$

$$e^{0.04t}\frac{dQ}{dt} + 0.04e^{0.04t} \quad Q = 3.2 \text{ او} \frac{d}{dt}(Qe^{0.04t}) = 3.2$$

نكامل الطرفين $= Qe^{0.04t} = 3.2t + c$

$$\therefore Q = 3.2te^{-0.04t} + ce^{-0.04t} + ce^{-0.04t}$$

الحل هو $Q = 3.2te^{-0.04t} + ce^{-0.04t}$

ثانيا :-الحل باستخدام تحويل لابلاس:-

$$\frac{dQ}{dT} + 0.04Q = 3,2e^{-0.04t}, Q(0) = 0$$

الحل:-

باخذ تحويل لابلاس لطرفي المعادلة وبوضع $\mathcal{L}(Q) = q(s)$

$$\mathcal{L}\left[\frac{dQ}{dT}\right] + 0.04\mathcal{L}[Q] = 3.2\mathcal{L}[e^{-0.04t}]$$

$$= [sq(s) - 0] + [0.04q(s)] = 3.2\frac{1}{s + 0.04}$$ او $$q(s) = 3.2\frac{1}{(s + 0.04)^2}$$

ناخذ تحويل لابلاس العكسي

$$Q = 3.2\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1}{(s + 0.04)^2}\right] = 3.2te^{-0.04t}$$

الحل هو $3.2te^{-0.04\,t}$

تطبيق(3-9):

حل المعادلة التفاضلية الاتية

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 8\frac{dQ}{dt} + 25Q = 0$$

الحل :

أولاً : الطريقة العادية

المعادلة المميزة هي: $\lambda^2 + 8\lambda + 25 = 0$

نستخدم القانون العام في تحليل هذة المعادلة لانها من الدرجة الثانية لكي نحصل على جزري المعادلة

$$\lambda = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$a = 1, \quad b = 8, \quad c = 25$$

نعوض a, b, c في القانون $\lambda = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4(25)}}{2}$

$$\lambda = \frac{-8 \pm \sqrt{-36}}{2} = -4 \pm 3i$$

اذن جزري المعادلة تخيليان ومترافقان

$$Q = e^{-4t}(c_1 \cos 4t + c_2 \sin 3t) \qquad (1)$$

الحل الخاص هو (2) $Q_p = A_0 \sin 3t + B_0 \cos 3t$

نعوض Q_P ومشتقتة في المعادلة التفاضلية ونرتب الحدود

$$(16A_0 - 24B_0) \sin 3t + (24A_0 + 16B_0) \cos 3t$$

$$= 50 \sin 3t + 0 \cos 3t$$

تساوي معاملات الحدود $A_0 = \frac{50}{5^2} \quad , B_0 = \frac{-75}{5^2}$

نجمع (1) و (2) ثم نعوض عن A_0, B_0

اذن الحل العام هو $Q = e^{-4t}(c_1 \cos 3t + c_2 \sin 3t) + \frac{50}{5^2} \sin 3t - \frac{75}{5^2} \cos 3t$

ثانيا:- الحل باستخدام تحويل لابلاس

$$\frac{d^2Q}{dt^2} + 8\frac{dQ}{dt} + 25Q = 50\sin 3t \quad , Q'(0) = 0 \quad , Q(0) = 0$$

$$s^2\mathcal{L}q(s) - s\mathcal{L}q(0) - \mathcal{L}q'(0) + 8s\mathcal{L}q(s) - \mathcal{L}q(0) + 25\mathcal{L}q(s) = 50\mathcal{L}[\sin 3t]$$

$$= \mathcal{L}q(s)[s^2 + 8s + 25] = \frac{150}{s^2 + 9}$$

$$q(s) = \frac{150}{(s^2 + 9)(s^2 + 8s + 25)} =$$

$$\frac{75}{26}\frac{1}{s^2 + 9} - \frac{75}{5^2}\frac{s}{s^2 + 9} + \frac{75}{26}\frac{1}{(s + 4)^2 + 9} + \frac{75}{5^2}\frac{s + 4}{(s + 4)^2 + 9}$$

$$\therefore q' = \frac{25}{25}\sin 3t - \frac{75}{5^2}\cos 3t + \frac{25^{-4t}}{2^6}\sin 3t + \frac{25^{-4t}}{2^6}\sin 3t + \frac{75^{-4t}}{5^2}\cos 3t$$

$$= \frac{25}{5^2}(2\sin 3t - 3\cos 3t) + \frac{25}{5^2}e^{-4t}(3\cos 3t + \sin 3t)$$

تطبيق (3-10):

اوجد حل مسألة القيمة الابتدائية :

$$\frac{d^3y}{dx^3} + 2\frac{d^2y}{dx^2} - 3\frac{dy}{dy} = 0 \qquad y(0) = 4, \quad y'(0) = 8, \quad y''(0) = -4$$

الحل:

أولاً : الطريقة العادية :

نضع المعادلة على الصورة $(\Delta^3 + 2\Delta^2 - 3\Delta)y = 0$

نفترض ان $y = e^{\lambda x}$ المعادلة المساعدة هي $\lambda^3 + 2\lambda^2 - 3\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0, 1, -3$

$$\therefore \lambda(\lambda-1)(\lambda+3)=0$$

ويكون الحل:-

$$y=c_1+c_2e^{x}+c_3e^{-3x}(1)$$

لايجاد الحل الذي يحقق الشروط الابتدائية نجد

$$y'=c_2e^{x}-3c_3e^{-3x} \qquad (2)$$

$$y''=c_2e^{x}+9c_3e^{-3x} \qquad (3)$$

بالتعويض من الشروط الابتدائية من المعادلة 3- 2 – 1

$$\therefore 4=c_1+c_2+\quad c_3 \qquad (4)\Leftarrow y(0)=4$$

$$8=c_2-3c_3(5)\Leftarrow y'(0)=8$$

$$0=c_2+9c_3(6)\Leftarrow y''(0)=-4$$

بحل المعادلات 4 ,5 ,6 نجد ان

$$c_1=0,\quad c_{2=}5,\quad c_3=-1$$

ويكون الحل على الصورة $y=5e^{x}-e^{-3x}$

الطريقة الثانية :لابلاس:

$$\frac{d^3y}{dx^3}+2\frac{d^2y}{dx^2}-3\frac{dy}{dx}=0$$

$$y''' + 2y'' - 3y' = 0$$

$$y(0) = 4\,, y'(0) = 8, y''(0) = -4$$

الحل:-

باخذ لابلاس= $\mathcal{L}(y''') + 2\mathcal{L}(y'') - 3\mathcal{L}(y')$

$$s^3y(s) - s^2y(0) - y''(0) + sy'(0) +$$

$$2[s^2 - sy(0) - y'(0)] - 3[sy - y(0)] = 0$$

باستخدام الشروط $p''y - 4p' - 8p + 4 + 2p^2y - 8p - 16 - 3py + \lambda = 0$

$$p''y(s) + 2p^2y - 3py = 4p^2 + 16p$$

$$y(p^3 + 2p^2 - 3p) = \frac{4p^2 + 16p}{p(p^2 + 2p - 3)}$$

$$y = \frac{4p^2 + 16p}{p(p-1)(p+3)}$$

باستخدام الكسور الجزئية:

$$\frac{A}{P} + \frac{B}{P-1} + \frac{C}{P+3}$$

$$\frac{4P^2 + 16P}{P(P-1)(P+3)} = \frac{A(P-1)(P+3) + BP(P+3) + CP(P-1)}{P(P-1)(P+3)}$$

$$4P^2 + 16P = AP^2 - 2AP - 3A + BP^2 + 3B + CP^2 - C$$

$$4 = A + B + C \qquad (1)$$

$$16 = 2A + 3B - C \qquad (2)$$

$$0 = -3A \qquad (3) \qquad A = 0$$

$$20 = 4B \qquad , B = 5$$

نعوض قيمة A, B لايجاد C

$$4 = 0 + 5 + C \qquad C = -1$$

$$\frac{0}{P} + \frac{5}{P-1} - \frac{1}{P+3}$$

بأخذ لابلاس العكسي $\mathcal{L}^{-1}\frac{5}{P+1} - \mathcal{L}^{-1}\frac{1}{P+3}$

$$5e^{x} - e^{-3x}$$[1]

(7-3) الاستنتاج :

هذه الجزئية تتعلق بالمسائل التي تم حلها بواسطة لابلاس والمعادلات ونلاحظ الفرق الواضح في سهولة الحل بواسطة لابلاس خصوصاً في المشتقات العليا لأننا في طريقة لابلاس نحل مسائل القيمة الإبتدائية في خطوة واحده اما في المعادلات التفاضلية نحل أولاً وبعد ذلك تطبيق الشروط الإبتدائية لإيجاد الثوابت الإختيارية ونجدها تتم في خطوتين بدلاً من خطوة واحده كما في لابلاس .

وهذا لايعني أننا لانستخدم الطريقة العادية اي أنها ليست ذات فائدة بل بهدف الوصول الي الحل بطريقة أسهل وأسرع بالإضافة الي العمليات الزهنية المجهدة وأننا نعلم تماماً أن علم الرياضيات علم تراكمي يعتمد

[1]- ريتشار د برنسون ترجمة فائزة فوق العادة – سلسلة شوم في المعادلات التفاضلية – ط1 – القاهرة – ص370-380.

علي ماتم التوصل اليه مسبقاً وأننا أذا ماتوصلنا الي الطريقة العادية ماكان لنا أن نصل الي الطرق الاخري مثل لابلاس وغيرها.

الفصل الرابع:

(4-1) مقدمة :

في هذا الفصل نتحدث عن حل المسائل التطبيقية (الفيزياء و الكيمياء والهندسة)بالمعادلات التفاضلية والتحويل اللابلاسي .

(4-2) التطبيقات :

أولآ الفيزياء:

تطبيق(4-1):

علق وزن 120-ib في ذنبرك 6416/f t , بدأ الوزن الحركة بدون سرعة إبتدائية بإزاحة 6in اعلي موضع الإتزان وبتاثير قوة خارجية $f(t) = 8\sin 4t$ في نفس الوقت علي الوزن , أوجد الحركة الناشئة للوزن بفرض إهمال مقاومة الهواء.

الحل:

لدينا $a = 0, k = 4, m = 64, \quad f(t) = 8\sin 4t$

وعلية تصبح المعادلة

$$\dot{x} + 16x = 2\sin 4t$$

وبالتالي تكون هذه المسألة مثالآ للحركة المتضائلة القسرية ويكون حل المعادلة المتجانسة المصاحبة هو:

$$x_h = c_1\cos 4t + c_2\sin 4t$$

أوجد الحل الخاص بطريقة المعادلات غير المعنية

$$x_p = -\frac{1}{4}t\cos 4t$$

$$x = c_1\cos 4t + c_2\sin 4t - \frac{1}{4}t\cos 4t$$

بتطبيق الشرطين الإبتدائين $x(0) = 0$, $x(0) = -\frac{1}{2}$ نحصل علي:

$$x = -\frac{1}{2}\cos 4t + \frac{1}{16}\sin 4t - \frac{1}{4}t\cos 4t$$

لاحظ ان $|x| \to \infty$ عند $t \to \infty$ تسمي هذه الظاهرة بالرنين الصافي .وهو نتيجة الدالة القسرية f(t) التي لها نفس التردد الدائري مثل التي للنظام الحر غير المتضائل المصاحب[1]

اما في تحويل لابلاس :

$$x + 16x = 2\sin 4t \qquad x(0) = -\frac{1}{2}\,, x(0) = 0$$

[1]- تأليف:ريتشارد برتسون -سلسلة ملخصات شوم للمعادلات التفاضلية -الطبعة الاولي العربية سنة 200 الدار الدولية للإستثمارات الثقافية مكان الطبعة مصر – ص(78) – ص(246).

هذه المعادلة المجهولة للدالة المجهولة x(t) في المتغير المستقلt, نضع $x(s) = \mathcal{L}[x(t)]$ بأخذ تحويل لابلاس للمعادلة التفاضلية المعطاة

$$[s^2x(s) - sx(0) - x(0)] + 16x(s) = 2(\frac{4}{s^2 + 16})$$

$$\left[s^2x(s) - s\left(\frac{1}{2}\right) - 0\right] + 16x(s) = \frac{8}{s^2 + 16}$$

$$(s^2 + 16)x(s) = \frac{8}{s^2 + 16} - \frac{s}{2}$$

$$x(s) = \frac{8}{(s^2 + 16)^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2 + 16}\right)$$

ومع$a = 0$

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[x(s)] = \mathcal{L}^{-1}\left[\frac{8}{(s^2 + 16)^2} - \frac{1}{2}\left(\frac{s}{s^2 + 16}\right)\right]$$

$$= \frac{1}{16}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{128}{(s^2 + 16)^2}\right] - \frac{1}{2}\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{s}{s^2 + 16}\right]$$

$$= \frac{1}{16}(\sin 4t - 4t\cos 4t) - \frac{1}{2}\cos 4t$$

تطبيق(4-2):

جسم كتلته 64 باوندآ يسقط من السكون تحت تاثير الجاذبية الارضية وتؤثر علية ايضآ قوة مقاومة الهواء R=8vباوندا, حيث v السرعة بالقدم/ث عين v بدلالة الزمن t, إستعن بأن g=32 قدمآ /ث

الحل:

حيث g عجلة الجاذبية

بتطبيق قانون نيوتن الثاني نحصل علي:

$$\frac{64}{32}x'(t) = 64 - 8x(t)$$

$$x'(t) + 4x(t) = 32$$

وهذه المعادلة خطية ويكون حلها عندما $x = 0, t = 0$

وبالتالي:

$$x = ce^{-4t} + 8$$

$$0 = ce^{-4(0)} + 8$$

$$\therefore c = -8$$

$x(t) = 8 - 8e^{-4t}$[1]

اما في لابلاس

$$x(0) = 0$$

$$sx(s) + 4x(s) = 32$$

ومن ثم $x(s) = \frac{32}{s(s+4)} = \frac{8}{s} - \frac{8}{s+4}$

وباستخدام تحويل لابلاس العكسي نحصل علي:

[1]-تأليف:ريتشارد برتسون -مرجع سابق صفحة (511)

$$x(s) = 8 - 8e^{-4t}$$

ثانيآ الكيمياء:

تطبيق (4-3):

يحتوي مستودع في البداية علي 100gal من محلول ملحي يحتوي علي رطل واحد من الملح , ينساب محلول ملحي اخر يحتوي علي رطل واحد من الملح لكل جالون الي المستودع بمعدل 3 جالون /دقيقة عندما $t = 0$, وفي نفس اللحظة يخرج المخلوط الممتزج جيدآ من المستودع بنفس المعدل

اوجد

كمية الملح في المستودع عند اي لحظة t

الحل:

لدينا $b = 1, a = 1 , v = 100, e = f = 3$

وبالتالي تصبح المعادلة

$$\frac{dx}{dt} + 0.03x = 3$$

ويكون حل هذه المعادلة التفاضلية الخطية هو

$$x = ce^{-0.03t} + 100$$

عند $t = 0, x = 0$

$$1 = ce^{0} + 100 \quad , c = -99$$

يمكن كتابة المعادلة علي الصورة

$$x = 100 - 99e^{-0.03t}$$

اما في لابلاس

$$sx(s) - s(0) + 0.03x(s) = 3\frac{1}{s}$$

عند $s(0) = 1$

$$x(s)(s + 0.03) = \frac{3}{s} + 1$$

$$x(s) = \frac{3}{s(s + 0.03)} + \frac{1}{(s + 0.03)}$$

$$\frac{100}{s} - \frac{100}{s + 0.03} + \frac{1}{s + 0.03}$$

باخذ لابلاس العكسي:

$$\mathcal{L}^{-1}\left(\frac{3}{s(s + 0.03)}\right) + \mathcal{L}^{-1}\left(\frac{1}{(s + 0.03)}\right)$$

$$= 100 - 100e^{-0.03t} + e^{-0.03t}$$

$$= 100 - 99e^{-0.03t}$$

تطبيق (4-4):

يحتوي مستودع سعتة 50-gal علي 10 جلونات من المياة العذبة , ينساب محلول ملحي يحتوي علي رطل واحد من الملح لكل جالون الي المستودع بمعدل 4 جالون/دقيقة عندما $t = 0$ وفي نفس اللحظة يخرج المخلوط الممتزج جيداَ مع المستودع بمعدل 2 جالون/دقيقة

الحل :

تصبح المعادلة في هذه المسألة علي الصورة:

$$\frac{dx}{dt} + \frac{2}{10 + 2t}x = 4$$

وهي معادلة خطية ويكون حلها

$$x = \frac{40t + 4t^2 + c}{10 + 2t}$$

عندما $t = 0$, $x = 0$ فإن $c = 0$

فتصبح[1] $x = \frac{40t+4t^2}{10+2t}$

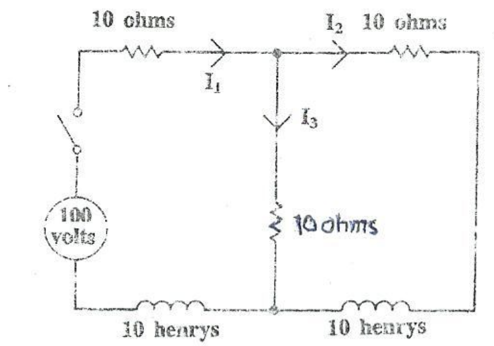
ثالثآ الهندسة:

تطبيق (4-5):

في الشكل الموضح يكون:

$$I_1(0) = I_2(0) = I_3(0) = 0$$

عين $I_1, I_2 I_3$ في اللحظة $t \sec I$ بعد إغلاق الدائرة



شكل 7.12

الحل:

[1]-تأليف ريتشارد برتسون - مرجع سابق- ص(93- 94) ص(247).

بطبيق قانون كرتشوف علي الدائرة اليسري نحصل علي:

$$10I_1(t) + 10I_3(t) + 10I_1'(t) = 100$$

ومن الدائرة اليمني

$$10I_2(t) + 10I_2' - 10I_3(t) = 0$$

وبالإستعانة بأن $I_3(t) = I_1(t) - I_2(t)$

نحصل علي:

$$2I_1(t) - I_2(t) + I_1'(t) = 10$$

$$2I_2(t) - I_1(t) + I_2'(t) = 0$$

$$2I_1(s) - I_2(s) + sI_1(s) = \frac{10}{s}$$

$$2I_2(s) - I_1(s) + sI_2(s) = 0$$

$$(2 + \mathrm{s})I_1(s) - I_2(s) = \frac{10}{s}$$

$$(2 + \mathrm{s})I_2(s) - I_1(s) = 0$$

$$[-1 + (2 + s)^2]I_2(s) = \frac{10}{s}$$

$$I_2(s) = \frac{10}{s[(2 + s)^2 - 1]}$$

$$I_2(t) = 10e^{-2t}\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{(s-2)(s^2-1)}]$$

$$= 10e^{-2t}\mathcal{L}^{-1}[\frac{1}{3}\frac{1}{(s-2)} - \frac{1}{2}\frac{1}{(s-1)} + \frac{1}{6}\frac{1}{(s+1)}]$$

$$= 10e^{-2t}\left(\frac{e^{2t}}{3} - \frac{e^{t}}{2} + \frac{e^{-t}}{6}\right)$$

$$= \frac{5}{3}(2 - 3e^{-t} + e^{-3t})$$

عندئذ فأن :

$$= \frac{10}{3}(2 - 3e^{-t} + e^{-3t}) + \frac{5}{3}(3e^{-t} - 3e^{-3t})$$

$$= \frac{5}{3}(4 - 3e^{-t} - e^{-3t})$$

$$I_3(t) = i_1(t) - I_2(t)$$

$$= \frac{5}{3}(4 - 3e^{-t} - e^{-3t}) - \frac{5}{3}(2 - 3e^{-t} + e^{-3t})$$

$= \frac{10}{3}(1 - e^{-3t})$[1]

تطبيق(4-6):

[1]- تأليف:ريتشارد برتسون - مرجع سابق صفحة (517-) ،ص (518).

دائرة RL لها قوة دافعة كهربية 5 فولت ومقاومة 50 واحد هنري ولا يوجد تيار إيتدائي أوجد التيار في الدائرة عند اي لحظةt

الحل

لدينا $L = 1$, $E = 5$, $R = 50$ وبالتالي

$$\frac{dx}{dt} + 50x = 5$$

وهي معادلة خطية , ويكون حلها عندما $x = 0, t = 0$

$$x = ce^{-50t} + \frac{1}{10}$$

$$0 = ce^{0} + \frac{1}{10}$$

$$c = -\frac{1}{10}$$

$$x = \frac{1}{10} - \frac{1}{10}e^{-50t}$$

اما في لابلاس عند $x(s) = 0$

$$sx(s) - x(0) + 50x(s) = 5\left(\frac{1}{s}\right)$$

$$x(s) = \frac{5}{s(s+50)}$$

باستخدام الكسور الجزيئية ولابلاس العكسي

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1}[x(s)] = \mathcal{L}^{-1}[\frac{5}{s(s+50)}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\left[\frac{1/10}{s} - \frac{1/10}{s+50}\right]$$

$$= \frac{1}{10} - \frac{1}{10}e^{-50t}$$

(3-4)النتائج :

من خلال البحث تمكن الباحثون من التعرف على حل المعادلات التفاضلية بالطرق الجبرية وحل المعادلات التفاضلية بطريقة لابلاس بشكل منفصل وثم مقارنة الحل بالطريقتين .توصل الباحثون

وتتلخص المقارنة في النقاط التالية :

1) أن طريقة لابلاس تحتوي علي خطوات حل أقل من الطريقة الجبرية مما يساعد في تقليل نسبة الخطأ

2) سهولة التعامل مع الخواص التي تساعد في حل المسائل حيث أن هناك صيغة مباشرة لأيجاد الحل خلافاً عن الطرية الجبرية حيث لكل مسألة طريقة محدودة مختلفة عن الأخري في الحل .

3) للطريقة الجبرية هناك صور أساسية للحل حيث أن كل مسألة يمكن يميز طريقة حلها بمجرد النظر ابد أستخدام طريقة الحل المناسبة حلاً لطريقة لابلاس التي ليست لها طريقة محدودة للحل

4) أمكانية أستخدام تحويل لابلاس في حل مسائل التقنيات الفيزيائية و الكهربية والهندسية والكيمياء

(4-4) التوصيات :

فتلخص التوصيات في الاتى :

1) يوصى الباحثون بالتوسع في دراسة تحويل لابلاس بطريقة أوسع للتعرف علي مزايا تحويل لابلاس في حل المعادلات التفاضلية وغيرها من الأستخدامات

2) لإجراء بحث منفصل في حل المعادلات التفاضلية من الرتب العليا وبالأخص طريقة المؤثر للتعرف علي هذه الطريقة بصورة أوسع.

المراجع :

1. أ.د حسن مصطفى العويضي - المعادلات التفاضلية – دار النشر مكتبة الرشد – الطبعة الأولى (1427هـ - 2006م) .
2. أ. د أميل صحبي سعد شكر الله – القاهرة دار النشر للجامعات – الطبعة الأولى -2007م .
3. د. أمجد شحاده ، م :محمد رياض – دار النشر مصر العربية – الطبعة الأولى .
4. الرياضيات المتقدمة للمهندسين والمعلمين – مواري تسجيل – دار ماكجروهيل للنشر مصر – الطبعة العربية – 1982م .
5. د. عبد الكريم عبد الحليم سليمان – دار النشر مصر العربية .
6. سلسلة شوم في المعادلات التفاضلية ، ريتشارد برنسون – ترجمة فائزة فوق العائدة – الطبعة الأولى القاهرة .
7. سلسلة ملخصات شوم للمعادلات التفاضلية – تأليف ريشتارد برتسون – جمهورية مصر العربية الطبعة الأولى العربية سنه 2000 الدار الدولية للاتسثمارات الثقافية .