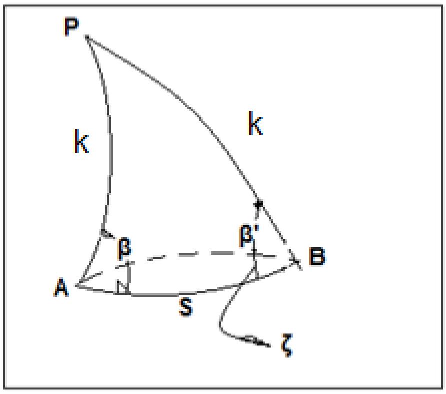
1-3:صيغة كلارك

1-1-3 صيغة كلارك للمسافات الطويلة:

هذه الصيغة جاءت من قبل كلارك مناسبة في الحساب في حالة الابعاد الطويلة التي يكون فيها امكانية الرصد واضحة من والى المحطات الارضية .

ضع $\beta,\beta'\pm\zeta$ زويا داخلية عند A,B في المثلث الكروي PAB .



P ≡ القطب الشمالي

Θ ≡ الزاوية بالثواني مقابل المسافة S

β ≡ الانحراف الامامي

ζ ≡ مقدار التصحيح

β' ≡ الإنحراف الخلفي

S ≡ المسافة بين A, B

k = 90 - ϕ

الشكل 1.3 : الإتجاه الامامي والخلفي والمسافة

$$\Theta = \frac{S}{N \sin 1''} + \frac{e^2\, \Theta^3 \sin^2(1'')\ \cos^2(\phi) \cos^2(\beta)}{6\,(1-e^2)} \qquad 1.3$$

$$\zeta = \frac{e^2\, \Theta^2 \sin^2(1'')\ \cos^2(\phi) \sin^2(2\beta)}{4\,(1-e^2)} \qquad 2.3$$

$$\operatorname{Tan} \tfrac{1}{2}(\beta' \pm \zeta - dL) = \frac{\sin \tfrac{1}{2}(K-\Theta)}{\sin \tfrac{1}{2}(K+\Theta)} \cdot \cot \tfrac{1}{2}\beta \qquad 3.3$$

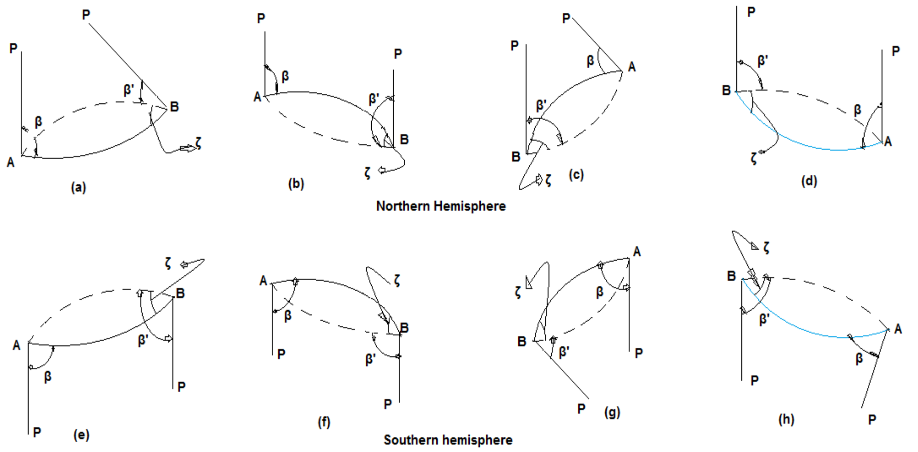
Then

$$\tan \tfrac{1}{2}(\beta' \pm \zeta + dL) = \frac{\cos \tfrac{1}{2}(K-O)}{\cos \tfrac{1}{2}(K+O)} \cdot \cot \tfrac{1}{2}\beta$$

$$d\phi = \frac{S \cdot \sin \tfrac{1}{2}(\beta' \pm \zeta - \beta)}{Rm \cdot \sin(1'') \sin \tfrac{1}{2}(\beta' \pm \zeta + \beta)} \cdot \left[1 + \frac{e^2 \,\Theta^2 \sin^2(1'')}{12} \cos^2(\beta' - \beta)\right] \qquad 4.3$$

موضحة في الرسم التالي المسافة من A الى B موضحة بالخط المتصل أما المسافة من B الى A موضحة بالخط المتقطع .

في كل الحالات p إتجاه القطب ، الإنحراف من الشمال الي الشرق في إتجاه عقارب الساعة



الشكل 2.3: العلاقة بين المسافة بين القطب P النقطة B ، المسافة بين النقطة B والنقطة A ، والإتجاه الأمامي والخلفي ومقدار التصحيح لكل الأرباع الأربعة لنصفى الكرة الأرضية.

من الجدول التالي يمكننا إشتقاق الإتجاهات لحساب الإشرات ± لتكن معطى ل $d\phi$.

جدول1.3: يوضح كيفية معرفة إشارات التغير في خط العرض ومقدار التصحيح إيتا

Azimuth from A to B between	Northern Hemisphere				Southern Hemisphere			
	A=	A' =	Sign of ζ	Sign of dϕ	A=	A' =	Sign of ζ	Sign of dϕ
0 – 90	β	360 - β '	+	+	180 – β	180 +β	-	-
90 – 180	B	360 - β '	-	-	180 – β	180 + β	+	+
180 – 270	360- β	β '	-	-	180 + β	180 - β	+	+
270 - 360	360- β	β '	+	+	180 + β	180 - β	-	-

هكذا تحدد إشارة زاوية التصحيح إيتا (ζ) مع التغير في خط العرض dϕ .

في كل الحالات dL هي الفرق بين خطي الطول المحددين بزاوية عند القطب المقابلة للخط AB ، الإشارة دائما تؤخذ موجبة عند حل المثلث الكروي PAB .

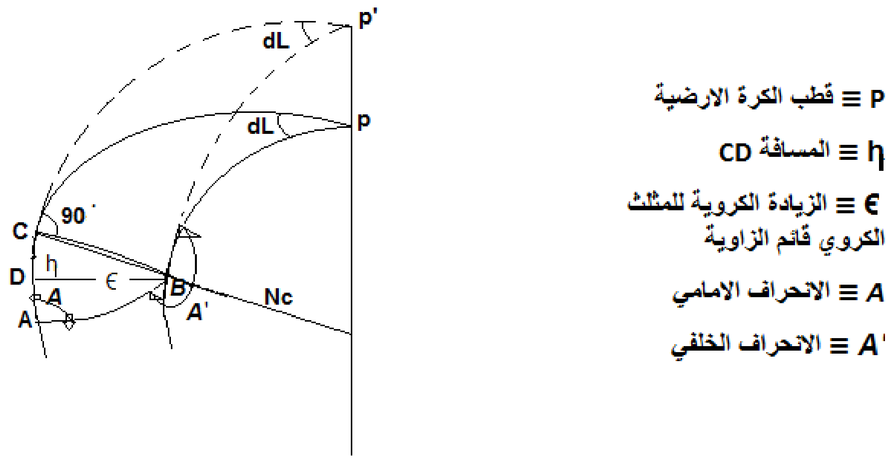
من السهل استخدام قيمة خط العرض للنقطة الأولى ϕA لإيجاد قيمة خط العرض للنقطة الثانية **ϕB** سوى كان خط العرض في الشمال أو في الجنوب، لذلك تاتي أهمية موجبية قيمة التغير في خط العرض dϕ .

زاوية التصحيح ζ تكون في أقصى قيمة لها عند الإنحراف = 45,135, 225,315 درجة.

<u>2-1-3 صيغة كلارك للمسافات القصيرة والمتوسطة</u> :

تستخدم في الحساب مع المسافات القصيرة والمتوسطة ، تم فيها أهما قيمة زاوية التصحيح ζ .

في الرسم التالي :



الشكل 3.3: الزيادة الكروية للمثلث الكروي قائم الزاوية

$$\epsilon = \frac{S^2 \sin(A)\cos(A)}{2\ \mathrm{Rm}\ \mathrm{Nm}\ \sin(1'')} \qquad (5.3)$$

$$ɧ = \epsilon\, tan(A) tan(\phi c) \qquad (6.3)$$

$$d\phi = \pm \frac{S\cos(A \pm \frac{2}{3}\epsilon)}{Rm\sin(1'')} \qquad (7.3)$$

$$dL = \pm \frac{S\,sin(A \pm \frac{\epsilon}{3})}{Nc\sin(1'')} \;.\; sec\left(\phi' + \frac{\eta}{3}\right) \qquad (8.3)$$

$$dA = \pm\, dL\, sin\left(\phi' + \frac{2}{3}\eta\right) \pm \epsilon \qquad (9.3)$$

$$dA = A' - (A + 180) \qquad (10.3)$$

عند استخدام هذة المعادلات لابد من حساب القيم الولية لكل من ϕm , ϕc

$$\phi c = \phi + \frac{S\,cos(A)}{R\sin(1'')} \qquad (11.3)$$

$$\phi m = \frac{(\phi + \phi c)}{2} \qquad (12.3)$$

الإتجاه في النصفين من الكرة الارضية يكون من الشمال الى الجنوب في إتجاه عقارب الساعة ، dL تؤخذ موجبة في الشرق وسالبة في الغرب ، الجدول التالي يوضح بقية الإشارات

جدول 2.3: يوضح إشارات كل من التغير في خط العرض dϕ ، الزيادة الكروية Є، التغير في خط الطول dL ، التغير في الإتجاه d*A* تبعا لقيم لإتجاه المعطي

Term	*A*			
	0 - 90	90 - 180	180 - 270	270 – 360
dϕ	+	-	-	+
Є	-	+	-	+
dL	+	+	-	-
d*A*	+	+	-	-

إشارة زيتا ɧ لا تتغير مع الإتجاه ، إشارة sin(*A*)cos(*A*) تكون مثل إشارة Tan(*A*) في المعادلات السابقة .

إثبات :

Nc ≡ مماس في الشكل الكروي عند النقطة c .

المثلث ACB صغير جدا النقاط D , B , A متكافئة .

الخط المقاس للأقواس AB , AD , DB بالتقريب متساوية في السطحين .

ضع P' ≡ نقطة عندما يلاقي المحور البسيط في الكرة السطح الكروي.

- الخطان المتواصلان PB , PA خطي طول عبر A , B على المثلث الكروي .
- الخطان المتقتعان PB , PA خطي طول على الدائرة .
- با ستخدام نظرية LEGENDRE لحل المثلث الكروي ACB كمثلث مستوي .

الزاوية المستوية عند A

$$A = A - \frac{1}{3}Є$$

الزاوية المستوية عند C

$$C = 90 - \frac{1}{3}Є.$$

الزاوية المستوية عند B

$$B = 180 - (A - \frac{1}{3}Є) - (90 - \frac{1}{3}Є) = 90 - (A - \frac{2}{3}Є) .$$

عندما Є هي الزيادة الكروية للمثلث

$$\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{Sin}\ (90 - (\mathrm{A} - \frac{2}{3}Є))} = \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{Sin}\ (90 - \frac{1}{3}Є)}$$

$$Ac = \frac{S\ Cos\ (A - \frac{2}{3}Є)}{\mathrm{Cos}\ (\frac{1}{3}Є)}$$

لكن $\frac{1}{3}Є$ صغيرة جداً

$$\mathrm{Cos}\ (\frac{1}{3}Є) = 1$$

$$AC = S\ Cos\ (A - \frac{2}{3}Є)$$

$$BC = S\ Sin\ (A - \frac{1}{3}Є)$$

بالمثل :

إ ذا كان PCB مثلث كروي الزوايا P , 90 – B هي زوايا صغيرة

$$ \text{ɧ} = c - b = \frac{P^2}{2}\cot(b) - \frac{P^4}{24}\cot b(1 + 3cot^2(b) + \cdots $$

$$ P = P\ Cosec(b + \frac{2}{3}\text{ɧ}) $$ تقريبا

$$ (\frac{\pi}{2} - B) = P\ \mathrm{Cos}(b - \frac{1}{3}\text{ɧ}) $$

طبق هذة النظرية لزوايا المثلث الكروي P'CB واهمل التغير لc –b

$$ P' = dL $$

$$.\quad b = 90 - \phi c = 90 - \phi' $$

$$ P = \frac{S}{Nc}\ Sin(A - \frac{1}{3}\epsilon) $$

$$ CD(\text{بالراديان}) = \frac{S^2}{2N_c^2}\ Sin2(A - \frac{1}{3}\epsilon)tan\phi c $$

$$ \mathrm{CD}(\text{بالثواني}) = \frac{\mathrm{S^2 sin^2(A)\ tan\phi c}}{2N_c^2\ \mathrm{sin1"}} $$

لاي كمية $Sin^2(A-\frac{1}{3}\epsilon)$ تكتب $Sin^2(A)$.

بالرغم من ان الخطوط المقاسة AC , CD علي الشكل الكروي ستكون محددة مع قيم الخطوط على الدائرة لنصف القطر Nc .

القيم الزاوية ستكون بعض الشئ مختلفة على السطحين منذ ان اخذت القيم الزاوية كزاويا على خطوط الطول في الشكل الكروي.

لذلك على خط الطول عبرِ

$$ AC(\text{بالثواني}) = \frac{S\ Cos(A - \frac{1}{3}\epsilon)}{\mathrm{Rm\ sin1"}} $$

$$ CD(\text{بالثواني}) = \frac{Nc}{\mathrm{Rm}} \ . \ \frac{S^2 sin^2(A)\ tan\phi c}{2N_c^2 \mathrm{sin1"}} = \frac{S^2 sin^2(A)\ tan\phi c}{\mathrm{2RmNc\ sin1"}} $$

لكن CD صغير

$$Nc = Nm\,, \epsilon'' = \frac{S^2 sin^2(A)\tan\phi c}{2RmNc\sin 1''}$$

بالتقريب

$$CD(\text{بالثواني}) = h = \epsilon tanA\ tan\phi c$$

$$\boxed{\begin{aligned}\phi' - \phi &= d\phi = AD = AC - DC\\ &= \left(\frac{S\cos\left(A - \frac{2}{3}\epsilon\right)}{Rm\sin 1''}\right) - h\end{aligned}} \quad (13.3)$$

$$dL(\text{بالثواني}) = \frac{S\,Sin\left(A - \frac{1}{3}\epsilon\right)}{Nc\sin 1''}\ .cosec\left(90 - \phi' - h + \frac{2}{3}h\right)$$

$$= \frac{S\,Sin(A - \frac{1}{3}\epsilon)}{Nc\sin 1''}\ .sec\left(\phi' - \frac{1}{3}h\right) \quad (14.3)$$

$$A' = 360 - P'BA$$

$$= 360 - ABC - P'BC$$

$$= (360 - 180 + \epsilon - A - 90) - (90 - dLcos(90 - \phi' - h + \frac{1}{3}h))$$

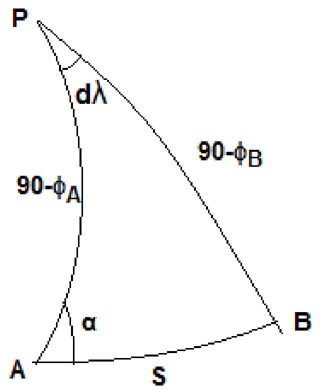
$$= 180 + A + dLsin(\phi' + \frac{2}{3}h) - \epsilon$$

$$dA = A' - (180 + A) = dLsin\left(\phi' + \frac{2}{3}h\right) - \epsilon \quad (15.3)\ .$$

2-3 : صيغة Puissant

تختلف هذه الطريقة عن سابقتها في إنها تستخدم للمسافات التي تزيد عن 70 ميل ، تاخذ في الإعتبار أن شكل الأرض هو الشكل الهليليجي في الحساب لابد من تعريف المتغيرات الأولية ما يخص الشكل الهليليجي حيث أن له محورين أكبر وأصغر وله إنبعاج وتفلطح وكلها تستخدم في هذه الطرية للحل.

إثبات الصيغة:



dλ≡الفرق بين خطي الطول

ϕA≡ خط العرض عند النقطة A

ϕB≡ خط الطول عند النقطة B

S≡ المسافة بين A ,B

α≡ النحراف الاماميAB

الشكل 4.3 : الفرق بين خطي طول والمسافة المقابلة

حساب خط العرض ϕ:

في المثلث الكروي PAB بافتراض ان نصف قطر التكور (نصف قطر الإنحناء العرضي) هو :

$$N_A = \frac{a}{(1-e^2\sin^2(\phi))^{½}}$$

بتطبيق قانون جيب التمام على المثلث :

$$Cos(90-\phi_B) = Cos(90-\phi_A).cos(SAB) + sin(90-\phi_A).sin(SAB)\,cos(\alpha)$$

$$Sin(\phi_B) = sin(\phi_A).cos\left(\frac{S}{N_A}\right) + cos(\phi_A).sin\left(\frac{S}{N_A}\right).cos(\alpha) \longrightarrow 1$$

ناخذ الطرف اليمن

$$Sin(\phi_B) = sin(\phi_A + d\phi)$$
$$= sin(\phi_A)\,cos(d\phi) + cos(\phi_A)\,sin(d\phi)$$

بما ان dϕ زاوية صغيرة

$$sin(d\phi) = d\phi - \frac{d\phi^3}{3!} + \dots\dots\dots\dots$$

$$Cos(d\phi) = 1 - \frac{d\phi^2}{2!} + \dots\dots\dots\dots$$

$$\mathrm{Sin}(\phi_B) = \sin(\phi_A).\left[1 - \frac{d\phi^2}{2}\right] + \cos(\phi A).\left[d\phi - \frac{d\phi^3}{6}\right] \longrightarrow 2$$

الطرف اليسر من المعادلة رقم 1 :

$$\sin(\phi_{\boldsymbol{A}}).\left[1 - \frac{S^2}{2{N_A}^2}\right] + \cos(\phi_{\boldsymbol{A}})\left[\frac{S}{N_A} - \frac{S^3}{6{N_A}^3}\right].\ \cos(\alpha)$$

$$\sin(\phi_{\boldsymbol{A}}) - \left[\frac{S^2}{2{N_A}^2}\right].\sin(\phi_{\boldsymbol{A}}) + \left[\frac{S}{N_A}\right].\cos(\phi_{\boldsymbol{A}})\cos(\alpha) - \left[\frac{S^3}{6{N_A}^3}\right].\cos(\phi_{\boldsymbol{A}})\cos(\alpha)$$

3

نساوي المعادلة 2 مع المعادلة 3 بالقسمة على $\cos(\phi_A)$ نحصل على:

$$\mathrm{d}\phi = \left[\frac{S}{N_A}\right]\cos(\alpha) - \left[\frac{S^2}{2{N_A}^2}\right].\tan(\phi_{\boldsymbol{A}}) - \left[\frac{S^3}{6{N_A}^3}\right].\cos(\alpha) + \left[\frac{\mathrm{d}\phi^2}{2}\right]\tan(\phi_{\boldsymbol{A}}) + \left[\frac{\mathrm{d}\phi^3}{6}\right]$$

4

بما ان $\mathrm{d}\phi$ ظهرت في الطرفين يجب استخدام الحل التتابعي ، نفترض ان :

$$\mathrm{d}\phi = \left[\frac{S}{N_A}\right]\cos(\alpha)$$

نربع الطرفين

$$\mathrm{d}\phi^2 = \left[\frac{S^2}{{N_A}^2}\right]\cos^2(\alpha)$$

نعوض في المعادلة 4 لنحصل على :

$$\mathrm{d}\phi = \left[\frac{S}{N_A}\right]\cos(\alpha) - \left[\frac{S^2}{2{N_A}^2}\right].\tan(\phi_{\boldsymbol{A}}).sin^2(\alpha) + \left[\frac{\mathrm{d}\phi^3}{6}\right] \qquad (16.3)$$

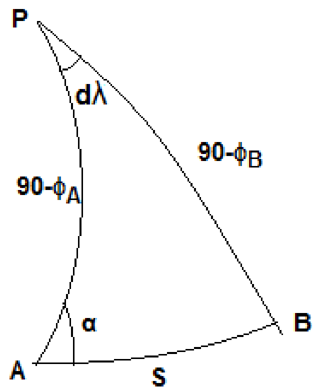
للحصول على نتيجة أكثر دقة نعوض المعادلة 5 في المعادلة 4 وهكذا الى أن تصبح نتيجة آخر تعويض تقريبا يساوي الذى يسبقه .

لإيجاد $d\phi'$ على السطح الكروي نفترض أن المسافة على السطح الكروي صغيرة مساوية للمسافة على السطح الهليليجي

$$R_A d\phi' = N_A \, d\phi \qquad (17.3)$$

$$d\phi' = \frac{N_A}{R_A} d\phi \qquad (18.3)$$

حساب خط الطول $d\lambda$:



$d\lambda \equiv$ الفرق بين خطي الطول

$\phi A \equiv$ خط العرض عند النقطة A

$\phi B \equiv$ خط الطول عند النقطة B

$S \equiv$ المسافة بين A ,B

$\alpha \equiv$ النحراف الامامي AB

شكل 5.3: الإتجاه الأمامي والمسافة بين نقطتين

بتطبيق قانون الجيب على المثلث الكروي ABP :

$$\frac{\mathrm{Sin}(d\lambda)}{\mathrm{Sin}(AB)} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(90-\phi_{\boldsymbol{B}})}$$

$$Sin(d\lambda) = sin\left[\frac{S}{N_A}\right].sin(\alpha)\, sec(\phi_{\boldsymbol{B}}) \longrightarrow 1$$

بما ان $\left[\frac{S}{N_A}\right]$, $d\lambda$ زوايا صغيرة

$$Sin(d\lambda) = d\lambda - \frac{d\lambda^3}{6} + \ldots\ldots\ldots \qquad 2$$

$$\sin\left[\frac{S}{N_A}\right] = \left[\frac{S}{N_A}\right] - \frac{S^3}{6N_A^3} + \dots\dots\dots$$

بتعويض المعادلات 2 في المعادلة 1

$$. \; d\lambda - \frac{d\lambda^3}{6} = \left[\frac{S}{N_A}\right] - \frac{S^3}{6N_A^3}.\sin(\alpha)\sec(\phi_{\boldsymbol{B}})$$

$$d\lambda = \left[\frac{S}{N_A}\right].\sin(\alpha)\sec(\phi_{\boldsymbol{B}}) - \left[\frac{S^3}{6N_A^3}\right] \sin(\alpha)\sec(\phi_{\boldsymbol{B}}) + \left[\frac{d\lambda^3}{6}\right] \quad 3$$

بما ان $d\lambda$ ظهرت في الطرفين يجب استخدام الحل التتابعي بفرض ان :

$$d\lambda = \left[\frac{S}{N_A}\right].\sin(\alpha)\sec(\phi_{\boldsymbol{B}})$$

باخذ التكعيب للطرفين والتعويض في المعادلة 3 نحصل على

$$d\lambda = \left[\frac{S}{N_A}\right].\sin(\alpha)\sec(\phi_{\boldsymbol{B}}).\left[1 - \left[\left[\frac{S^2}{6N_m^2}\right] + \left[\frac{S^2}{6N_m^2}\right]\sin^2(\alpha)\sec^2(\phi_{\boldsymbol{B}})\right]\right]$$

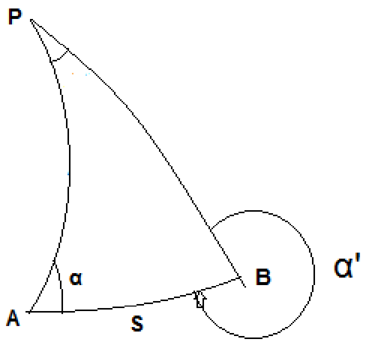
حساب الإتجاه الخلفي α' :

- $.\alpha' = \alpha \pm 180 \pm d\alpha \qquad (19.3)$

حيث :

$d\alpha \equiv$ تقارب الهواجر

$\alpha \equiv$ الإتجاه الأمامي



شكل 6.3 : الإتجاه الامامي والخلفي

بتطبيق قانون الظل على المثلث الكروي APB

$$\operatorname{Tan}\frac{1}{2}(\alpha + 360 - \alpha') = \frac{\cos\frac{1}{2}[(90 - \phi B) - (90 - \phi A)]}{\cos\frac{1}{2}[(90 - \phi B) + (90 - \phi A)]} \cdot \frac{d\lambda}{2} \longrightarrow 1$$

الطرف الايسر من المعادلة 1

$$Tan\,\frac{1}{2}[\alpha + 360 - (\alpha + 180 + d\alpha)]$$

$$Tan\,\frac{1}{2}[\,180 - d\alpha]$$

$$Tan\left[90 - \frac{d\alpha}{2}\right] \longrightarrow 2$$

من الطرف الايمن للمعادلة 1

$$\frac{\operatorname{Cos}(\frac{d\phi}{2}) \quad .\cot(\frac{d\lambda}{2})}{\operatorname{Cos}(90 - \phi_m)} \longrightarrow 3$$

بمساواة المعادلة 2 و 3 نحصل على

$$\longrightarrow 4$$

$$Tan\left[90 - \frac{d\alpha}{2}\right] = \frac{\mathrm{Cos}(\frac{\mathrm{d}\phi}{2})}{\sin(\phi_m)}.\cot(\frac{\mathrm{d}\lambda}{2})$$

بأخذ المعكوس لطرفي المعادلة 4 :

$$cot\left[90 - \frac{d\alpha}{2}\right] = \frac{\sin(\phi_m)}{\mathrm{Cos}(\frac{\mathrm{d}\phi}{2})}.\tan(\frac{\mathrm{d}\lambda}{2})$$

$$tan\left[\frac{d\alpha}{2}\right] = \sec\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{2}\right).\sin(\phi_m).\tan(\frac{\mathrm{d}\lambda}{2})$$

بما ان dλ , dα زوايا صغيرة :

$$\left[\frac{d\alpha}{2}\right] + \left[\frac{\mathrm{d}\alpha^3}{24}\right] = \left[\frac{d\lambda}{2} + \frac{\mathrm{d}\lambda^3}{24}\right].\sin(\phi_m)\sec\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{2}\right)$$

$$\mathrm{d}\alpha = d\lambda.\sin(\phi_m)\sec\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{2}\right) + \left[\frac{\mathrm{d}\lambda^3}{12}\right].\sin(\phi_m)\sec\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{2}\right) - \left[\frac{\mathrm{d}\alpha^3}{12}\right] \longrightarrow 5$$

بما ان dα ظهرت في الطرفين نستخدم الحل التتابعي نفترض ان :

$$\mathrm{d}\alpha = d\lambda.\sin(\phi_m)\sec\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{2}\right)$$

$$\mathrm{d}\alpha^3 = d\lambda^3.\sin^3(\phi_m)\sec^3\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{2}\right)$$

نعوض في المعادلة 5 نحصل على

$$\mathrm{d}\alpha = d\lambda.\sin(\phi_m)\sec\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{2}\right).\left[1 + \frac{\mathrm{d}\lambda^2}{12} - \frac{\mathrm{d}\lambda^2}{12}.\sin^2(\phi_m)\sec^2\left(\frac{\mathrm{d}\phi}{2}\right)\right] \qquad (20.3)$$