بسم الله الرحمن الرحيم

جامعة السودان للعلوم و التكنولوجيا

كلية العلوم – قسم الإحصاء التطبيقي

مشروع تخرج مقدم لنيل درجة بكالوريوس الشرف في الإحصاء التطبيقي

بعنوان:

إشتقاق بعض الخواص الإحصائية للتوزيعات الإحتمالية البارامترية

Derive some properties of statistical probability distributions parametric

إعداد الطلاب:

سناء هجو العوض

قصي محمد عطية

هاشم مرسال خلف الله

إشراف:

د/ الطيب عمر احمد

سبتمبر 2016 م

الآية

بسم الله الرحمن الرحيم

اللَّهُ لا إِلَهَ إِلاَّ هُوَ الْحَيُّ الْقَيُّومُ لاَ تَأْخُذُهُ سِنَةٌ وَلاَ نَوْمٌ لَّهُ مَا فِي السَّمَوَاتِ وَمَا فِي الأَرْضِ مَن ذَا
الَّذِي يَشْفَعُ عِنْدَهُ إِلاَّ بِإِذْنِهِ يَعْلَمُ مَا بَيْنَ أَيْدِيهِمْ وَمَا خَلْفَهُمْ وَلاَ يُحِيطُونَ بِشَيْءٍ مِّنْ عِلْمِهِ إِلاَّ بِمَا
شَاءَ وَسِعَ كُرْسِيُّهُ السَّمَوَاتِ وَالأَرْضَ وَلاَ يَؤُودُهُ حِفْظُهُمَا وَهُوَ الْعَلِيُّ الْعَظِيمُ)

صدق الله العظيم

الإهداء

إذا كان الإهداء يعبر ولو بجزء من الوفاء

فالإهداء

إلى

معلم البشرية ومنبع العلم نبينا محمد (صلى الله وعليه وسلم)

إلى...

مثل الأبوة الأعلى والدي العزيز

إلى ...

حبيبة قلبي الأولى ..أمي الحنونة

إلى ...

الحب كل الحب ..أخواني وأخواتي

إلى كافة الأهل والاصدقاء

إلى..

من مهدوا الطريق أمامي للوصول إلى هذا الجهد المتواضع

إلى من يسعد قلوبنا بلقياهم

شكروتقدير

الحمد لله ، والصلاة والسلام على اشرف خلق الله نبينا محمد صلى الله عليه وسلم

الشكر أولا وأخيرا لله سبحانه وتعالى الذي وفقنا وأعاننا لإنجاز

وا ِتمام هذا البحث ومن ثم الشكرو التقدير لهذا الصرح العظيم لجامعة السودان للعلوم

والتكنولوجيا واتقدم بأوفر الشكر والتقدير إلى

د. الطيب عمر احمد

على هذا البحث لما قدمه لنا من عون

ومساعدة بتتبعه لهذا البحث مشرفا ومرشدا فكانت له المساهمة

الفعالة في إخراج هذا البحث من مهده إلى حيز الوجود .

كما أخص بالشكر جميع الأساتذة بقسم الإحصاء التطبيقي والشكر أيضا

إلى زملائك وزميلاتنا وا ِلى كل من ساهم معنا في إخراج هذا البحث

المستخلص

يتناول هذا البحث كيفية إشتقاق الخواص الإحصائية للتوزيعات الإحتمالية كالوسط الحسابي و الوسيط والمنوال والتباين والإنحراف المعياري ومعامل الإلتواء ومعامل التفرطح مستخدمين في ذلك العزوم حول نقطة الأصل و العزوم المركزية التي تم إشتقاقها وإثباتها في الإطار النظري. ايضاً تم إيجاد الدالة التوزيعية والدالة المولدة للعزوم والدالة المميزة لعدد من التوزيعات الإحتمالية المتقطعة و المستمرة وقد تم التوصل الي إشتقاق خواص التوزيع المتقطع المنتظم وتوزيع برنولي وتوزيع ذي الحدين وتوزيع ذي الحدين السالب والتوزيع الهندسي والتوزيع فوق الهندسي بالنسبة للتوزيعات المتقطعة . والتوزيع المنتظم والتوزيع الأسي وتزويع جاما وتوزيع بيتا والتوزيع الطبيعي والتوزيع الطبيعي المعياري للتوزيعات المستمرة. مع توضح كيفية تطبيق هذه الخواص عن طريق أمثلة تطبيقية ، وقد تم التوصل الي إشتقاق بعض المقاييس التي كانت عبارة عن صيغ فقط ولكن تم إشتقاقها وإثباتها.

Abstract

This research deals with how to derive statistical properties of probability distributions Kalost arithmetic and median and mode, contrast, standard deviation and coefficient of convolution and coefficient of kurtosis users the moments about the point of origin and the central moments that were derived and recognized in the theoretical framework. Also it has been a distributive function and moment generating function and the characteristic of a number of probability distributions intermittent and persistent has been reached derivative properties intermittent distribution and regular distribution of Bernoulli and Binomial distribution and the distribution of binomial negative and distribution engineering and distribution hypergeometric for distributions intermittent. And regular distribution and exponential distribution and distribution of gamma and beta Tsoaa natural and distribution of natural and distribution standard for continuous distributions. With describes how to apply these properties through practical examples, it has been reached derivative of some measures that were previously only are formulas but were derived and substantiated.

الفهرست

الفصل الأول

المقدمة

المـــقدمة :

1-0: تمهيد :

في كثير من مجالات الحياة كالمجال الطبيعي اوالمجال الزراعي او المجال الصناعي بياناته تتبع توزيعات احتمالية معينة ، وهذه التوزيعا ت تعبر عن ظواهر هذه المجالات وتعرف بالتوزيعات الاحتمالية وتنقسم التوزيعات الحتمالية الي توزيعات متقطعة والتي يكون فيها المتغير العشوائي متقطع وتوزيعات احتمالية مستمرة والتي يكون فيها المتغير العشوائي مستمر وقد قمنا في هذا البحث بايجاد الخواص الاحصائيه للتوزيعات الاحتماليه المعلميه ومن هذه الخواص الوسط الحسابي والتباين والانحراف المعياري ومعامل الالتواء ومعامل التفرطح وايضا الدالة الكتلة او الكثافة الاحتمالية والداله المولدة للعزوم والدالة التميزية والدالة التوزيعية للتوزيعات الاحتمالية المتقطعة ومنها التوزيع المتقطع المنتظم وتوزيع برنولي وتوزيع زي الحدين (ثنائي الحدين) وتوزيع زي الحدين السالب وتوزيع بواسون والتوزيع الهندسي والتوزيع فوق الهندسي (الهندسي الزائدي) وكذلك التوزيعات المتصلة منها التوزيع المنتظم والتوزيع الاسي وتوزيع جاما وتوزيع بيتا والتوزيع الطبيعي والتوزيع الطبيعي المعياري

1-1: مشكلة البحث :

عادة ما يستخدم توزيع احتمالي في غير محله وذلك لاننا نجهل الخواص الاحصائية لذلك التوزيع ، كما ان اغلب الباحثين لا يفرقون بين ما اذا كان التوزيع متقطع او متصل والبعض الاخر بالكاد يعرف الوسط الحساب والانحراف المعياري كما يصعب ايجاد الخواص الاحصائية الاخرى لكثير من التوزيعات مشكلة هذا البحث هي كيفية الاشتقاق الرياضي للخواص الحصائية للتوزيعات الاحتمالية المعلمية (البارمترية) .

1-2: اهمية البحث :

هنالك الكثير من الباحثين لايعروفون ان الظواهر او البيانات تتبع تتوزيع احتمالي او غير احتمالي سواء كانت هذه البيانات متقطعة ام متصلة وأي توزيع من هذة التوزيعات، تنبع اهمية هذا البحث في انه يعتبر من البحوث القلائل التي تناول موضع اشتقاق الصيغ الرياضية للخواص الاحصائية للتوزيعات الاحتمالية حيث نجد ان كثير من الباحثين يجهلون كيفية الاشتقاق الخواص الاحصائية خاصة الخواص التي تختص بمقاييس الالتواء والتفرطح كما ان تطبيق هذة الخواص قد يكون امر في غاية الصعوبة الامر الذي ادي الي تبسيط طرق الاشتقاق حتي يسهل عملية التطبيق.

1-3: أهداف البحث :

يهدف هذا البحث الي عدة مواضيع نذكر منها ما يلي:

1- شرح كيفية إشتقاق تلك الصيغ الرياضية فما يخص الخواص الإحصائية للتوزيعات .

2- التوصل للصيغ الرياضية التي من شأنها أن تساعدنا في التطبيق العلمي.

3- معرفة المجال التطبيقي للتوزيعات في الحياة العملية .

4- إشتقاق بضع الخواص التي يصعب إشتقاقها بالطرق العادية

5- مد الباحثين المهتمين بنظرية الاحصاء بجميع الاشتقاقات التي يحتاجونها في مجال تخصصهم .

1-4: فروض البحث :

نسبة لأن طبيعة البحث نظرية لذلك يصعب وضع فرضية إحصائية يمكن إختبارها ولكن يمكن أن نختبر الخواص الإحصائية لكل توزيع بالتطبيق على بيانات إفتراضية .

1-5: منهجية البحث :

تم استخدام المنهج الوصفي ومنهج دراسة الحالة حيث تم وصف نظري للتوزيعات الاحتمالية لكل توزيع تم اثبات الخصائص الاحصائية من وسط و وسيط ومنوال والدالة المميزة والدالة المولدة للعزوم والالتواء والتفرطح ما تم استخدام منهج دراسة الحالة في اثبات بعض الامثلة كدراسة حالة لتلك التوزيعات.

1-6: مصطلحات البحث

فيما يلي بعض المصطلحات والرموز التي تم استخدامها في البحث وحتي تكون الصورة اكثر وضوحا قمنا بتوضيح وتفسير تلك الرموز لتسهيل عملية القراءة والفهم، ومن هذه الرموز نذكر:

الوسط	μ
التباين	σ^2
الانحراف المعياري	σ
معامل الالتواء	γ_3
معامل التفرطح	γ_4
الدالة التوزيعة	$F(x)$
الدالة المولدة للعزوم	$\mu_x(t)$
الدالة المميزة	$\phi_x(it)$

دالة كتلة الاحتمال $p(x)$

دالة كثافة الاحتمال $f(x)$

الوسيط M

1-7: هيكلة البحث

يحتوي هذا البحث على خمس فصول : حيث اشتمل الفصل الاولي المقدم والتي تتكون من مشكلة البحث وأهمية البحث والفرضيات والمنهجية المستخدمة وهيكلة البحث واهم المصطلحات. والفصل الثاني ويحتوي علي الاطار النظري من اشتقاق لبعض الخصائص الاحصائية للتوزيعات. ام الفصل الثالث فقد اشتمل علي بعض النماذج والتطبيقات للتوزيعات التي تم اشتقاقها في الفصل السابق. وفي الفصل الرابع النتائج والتوصيات وفي نهاية البحث المراجع والمصادر.

الفصل الثاني

مقدمة عامة عن التوزيعات الإحتمالية والخواص الإحصائية

1-2: التوزيع الإحتمالي Probability distribution:

هو مجموعة جزئية قابلة للقياس من مجموعة نتائج تجربة عشوائية ما . وهو يعتبر حالة خاصة من مصطلح أكثر عمومية هو القياس الإحتمالي ، الذي يعتبر دالة تربط قيم إحتمالات بمجموعات مقيسة من الفضاء المقاس بحيث تحقق فرضيات كولوموغروف.في حين أن كل متغير عشوائي ينشأ عنه توزيع إحتمالي يحتوي على معظم المعلومات المهمة عن هذا التمغير .فإذا كان المتغير xمتغيراً عشوائياً فإن التوزيع الإحتمالي الموافق له ينسب المجال$[a,b]$ إحتمالا : بمعنى أن يأخذ المتغير x قيمة ضمن المجال هي :

$Pr[a \leq x \leq b]$ويمكن وصف التوزيع الإحتمالي للمتغير عن طريق دالة التوزيع التراكمي التي تعرف كما يلي : نقول عن توزيع إحتمالي أنه متقطع إذا كانت دالة التوزيع التراكمي له مؤلفة من تسلسل منتهي ، كما يعني أنه يعود لمتغير عشوائي متقطع ، ونقول إن المتغير الإحتمالي أنه مستمر إذا كانت دالة التوزيع التراكمي له مستمرة أي أنها تعود لمتغير عشوائي احتمال أخذه بقيمة محددة معينة معدوما اي :

$pr[X = x = 0]$ أي كانت X من مجموعة الأعداد الحقيقية في مثل هذة الحالة لا وجود لإحتمال غير معدوم إلا من أجل مجال ضمن مجموعة الأعداد الحقيقية أما أن يأخذ المتغير قيمة محددة فهو أمر عديم الإحتمال .

هذة التوزيعات المستمرة المطلقة يمكن التعبير عنها بواسطة دوال كثافة إحتمالية : وهي عبارة عن دالة قابلة للتكامل بطريقة ليبيرغو ، وهي موجبة ومعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية .

وتنقسم التوزيعات الإحتمالية عموماً إلى قسمين :

1. توزيعات إحتمالية المعلمية
2. توزيعات إحتمالية لامعلمية

2-1-1: التوزيعات المعلمية واللامعلمية :

Parameters distribution-Parameters& Non

يقصد بالتوزيع المعلمي بأنه ذلك التوزيع الإحتمالي الذي تتضمن دالته ثوابت معينة تسمى معالم التوزيع Parameters والتي من شأنها تحديد أحد أفراد تلك العائلة من خلال تخصيص قيمة عددية لتلك المعلمةأو المعالم ، أما اللامعلمية هي التي لا تتضمن دالته معلمة معينة.

2-1-2 :المتغيرات العشوائية Random Variables:

المتغير العشوائي هو الذي يأخذ قيما حقيقية مختلفة تعبر عن نتائج فراغ العينة ،ومن ثم مجال هذاالمتغير ويشمل كل القيم الممكنة له، ويكون لكل قيمة من القيم التي يأخذها المتغير إحتمال معين ،وينقسم المتغير العشوائي إلى قسمين :

1. المتغيرات العشوائية المنفصلة (المتقطعة) Discrete Random Variables
2. المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة) Continuous Random Variables

2-1-3 :المتغيرات العشوائية المنفصلة (المتقطعة):

المتغير العشوائي المتقطع هو الذي يأخذ قيم بينية ، ومتباعدة ، ويرمز للمتغير العشوائي بشكل عام بحرف من الحروف البجدية الكبيرة X,Y,Z,...ويرمز للقيم المتغير بالحروف الصغيرة x,y,z,...

2-1-4 : المتغيرات العشوائية المتصلة (المستمرة):

المتغير العشوائي المستمر هو الذي يأخذ عدد لانهائي من القيم الممكنة له داخل مجاله، فإذا كان X متغير عشوائي مستمر ويقع في المدى (a,b)، أي أن $\{X = x : a < x < b\}$، فإن المتغير x عدد لا نهائي من القيم تقع بين الحدين الأدنى والأعلى (a,b).

2-2 : الخواص الإحصائية Statistical Properties :

ونقصد بها المتوسط ، التباين ، الوسيط ، الإنحراف المعياري ،المنوال ،الدالة المولدة للعزوم ، الدالة المييزة و كل من معاملا الإلتواء و التفرطح .

2-2-1 : العزوم Moments:

تعرف العزوم للمتغير عشوائي X (أوالتوزيع إحتمالي لمتغير عشوائي)بأنها القيم المتوقعة لدوال معينة بدلالة X الذي يسلك وفق دالة إحتمالية$p(x)$ كثافة إحتمال $f(x)$ وللعزوم أنواع عدة منها

العزوم اللامركزية Non-central moments

العزوم حول نقطة الاصل Moments about the origin

العزوم المركزية Central moments

العزوم المطلقة المركزية Central Absolute moments

العزوم العاملية Factorial moments

سنتطرق الي نوعين من أنواع العزوم وهي العزوم حول نقطة الأصل والعزوم المركزية

العزوم حول نقطة الأصل Moments about the origin:

إن هذا النوع من العوزم يعتبر حالة خاصة من العزوم اللامركزية في حالة إخترنا $a=0$ دائماً، ووفق هذا الإختيار يقال أن التوزيع الإحتمالي إلى x يمتلك عزم ذا المرتبة حو نقطة الأصل معرف بالصيغة $\mathrm{E}x^r, r=1,2,3,...$ ويتم حساب هذا العزم وفق الأتي :

$$\mathrm{E}x^r = \sum_x x^r p(x)$$

في حالة X متقطع

$$\mathrm{E}x^r = \int_x x^r f(x)$$

في حالة X متصل

العزوم المركزية Central moments:

وهذه الأخرى تعد حالة خاصة من العزوم اللامركزية في حالة إخترنا $a=\mathrm{E}x$ دائماً، ووفق هذا الإختيار يقال إن التوزيع الإحتمالي x يمتلك عزم ذا المرتبة r حول نقطة الاصل المعرف بالصيغة $[x-\mathrm{E}x]^r, r=1,2,3,...$ ويتم حساب هذا العزم وفق الأتي :

$$\mathrm{E}x^r = \sum_x [x-\mathrm{E}x]^r p(x)$$

في حالة X متقطع

$$\mathrm{E}x^r = \int_x [x-\mathrm{E}x]^r f(x)$$

في حالة X متصل

فيما يلي بعض العلاقات التي تربط ما بين العزوم المركزية والعزوم حول نقطة الأصل . هذه العلاقات مفيدة من الناحية التطبيقية عند حساب العزوم المركزية لتوزيع معين عُلمت فيه مسبقا عزوم حول نقطة الأصل $\mathrm{E}x^r$. إن العزم المركزي ذو المرتبة r هو $\mathrm{E}(x-\mathrm{E}x)$ وبإستخدام نظرية ثنائي الحدين يمكن بيان أن :

$$\begin{aligned}(x-\mathrm{E}x)^r &= \sum_{k=0}^{r} C_k^r\, x^k\, (-\mathrm{E}x)^{r-k} \\ &= (-\mathrm{E}x)^r + r\,x(-\mathrm{E}x)^{r-1} + \ldots + x^r\end{aligned}$$

$$\mathrm{E}(x-\mathrm{E}x)^r = \sum_{k=0}^{r} C_k^r\,(-\mathrm{E}x)^{r-k}.\mathrm{E}x^k$$

لاحظ من الصيغة الأخيرة أنه أمكن التعبير عن العزوم المركزي ذا المرتبة r بدلالة العزوم حول نقطة الأصل .

2-2-2: الدالة التوزيع التراكمي (التوزيعية) Cumulative distribution function :

هي دالة تحدد ما هو إحتمال أن تكون قيمة متغير عشوائي x أقل من أو تساوي قيمة معينة ، بمعنى أخر إنها دالة تعطي توزيع الإحتمالات لمتغير عشوائي علىأ تكون قيمته عدداً حقيقاً . وينبغي عدم الخلط بين دالة التوزيع التراكمي و دالة كتلة الإحتمال للمتغيرات المتقطعة و كثافة الإحتمال للمتغيرات المنفصلة ، ويتم إيجادها لتوزيعات المتقطعة بإيجاد قيمة المجموع من وإلى قيمة x المحددة ، أما في التوزيعات المتصلة بإيجاد قيمة التكامل من وإلى قيمة x المحددة ، ويرمز لدالة التوزيعية بالرمز $F(x)$.

2-2-3 : الوسط Mean :

ويسمى في بعض الأحيان بالوسط الحسابي لقيم المتغير العشوائي X في التوزيع الإحتمالي ، ويعرف المتوسط بأنه قيمة العزم الأول حول نقطة الأصل .وغالباً ما يرمز له بالرمز μ_x أو بشكل مختصر μ

.وهذا يعني أن :

$$=\sum xP(x)$$

في حالة X متقطع

$$=\int_x x f(x)dx$$

في حالة X مستمر

2-2-4 :التباين Variance:

إن التباين عبارة عن مقياس لدرجة تشتت قيم المتغر العشوائي لتوزيع إحتمالي معين . ويعرف التباين بأنه قيمة العزم المركزي الثاني ، وغالباً ما يرمز لتباين قيم المتغير X بالرمز $v(x)$ أو σ_x^2 وهذا يعني أن :

$$\sigma_x^2 = \mathrm{E}\left[x-\bar{x}\right]^2 = \mathrm{E}x^2 - (\mathrm{E}x)^2$$

أي أن التباين ماهو إلا الفرق ما بين العزم الثاني حول نقطة الأصل ومربع العزم الأول حول نقطة الأصل

إن مسألة تحديد التباين لإي توزيع إحتمالي معين مرهون بتحديد قيمة العزمين الأول والثاني حول نقطة الأصل .

2-2-5 :الإنحراف المعياريStandard deviation :

هو قيمة تستخدم لقياس مدى التبعثر الإحصائي ، أي أنه يدل على مدى إمتداد مجالات القيم ضمن مجموعة البيانات الإحصائية ويتاثر الإنحراف المعياري بالقيم المتباعدة أو المتطرفة ولكنه لا يتأثر كثيراً بالتغيرات التي تطرا على العينة ، كما أنه يرتبط بالوسط الحسابي للتوزيع ، بمعنى أن التشتت الذي نعبر عنه بالتباين أو

الإنحراف المعياري ينسب إلى الوسط الحسابي وليس لإي نقطة أخرى في التوزيع ، ويرمز له بالرمز σ ورياضياً هوعبارة عن الجزر التربيعي للتباين .

$$\sigma=\sqrt{v(x)}$$

2-2-6 : الوسيط Median :

يعد الوسيط هو الأخر أحد مقاييس النزعة المركزية ذات قيمة معرفة على المحور السيني . ويعرف الوسيط بأنه قيمة المتغيرالعشوائي X التي تقسم المساحة تحت منحنى الدالة $f(x)$ إلي قسمين متساوين . وحيث أن $f(x)$ هي دالة كثافة إحتمالية كذلك يعني الوسيط يمثل تلك القيمة التي تقسم المساحة الواقعة تحت منحنى الدالة (البالغة واحد) إلي نصفين .

ويوجد الوسيط في التوزيعات الإحتماليه المتصلة بالمعادلة التكاملية الأتية :

$$\int_{-\infty}^{M} f(x)dx=\frac{1}{2}$$

وحيث أن :

$$\int_{-\infty}^{M} f(x)dx=p(X\leq M)=F(M)$$

وذلك يعني انه يمكن الحصول على قيمة الوسيط من خلال الدالة التوزيعية $F(M)$ كنتيجة لحل الصيغة $F(M)=\frac{1}{2}$ نسبة إلي M . ومما تقدم نلاحظ أن الوسيط يتمثل بقيمة واحدة فقط عكس المنوال .

وأن وحدات قياس الوسيط هي نفس وحدات قياس المتغير X .

أما في حالة المتغيرات المتقطعة فإن الوسيط يمثل تلك القيمة (قد تكون معرفة في فضاء X او قد لا تكون) التي تمثل الإحتمال الكلي المقترن بفضاء العينةالمقسمة الي قسمين متساوين نصفة إلي يمين الوسيط والنصف الأخر يساره . وهذا يعني أن قيمة الوسيط M يمكن الحصول عليها من حل الصيغة $F(M)=\frac{1}{2}$ نسبة الي M .وعموما فإن الهدف من دراسة الوسيط هو تكوين فكرة عن القيمة التي تشطر الإحتمال المقترن بفضاء العينة بالمتغير العشوائي إلى قسمين متساوين إضافة إلي كونه مقياس بديل للمتوسط في حالة عدم إمكانية إيجاد الأخير .

2-2-7 : المنوال Mode :

يعد المنوال أحد مقاييس النزعة المركزية (مقياس موقعي) قيمته تكون معرفة على المحور السيني .ويعرف المنوال بأنه قيمة من قيم المعرفة في فضاء X التي تجعل $f(x)$ في نهايتها العظمى في حالة المتغيرات المتصلة ، أما في حالة المتغيرات المتقطعة فأن المنوال يمثل قيمة حقيقية (قد تكون معرفة في فضاء X أو قد لا تكون) تجعل $p(x)$ أكبر مما يمكن إن وحدات قياس المنوال هي نفس وحدات قياس المتغير X .

إن الهدف من دراسة المنوال هو تكوين فكرة عن القيمة العظمى للدالة $f(x)$ أو $p(x)$ إضافة إلي كونه مقياس بديل للمتوسط في حالة عدم إيجاد الأخير ويمكن إيجاده كالأتي :

في حالة المتغيرات العشوائية المتقطعة فإن المنوال (إذا كان موجود) يمثل قيمة قيمة معرفة على المحور السيني التي تحقق المتباينة $\dots < p(x-2) < p(x-1) < p(x) > p(x+1) > p(x+2) > \dots$ ولوحظ من خلال هذة المتباينة أن $\dots < p(x-1) < p(x) = p(x+1) > p(x+2) > \dots$ عندئذ يقال أن التوزيع الإحتمالي يمتلك منوالين معرفة بالقيمة معرفين بالقيمتين $x, x+1$ ،أما إذا كانت جميع الكتل الإحتمالية متساوية القيمة عند ذلك يقال أن التوزيع الإحتمالي للمتغير العشوائي لا يمتلك منوال .

أما في حالة المتغيرات العشوائية المتصلة يمكن الحصول عليه (إذا كان موجود) من خلال البحث عن قيمة أو قيم X التي تجعل $f(x)$ في نهايتها العظمى . وذلك يعني البحث عن قيمة التي تحقق المعادلة التفاضلية :

$$f'(x) = \frac{df(x)}{dx} = 0$$

بشرط أن

$$f''(x) = \frac{d^2 f(x)}{dx} < 0$$

عند قيمة أو قيم X التي تحقق $f''(x) = 0$

2-2-8 :الدالة المولدة للعزوم Moments generating function :

وهي عبارة عن قيمة متوقعة لدالة e^{tx} ، وشأْها توليد عزوم توزيع إحتمالي بأنواعها المختلفة اياً كانت مراتبها ،إن مسالة وجود الدالة المودة للعزوم مرهون بكون التكامل أو المجموع متقارب على نحو مطلق وإذا لم يكن كذلك عندئذ يقال أن الدالة المولدة للعزوم غير موجودة . وإذا كانت هذه الدالة موجودة عندئذ يمكن التعرف على عزوم التوزيع الإحتمالي الذي إشتق منه مهما كان نوع تلك العزوم أو مراتبها ، أفرض اذا كان لدينا المتغير العشوائي x بدالة كثافة إحتمال $f(x)$ في حالة المتغيرات العشوائية المستمرة أو دالة كتلة إحتمال $p(x)$ في حالة المتغيرات العشوائية المتقطعة ، فإن الدالة المولدة للعزوم التي يرمز لها بالرمز $M(t)$

$$M(t)=\sum_{x} e^{tx} p(x)$$

في حالة X متقطع

$$M_x(t)=\sum_{x} e^{tx} f(x)$$

في حالة X مستمر

2-2-9 : الدالة المبيزة Characteristic Function:

وتسمى في بعض الأحيان "الدالة الوصفية " ويرمز لها بالرمز $\phi(t)$ أو $M_x(it)$. التي تعد بحق من أهم دوال توليد العزوم لما تتمتع به من خصائص تطبيقية جعلتها تقف في مقدمة هذا النوع من الدوال .

ويتم إيجادها في التوزيعات الإحتمالية المتقطعة بالصيغة الأتية :-

$$\phi(t)=\mathrm{E}e^{itx}=\sum e^{itx} p(x)$$

كما يتم ايجادها في التوزيعات المتصلة بالصيغة الاتية :-

$$\phi(\mathrm{t})=\mathrm{E}\, e^{itx}=\int_{x} e^{itx} f(x)dx$$

2-2-10 :معامل الإلتواء Coefficient of Skewness :

هو قيمة تعطي فكرة عن تمركز قيم المتغير ، فإذا ما كانت قيم المتغير تتمركز بإتجاه القيم الصغيرة أكثر من تمركزها بإتجاه القيم الكبيرة فإن توزيع هذا المتغير ملتوياً نحو اليمين ويسمى موجب الإلتواء .أما اذا كان العكس فإن إلتواء هذا المتغير يكون سالبا أو ملتويا نحو اليسار ، وعندما يكون التوزيع ملتويا الى اليمين ، فإن القيم المتطرفة نجو اليمين تؤثر على الوسط الحسابي بسحبه نحو اليمين وبذلك يكون الوسط الحسابي أكبر من الوسيط ، أما إذا كان التوزيع ملتويا نحو اليسار فإن القيم المنطرفة الصغيرة تسحبه الى اليسار ، ولذلك يكون الوسط الحسابي أصغر من الوسيط ، ويكون الوسط الحسابي مساويا للوسيط عندما يكون التوزيع معتدلاً ، ويرمز للإلتواء بالرمز (γ_3) ويتم حسابه بالصيغة التالية :

$$\gamma_3=\frac{\mu_3}{\mu_2^{\frac{3}{2}}} = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

μ_2 و μ_3 هما على التوالي العزم المركزي الثاني و الثالث ، وأما σ يمثل الإنحراف المعياري .

2-2-11 :معامل التفرطح Coefficient of kurtosis:

يعرف التفلطح أو التفرطح بانه مقدار تسطح او تدبب منحى التوزيع الإحتمالي لمتغير عشوائي . ويرتبط مفهوم التفلطح إرتباطاً وثيقاً مع مفهوم التشتت ، فكلما كان تشتت القيم كان عالياً فذلك مؤشر لتدبب منحنى التوزيع الإحتمالي . ويمكن قياس درجة تدبب منحنى التوزيع وفق للصيغة التالية المقترحة من قبل العالم كال بيرسون وهي :

$$\gamma_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

μ_2 و μ_4 هما على التوالي العزم المركزي الثاني و الرابع ، وأما σ يمثل الإنحراف المعياري .

الفصل الثالث

التوزيعات الإحتمالية المتقطعة

3-0: مقدمة :

التوزيع الإحتمالي المتقطع (منفصل) هو التوزيع الذي تكون دالة الكتلة الإحتمالية له متقطعة أي أنها تعود لمتغير عشوائي متقطع [2].

3-1:التوزيع المنتظم المتقطع :

يعتبر التوزيع المنتظم من أبسط التوزيعات الإحتمالية المنفصلة ، حيث أن جميع قيم المتغيير x لها الاحتمال نفسه .

لهذا التوزيع بعض التطبيقات المحدودة خاصة في المعاينة الأحصائية .

يقال أن المتغير العشوائي x هو $x_1, x_2 \ldots x_n$: له توزيع إحتمالي منتظم متقطع إذا كانت

3-1-1: دالة كتلة الإحتمال :

$$P(x)=\frac{1}{N} \qquad ;x=1,2,\ldots,N$$

وهذا التوزيع يعتمد على المعلمة N وتكتب $x \sim DUFD(N)$

شروط دالة كتلة الإحتمال :

$$\mathbf{1-0 \le p(x) \le 1}$$

$$2\text{ - }\sum_{x=1}^{N}\frac{1}{N}=\frac{1}{N}*N=1$$

نلاحظ أن الدالة تحقق الشروط

3-1-2 :دالة التوزيعة:

$$F(x)=P(X \le x)=\sum_{x=1}^{x}P(x)$$

$$F(X=x)=\sum_{x=1}^{x}\frac{1}{N}=\frac{x}{N} \qquad ;x=1,2\ldots\ldots\ldots.N$$

3-1-3 :الوسط:

$$E(x) = \sum x\, p(x) = \sum_{x=1}^{N} x \frac{1}{N}$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{x=1}^{N} x$$

$$\sum_{x=1}^{N} x = \frac{N(N+1)}{2}$$

$$E(x) = \frac{1}{N} * \frac{N(N+1)}{2}$$

$$E(x) = \frac{N+1}{2}$$

3-1-4: التباين :

$$v(x) = Ex^2 - (Ex)^2$$

$$Ex^2 = \sum x^2 p(x) = \sum x^2 \frac{1}{N} \qquad ; x = 1, 2, ..., N$$

$$= \frac{1}{N} \sum_{x=1}^{N} x^2$$

$$\sum_{x=1}^{N} x^2 = \frac{N(2N+1)(N+1)}{6}$$

$$Ex^2 = \frac{1}{N} * \frac{N(2N+1)(N+1)}{6} = \frac{(2N+1)(N+1)}{6}$$

$$v(x) = \frac{(N+1)(2N+1)}{6} - \left(\frac{N+1}{2}\right)^2$$
$$= \frac{(N+1)(2N+1)}{6} - \frac{N^2+2N+1}{4}$$
$$= \frac{2N^2+2N+N+1}{6} - \frac{N^2+2N+1}{4}$$
$$= \frac{8N^2+12N+4-6N^2-12N-6}{24} = \frac{2(N^2-1)}{24}$$
$$\therefore v(x) = \frac{N^2-1}{12}$$

3-1-5: الإنحراف المعياري :

$$\sigma = \sqrt{v(x)} = \sqrt{\sigma^2}$$
$$\sigma = \sqrt{\frac{N^2-1}{12}}$$
$$\sigma = \frac{N-1}{\sqrt{12}} = \frac{N-1}{2\sqrt{3}}$$

3-1-6: معامل الإلتواء:

$$\gamma_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

$$\mu_3 = \sum (x-\mu)^3 \, p(x)$$

$$= \sum \left(x^3 - 3\mu x^2 + \mu^2 x - \mu^3 \right) p(x)$$

$$= \sum x^3 p(x) - 3\mu \sum x^2 p(x) + 3\mu^2 p(x) - \mu^3$$

$$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_1'\mu_2' + 2\mu_1'^3$$

$$\mu_3' = \mathrm{E}x^3 = \sum x^3 p(x)$$

$$= \sum x^3 \frac{1}{N}$$

$$\sum_{x=1}^{N} x^3 = \frac{N^2(N+1)^2}{4}$$

$$\mu_3' = \mathrm{E}x^3 = \frac{1}{N} * \frac{N^2(N+1)^2}{4} = \frac{N(N+1)^2}{4}$$

$$\mu_2' = \frac{(N+1)(2N+1)}{6}$$

$$\mu_1' = \frac{N+1}{2}$$

$$\mu_3 = \frac{N(N+1)^2}{4} - 3\left(\frac{N+1}{2}\right)\left(\frac{(N+1)(2N+1)}{6}\right) + 2\left(\frac{N+1}{2}\right)^3$$

$$= \frac{N(N+1)^2}{4} - 3\left(\frac{(N^2+2N+1)(2N+1)}{12}\right) + 2\left(\frac{N^3+3N^2+3N+1}{8}\right)$$

$$= \frac{N(N+1)^2}{4} - \frac{2N^3+4N^2+2N+N^2+2N+1}{4} + \frac{N^3+3N^2+3N+1}{4}$$

$$= \frac{N^3+2N^2+N-2N^3-4N^2-2N-N^2-2N-1+N^3+3N^2+3N+1}{4}$$

$$\mu_3 = 0$$

$$\gamma_3 = \frac{0}{\sigma^3} = 0$$

3-1-7: معامل التفرطح :

$$\gamma_4 = 3 - \frac{6\left(N^2+1\right)}{5\left(N-1\right)\left(N+1\right)}$$

3-1-8: الدالة المولدة للعزوم :

$$M_x(t) = Ee^{tx}$$

$$= \sum_{i=1}^{N} e^{tx}\frac{1}{N}$$

$$= \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} e^{tx}$$

$$= \frac{1}{N}\left[e^{tx} + (e^{tx})^2 + (e^{tx})^3 + \ldots\ldots + (e^{tx})^{n-1}\right]$$

$$\sum_{i=1}^{N} e^{tx} = \left[e^{tx} + (e^{tx})^2 + (e^{tx})^3 + \ldots\ldots + (e^{tx})^{n}\right]$$

$$M_x\left(t\right) = \frac{e^{tx}}{N}\left[1 + e^{tx} + (e^{tx})^2 + \ldots\ldots + (e^{tx})^{n-1}\right]$$

ولكن نلاحظ أن $\left[e^{tx} + (e^{tx})^2 + (e^{tx})^3 + \ldots\ldots + (e^{tx})^{n-1}\right]$ يمثل متوالية هندسية اساسها (1)ومجموعها

$$\frac{1-e^{Ntx}}{1-e^{tx}}$$

$$M_x(t) = \frac{e^{Ntx}}{N}\left[\frac{1-e^{Ntx}}{1-e^{tx}}\right]$$

3-1-9:الدالة المميزة :

$$\phi(it) = Ee^{itx}$$
$$= \sum_{i=1}^{N} e^{itx} \frac{1}{N}$$
$$= \frac{1}{N} \sum_{t=1}^{N} e^{itx}$$
$$= \frac{1}{N} \left[e^{itx} + (e^{itx})^2 + (e^{itx})^3 + \ldots\ldots + (e^{itx})^{n-1} \right]$$
$$\sum_{i=1}^{N} e^{tx} = \left[e^{itx} + (e^{itx})^2 + (e^{itx})^3 + \ldots\ldots + (e^{itx})^{n} \right]$$
$$\phi(it) = \frac{e^{itx}}{N} \left[1 + e^{itx} + (e^{itx})^2 + \ldots\ldots + (e^{tx})^{n-1} \right]$$

يمثل متوالية هندسية اساسها (1)ومجموعها $\left[e^{itx} + (e^{itx})^2 + (e^{itx})^3 + \ldots\ldots + (e^{itx})^{n-1} \right]$ولكن نلاحظ أن $\frac{1-e^{iNtx}}{1-e^{itx}}$

$$\phi(it) = \frac{e^{iNtx}}{N} \left[\frac{1-e^{iNtx}}{1-e^{itx}} \right]$$

3-1-10: المنوال :

لها نفس x التي تقابل أعلى إحتمال لكن في هذا التوزيع جميع قيم x في حالة المتغير المتقطع هو قيمة x تكررت بنفس العدد من المرات لذلك يمكن إعتبار كل قيمة من قيم X اي أن جميع قيم $\left(\frac{1}{N}\right)$ الإحتمال منولاً

3-1-11: الوسيط :

من تعريف الوسيط في المتغيرات المتقطعة

$$\sum_{x=0}^{N} p(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{N} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$\sum_{x=0}^{N} \frac{M}{N} = \frac{1}{2} \Rightarrow$$

$$M = \frac{N}{2}$$

أي أن الوسيط في التوزيع المنتظم المتقطع هو

$$M = \frac{N}{2}$$

أي أن الوسيط القيمة التي تقسم قيم المتغير العشوائي للتوزيع الى نصفين .

3-2 : توزيع برنوللي Bernoulli Distribution :

سمي هذا التوزيع على أسم العالم السويسري جاك برنولي (1654-1705) ويصف التجربة الإحتمالية التي لديها قيمتين من النتائج المحتملة (نجاح أو فشل) . إذا كانت (p) هي معلمة نجاح التجربة ، و (q) معلمة فشل التجربة والتي غالباً ما يشار إليها ($1-p$) ، يقتصر على حد سواء (p) و (q) للفترة من الصفر الى الواحد ، إذا كان إحتمال الفشل ($q=0$) عمل برنولي شكل الأساس لنظرية الإحتمالات، ومن التوزيع قد نستنتج عدة دوال لكتل إحتمالية بإستخدام وظيفة توليد الإحتمالات مثل توزيع ذي الحدين ، ذي الحدين السالب و التوزيع الهندسي .

3-2-1:دالة كتلة الإحتمال :

$$P(x) = p^x (1-p)^{1-x}$$

$$; x = 0,1$$

$$p + q = 1$$

شروط دالة كتلة الإحتمال :

$$1-0 \leq p(x) \leq 1$$

$$p(x) = p^x q^{1-x} \qquad x = 0,1$$

$$x = 0$$

$$p(0) = p^0 q^{1-0} = q$$

$$x = 1$$

$$p(1) = p^x q^{1-1} = p$$

نلاحظ إن الدالة موجبة لجميع قيم x

$$2-\sum p(x) = 1$$

$$\sum_{x=0}^{1} p^x q^{1-x} = p^0 q^{1-1} + p^1 q^{1-1} = q + p = 1$$

3-2-2:الدالة التوزيعة:

$$F\left(x\right)=P(X\leq x)=\sum_{x=1}^{x}P\left(x\right)\qquad ;x=0,1$$

$$\Sigma p^{x}q^{1-x}\qquad ;x=0,1$$

$$F\left(x\right)=\Sigma p^{0}q^{1-0}=q$$

$$F\left(x\right)=\Sigma p^{1}q^{1-1}=p$$

3-2-3:الدالة المولدة للعزوم :

$$M_{x}\left(t\right)=\mathrm{E}e^{tx}=\sum e^{tx}p(x)$$

$$=\sum e^{tx}p^{x}q^{1-x}$$

$$x=0,1$$

$$=e^{t(0)}p^{0}q^{1-0}+e^{t(1)}pq^{1-1}$$

$$M_{x}\left(t\right)=q+pe^{t}$$

3-2-4:الدالة المميزة:

$$\phi(\mathrm{it})=\mathrm{Ee}^{\mathrm{itx}}=\sum\mathrm{e}^{\mathrm{itx}}\mathrm{p(x)}$$

$$=\sum\mathrm{e}^{\mathrm{itx}}\mathrm{p}^{\mathrm{x}}\mathrm{q}^{1\text{-}\mathrm{x}}$$

$$;\mathrm{x}=0,1$$

$$\mathrm{e}^{\mathrm{it}(0)}\mathrm{p}^{0}\mathrm{q}^{1\text{-}0}+\mathrm{e}^{\mathrm{it}(1)}\mathrm{pq}^{1\text{-}1}$$

$$\phi(\mathrm{it})=\mathrm{q}+\mathrm{e}^{\mathrm{it}}\mathrm{p}$$

3-2-5:الوسط :

$$\mu = \mathrm{E}x = \sum xp(x)$$
$$= \sum xp^{x}(1-p)^{1-x}$$
$$x = 0,1$$
$$(0)\,p^{0}(1-p)^{1-0} + (1)\,p^{1}(1-p)^{1-1}$$
$$0 + p = p$$
$$\mathrm{E}x = p$$

3-2-6:المنوال:

في التوزيع المتقطع هو قيمة x والتي تقابل أكبر إحتمال

وحيث :

$x = 0,1$

ومن دالة الكتلة

$p(x=0) = 1-p$
$p(x=1) = p$

وهذا يعني أن قيمة المنوال تعتمد على قيمة p وحيث $(1 \le p \ge 0)$

وهنالك حالتان

اولاً :عندما P أكبرمن نصف $(p > \frac{1}{2})$

$p(x=1) > p(x=0)$

في هذه الحالة فإن المنوال يساوي واحد

ثانياً :عندما p أقل من نصف $(p < \frac{1}{2})$

$p(x=0) > p(x=1)$

وفي هذه الحالة فإن المنوال يساوي صفر

3-2-7:الوسيط:

من تعريف الوسيط

$$\sum_{x=0}^{\mu} p\left(x\right)=\frac{1}{2}\Rightarrow\sum_{x=0}^{\mu} p^{x}(1-p)^{1-x}=\frac{1}{2}$$

الوسيط هو قيمة x التي يكون عندها مجموع الإحتمالات يساوي $\frac{1}{2}$

إذا إفترضنا أن M تساوي واحد

$$\sum_{x=0}^{M-1} p^{x}(1-p)^{1-x}=\frac{1}{2}$$

$$1\neq\frac{1}{2}$$

لذلك لايمكن أن M تساوي واحد

إذا إفترضنا أن M تساوي الصفر

$$\sum_{x=0}^{\mu=0} p^{x}(1-x)^{1-x}=p^{0}(1-p)^{1}=1-p=\frac{1}{2}\Rightarrow$$

$$p=\frac{1}{2}$$

ومن ما سبق نستنتج أن الوسيط لتوزيع برنولي يساوي صفر تحت شرط أن $p=\frac{1}{2}$

3-2-8:التباين :

$$v(x) = \mathrm{E}x^2 - (\mathrm{E}x)^2$$

$$\mathrm{E}x^2 = \sum x^2 p(x)$$

$$\sum x^2 p^x (1-p)^{1-x}$$

$$x = 0,1$$

$$(0) p^0 (1-p)^{1-0} + (1)^2 p^1 (1-p)^{1-1}$$

$$0 + p = p$$

$$v(x) = p - p^2 = p(1-p) = pq$$

$$v(x) = pq$$

3-2-9:الإنحراف المعياري :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{v(x)}$$

$$\sigma = \sqrt{pq}$$

3-2-10:معامل الإلتواء:

$$\gamma_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

$$\mu_3 = \sum \left(x-\mu\right)^3 p(x)$$

$$= \sum (x-\mu)^3 p^x q^{1-x}$$

$$x = 0,1$$

$$= \left(0-p\right)^3 p^0 q^1 + (1-p)^3 p^1 q^0$$

$$= -p^3 q + q^3 p = pq(q^2 - p^2)$$

$$\sigma = \sqrt{pq}$$

$$\gamma_3 = \frac{pq\left(q^2 - p^2\right)}{(\sqrt{pq})^3} = \frac{pq\left(q^2 - p^2\right)}{pq\sqrt{pq}}$$

$$\gamma_3 = \frac{q^2 - p^2}{\sqrt{pq}}$$

3-2-11:معامل التفرطح :

$$\gamma_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

$$\mu_4 = \sum\left(x-\mu\right)^4 p(x)$$

$$= \sum\left(x-p\right)^4 p^x q^{1-x}$$

$$x = 0,1$$

$$= \left(0-p\right)^4 p^0 q + \left(1-p\right)^4 pq^0$$

$$= pq^4 - p^4 q = pq\left(q^3 - p^3\right)$$

$$\sigma = \sqrt{pq}$$

$$\gamma_4 = \frac{pq\left(q^3 - p^3\right)}{\left(\sqrt{pq}\right)^4} = \frac{pq\left(q^3 - p^3\right)}{p^2 q^2}$$

$$\gamma_4 = \frac{q^3 - p^3}{pq}$$

3-3:توزيع ذي الحدين Binomial Distribution:

يعتبر توزيع ثنائي الحدين أحد التوزيعات المتقطعة ذات أهمية تطبيقية كبيرة في مجالات الحياة المختلفة نذكر منها :

1. في الوراثة ، حيث يعتمد الخصائص البالوجية الموروثة على جينات تحدث بصورة ثنائية مثل الشعر المستقيم مقابل الشعر المجعد مثلاً ، وتطبيقات وراثيةٌ خرى تتعلق بعدد النويات التي توجد في نفس الحلة لمتتابعتين من متتابعات DNA
2. عدد القطع المعيبة في عينة عشوائية حجمها n مسحوبة من إنتاج كبير يمثله متغيرعشوائي يخضع لقانون ذات الحدين
3. علم البيئة الحيواني والنباتي من مجالات تطبيق هذا التوزيع فيطبق مثلاً في تقدير حجم مجتمع حيواني تم ترك علامة علية وتركه.
4. وفي بناء النماذج مثل نماذج الأكياس التي يتم السحب منها على أساس محاولات برنوللي
5. وفي الإحصاء البارامتري ، حيث يمثل ذات الحدين للإحتمالات توزيع العينة لإحصاء كل من إختبار الإشارة وإختبارات أخرى .

ويعتبر العالم JamesBernoulli (1654-1705) مكتشف هذا التوزيع عام 1700 وتم نشر انجازه عام 1713. ويمكن إعتبار هذا التوزيع حالة أكثر عمومية لتوزيع برنوللي عندما يكون عدد المحاولات أكثر من محاولة واحدة ، وقد جاءت تسمية التوزيع " ثنائي الحدين" بسبب إنا في كل محاولة نتأخذ قراراً ذا حدين ومن النوع "نجاح المحاولة " أو "فشل المحاولة " ، "جد" أو "غير جيد" ، "متطابق" أو "غير متطابق" وغيرها من الألفاظ المماثلة .

في كثير من الأحيان قد تشتمل تجربة ما على n من المحاولات المتكررة المستقلة بحيث يكون لكل محاولة نتيجتين إثنتين فقط ، تسمى الأولى نجاح والأخري فشل حيث إحتمال النجاح p وإحتمال الفشل $q=1-p$ تسمي التجربة التي تحقق هذه الشروط بتجربة ثنائي الحدين .

ويقال أن تجربة ذي الحدين هي التي تحق الشروط الاتية :

A. التجربة التي تتكون من n من المحاولات المتكررة .

B. نتيجة كل محاولة يمكن تصنيفها الي نجاح أو فشل .

C. إحتمال النجاح وهو p يبقى ثابت من محاولة الي محاولة .

D. المحاولات المتكررة مستقلة بعضها عن بعض .

تعريف:

عدد حالات النجاح x في n من المحاولات لتجربة ذي الحدين يسمي متغير عشوائي يتبع توزيع ذي الحدين ويكتب بالصيغة $x \sim Bin(n,p)$

3-3-1: دالة كتلة الإحتمال :

$$p(x) = C_x^n p^x q^{n-x}$$
$$x = 0,1.....n$$

شروط دالة كتلة الإحتمال

3-3-2:الدالة التوزيعية :

$$F(x) = p(X \le x) = \sum_{x=0}^{x} p(x) \qquad ; x = 0,1,2,...n$$
$$= \sum_{x=0}^{x} C_X^N P^X q^{n-x}$$

تبين قيم الإحتمال المتراكمة حتى قيمة X من قيم x معينة

3-3-3:الداله المولده للعزوم :

$$M_x(t) = Ee^{tx} = Ee^{tx}p(x)$$
$$= \sum e^{tx} C_x^n p^x q^{n-x} = \sum C_x^n (e^t p)^x q^{n-x}$$

من نظرية ذات الحدين :

$$\sum C_x^n \left(pe^t\right)^x q^{n-x} = \left(pe^t + q\right)^n$$
$$M_x(t) = \left(pe^t + q\right)^n$$

3-3-4:الدالة المميزة :

$$\phi(it) = Ee^{itx} = \sum e^{itx} p(x)$$
$$= \sum e^{itx} C_x^n p^x q^{n-x} = \sum C_x^n \left(e^{it} p\right)^x q^{n-x}$$

من نظرية ذات الحدين :

$$\sum C_n^x \left(pe^{it}\right)^x q^{n-x} = \left(pe^{it} + q\right)^n$$
$$\phi(it) = \left(pe^{it} + q\right)^n$$

3-3-5:الوسط :

$$\mu = Ex = \sum_{x=0}^{n} xp(x)$$
$$= \sum_{x=0}^{n} xC_x^n p^x q^{n-x}$$
$$= \sum_{x=0}^{n} x \frac{n!}{x!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$
$$\sum_{x=0}^{n} x \frac{n(n-1)!}{x(x-1)!(n-x)!} p^x q^{n-x}$$

بالضرب في $\frac{p}{p}$

$$p\sum_{x=1}^{n} \frac{n(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} q^{n-x}$$
$$= np\sum_{x=1}^{n} \frac{(n-1)!}{(x-1)!(n-x)!} p^{x-1} q^{n-x}$$
$$np\sum_{x=1}^{n} C_{x-1}^{n-1} p^{x-1} q^{n-x}$$

من نظرية ذات الحدين

$$\sum_{x=1}^{n} C_{x-1}^{n-1} p^{x-1} q^{n-x} = (p+q)^{n-1} = 1$$

$$E x = n p$$

3-3-6:الوسيط:

من تعريف الوسيط في التوزيعات المتقطعة القيمة التي تجعل مجموع الإحتمالات تساوي النصف

$$\sum_{\chi=0}^{M} C_{x}^{n} p^{x} (1-p)^{n-x} = \frac{1}{2}$$

لذلك نحسب الإحتمالات إبتدئاً من إفتراض أن $x(0,1,2,..........n)$ هي إحدى قيم M وحيث أن التي يكون عندها مجموع الإحتمالات M_1 وهكذا الى إن نحصل على قيمة $M_2 = 2$ ثم $M_1 = 1$ ثم $M_0 = 0$ والتي تحقق ذلك وإذا حصلنا على قيمتين قريبتين من $(x = M)$ يساوي نصف فتكون قيمة الوسيط هي قيمة النصف نأخذ الاقرب الى النصف.

3-3-7: المنوال :

في التوزيعات الإحتماليه هو احدى قيم X التي تقابل أكبر إحتمال أي أننا نحسب جميع قيم الإحتمالات لقيم X أكبر إحتمال وقيمة X المقابل لإكبر إحتمال هي المنوال .

3-3-8:التباين :

$$v\left(x\right)=\mathrm{E}x^2-\left(\mathrm{E}x\right)^2$$
$$\mathrm{E}x^2=\sum x^2p\left(x\right)$$
$$\sum x^2C_x^np^xq^{n-x} \qquad x=0,1,2,.......,n$$
$$x^2=\left(x\left(1-x\right)+x\right)$$
$$\sum\left(x\left(1-x\right)+x\right)C_x^np^xq^{n-x}$$
$$\sum x\left(1-x\right)C_x^np^xq^{n-x}+\sum xC_x^np^xq^{n-x}$$
$$\sum x\left(1-x\right)C_x^np^xq^{n-x}+np$$
$$\sum x\left(x-1\right)\frac{n!}{\left(n-x\right)!x!}p^xq^{n-x}+np$$
$$\sum x\left(1-x\right)\frac{n\left(n-1\right)\left(n-2\right)!}{\left(n-x\right)!x\left(x-1\right)\left(x-2\right)!}p^xq^{n-x}+np$$
$$n\left(n-1\right)\sum\frac{n-2!}{\left(n-x\right)!\left(x-2\right)!}p^xq^{n-x}+np$$

بالضرب $\frac{p^2}{p^2}$

$$p^2n\left(n-1\right)\sum\frac{n-2!}{\left(n-x\right)!\left(x-2\right)!}p^{x-2}q^{n-x}+np$$
$$p^2n\left(n-1\right)\sum C_{x-2}^{n-2}p^{x-2}q^{n-x}+np$$
$$\sum C_{x-2}^{n-2}p^{x-2}q^{n-x}=\left(p+q\right)^{n-2}=\left(1\right)^{n-2}=1$$
$$p^2n\left(n-1\right)+np$$
$$\mathrm{E}x^2=p^2n^2-p^2n+pn$$
$$v\left(x\right)=p^2n^2-p^2n+pn-p^2n^2$$
$$=np-p^2n=np\left(1-p\right)=npq$$
$$v(x)=npq$$

3-3-9:الإنحراف المعياري :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{v(x)}$$
$$\sigma = \sqrt{npq}$$

3-3-10:معامل الالتواء:

$$\gamma_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$
$$\mu_3 = \sum (x-\mu)^3 \, p(x)$$
$$\sum \left(x^3 - 3\mu x^2 + \mu^2 x - \mu^3 \right) p(x)$$
$$\sum x^3 p(x) - 3\mu \sum x^2 p(x) + 3\mu^2 p(x) - \mu^3$$
$$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_1'\mu_2' + 2\mu_1'^3$$

$$\mu_3' = \mathrm{E}x^3 = \sum x^3 p(x) = \sum x^3 C_x^n p^x q^{n-x}$$
$$x^3 = x(x-1)(x-2) + 3x(x-1) + x$$
$$\sum \Big(x(x-1)(x-2) + 3x(x-1) + x \Big) C_x^n p^x q^{n-x}$$
$$= \sum x(x-1)(x-2) C_x^n p^x q^{n-x} + 3\sum x(x-1) C_x^n p^x q^{n-x} + \sum x C_x^n p^x q^{n-x}$$
$$= \sum x(x-1)(x-2) \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{x(x-1)(x-2)(x-3)!(n-x)!} p^x q^{n-x} + 3p^2 n(n-1) + np$$

بضرب الحد الاول $\frac{p^3}{p^3}$

$$p^3 n(n-1)(n-2) \sum C_{x-3}^{n-3} p^{x-3} q^{n-x} + 3p^2 n(n-1) + pn$$

من نظرية ذات الحدين نجد أن:

$$\sum C_{x-3}^{n-3} p^{x-3} q^{n-x} = \left(p+q \right)^{n-3} = 1$$

$$= p^3 n\left(n-1\right)\left(n-2\right) + 3p^2 n\left(n-1\right) + pn$$

$$\mu_3' = p^3 n^3 - 3p^3 n^2 + 2p^3 n + 3p^2 n^2 - 3p^2 n + np$$

$$\mu_2' = \mathrm{E}x^2 = p^2 n^2 - p^2 n + pn$$

$$\mu_1' = \mathrm{E}x = np$$

$$\mu_3 = p^3 n^3 - 3p^3 n^2 + 2p^3 n + 3p^2 n^2 - 3p^2 n + pn - 3pn\left(p^2 n^2 - p^2 n + pn\right) + 2p^3 n^3$$

$$= p^3 n^3 - 3p^3 n^2 + 2p^3 n + 3p^2 n^2 - 3p^2 n + pn - 3n^3 p^3 + 3p^3 n^2 - 3p^2 n^2 + 2n^3 p^3$$

$$= 2p^3 n - 3p^2 n + pn$$

$$= pn\left(2p^2 - 3p + 1\right) = np\left(1-p\right)\left(1-2p\right) = npq\left(1-2p\right)$$

$$\mu_3 = npq\left(1-2p\right)$$

$$\sigma = \sqrt{npq}$$

$$\gamma_3 = \frac{npq\left(1-2p\right)}{\left(\sqrt{npq}\right)^3} = \frac{npq\left(1-p-p\right)}{npq\sqrt{npq}} = \frac{q-p}{\sqrt{npq}}$$

3-3-11:معامل التفرطح :

$$\gamma_4=\frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

$$\mu_4=\sum(x-\mu)^4\,p(x)$$

$$=\sum\left(x^4-4\mu x^3+6\mu^2x^2-4\mu^3x+\mu^4\right)p(x)$$

$$=\sum x^4p(x)-4\mu\sum x^3p(x)+6\mu^2\sum x^2p(x)-4\mu^3\sum xp(x)+\mu^4$$

$$\mu_4=\mu_4'-4\mu_1'\mu_3'+6\mu_1'^2\mu_2'-3\mu_1'^4$$

$$\mu_4'=\sum x^4p(x)=\sum x^4C_x^np^xq^{n-x}$$

$$x^4=x(x-1)(x-2)(x-3)+6x(x-1)(x-2)+7x(x-1)+x$$

$$=\sum\left(x(x-1)(x-2)(x-3)+6x(x-1)(x-2)+7x(x-1)+x\right)C_x^np^xq^{n-x}$$

$$=\sum x(x-1)(x-2)(x-3)C_x^np^xq^{n-x}+6\sum x(x-1)(x-2)C_x^np^xq^{n-x}+$$

$$7\sum x(x-1)C_x^np^xq^{n-x}+\sum XC_x^np^xq^{n-x}$$

$$=\sum x(x-1)(x-2)(x-3)\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)!}{x(x-1)(x-2)(n-3)(n-4)!(n-x)!}p^xq^{n-x}$$

$$+6p^3n(n-1)(n-2)+7p^2n(n-1)+pn$$

بضرب الحد الاول في $\frac{p^4}{p^4}$

$$p^4n(n-1)(n-2)(n-3)\sum C_{x-4}^{n-4}p^{x-4}q^{n-x}+6p^3n(n-1)(n-2)\sum C_{x-3}^{n-3}p^{x-3}q^{n-x}$$

$$+7p^2n(n-1)\sum C_{x-2}^{n-2}p^{x-2}q^{n-x}+pn\sum C_{x-1}^{n-1}p^{x-1}q^{n-x}$$

من نظريه ذات الحدين نجد ان :

$$\sum C_{x-4}^{n-4} p^{x-4} q^{n-x} = \left(p+q\right)^{n-4} = 1$$

$$= p^4 n(n-1)(n-2)(n-3) + 6p^3 n(n-1)(n-2) + 7p^2 n(n-1) + np$$

$$= p^4n^4 - 6p^4n^3 + 11p^4n^2 - 6p^4n + 6p^3n^3 - 18p^3n^2 + 12p^3n + 7p^2n^2 - 7p^2n + np$$

$$\mu_4' = p^4n^4 - 6p^4n^3 + 11p^4n^2 - 6p^4n + 6p^3n^3 - 18p^3n^2 + 12p^3n + 7p^2n^2 - 7p^2n + np$$

$$\mu_3' = \mathrm{E}x^3 = p^3n^3 - 3p^3n^2 + 2p^3n + 3p^2n^2 - 3p^2n + np$$

$$\mu_2' = \mathrm{E}x^2 = n^2p^2 - np^2 + np$$

$$\mu_1' = \mathrm{E}x = np$$

$$\mu_4 = p^4n^4 - 6p^4n^3 + 11p^4n^2 - 6p^4n + 6p^3n^3 - 18p^3n^2 + 12p^3n$$

$$+7p^2n^2 - 7p^2n + np - 4np\left(p^3n^3 - 3p^3n^2 + 2p^3n + 3p^2n^2 - 3p^2n + np\right) +$$

$$6p^2n^2\left(p^2n^2 - p^2n + np\right) - 3 + p^4n^4$$

$$\mu_4 = p^4n^4 - 6p^4n^3 + 11p^4n^2 - 6p^4n + 6p^3n^3 - 18p^3n^2 + 12p^3n +$$

$$7p^2n^2 - 7p^2n + np - 4n^4p^4 + 12p^4n^3 - 8p^4n^2 - 12n^3p^3 + 12p^3n^2$$

$$-4n^2p^2 + 6p^4n^4 - 6p^4n^3 + 6n^3p^3 - 3p^4n^4$$

$$\mu_4 = 3p^4n^2 - 6np^4 - 6p^3n^2 + 12p^3n - 7p^2n + np + 3p^2n^2$$

$$\mu_4 = \left(3p^4n - 6p^3n^2 + 3p^2n^2\right) + \left(-6np^4 + 12p^3n - 7p^2n + np\right)$$

$$\gamma_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

$$\sigma = \sqrt{npq}$$

$$\alpha_4 = \frac{\left(3p^4n - 6p^3n^2 + 3p^2n^2\right) + \left(-6np^4 + 12p^3n - 7p^2n + np\right)}{\left(\sqrt{npq}\right)^4}$$

$$\gamma_4 = \frac{3p^4n - 6p^3n^2 + 3p^2n^2}{n^2p^2q^2} + \frac{-6np^4 + 12p^3n - 7p^2n + np}{n^2p^2q^2}$$

$$\gamma_4 = \frac{3n^2p^2\left(p^2 - 2p + 1\right)}{n^2p^2q^2} + \frac{np\left(-6p^3 + 12p^2 - 7p + 1\right)}{n^2p^2q^2}$$

$$\gamma_4 = \frac{3n^2p^2q^2}{n^2p^2q^2} + \frac{np\left(1-p\right)\left(6p^2 - 6p + 1\right)}{n^2p^2q^2}$$

$$\gamma_4 = 3 + \frac{npq\left(1 - 6p\left(1-p\right)\right)}{n^2p^2q^2}$$

$$\gamma_4 = 3 + \frac{1 - 6pq}{npq}$$

3-4:توزيع بواسون Poisson Distribution :

إن التجارب التي تحدث تعطينا عدد حالات النجاح والتي تحدث في فترة زمنية معينة أوفي منطقة محددة تسمى تجارب بواسون Poisson experiment الفترة الزمنية قد تكون دقيقة ، يوم ، شهر أو حتى سنة .

هنالك مجالات تطبيقية كثيرة لتوزيع بواسون نذكر منها :

1. يستخدم توزيع بواسون في ضبط الجودة ، لعدد القطع المعيبة في الانتاج .
2. يستخدم في إحصاءات بولتزمان_ماكسويل في الإحصاء الكمي ونظرية تصوير الصفائح .
3. لتوزيع بواسون إستخدامات كثيرة في مجالات البيئة الجيولوجيا ، والجغرافيا والدراسات العمرانية في الإسكان .
4. إستخدامات توزيع بواسون للعد في وحدة المكان والحجم عديدة فضلا عن إستخداماته في وحدة الزمن . والإستخدامات في وحدة الزمن لها أهمية كبيرة ، وخاصة في نظرية الطوابير ، حيث يكون للفترات الزمنية بين الأحداث المتتابعة توزيعاتأُ سية مستقلة ومتطابقة ، ولذا فيكون عدد الأحداث التي تقع في فترة زمنية معينة خاضعا لتوزيع بواسون .
5. وإستخدم توزيع بواسون في المعايرة البيولوجية ، وعد مستعمرات البكتيريا أو الفيروسات لدرجات تركيز مختلفة أو قيود تجريبية ، والإصابات السرطانية ،وإحصاء الوفيات والمواليد .
6. كما طبق في الإقتصاد حيث إختبر توزيع بواسون مقابل توزيعات متقطعةُأ خرى مثل توزيع ذي الحدين السالب للإحتمالات .
7. ويستخدم توزيع بواسون في مجالاتأُ خرى عديدة مثل الزراعة ، والتلفونات ، وحوادث المركبات (سيارات ، قطارات ' .....) والإجتماع وإنسيابية السيارات في المرور ، والتطبيقات العسكرية .

وتجربة بواسون مشتقة من عملية بواسون ، والتي يجب أن تحقق الشروط التالية :

أ- متوسط عدد حالات النجاح μ ، والتي تحدث في الفترة الزمنية المعطاة أو في المنطقة المحددة المعلومة .

ب-إحتمال وقوع حالة نجاح واحدة في فترة قصيرة و منطقة صغيرة يتناسب مع طول هذه الفترة أو حجم هذه المنطقة و لا يعتمد على عدد حالات النجاح التي تحدث خارج هذه الفترة أو المنطقة .

ج-إحتمال وقوع أكثر من حالة نجاح في الفترة القصيرة أو المنطقة الصغيرة .

3-4-1: دالة كتلة الإحتمال :

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \qquad x = 0,1,2,....$$

3-4-2:الدالة التوزيعية :

$$F(x) = \sum_{x=0}^{x} p(x)$$

$$F(x) = \sum_{x=0}^{x} \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \quad = e^{-\lambda}\sum_{x=0}^{x}\frac{\lambda^{x}}{x!}$$

3-4-3:الوسط :

$$\mu = \mathrm{E}x = \sum xp(x)$$

$$= \sum x \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \qquad x = 0,1,2,....$$

$$= e^{-\lambda}\sum x \frac{\lambda^{x}}{x(x-1)!}$$

$$= e^{-\lambda}\sum \frac{\lambda^{x}}{(x-1)!}$$

بالضرب في $\frac{\lambda}{\lambda}$

$$\mathrm{E}x = \lambda e^{-\lambda}\sum \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!}$$

قاعدة

$$\sum \frac{\lambda^{x-1}}{(x-1)!} = e^{\lambda}$$

$$= \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$$

$$\mathrm{E}x = \lambda$$

3-4-4: التباين :

$$v(x)=\mathrm{E}x^2-(\mathrm{E}x)^2$$
$$\mathrm{E}x^2=\sum x^2 p(x)$$
$$=\sum x^2 \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$
$$x^2=x(x-1)+x$$
$$=\sum\left(x(x-1)+x\right)\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$
$$=\sum x(x-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}+\sum x\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$
$$=\sum x(x-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x(x-1)!}+\lambda$$
$$=e^{-\lambda}\sum\frac{\lambda^x}{(x-1)!}+\lambda$$

بالضرب في $\frac{\lambda^2}{\lambda^2}$

$$=\lambda^2 e^{-\lambda}\sum\frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!}+\lambda$$

قاعدة

$$\sum\frac{\lambda^{x-2}}{(x-2)!}=e^{\lambda}$$
$$=\lambda^2 e^{-\lambda}e^{\lambda}+\lambda=\lambda^2+\lambda$$
$$\mathrm{E}x^2=\lambda^2+\lambda$$
$$v(x)=\lambda^2+\lambda-\lambda^2=\lambda$$

3-4-5: الإنحراف المعياري :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{v(x)}$$
$$\sigma = \sqrt{\lambda}$$

3-4-6:معامل الإلتواء :

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$
$$\mu_3 = \sum (x-\mu)^3 \, p(x)$$
$$= \sum \left(x^3 - 3\mu x^2 + 3\mu^2 x - \mu^3 \right) p(x)$$
$$= \sum x^3 p(x) - 3\mu \sum x^2 p(x) + 3\mu^2 \sum xp(x) - \mu^3$$
$$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_1'\mu_2' + 2\mu_1'^3$$
$$\mu_3' = \mathrm{E}x^3 = \sum x^3 xp(x) = \sum x^3 \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$
$$= \sum \left(x(x-1)(x-2) + 3x(x-1) + x \right) \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$
$$= \sum x(x-1)(x-2)\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} + 3\sum x(x-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} + \sum x\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$
$$= \sum x(x-1)(x-2)\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x(x-1)(x-2)(x-3)!} + 3\lambda^2 + \lambda$$

بالضرب في $\frac{\lambda^3}{\lambda^3}$

$$= \lambda^{3}\ell^{-\lambda} \sum \frac{\lambda^{x-3}}{(x-3)!} + 3\lambda^{2} + \lambda$$

$$\sum \frac{\lambda^{x-3}}{(x-3)!} = \ell^{\lambda}$$

$$\mu_3' = \lambda^{3}\ell^{-\lambda}\ell^{\lambda} + 3\lambda^{2} + \lambda$$

$$\mu_3' = \lambda^{3} + 3\lambda^{2} + \lambda$$

ومما سبق نجد أن :

$$\mu_2' = \lambda^{2} + \lambda$$

$$\mu_1' = \lambda$$

$$\mu_3 = \lambda^{3} + 3\lambda^{2} + \lambda - 3\lambda\left(\lambda^{2} + \lambda\right) + 2\lambda^{3}$$

$$= \lambda^{3} + 3\lambda^{2} + \lambda - 3\lambda^{3} - 3\lambda^{2} + 2\lambda^{3}$$

$$\mu_3 = \lambda$$

$$\sigma = \sqrt{\lambda}$$

$$\gamma_3 = \frac{\lambda}{\left(\sqrt{\lambda}\right)^{3}} = \frac{\lambda}{\lambda\sqrt{\lambda}} = \frac{1}{\lambda}$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{\lambda}$$

3-4-7:معامل التفرطح :

$$\gamma_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

$$\mu = \sum (x-\mu)^4 \, p(x)$$

$$= \sum \left(x^4 - 4\mu x^3 + 6\mu^2 x^2 - 4\mu^3 x + \mu^4\right) p(x)$$

$$= \sum x^4 p(x) - 4\mu \sum x^3 p(x) + 6\mu^2 \sum x^2 p(x) - 4\mu^3 \sum x p(x) + \mu^4$$

$$\mu_4 = \mu_4' - 4\mu_1'\mu_3' + 6\mu_1'^2 \mu_2' - 3\mu_1'^4$$

$$\mu_4' = \sum x^4 p(x) = \sum x^4 \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= \sum \left(x(x-1)(x-2)(x-3) + 6x(x-1)(x-2) + 7x(x-1) + x\right) \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= \sum x(x-1)(x-2)(x-3)\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} + 6\sum x(x-1)(x-2)\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} +$$

$$7\sum x(x-1)\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!} + \sum x \frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x!}$$

$$= \sum x(x-1)(x-2)(x-3)\frac{e^{-\lambda}\lambda^x}{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)!} + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda$$

بالضرب في $\frac{\lambda^4}{\lambda^4}$

$$= e^{-\lambda}\lambda^4 \sum \frac{\lambda^{x-4}}{(x-4)!} + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda$$

قاعدة

$$\sum \frac{\lambda^{x-4}}{(x-4)!} = e^{\lambda}$$

$$= \lambda^4 e^{-\lambda} e^{\lambda} + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda$$

$$\mu_4' = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda$$

$$\mu_3' = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda$$

$$\mu_2' = \lambda^2 + \lambda$$

$$\mu_1' = \lambda$$

$$\mu_4 = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda - 4\lambda\left(\lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda\right) + 6\lambda^2\left(\lambda^2 + \lambda\right) - 4\lambda^3(\lambda) + \lambda^4$$

$$\mu_4 = \lambda^4 + 6\lambda^3 + 7\lambda^2 + \lambda - 4\lambda^4 - 12\lambda^3 - 4\lambda^2 + 6\lambda^4 + 6\lambda^3 - 4\lambda^4 + \lambda^4$$

$$\mu_4 = 3\lambda^2 + \lambda$$

$$\gamma_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

$$\sigma = \sqrt{\lambda}$$

$$\gamma_4 = \frac{3\lambda^2 + \lambda}{\left(\sqrt{\lambda}\right)^4} = \frac{3\lambda^2 + \lambda}{\lambda^2}$$

$$\gamma_4 = 3 + \frac{1}{\lambda}$$

3-4-8:الدالة المولدة للعزوم :

$$M_x(t) = \mathrm{E}\, e^{tx} = \sum e^{tx} p(x)$$

$$= \sum e^{tx} \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} = e^{-\lambda} \sum \frac{\left(\lambda e^t\right)^x}{x!}$$

قاعدة

$$\sum \frac{\left(\lambda e^{t}\right)^{x}}{x\,!} = e^{\lambda e^{t}}$$

$$= e^{-\lambda} e^{\lambda e^{t}} = e^{-\lambda + \lambda e^{t}}$$

$$M_{x}(t) = e^{-\lambda(1-e^{t})}$$

3-4-9:الدالة المميزة :

$$\phi(it) = \mathrm{E}\, e^{itx} = \sum e^{itx} p(x)$$

$$= \sum e^{itx} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{x}}{x!} = e^{-\lambda} \sum \frac{(e^{it}\lambda)^{x}}{x\,!}$$

قاعدة

$$\sum \frac{(e^{it}\lambda)^{x}}{x\,!} = e^{e^{it}\lambda}$$

$$= e^{-\lambda} e^{e^{it}\lambda} = e^{-\lambda + \lambda e^{it}}$$

$$\phi(it) = e^{-\lambda(1-e^{it})}$$

3-4-10:الوسيط :

هو قيمة x التي تجعل دالة الكتلة تساوي $\frac{1}{2}$

$$p(x) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{\lambda^{x}}{x!} = \frac{1}{2} e^{\lambda}$$

$$\Rightarrow \frac{\lambda^{x}}{x!} \cdot \frac{1}{e^{\lambda}} = \frac{1}{2}$$

و هذا يتحقق عند $\lambda = 0$ أي أن $x \cong 2$

وبالتالي فإن الوسيط هو $x = 2$ شرط أن تأخذ λ أصغر قيمة ممكنة وقريبة من الصفر

3-4-11 :المنوال :

المختلفة في دالة كتلة الإحتمال نلاحظ أن الدالة يمكن أن تصل إلي أكبر قيمة لها عندما x عند تعويض قيم
في هذه الحالة المنوال x تقترب من الصفر وتسمى قيمة λ تأخذ أكبر قيمة لها و x

3-5:التوزيع الهندسي Geometric Distribution :

التوزيع الهندسي عبارة عن حالة خاصة من توزيع ذي الحدين السالب عندما $r = 1$ أي نحصل على التوزيع الإحتمالي لعدد المحاولات المطلوبة للحصول على حالة نجاح واحدة .

3-5-1:دالة كتلة الإحتمال :

$$p(x) = p\,q^{x-1}$$
$$x = 1, 2, 3 \ldots\ldots$$

ويكتب التوزيع الهندسي بالصيغة الاتية $x \sim g(p)$

شروط دالة كتلة الإحتمال :

$$1 - 0 \le p(x) \le 1$$
$$p(x) = pq^{x} \qquad x = 0,1,2,\ldots.$$

نلاحظ أن الدالة موجبة لجميع قيم x

$$\sum_{x} p(x) = 1$$
$$\sum p\,q^{x-1} = p \sum_{x} q^{x-1}$$

حيث $\sum_{x} q^{x}$ يمثل مجموع متوالية هندسية ومن هنا جاء إسم التوزيع ونلاحظ أن

$$\sum_{x} q^{x} = \frac{1}{1-q}$$
$$\therefore\ p.\frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1$$

نلاحظ أن الدالة تحقق شرطي دالة كتلة الإحتمال

3-5-2:الدالة التوزيعية :

$$F\left(x\right) = p(X \leq x) = \sum_{x=0}^{x} p(x) \qquad\qquad x = 0,1......n$$

$$= \sum_{x=0}^{x} pq^{x-1}$$

$$= p\sum_{x=1}^{x} q^{x-1}$$

3-5-3:الوسط :

$$\mathrm{E}\,x = \sum xp\left(x\right)$$

$$x = 1, 2, 3, ...$$

$$= \sum xpq^{x-1}$$

$$= p\sum xq^{x-1}$$

قاعدة

$$\sum q^{x-1} = \frac{1}{1-q}$$

بضرب الطرفين في q

$$\sum q^{x-1}q = \frac{q}{1-q}$$

$$\sum q^{x} = \frac{q}{1-q}$$

نفاضل الطرفين بالنسبة ل q

$$\sum xq^{x-1} = \frac{(1-q)-q(-1)}{(1-q)^2}$$

$$= \frac{1-q+q}{(1-q)^2} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

$$\mathrm{E}x = p\frac{1}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}$$

$$\mathrm{E}x = \frac{1}{p}$$

3-5-4:التباين :

$$v(x) = \mathrm{E}x^2 - (\mathrm{E}x)^2$$

$$\mathrm{E}x^2 = \sum x^2 p(x) \quad x = 1, 2, 3, \ldots.$$

$$= \sum x^2 pq^{x-1}$$

$$= p \sum x^2 q^{x-1}$$

قاعدة

$$\sum xq^{x-1} = \frac{1}{(1-q)^2}$$

بضرب الطرفين في q

$$\sum xq^{x-1}q = \frac{q}{(1-q)^2}$$

$$\sum xq^{x} = \frac{q}{(1-q)^2}$$

نفاضل الطرفين بالنسبه ل q

$$\sum x^2 q^{x-1} = \frac{(1-q)^2 + 2q(1-q)}{(1-q)^4}$$

$$= \frac{(1-q)(1-q+2q)}{(1-q)^4}$$

$$\sum x^2 q^{x-1} = \frac{1+q}{(1-q)^3}$$

$$\mathrm{E}x^2 = p\frac{1+q}{(1-q)^3} = \frac{1+q}{(1-q)^2}$$

$$\mathrm{E}x^2 = \frac{1+q}{p^2}$$

$$v(x) = \frac{1+q}{p^2} - \frac{1}{p^2} = \frac{1+q-1}{p^2} = \frac{q}{p^2}$$

$$v(x) = \frac{q}{p^2}$$

3-5-5:الإنحراف المعياري :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{v(x)}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{q}{p^2}} = \frac{\sqrt{q}}{p}$$

3-5-6:معامل الإلتواء :

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

$$\mu_3 = \sum (x-\mu)^3 \, p(x)$$

$$= \sum \left(x^3 - 3\mu x^2 + 3\mu^2 x - \mu^3\right) p(x)$$

$$= \sum x^3 p(x) - 3\mu \sum x^2 p(x) + 3\mu^2 \sum xp(x) - \mu^3$$

$$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_1'\mu_2' + 2\mu_1'^3$$

$$\mu_3' = \mathrm{E}x^3 = \sum x^3 p(x) \quad x = 1, 2, 3, \ldots.$$

$$= \sum x^3 pq^{x-1}$$

$$= p\sum x^2 q^{x-1}$$

قاعدة

$$\sum x^2 q^{x-1} = \frac{1+q}{(1-q)^3}$$

بضرب الطرفين في q

$$\sum x^2 q^{x-1} q = \frac{q(1+q)}{(1-q)^3}$$

$$\sum x^2 q^x = \frac{q+q^2}{(1-q)^3}$$

نفاضل الطرفين بالنسبة ل q

$$\sum x^3 q^{x-1} = \frac{(1-q)^3 (1+2q) - (q+q^2)3(1-q)^2 (-1)}{\left((1-q)^3\right)^2}$$

$$= \frac{(1-q)^3 (1+2q) + 3(q+q^2)(1-q)^2}{(1-q)^6}$$

$$= \frac{(1-q)^2 \left((1-q)(1+2q) + 3q + 3q^2\right)}{(1-q)^6}$$

$$= \frac{1+2q-q-2q^2+3q+3q^3}{(1-q)^4}$$

$$= \frac{1+4q+q^2}{(1-q)^4}$$

$$\mu_3' = p\,\frac{1+4q+q^2}{(1-q)^4}$$

$$\mu_3' = \frac{1+4q+q^2}{(1-q)^3} = \frac{1+4q+q^2}{p^3}$$

$$\mu_2' = \frac{1+q}{p^2}$$

$$\mu_1' = \frac{1}{p}$$

$$\mu_3 = \frac{1+4q+q^2}{p^3} - 3\frac{1}{p}\frac{1+q}{p^2} + 2\frac{1}{p^3}$$

$$\mu_3 = \frac{1+4q+q^2-3-3q+2}{p^3}$$

$$\mu_3 = \frac{q^2+q}{p^3}$$

$$\gamma_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{q}}{p}$$

$$\gamma_3 = \frac{q^2+q}{p^3} \div \left(\frac{\sqrt{q}}{p}\right)^3$$

$$\gamma_3 = \frac{q(q+1)}{p^3} * \frac{p^3}{q\sqrt{q}}$$

$$\gamma_3 = \frac{q+1}{\sqrt{q}}$$

3-5-7:معامل التفرطح:

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

$$\mu_4 = \sum (x-\mu)^4\, p(x)\, p(x)$$

$$(x-\mu)^4 = x^4 - 4\mu x^3 + 6\mu^2 x^2 - 4\mu^3 x + \mu^4$$

$$= \sum \left(x^4 - 4\mu x^3 + 6\mu^2 x^2 - 4\mu^3 x + \mu^4\right) p(x)$$

$$= \sum x^4 p(x) - 4\mu \sum x^3 p(x) + 6\mu^2 \sum x^2 p(x) - 4\mu^3 \sum x p(x) + \mu^4 p(x)$$

$$\mu_4 = \mu_4' - 4\mu_1'\mu_3' + 6\mu_1'\mu_2' - 4\mu_1'^4 + \mu_1'^4$$

$$= \mu_4' - 4\mu_1'\mu_3' + 6\mu_1'^2\mu_2' - 3\mu_1'^4$$

$$\mu_4 = \mathrm{E}x^4 = \sum x^4 p(x) \qquad x = 1, 2, 3, \ldots$$

$$= \sum x^4 pq^{x-1} = p \sum x^4 q^{x-1}$$

قاعدة

$$\sum x^3 q^{x-1} = \frac{1+4q+q^2}{(1-q)^4}$$

بضرب الطرفين في q

$$\sum x^3 q^{x-1} q = q\frac{1+4q+q^2}{(1-q)^4}$$

$$\sum x^3 q^{x} = \frac{q+4q^2+q^3}{(1-q)^4}$$

نفاضل الطرفين بالنسبة ل q

$$\sum x^4 q^{x-1} = \frac{(1-q)^4\left(1+8q+3q^2\right)-\left(q+4q^2+q^3\right)4(1-q)^3 * -1}{\left((1-q)^4\right)^2}$$

$$= \frac{(1-q)^4\left(1+8q+3q^2\right)+4\left(q+4q^2+q^3\right)(1-q)^3}{(1-q)^8}$$

$$= \frac{(1-q)^3\left((1-q)\left(1+8q+3q^2\right)+4\left(q+4q^2+q^3\right)\right)}{(1-q)^8}$$

$$= \frac{1+8q+3q^2-q-8q^2-3q^3+4q+16q^2+4q^3}{(1-q)^5}$$

$$= \frac{1+11q+11q^2+q^3}{p^5}$$

$$\mu_4' = p\frac{1+11q+11q^2+q^3}{p^5}$$

$$\mu_4' = \frac{1+11q+11q^2+q^3}{p^4}$$

ومماسبق نجد أن:

$$\mu_3' = \frac{1+4q+q^2}{p^3}$$

$$\mu_2' = \frac{1+q}{p^2}$$

$$\mu_1' = \frac{1}{p}$$

$$\mu_4 = \frac{1+11q+11q^2+q^3}{p^4} - 4\left(\frac{1}{p}\right)\left(\frac{1+4q+q^2}{p^3}\right) + 6\left(\frac{1}{p^2}\right)\left(\frac{1+q}{p^2}\right) - 3\left(\frac{1}{p^4}\right)$$

$$\mu_4 = \frac{1+11q+11q^2+q^3}{p^4} - \frac{4+16q+4q^2}{p^4} + \frac{6+6q}{p^4} - \frac{3}{p^4}$$

$$\mu_4 = \frac{1+11q+11q^2+q^3-4-16q-4q^2+6+6q-3}{p^4}$$

$$\mu_4 = \frac{q+7q^2+q^3}{p^4}$$

$$\gamma_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{q}}{p}$$

$$\gamma_4 = \frac{q+7q^2+q^3}{p^4} \div \left(\frac{\sqrt{q}}{p}\right)^4$$

$$\gamma_4 = \frac{q\left(1+7q+q^2\right)}{p^4} * \frac{p^4}{q^2}$$

$$\gamma_4 = \frac{1+7q+q^2}{q}$$

$$\gamma_4 = 7 + \frac{1+q^2}{q}$$

3-5-8الدالة المولدة للعزوم :

$$M_x\left(t\right) = \mathrm{E}e^{tx} = \sum e^{tx} p(x)$$

$$x = 1, 2, 3, \ldots.$$

$$= \sum e^{tx} pq^{x-1}$$

بالضرب في $\frac{e^t}{e^t}$

$$= pe^t \sum e^{tx-t} q^{x-1} = pe^t \sum e^{t(x-1)} q^{x-1}$$
$$= pe^t \sum \left(e^t q\right)^{x-1}$$

قاعدة

$$\sum q^{x-1} = \frac{1}{1-q}$$
$$\sum \left(e^t q\right)^{x-1} = \frac{1}{1-e^t q}$$
$$M_x(x) = pe^t \frac{1}{1-e^t q} = \frac{pe^t}{1-e^t q}$$

3-5-9:الدالة المميزة :

$$\phi(it) = \mathrm{E}e^{itx} = \sum e^{itx} p(x)$$
$$x = 1, 2, 3, \ldots.$$
$$= \sum e^{itx} pq^{x-1}$$

بالضرب في $\frac{e^{it}}{e^{it}}$

$$= pe^{it} \sum e^{itx-it} q^{x-1} = pe^{it} \sum e^{it(x-1)} q^{x-1}$$
$$= pe^{it} \sum \left(e^{it} q\right)^{x-1}$$

قاعدة

$$\sum q^{x-1} = \frac{1}{1-q}$$
$$\sum \left(e^{it} q\right)^{x-1} = \frac{1}{1-e^{it} q}$$
$$\phi(it) = pe^{it} \frac{1}{1-e^{it} q}$$
$$\phi(it) = \frac{pe^{it}}{1-e^{it} q}$$

3-5-10: المنوال :

هو القيمة التي تقابل أكبر إحتمال ، ومن دالة الكتلة

$$p(x) = p.(1-q)^{x-1}$$

من الملاحظ إن المنوال في التوزيع الهندسي يعتمد على قيمة p وهذا يعني أن أكبر قيمة تصل إليها الدالة هي p عندما يكون $x=1$ وبتالي فان المنوال $x = p$

3-5-11:الوسيط :

هو قيمة x التي يكون مجموع الإحتمالات المتراكمة عندها $\frac{1}{2}$ ومن الدالة التراكمية

$$F(x) = p.\sum_{x=1}^{\infty} q^{x-1} = \frac{1}{2}$$

وحيث أن (M) هو إحدى قيم x

$$\Rightarrow p.q^{M-1} = \frac{1}{2}$$

$$q^{M-1} = \frac{1}{2p} \Rightarrow (M-1)\ln(q) = \ln(\frac{1}{2p})$$

$$M\ln(q) - \ln(q) = \ln(\frac{1}{2p})$$

$$\Rightarrow M = \frac{\ln(\frac{1}{2p}) + \ln(q)}{\ln(q)} \quad \Rightarrow \frac{\ln(\frac{1}{2p})}{\ln(q)} + 1 \Rightarrow \quad M = \ln(\frac{1}{2p}) - \ln(q) + 1$$

3-6:توزيع ذي الحدين السالب Negative binomial distribution :

بفرض أن تجربة لها نفس الخصائص التي سبق أن ذكرنها في توزيع ذي الحدين، ولكن مع تكرار المحاولات حتى يمكن الحصول على عدد ثابت من محاولات النجاح ، وعلى ذلك بدلا من إيجاد إحتمال النجاح رقم r سوف يحدث في المحاولة رقم x . التجارب من هذا النوع تسمى تجارب ذي الحدين السالب .

تعريف :

العدد x من المحاولات والذي ينتح r حالات نجاح في تجربة ذي الحدين السالب يسمى متغير عشوائي يتبع ذي الحدين السالب .

سوف نكتب $x \sim NB(r,p)$ للدلالة على أن x متغير عشوائي يتبع توزيع ذي الحدين السالب بمعلمتين r,p

ولهذا التوزيع في حل بضع المشاكل التي لها متغير عشوائي يتبع ذي الحدين السالب كثيرة منها :

1- عدد الواحدات التي تختبر للحصول على عدد محدود من الوحدات التالفة .

2- عدد القذائف التي تطلق حتي الوصول إلي عدد ثابت من الأهداف .

3-6-1: دالة كتلة الإحتمال :

$$p(x) = C_{r-1}^{x+r-1} p^r q^x \qquad x = 0,1,2,...$$

شروط دالة كتلة الإحتمال :

$$1 - 0 \le p\left(x\right) \le 1$$

$$p\left(x\right) = C_{r-1}^{r+x-1} p^r q^x$$

$$x = 0,1,2,...$$

نلاحظ انا الدالة موجبة لجميع قيم x

$$2-\sum_{x} p(x)=1$$

$$\sum_{x} C_{r-1}^{x+r-1} p^{r} q^{x}$$

$$p^{r} \sum C_{r-1}^{x+r-1} q^{x}$$

قاعدة

$$\sum C_{r-1}^{x+r-1} q^{x}=\frac{1}{(1-q)^{r}}$$

$$p^{r} \frac{1}{(1-q)^{r}}=\frac{p^{r}}{p^{r}}=1$$

نلاحظ أن الدالة تحقق شرطي دالة كتلة الإحتمال

3-6-2: الدالة التوزيعية :

$$F(x)=P(X \leq x)=\sum_{x=0}^{\infty} C_{r-1}^{x+r-1} p^{r} q^{x}$$

$$=p^{r} \sum_{x=0}^{\infty} C_{r-1}^{x+r-1} q^{x}$$

3-6-3: الدالة المولدة للعزوم :

$$M_{x}(t)=E e^{tx}=\sum_{x=0}^{\infty} e^{tx} C_{r-1}^{x+r-1} p^{r}(q^{x})$$

$$=p^{r} \sum_{x=0}^{\infty} C_{r-1}^{x+r-1}(q e^{t})^{x}$$

وبحسب نظرية ذات الحدين

$$M_x(t) = p^r(1-qe^t)^{-r}$$

$$= \frac{p^r}{(1-qe^t)^r}$$

$$M_x(t) = \left(\frac{p}{1-qe^t}\right)^r$$

3-6-4: الدالة المميزة :

$$\phi(it) = E\left(e^{itx}\right) = \sum_{x=0}^{\infty} e^{itx} C_{r-1}^{x+r-1} p^r \left(q\right)^x$$

$$= p^r \sum_{x=0}^{\infty} C_{r-1}^{x+r-1} \left(qe^{it}\right)^x$$

وبحسب نظرية ذي الحدين

$$\phi(it) = p^r(1-qe^{it})^x = \left(\frac{p}{1-qe^{it}}\right)^r$$

$$\phi(it) = \left(\frac{p}{1-qe^{it}}\right)^r$$

3-6-5: الوسط :

$$\mu = \mathrm{E}x = \sum xp\left(x\right) \qquad ; x = 0,1,2,.....$$

$$= \sum xc_{r-1}^{x+r-1} p^r q^x = p^r \sum xc_{r-1}^{x+r-1} q^x$$

بالضرب في $\frac{q}{q}$

$$p^r q \sum xc_{r-1}^{x+r-1} q^{x-1}$$

قاعدة

$$\sum c_{r-1}^{x+r-1} q^x = \left(1-q\right)^{-r}$$

نفاضل الطرفين بالنسبة ل q

$$\sum xc_{r-1}^{x+r-1}q^{x-1}=-r\left(1-q\right)^{-(r+1)}$$
$$=\frac{r}{\left(1-q\right)^{r+1}}$$
$$\mathrm{E}x=p^{r}q\frac{r}{\left(1-q\right)^{r+1}}=\frac{rq}{p}$$
$$\mu=\frac{rq}{p}$$

3-6-6: التباين :

$$v\left(x\right)=\mathrm{E}x^{2}-\left(\mathrm{E}x\right)^{2}$$
$$\mathrm{E}x^{2}=\sum x^{2}p\left(x\right)$$
$$x^{2}=x\left(x-1\right)+x$$
$$\mathrm{E}x^{2}=p^{r}\sum\left(x\left(x-1\right)+x\right)C_{r-1}^{x+r-1}q^{x}$$
$$=p^{r}\sum x\left(x-1\right)C_{r-1}^{x+r-1}q^{x}+p^{r}\sum xC_{r-1}^{x+r-1}q^{x}$$
$$=p^{r}\sum x\left(x-1\right)C_{r-1}^{x+r-1}q^{x}+\frac{rp}{q}\qquad(*)$$

بالضرب في $\frac{q^2}{q^2}$

$$p^{r}q^{2}\sum x\left(x-1\right)C_{r-1}^{x+r-1}q^{x-2}$$

ومما سبق نجد أن

$$\sum xC_{r-1}^{x+r-1}q^{x-1}=\frac{r}{\left(1-q\right)^{r+1}}$$

نفاضل بالنسبة ل q

$$\sum x\left(x-1\right)C_{r-1}^{x+r-1}q^{x-2}=-r\left(r+1\right)\left(1-q\right)^{-r-2}\,(-1)$$

$$=\frac{r\left(r+1\right)}{\left(1-q\right)^{r+2}}$$

$$=q^{2}p^{r}\,\frac{r^{2}+r}{\left(1-q\right)^{r+2}}=q^{2}p^{r}\,\frac{r^{2}+r}{p^{r+2}}=\frac{q^{2}r^{2}+q^{2}r}{p^{2}}$$

نعوض في(*)

$$\mathrm{E}(x)=\frac{q^{2}r^{2}+q^{2}r}{p^{2}}+\frac{rq}{p}$$

$$v(x)=\mathrm{E}x^{2}-(\mathrm{E}x)^{2}$$

$$=\frac{q^{2}r^{2}+q^{2}r}{p^{2}}+\frac{rq}{p}-\frac{r^{2}q^{2}}{p^{2}}$$

$$=\frac{q^{2}r^{2}+q^{2}r+rqp-r^{2}q^{2}}{p^{2}}$$

$$\sigma^{2}=\frac{rq(q+p)}{p^{2}}=\frac{rq}{p^{2}}$$

3-6-7: الإنحراف المعياري :

$$\sigma=\sqrt{\sigma^{2}}=\sqrt{v(x)}$$

$$=\sqrt{\frac{rq}{p^{2}}}=\frac{\sqrt{rq}}{p}$$

3-6-8: معامل الإلتواء :

$$\gamma_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

$$\mu_3 = \sum (x-\mu)^3 \, p(x)$$

$$(x-\mu)^3 = x^3 - 3x^2\mu + 3x\mu^2 - \mu^3$$

$$\mu_3 = \sum \left(x^3 - 3x^2\mu + 3x\mu^2 - \mu^3\right) p(x)$$

$$\mu_3 = \sum x^3 p(x) - 3\mu \sum x^2 p(x) + 3\mu^2 \sum xp(x) - \mu^3 \sum p(x)$$

$$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_1'\mu_2' + 2\mu_1'^3$$

$$\mu_3' = \sum x^3 p(x)$$

$$= \sum x^3 C_{r-1}^{x+r-1} p^r q^x$$

$$x^3 = x(x-1)(x-2) + 3x(x-1) + x$$

$$= \sum (x(x-1)(x-2) + 3x(x-1) + x)\, p(x)$$

$$= \sum x(x-1)(x-2)\, p(x) + 3\sum x(x-1)\, p(x) + \sum xp(x)$$

$$= \sum x(x-1)(x-2) C_{r-1}^{x+r-1} p^r q^x + 3\,\frac{q^2r^2 + rq^2}{p^2} + \frac{rq}{p} \qquad (*)$$

$$p^r \sum x(x-1)(x-2) C_{r-1}^{x+r-1} q^x$$

بالضرب في $\frac{q^3}{q^3}$

$$p^r q^3 \sum x(x-1)(x-2) C_{r-1}^{x+r-1} q^{x-3}$$

ومما سبق نجد ان :

$$\sum x(x-1)C_{r-1}^{x+r-1}q^{x-2} = \frac{r(r+1)}{(1-q)^{r+2}}$$
$$= r(r+1)(1-q)^{-r-2}$$

نفاضل بالنسبة ل q

$$\sum x(x-1)(x-2)C_{r-1}^{x+r-1}q^{x-3} = -r(r+1)(r+2)(1-q)^{-r-3}(-1)$$
$$= \frac{r(r+1)(r+2)}{(1-q)^{r+3}}$$
$$p^r q^3 \frac{r(r+1)(r+2)}{(1-q)^{r+3}} = \frac{q^3 r(r+1)(r+2)}{p^3} = \frac{q^3(r^3+3r^2+2r)}{p^3}$$
$$= \frac{q^3r^3+3r^2q^3+2rq^3}{p^3}$$

نعوض في(*)

$$\mu_3' = \frac{q^3r^3+3q^3r^2+2q^3r}{p^3} + \frac{3q^2r^2+3q^2r}{p^2} + \frac{qr}{p}$$
$$\mu_2' = \frac{q^2r^2+q^2r}{p^2} + \frac{qr}{p}$$
$$\mu_1' = \frac{rq}{p}$$
$$\mu_3 = \frac{q^3r^3+3q^3r^2+2q^3r}{p^3} + \frac{3q^2r^2+3q^2r}{p^2} + \frac{qr}{p} - 3\left(\frac{rq}{p}\left(\frac{q^2r^2+q^2r}{p^2} + \frac{qr}{p}\right)\right) + 2\left(\frac{rq}{p}\right)^3$$
$$= \frac{q^3r^3+3q^3r^2+2q^3r}{p^3} + \frac{3q^2r^2+3q^2r}{p^2} + \frac{qr}{p} + \frac{-3q^3r^3-3q^3r^2}{p^3} - \frac{3q^2r^2}{p^2} + \frac{2q^3r^3}{p^3}$$

$$= \frac{2q^3r}{p^3} + \frac{3q^2r}{p^2} + \frac{qr}{p} = \frac{2q^3r + 3pq^2r + p^2qr}{p^3}$$

$$= \frac{rq(2q^2 + 3pq + p^2)}{p^3} = \frac{rq(2(1-p)^2 + 3(1-p)p + p^2}{p^3}$$

$$= \frac{rq(2 - 4p + 2p^2 + 3p - 3p^2 + p^2)}{p^3}$$

$$\mu_3 = \frac{rq(2-p)}{p^3}$$

$$\gamma_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

$$= \frac{rq(2-p)}{p^3} \div \left(\frac{\sqrt{rq}}{p} \right)^3$$

$$= \frac{rq(2-p)}{p^3} * \frac{p^3}{rq\sqrt{rq}}$$

$$\gamma_3 = \frac{2-p}{\sqrt{rq}}$$

3-6-9: معامل التفرطح :

$$\gamma_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

$$\mu_4 = \sum (x-\mu)^4 \, p(x)$$

$$(x-\mu)^4 = x^4 - 3\mu x^3 + 6\mu^2 x^2 - 3\mu^3 x + \mu^4$$

$$\mu_4 = \sum \left(x^4 - 4\mu x^3 + 6\mu^2 x^2 - 4\mu^3 x + \mu^4 \right) p(x)$$

$$= \sum x^4 p(x) - 4\mu \sum x^3 p(x) + 6\mu^2 \sum x^2 p(x) - 4\mu^3 \sum x p(x) + \mu^4 \sum p(x)$$

$$\mu_4 = \mu'_4 - 4\mu'_1\mu'_3 + 6\mu'^2_1 \mu'_2 - 3\mu'^4_1$$

$$\mu_4' = \sum x^4 p(x)$$
$$x^4 = x(x-1)(x-2)(x-3) + 6x(x-1)(x-2) + 7x(x-1) + x$$
$$\mu_4' = \sum x(x-1)(x-2)(x-3)\,p\left(x\right) + 6\sum x(x-1)(x-2)\,p\left(x\right) + 7\sum x(x-1)\,p\left(x\right) + \sum xp\left(x\right)$$
$$= \sum x(x-1)(x-2)(x-3)C_{r-1}^{x+r-1} p^r q^x + 6\frac{q^3 r(r+1)(r+2)}{p^3} + 7\frac{q^2 r(r+1)}{p^2} + \frac{rq}{p} \qquad *$$
$$\sum x(x-1)(x-2)(x-3)C_{r-1}^{x+r-1} p^r q^x = p^r \sum x(x-1)(x-2)(x-3)C_{r-1}^{x+r-1} q^x$$

بالضرب في $\frac{q^4}{q^4}$

$$p^r q^4 \sum x(x-1)(x-2)(x-3)C_{r-1}^{x+r-1} q^{x-4}$$

قاعدة :

$$\sum x(x-1)(x-2)C_{r-1}^{x+r-1} q^{x-3} = \frac{r(r+1)(r+2)}{(1-q)^{r+3}}$$

نفاضل الطرفين بالنسبة ل q

$$\sum x(x-1)(x-2)(x-3)C_{r-1}^{x+r-1} q^{x-4} = \frac{r(r+1)(r+2)(r+3)}{(1-q)^{r+4}}$$
$$p^r q^4 \frac{r(r+1)(r+2)(r+3)}{(1-q)^{r+4}} = \frac{q^4 r(r+1)(r+2)(r+3)}{p^4}$$

نعوض في (*)

$$=\frac{q^4r(r+1)(r+2)(r+3)}{p^4}+\frac{6q^3r(r+1)(r+2)}{p^3}+\frac{7q^2r(r+1)}{p^2}+\frac{rq}{p}$$

$$=\frac{q^4r^4+6q^4r^3+11q^4r^2+6q^4r}{p^4}+\frac{6q^3r^3+18q^3r^2+12q^3r}{p^3}+\frac{7q^2r^2+7q^2r}{p^2}+\frac{qr}{p}$$

$$=\frac{q^4r^4+6q^4r^3+11q^4r^2+6q^4r}{p^4}+\frac{6q^3r^3+18q^3r^2+12q^3r-6q^4r^3-18q^4r^2-12q^4r}{p^4}$$

$$+\frac{7q^2r^2+7q^2r-14q^3r^2-14q^3r+7q^4r^2+7q^4r}{p^4}+\frac{rq-3rq^2+3rq^3-rq^4}{p^4}$$

$$\mu_4'=\frac{q^4r^4+6q^3r^3+q^3r+4q^3r^2 7q^2r^2+4q^2r+qr}{p^4}$$

$$\mu_3'=\frac{q^3r^3+3q^3r^2+2q^3r}{p^3}+\frac{3q^2r^2+3q^3r}{p^2}+\frac{qr}{p}$$

$$\mu_2'=\frac{q^2r^2+q^2r}{p^2}+\frac{qr}{p}$$

$$\mu_1'=\frac{qr}{p}$$

$$\mu_4=\frac{q^4r^4+6q^3r^3+q^3r+4q^3r^2 7q^2r^2+4q^2r+qr}{p^4}+\frac{-4q^4r^4-12q^4r^3-8q^4r^2}{p^4}+\frac{-12q^3r^3-12q^3r^2}{p^3}$$

$$+\frac{-4q^2r^2}{p^2}+\frac{6q^4r^4+6q^4r^3}{p^4}+\frac{6q^3r^3}{p^3}-3\frac{q^4r^4}{p^4}$$

$$\mu_4=\frac{q^4r^4+6q^3r^3+q^3r+4q^3r^2 7q^2r^2+4q^2r+qr}{p^4}+\frac{-4q^4r^4-12q^4r^3-8q^4r^2}{p^4}$$

$$+\frac{-12q^3r^3-12q^3r^2+12q^4r^3+12q^4r^2}{p^4}$$

$$+\frac{-4q^2r^2+8q^3r^2-4q^4r^2}{p^4}+\frac{6q^4r^4+6q^4r^3}{p^4}+\frac{6q^3r^3-6q^4r^3}{p^4}-3\frac{q^4r^4}{p^4}$$

$$\mu_4=\frac{q^3r+3q^2r^2+4q^2r+qr}{p^4}$$

$$\gamma_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{rq}}{p}$$

$$\gamma_4 = \frac{q^3 r + 3q^2 r^2 + 4q^2 r + qr}{p^4} \div \left(\frac{\sqrt{rq}}{p} \right)^4$$

$$\gamma_4 = \frac{q^3 r + 3q^2 r^2 + 4q^2 r + qr}{p^4} * \frac{p^4}{q^2 r^2}$$

$$\gamma_4 = 3 + \frac{4}{r} + \frac{1+q^2}{rq}$$

3-6-10:الوسيط :

الوسيط في التوزيعات المتقطعة هو القيمة التي تتوسط الإحتمالات أي التي تجعل مجموع الإحتمالات $\frac{1}{2}$

$$\sum_{x=0}^{M} p^r C_{r-1}^{x+r-1} (q)^x = p^r \sum_{x=0}^{M} C_{r-1}^{x+r-1} (q)^x = \frac{1}{2}$$

وحيث أن M هي إحدى قيم x لذلك نبداء بحساب الإحتمالات بإبتدائاً من إفتراض $M = 0$ ثم $M = 1$ ثم $M = 2$ ونلاحظ إن القيم التي يجري عندها مجموع الإحتمالات $\frac{1}{2}$ فقيمة $(M = X)$ التي تعطي ذلك تسمى الوسيط .

3-6-11:المنوال:

في التوزيعات المتقطعة هو قيمة X التي تقابل أكبر إحتمال إي إننا نحسب جميع قيم الإحتمالات لقيم X فنلاحظ أكبر إحتمال لقيم X المقابلة لأكبر إحتمالية المنوال .

3-7 التوزيع فوق الهندسي Hypergeometric Distribution:

إذا كان لدينا مجتمع مكون من N عنصر منهم D عنصر يحملون صفة معينة و $(N-1)$ لايحملون هذه الصفة وتم إختيار عينة من n عنصر عشوائياً بدون إرجاع فإن عدد العناصر التي تحمل هذه الصفة في العينة متغير عشوائي X يتبع في تغيراته توزيع إحتمالي سمي بالتوزيع فوق الهندسي

3-7-1: دالة كتلة الإحتمال:

$$p(x) = \frac{C_x^M C_{n-x}^{N-M}}{C_n^N} \qquad ; x = 0, 1, 2, \ldots.., n$$

شروط دالة كتلة الإحتمال :

$$1 - 0 \le p(x) \le 1$$

$$p(x) = \frac{C_X^D C_{n-x}^{N-D}}{C_n^N}$$

$$= C_X^D C_{n-x}^{N-D} \qquad x = 0, 1, \ldots$$

نلاحظ أن الدالة موجبة لجميع قيم x

$$\sum_x p(x) = 1$$

$$\sum \frac{C_X^D C_{n-x}^{N-D}}{C_n^N}$$

$$= \frac{1}{C_n^N} \sum C_X^D C_{n-x}^{N-D}$$

قاعدة

$$\sum_{X} C_X^D C_{n-x}^{N-D} = C_n^N$$

$$\frac{1}{C_n^N} C_n^N = 1$$

نلاحظ أن الدالة تحقق شرطي دالة كتلة الإحتمال

3-7-2: الدالة التوزيعية :

$$F(x) = p(X \le x) = \sum_{x=0}^{x} p(x) \qquad ; x = 0,1...n$$

$$= \sum_{x=0}^{x} C_X^D \frac{C_{n-x}^{N-D}}{C_n^N}$$

$$= \frac{1}{C_n^N} \sum_{X=D}^{X} C_X^D C_{n-x}^{N-D}$$

3-7-3:الوسط:

$$\mathrm{E}x = \sum xp(x) \qquad ; x = 0,1,2,.....,n$$

$$= \sum x \frac{C_x^D C_{n-x}^{N-D}}{C_n^N}$$

$$= \frac{1}{C_n^N} \sum x C_x^D C_{n-x}^{N-D}$$

$$= \frac{1}{C_n^N} \sum x \frac{D!}{x!(D-x)!} C_{n-x}^{N-D}$$

$$= \frac{1}{C_n^N} \sum x \frac{D(D-1)!}{x(x-1)!(D-x)!} C_{n-x}^{N-D}$$

$$= \frac{D}{C_n^N} \sum C_{x-1}^{D-1} C_{n-x}^{N-D}$$

$$\sum C_{x-1}^{D-1} C_{n-x}^{N-D} = C_{n-1}^{N-1}$$

$$Ex = \frac{D}{C_n^N} C_{n-1}^{N-1}$$

$$= \frac{D\left(N-1\right)!\,n!\left(N-n\right)!}{\left(n-1\right)!\left(N-n\right)!\,N!} = \frac{D\left(N-1\right)!\,n\left(n-1\right)!}{\left(n-1\right)!\,N\left(N-1\right)!}$$

$$Ex = \frac{Dn}{N}$$

3-7-5: التباين :

$$v(x) = Ex^2 - (Ex)^2$$

$$Ex^2 = \sum x^2 p(x)$$

$$= \sum x^2 \frac{C_x^D C_{n-x}^{N-D}}{C_n^N} \qquad ; x = 0,1,2,.....n$$

$$x^2 = x(x-1) + x$$

$$Ex^2 = \sum \left(x(x-1) + x\right)\frac{C_x^D C_{n-x}^{N-D}}{C_n^N}$$

$$= \sum x(x-1)\frac{C_x^D C_{n-x}^{N-D}}{C_n^N} + \sum x\frac{C_x^D C_{n-x}^{N-D}}{C_n^N}$$

$$= \frac{1}{C_n^N}\sum x(x-1)\frac{D(D-1)(D-2)!}{x(x-1)(x-2)!(x-D)!} C_{n-x}^{N-D} + \frac{nD}{N}$$

$$= \frac{D(D-1)}{C_n^N}\sum C_{x-2}^{D-2} C_{n-x}^{N-D} + \frac{nD}{N}$$

$$\sum C_{x-2}^{D-2} C_{n-x}^{N-D} = C_{n-2}^{N-2}$$

$$= \frac{D(D-1)}{C_n^N} C_{n-2}^{N-2} + \frac{nD}{N}$$

$$= \frac{D(D-1)(N-2)!\,n(n-1)(n-2)!(N-n)!}{N(N-1)(N-2)!(n-2)!(N-n)!} + \frac{nD}{N}$$

$$\mathrm{E}x^2 = \frac{D(D-1)n(n-1)}{N(N-1)} + \frac{nD}{N}$$

$$\mathrm{E}x^2 = \frac{D^2n^2 - D^2n - Dn^2 + Dn}{N(N-1)} + \frac{nD}{N}$$

$$v(x) = \frac{D^2n^2 - D^2n - Dn^2 + Dn}{N(N-1)} + \frac{nD}{N} - \frac{n^2D^2}{N^2}$$

$$= \frac{ND^2n^2 - ND^2n - NDn^2 + NDn + N^2Dn - NDn - ND^2n^2 + n^2D^2}{N^2(N-1)}$$

$$= \frac{nDN^2 - NDn^2 - ND^2n + n^2D^2}{N^2(N-1)}$$

$$= \frac{nD(N^2 - Nn - ND + nD)}{N^2(N-1)}$$

$$v(x) = \frac{nD(N-D)(N-n)}{N^2(N-1)}$$

3-7-4:الإنحراف المعياري:

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{\mathrm{v}(x)}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{nD(N-D)(N-n)}{N^2(N-1)}}$$

3-7-6: معامل الإلتواء :

$$\gamma_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

$$\mu_3 = \sum (x-\mu)^3 \, p(x)$$

$$= \sum \left(x^3 - 3\mu x^2 + 3\mu^2 x - \mu^3\right) p(x)$$

$$= \sum x^3 p(x) - 3\mu \sum x^2 p(x) + 3\mu^2 \sum x p(x) - \mu^3$$

$$\mu_3 = \mu'_3 - 3\mu'_1\mu'_2 + 2\mu'^3_1$$

$$\mu'_3 = \mathrm{E}x^3 = \sum x^3 p(x)$$

$$= \sum x^3 \frac{C_x^D C_{n-x}^{N-D}}{C_n^N} \qquad , x = 0,1,2,.....n$$

$$x^3 = x(x-1)(x-2) + 3x(x-1) + x$$

$$= \sum \left(x(x-1)(x-2) + 3x(x-1) + x\right) \frac{C_x^D C_{n-x}^{N-D}}{C_n^N}$$

$$= \sum x(x-1)(x-2) \frac{C_x^D C_{n-x}^{N-D}}{C_n^N} + 3\sum x(x-1) \frac{C_x^D C_{n-x}^{N-D}}{C_n^N} + \sum x \frac{C_x^D C_{n-x}^{N-D}}{C_n^N}$$

$$= \frac{1}{C_n^N} \sum x(x-1)(x-2) \frac{D(D-1)(D-2)(D-3)!}{x(x-1)(x-2)(x-3)!(D-x)!} C_{n-x}^{N-D}$$

$$+3 \frac{D^2 n^2 - D^2 n - D n^2 + D n}{N(N-1)} + \frac{nD}{N}$$

$$= \frac{D(D-1)(D-2)}{C_n^N} \sum C_{x-3}^{D-3} C_{n-x}^{N-D} + \frac{3D^2 n^2 - 3D^2 n - 3D n^2 + 3D n}{N(N-1)} + \frac{nD}{N}$$

$$\sum C_{x-3}^{D-3} C_{n-x}^{N-D} = C_{n-3}^{N-3}$$

$$= \frac{D(D-1)(D-2) C_{n-3}^{N-3}}{C_n^N} + \frac{3D^2 n^2 - 3D^2 n - 3D n^2 + 3D n}{N(N-1)} + \frac{nD}{N}$$

$$= \frac{D(D-1)(D-2)(N-3)!n(n-1)(n-2)(n-3)!(N-n)!}{N(N-1)(N-2)(N-3)!(n-3)!(N-n)!}$$

$$+\frac{3D^2n^2-3D^2n-3Dn^2+3Dn}{N(N-1)}+\frac{nD}{N}$$

$$\mu_3' = \frac{D(D-1)(D-2)n(n-1)(n-2)}{N(N-1)(N-2)}+\frac{3D^2n^2-3D^2n-3Dn^2+3Dn}{N(N-1)}+\frac{nD}{N}$$

$$\mu_2' = \frac{D^2n^2-D^2n-Dn^2+Dn}{N(N-1)}+\frac{nD}{N}$$

$$\mu_1' = \frac{nD}{N}$$

$$\mu_3 = \frac{D(D-1)(D-2)n(n-1)(n-2)}{N(N-1)(N-2)}+\frac{3D^2n^2-3D^2n-3Dn^2+3Dn}{N(N-1)}+\frac{nD}{N}+$$

$$3\left(\frac{D^2n^2-D^2n-Dn^2+Dn}{N(N-1)}+\frac{nD}{N}\right)\left(\frac{nD}{N}\right)+2\left(\frac{nD}{N}\right)^3$$

$$\mu_3 = \frac{\begin{array}{c}2nD^3N^2+2n^3DN^2-3n^2DN^3-3nD^2N^3+\\ nDN^4-6n^2D^3N-6n^3D^2N+9n^2D^2N^2+4n^3D^3\end{array}}{N^3(N-1)(N-2)}$$

$$\mu_3 = \frac{nD}{N^3}\left(N-D\right)\frac{\left(N-2D\right)\left(N-n\right)\left(N-2n\right)}{(N-1)(N-2)}$$

$$\gamma_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{nD(N-D)(N-n)}{N^2(N-1)}}$$

$$\gamma_3 = \frac{nD}{N^3}\left(N-D\right)\frac{\left(N-2D\right)\left(N-n\right)\left(N-2n\right)}{(N-1)(N-2)} \div \left(\sqrt{\frac{nD(N-D)(N-n)}{N^2(N-1)}}\right)^3$$

$$= \frac{nD}{N^3}\left(N-D\right)\frac{\left(N-2D\right)\left(N-n\right)\left(N-2n\right)}{(N-1)(N-2)} * \frac{N^2(N-1)N\sqrt{(N-1)}}{nD(N-D)(N-n)\sqrt{nD(N-D)(N-n)}}$$

$$\gamma_3 = \frac{\left(N-2D\right)\left(N-2n\right)\sqrt{(N-1)}}{(N-2)\sqrt{nD(N-D)(N-n)}}$$

3-7-7: معامل التفرطح :

$$\gamma_4=\frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

$$\mu_4=\sum\left(x-\mu\right)^4 p\left(x\right)$$

$$\left(x-\mu\right)^4=x^4-4\mu x^3+6\mu^2x^2-4\mu^3x+\mu^4$$

$$=\sum\left(x^4-4\mu x^3+6\mu^2x^2-4\mu^3x+\mu^4\right)p\left(x\right)$$

$$=\sum x^4 p\left(x\right)-4\mu\sum x^3 p\left(x\right)+6\mu^2\sum x^2 p\left(x\right)-4\mu^3\sum xp\left(x\right)+\mu^4 p\left(x\right)$$

$$\mu_4=\mu_4'-4\mu_1'\mu_3'+6\mu_1'\mu_2'-4\mu_1'^4+\mu_1'^4$$

$$=\mu_4'-4\mu_1'\mu_3'+6\mu_1'^2\mu_2'-3\mu_1'^4$$

$$\mu_4'=\mathrm{E}x^4=\sum x^4 p(x)$$

$$=\sum x^4\frac{C_x^D C_{n-x}^{N-D}}{C_n^N}\qquad ;x=0,1,2,.......$$

$$x^4=x(x-1)(x-2)(x-3)+6x(x-1)(x-2)+7x(x-1)+x$$

$$=\sum\left(x(x-1)(x-2)(x-3)+6x(x-1)(x-2)+7x(x-1)+x\right)\frac{C_x^D C_{n-x}^{N-D}}{C_n^N}$$

$$=\sum x(x-1)(x-2)(x-3)\frac{C_x^D C_{n-x}^{N-D}}{C_n^N}+6\sum x(x-1)(x-2)\frac{C_x^D C_{n-x}^{N-D}}{C_n^N}$$

$$+7\sum x(x-1)\frac{C_x^D C_{n-x}^{N-D}}{C_n^N}+\sum x\frac{C_x^D C_{n-x}^{N-D}}{C_n^N}$$

$$=\frac{1}{C_n^N}\sum x(x-1)(x-2)(x-3)\frac{D(D-1)(D-2)(D-3)(D-4)!}{x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)!(D-x)!}C_{n-x}^{N-D}+$$

$$6\frac{D(D-1)(D-2)n(n-1)(n-2)}{N(N-1)(N-2)}+7\frac{D^2n^2-D^2n-Dn^2+Dn}{N(N-1)}+\frac{nD}{N}$$

$$=\frac{D(D-1)(D-2)(D-3)}{C_n^N}\sum C_{x-4}^{D-4}C_{n-x}^{N-D}+\frac{6D(D-1)(D-2)n(n-1)(n-2)}{N(N-1)(N-2)}$$

$$+\frac{7D^2n^2-7D^2n-7Dn^2+7Dn}{N(N-1)}+\frac{nD}{N}$$

$$\sum C_{x-4}^{D-4}C_{n-x}^{N-D}=C_{n-4}^{N-4}$$

$$= \frac{D(D-1)(D-2)(D-3)C_{n-4}^{N-4}}{C_n^N} + \frac{6D(D-1)(D-2)n(n-1)(n-2)}{N(N-1)(N-2)}$$

$$+ \frac{7D^2n^2 - 7D^2n - 7Dn^2 + 7Dn}{N(N-1)} + \frac{nD}{N}$$

$$\mu_4' = \frac{D(D-1)(D-2)(D-3)n(n-1)(n-2)(n-3)}{N(N-1)(N-2)(N-3)} + \frac{6D(D-1)(D-2)n(n-1)(n-2)}{N(N-1)(N-2)}$$

$$+ \frac{7D^2n^2 - 7D^2n - 7Dn^2 + 7Dn}{N(N-1)} + \frac{nD}{N}$$

$$\mu_3' = \frac{D(D-1)(D-2)n(n-1)(n-2)}{N(N-1)(N-2)} + \frac{3D^2n^2 - 3D^2n - 3Dn^2 + 3Dn}{N(N-1)} + \frac{nD}{N}$$

$$\mu_2' = \frac{D^2n^2 - D^2n - Dn^2 + Dn}{N(N-1)} + \frac{nD}{N}$$

$$\mu_1' = \frac{nD}{N}$$

$$\mu_4 = \frac{D(D-1)(D-2)(D-3)n(n-1)(n-2)(n-3)}{N(N-1)(N-2)(N-3)} + \frac{6D(D-1)(D-2)n(n-1)(n-2)}{N(N-1)(N-2)}$$

$$+ \frac{7D^2n^2 - 7D^2n - 7Dn^2 + 7Dn}{N(N-1)} + \frac{nD}{N}$$

$$-4\left(\frac{nD}{N}\right)\left(\frac{D(D-1)(D-2)n(n-1)(n-2)}{N(N-1)(N-2)} + \frac{3D^2n^2 - 3D^2n - 3Dn^2 + 3Dn}{N(N-1)} + \frac{nD}{N}\right)$$

$$+6\left(\frac{nD}{N}\right)^2\left(\frac{D^2n^2 - D^2n - Dn^2 + Dn}{N(N-1)} + \frac{nD}{N}\right) - 3\left(\frac{nD}{N}\right)^4$$

$$\mu_4 = nD(N-D)(N-n)\frac{N(N+1) - 6n(N-n) + 3D(N-D)\left(N^2(n-2) - Nn^2 + 6n(N-n)\right)}{N^4(N-1)(N-2)(N-3)}$$

$$\gamma_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

$$\sigma^4 = \frac{n^2D^2(N-D)^2(N-n)^2}{N^4(N-1)^2}$$

$$\gamma_4 = nD(N-D)(N-n)\frac{N(N+1) - 6n(N-n) + 3D(N-D)\left(N^2(n-2) - Nn^2 + 6n(N-n)\right)}{N^4(N-1)(N-2)(N-3)}$$

$$\div \frac{n^2D^2(N-D)^2(N-n)^2}{N^4(N-1)^2}$$

$$\gamma_4 = nD(N-D)(N-n)\frac{N(N+1)-6n(N-n)+3D(N-D)\left(N^2(n-2)-Nn^2+6n(N-n)\right)}{N^4(N-1)(N-2)(N-3)}$$

$$*\frac{N^4(N-1)^2}{n^2D^2(N-D)^2(N-n)^2}$$

$$\gamma_4 = \left(\frac{N^2(N-1)}{nD(N-D)(N-2)(N-3)(N-n)}\right)$$

$$*\left(\frac{3nD(N-D)(6-n)}{N}+N(N+1-6n)+6n^2+3D(N-D)(n-2)-\frac{18n^2D(N-D)}{N^2}\right)$$

3-7-8: الدالة المولدة للعزوم :

$$M_x(t) = E e^{tx}$$

$$= \sum_{x=0}^{n} e^{tx} \frac{C_X^D . C_{n-x}^{N-D}}{C_n^N}$$

$$= \frac{1}{C_n^N}\sum_{x=0}^{n} e^{tx} C_x^M \, C_{n-x}^{N-M}$$

للدالة المولدة للعزوم وقد أمكن التوصل إلى صيغة معقة جداً بالاعتماد نلاحظ صعوبة في إيجاد صيغة ما على مايسمى بالدالة الهندسية الزائدية وهي

$$\frac{(N-n)(N-M)}{N}$$

وعند توليد العزوم حول الصفر نستعيض عنها بالصيغة

$$M_x(t)=\frac{\sum_{x0}^{n}\pi_{j=1}^{r}(x-j+1)}{x^r}.\frac{C_X^M.C_{n-x}^{M-N}}{C_n^N}$$

$$=\sum_{x=r}^{n}x^rC_X^M.\frac{C_X^M.C_{n-x}^{M-N}}{C_n^N}$$

$$=\sum_{x=r}^{n}x^rC_X^M.\frac{M!}{x!(M-x)!}.\frac{C_{n-x}^{N-M}}{C_n^N}$$

$$=\sum_{x=r}^{n}\frac{M!}{(x-r)!(M-X)!}.\frac{C_{n-x}^{N-M}}{C_n^N}$$

$$=\frac{M^r}{\frac{N^r}{n^r}}\sum_{x=r}^{n}\frac{C_{n-r}^{N-M}}{C_{n-r}^{N-r}}.$$

$$M_r=\frac{n^r.M^r}{N^r}\qquad r=1,2,\ldots$$

الفصل الرابع

التوزيعات الإحتمالية المتصلة (المستمرة)

4-0 مقدمة:

ونقول أن التوزيع إحتمالي متصل (مستمر) إذا كانت دالة التوزيع التراكمي له مستمرة أي أنها تعود لمتغير عشوائي متصل إحتمال أخذه لقيمة محددة معينة معدوم، هذه التوزيعات يمكن التغيير عنها بواسطة دوال كثافة إحتمالية ، وهي عبارة عن دالة قابلة للتكامل بطريقة ليبيرغو ، وهي موجبة ومعرفة على مجموعة الأعداد الحقيقية .

4-1: التوزيع المنتظم Uniforam distribution :

يعرف هذا التوزيع بالتوزيع المستطيل ويوجد له العديد من التطبيقات ومن أهمها هو توليد الأرقام العشوائية بإستحدام الحاسب الآلي وتحت فرض أن البيانات التي نحصل عليها مأخوذة من توزيع منتظمUnif(0,1).

وسوف يكتب $x \sim UNIF\left(a,b\right)$

بفرض ان x متغير عشوائي متصل يأخذ قيمة في فترة محددة ،لتكن الفترة المفتوحة $\left(a,b\right)$فإن :

4-1-1: دالة كثافة الإحتمال :

$$f(x)=\frac{1}{b-a} \qquad ;a\leq x\leq b$$

شروط دالة كثافة الإحتمال :

$$1\_0\leq f(x)\leq 1$$

$$f(x)=\frac{1}{b-a} \qquad ;a\leq x\leq b$$

نلاحظ أن الدالة موجبة لقيم X

$$\begin{aligned} 2\_\int_x f(x)\,dx &= 1 \\ &= \int_a^b \frac{1}{b-a}\,dx = \frac{1}{b-a}\int_a^b dx \\ &= \frac{1}{b-a}(b-a) = 1 \end{aligned}$$

نلاحظ أن الدالة تحقق شروط دالة كثافة الإحتمال .

4-1-2: دالة التوزيعية :

$$F(x)=\int_a^x f(x)dx=\int_a^x \frac{1}{b-a}dx$$

$$=\frac{1}{b-a}\int_a^x dx=\frac{1}{b-a}\left(x\Big|_a^x\right)$$

$$F(x)=\frac{x-a}{b-a} \qquad ;a\le x\le b$$

4-1-3: الوسط :

$$\mathrm{E}x=\int_x xf(x)dx$$

$$=\int_x x\frac{1}{b-a}dx \qquad ;a\le x\le b$$

$$=\frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx \quad =\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{2}x^2\Big|_a^b\right)$$

$$=\frac{1}{2(b-a)}(b-a)^2=\frac{(b-a)(b+a)}{2(b-a)}$$

$$\mathrm{E}x=\frac{b+a}{2}$$

4-1-4: التباين :

$$v(x) = \mathrm{E}x^2 - (\mathrm{E}x)^2$$

$$\mathrm{E}x^2 = \int_x x^2 f(x)dx$$

$$= \int_x x^2 \frac{1}{b-a} dx \qquad ; a \le x \le b$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b x^2 dx = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{3}x^3 \Big|_a^b \right)$$

$$= \frac{1}{3(b-a)}(b-a)^3$$

$$\mathrm{E}x^2 = \frac{b^2+ab+a^2}{3}$$

$$v(x) = \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \left(\frac{a+b}{2}\right)^2$$

$$= \frac{b^2+ab+a^2}{3} - \frac{b^2+2ab+a^2}{4}$$

$$v(x) = \frac{b^2-2ab+a^2}{12} = \frac{(b-a)^2}{12}$$

4-1-5: الإنحراف المعياري :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{v(x)}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{(b-a)^2}{12}} = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

4-1-6: الدالة المولدة للعزوم :

$$M_x(t)=\mathrm{E}e^{tx}$$

$$=\int_x e^{tx}f(x)dx=\int_x e^{tx}\frac{1}{b-a}dx \qquad ;a\le x\le b$$

$$=\frac{1}{b-a}\int_a^b e^{tx}dx \qquad =\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{t}e^{tx}\Big|_a^b\right)$$

$$=\frac{1}{t(b-a)}\left(e^{tb}-e^{ta}\right)$$

$$M_x(t)=\frac{e^{tb}-e^{ta}}{t(b-a)}$$

4-1-7: الدالة المميزة :

$$\phi(it)=\mathrm{E}e^{itx}$$

$$=\int_x e^{itx}f(x)dx=\int_x e^{itx}\frac{1}{b-a}dx \qquad ;a\le x\le b$$

$$=\frac{1}{b-a}\int_a^b e^{itx}dx \qquad =\frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{it}e^{itx}\Big|_a^b\right)$$

$$=\frac{1}{it(b-a)}\left(e^{itb}-e^{ita}\right)$$

$$\phi(it)=\frac{e^{itb}-e^{ita}}{it(b-a)}$$

4-1-8: معامل الالتواء :

$$\gamma_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

$$\mu_3 = \int_x \left(x-\mu\right)^3 f(x)dx$$

$$\left(x-\mu\right)^3 = x^3 - 3\mu x^2 + 3\mu^2 x - \mu^3$$

$$= \int_x \left(x^3 - 3\mu x^2 + 3\mu^2 x - \mu^3\right) f(x)dx$$

$$= \int_x x^3 f(x)dx - 3\mu \int_x x^2 f(x)dx + 3\mu^2 \int_x x f(x)dx - \mu^3 \int_x f(x)dx$$

$$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_1'\mu_2' + 2\mu_1'$$

$$\mu_3' = \mathrm{E}x^3 = \int_x x^3 f(x)dx$$

$$= \int_x x^3 \frac{1}{b-a} dx \qquad ; a \le x \le b$$

$$= \frac{1}{b-a}\int_a^b x^3 dx \quad = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{4} x^4 \Big|_a^b \right)$$

$$= \frac{b^4 - a^4}{4\left(b-a\right)}$$

$$= \frac{1}{4(b-a)}(b-a)(b^3 + ba^2 + b^2 a + a^3)$$

$$\mu_3' = \frac{b^3 + ba^2 + b^2 a + a^3}{4}$$

$$\mu_2' = \frac{b^2 + ab + a^2}{3}$$

$$\mu_1' = \frac{b+a}{2}$$

$$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_1'\mu_2' + 2\mu_1'^3$$

$$\mu_3 = \frac{b^3+ba^2+b^2a+a^3}{4} - 3\left(\frac{b+a}{2}\right)\left(\frac{b^2+ab+a^2}{3}\right) + 2\left(\frac{b+a}{2}\right)^3$$

$$\mu_3 = \frac{b^3+ba^2+b^2a+a^3}{4} - \frac{3b^3+6ba^2+6b^2a+3a^3}{6} + \frac{2b^3+6ba^2+6b^2a+2a^3}{8}$$

$$\mu_3 = \frac{6b^3+6ba^2+6b^2a+6a^3-12b^3-24ba^2-24b^2a-12a^3+6b^3+18ba^2+18b^2a+6a^3}{24}$$

$$\mu_3 = 0$$

$$\gamma_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 0$$

4-1-9: معامل التفرطح :

$$\gamma_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

$$\mu_4 = \int_x (x-\mu)^4 f(x)dx$$

$$(x-\mu)^4 = x^4 - 4\mu x^3 + 6\mu^2 x^2 - 4\mu^3 x + \mu^4$$

$$\mu_4 = \int_x \left(x^4 - 4\mu x^3 + 6\mu^2 x^2 - 4\mu^3 x + \mu^4\right)^4 f(x)dx$$

$$= \int_x x^4 f(x)dx - 4\mu\int_x x^3 f(x)dx + 6\mu^2\int_x x^2 f(x)dx - 4\mu^3\int_x xf(x)dx + \mu^4\int_x f(x)dx$$

$$\mu_4 = \mu_4' - 4\mu_1'\mu_3' + 6\mu_1'^2\mu_2' - 3\mu_1'^4$$

$$\mu_4 = \frac{b^4 + b^3a + b^2a^2 + ba^3 + a^4}{5} - 4\left(\frac{b^4 + 2b^3a + 2b^2a^2 + 2ba^3 + a^4}{8}\right)$$

$$+6\left(\frac{b^4 + 3b^3a + 4b^2a^2 + 3ba^3 + a^4}{12}\right) - 3\left(\frac{b^4 + 4b^3a + 6b^2a^2 + 4ba^3 + a^4}{16}\right)$$

$$\mu_4 = \frac{b^4 - 4b^3a + 6b^2a^2 - 4ba^3 + a^4}{80}$$

$$\mu_4 = \frac{(b-a)^4}{80}$$

$$\sigma = \frac{b-a}{\sqrt{12}}$$

$$\gamma_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

$$= \frac{(b-a)^4}{80} \div \left(\frac{b-a}{\sqrt{12}}\right)^4$$

$$= \frac{(b-a)^4}{80} * \frac{144}{(b-a)^4}$$

$$\gamma_4 = \frac{144}{80} = \frac{9}{5}$$

4-2: توزيع جاما Gama Distribution:

يعتبر توزيع جاما واحد من التوزيعات المتصلة الشائعة الاستخدام في التطبيق ،يوجد كثير من المتغيرات العشوائية تتبع توزيع جاما مثل زمن الخدمة في مركز البيع أو الزمن اللازم لإعادة تجديد السيارة . لقد إشتق إسم التوزيع من علاقته بدالة تسمي دالة جاما وتعرف بالصيغة الأتية:

$$\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x} dx$$

4-2-1: دالة كثافة الإحتمال :

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\lceil\alpha} e^{-x\beta}\, x^{\alpha-1} \qquad ;0 \le x \le \infty$$

شروط دالة كثافة الإحتمال :

$$1\_0 \le f(x) \le 1$$

$$f(x) = \frac{\beta^\alpha}{\lceil\alpha} e^{-x\beta}\, x^{\alpha-1} \qquad ;0 \le x \le \infty$$

نلاحظ أن الدالة موجبة لجميع قيم x

$$\int_x x\, f(x)\, dx = 1$$

$$= \int_0^\infty \frac{\beta^\alpha}{\lceil\alpha} e^{-x\beta} x^{\alpha-1}\, dx$$

$$= \frac{\beta^\alpha}{\lceil\alpha} \int_0^\infty e^{-x\beta} x^{\alpha-1}\, dx$$

$let \qquad y = x\beta$

$$x = y/\beta \qquad \Rightarrow dx = dy/\beta$$

ننقل المدى من x الي y

$$y = x\beta \qquad\qquad ;0 \le x \le \infty$$
$$x = 0 \qquad y = 0(\beta) = 0$$
$$x = \infty \qquad y = \infty(\beta) = \infty$$

نلاحظ أن مدى x يساوي مدى y

$$= \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma\alpha}\int_0^{\infty}\left(\frac{y}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-y}\ \frac{dy}{\beta}$$
$$= \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma\alpha}\int_0^{\infty}\frac{y}{\beta^{\alpha-1}}^{\alpha-1} e^{-y}\ \frac{dy}{\beta}$$
$$= \frac{\beta^{\alpha}}{\beta^{\alpha}\Gamma\alpha}\int_0^{\infty} y^{\alpha-1}e^{-y}\ dy$$
$$\int_0^{\infty} y^{\alpha-1}e^{-y}\ dy = \Gamma\alpha$$
$$= \frac{1}{\Gamma\alpha}\Gamma\alpha = 1$$

نجد أن الدلة تحقق الشروط

4-2-2: دالة التوزيعية :

$$F(x) = \int_x f(x)\,dx \ =$$
$$= \int_0^x \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma\alpha} e^{-x\beta} x^{\alpha-1}\,dx$$

4-2-3 :الوسط :

$$Ex = \int_x x\, f(x)\, dx \qquad\qquad 0 \le x \le \infty$$

$$= \int_0^\infty x \frac{\beta^\alpha}{\Gamma\alpha} e^{-x\beta} x^{\alpha-1}\, dx$$

$$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma\alpha} \int_0^\infty x\, e^{-x\beta} x^{\alpha-1}\, dx$$

$$let \qquad\qquad y = x\beta$$

$$x = y/\beta \qquad \Rightarrow dx = dy/\beta$$

$$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma\alpha} \int_0^\infty \left(\frac{y}{\beta}\right)^\alpha e^{-y}\ \frac{dy}{\beta}$$

$$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma\alpha} \int_0^\infty \frac{y}{\beta^\alpha}^{\alpha}\ e^{-y}\ \frac{dy}{\beta}$$

$$= \frac{\beta^\alpha}{\beta^{\alpha+1}\Gamma\alpha} \int_0^\infty y^\alpha e^{-y}\ dy$$

$$\int_0^\infty y^\alpha e^{-y}\ dy = \Gamma\alpha$$

$$= \frac{1}{\beta\Gamma\alpha}\Gamma\alpha = \frac{1}{\beta\Gamma\alpha}\Gamma\alpha\,\alpha = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\mathrm{E}x = \frac{\alpha}{\beta}$$

4-2-4: التباين :

$$v(x) = Ex^2 - (Ex)^2$$

$$\mu_2' = Ex^2 = \int_x x^2 \ f(x)\, dx \qquad ; 0 \le x \le \infty$$

$$= \int_0^\infty x^2 \frac{\beta^\alpha}{\lceil\alpha} e^{-x\beta} x^{\alpha-1}\, dx$$

$$= \frac{\beta^\alpha}{\lceil\alpha} \int_0^\infty x^2 \ e^{-x\beta} x^{\alpha-1}\, dx$$

$let \qquad y = x\beta$

$$x = y / \beta$$

$$dx = dy / \beta$$

$$= \frac{\beta^\alpha}{\lceil\alpha} \int_0^\infty \left(\frac{y}{\beta}\right)^{\alpha+1} e^{-y} \ \frac{dy}{\beta}$$

$$= \frac{\beta^\alpha}{\beta^{\alpha+2}\lceil\alpha} \int_0^\infty y^{\alpha+1} e^{-y} \ dy$$

$$= \frac{1}{\beta^2 \lceil\alpha} \lceil\alpha + 2 = \frac{1}{\beta^2 \lceil\alpha} (\alpha + 1)\alpha \lceil\alpha$$

$$\therefore Ex^2 = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{\beta^2}$$

$$V(x) = \frac{\alpha(\alpha + 1)}{\beta^2} - \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2$$

$$= \frac{\alpha^2 + \alpha}{\beta^2} - \frac{\alpha^2}{\beta^2}$$

$$= \frac{\alpha^2 + \alpha - \alpha^2}{\beta^2} = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

$$\therefore V(x) = \frac{\alpha}{\beta^2}$$

4-2-5:الإنحراف المعياري :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{v(x)}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta^2}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\beta}$$

4-2-6 :العزم الرائي حول الصفر :

$$\mu_r' = (Ex^r) = \int_0^\infty x^r \; F(x)\, dx$$

$$= \int_0^\infty x^r \; \frac{\beta^\alpha}{\lceil \alpha} e^{-x\beta} x^{\alpha-1}\, dx$$

$$= \int_0^\infty x^r \; \frac{\beta^\alpha}{\lceil \alpha} e^{-x\beta} x^{\alpha-1}\, dx$$

$$= \frac{\beta^\alpha}{\lceil \alpha} \int_0^\infty x^r \; e^{-x\beta} x^{\alpha+r-1}\, dx$$

$$\therefore \; \mu_r = \frac{\beta^{-r} \lceil \alpha + r}{\lceil \alpha} = \frac{\lceil \alpha + r}{\beta^r \lceil \alpha}$$

4-2-7 :الدالة المولدة للعزوم :

$$M_x(t) = Ee^{tx}$$

$$= \int_x e^{tx} f(x) dx \qquad ; 0 \le x \le \infty$$

$$= \frac{\beta^\alpha}{\lceil \alpha} \int_0^\infty e^{tx} x^{\alpha-1} e^{-x\beta} dx$$

$$= \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma\alpha} \int_{0}^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-x(\beta-t)} dx$$

$let \qquad y = x(\beta - t)$

$$x = y/(\beta - t)$$

$$dx = dy/(\beta - t)$$

ننقل مدى

$$y = x(\beta - t) \qquad 0 \le x \le \infty$$

$$x = 0 \quad \rightarrow y = 0(\beta - t) = 0$$

$$x = \infty \quad \rightarrow y = \infty(\beta - t) = \infty$$

مدى x يساوي مدى y

$$= \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma\alpha} \int_{0}^{\infty} \left(\frac{y}{\beta - t} \right)^{\alpha-1} e^{-y} \frac{dy}{\beta - t}$$

$$= \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma\alpha} \int_{0}^{\infty} \frac{y^{\alpha-1}}{(\beta - t)^{\alpha-1}} e^{-y} \frac{dy}{\beta - t}$$

$$= \frac{\beta^{\alpha}}{(\beta - t)^{\alpha-1} \Gamma\alpha} \int_{0}^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} \frac{dy}{\beta - t}$$

$$= \frac{\beta^{\alpha}}{(\beta - t)^{\alpha} \Gamma\alpha} \int_{0}^{\infty} y^{\alpha-1} e^{-y} dy$$

$$M_x(t) = \frac{\beta^{\alpha}}{(\beta - t)^{\alpha} \Gamma\alpha} \Gamma\alpha = \left(\frac{\beta}{\beta - t} \right)^{\alpha}$$

4-2-8: الدالة المميزة :

$$\phi(it) = Ee^{itx}$$
$$= \int_x e^{itx} f(x)dx \qquad ;0 \le x \le \infty$$
$$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma\alpha} \int_0^\infty e^{itx} x^{\alpha-1} e^{-x\beta} dx$$
$$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma\alpha} \int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-x(\beta-it)} dx$$

$let \qquad y = x(\beta - it)$
$$x = y/(\beta - it)$$
$$dx = dy/(\beta - it)$$

$y = x(\beta - it) \qquad 0 \le x \le \infty$
$x = 0 \quad \rightarrow y = 0(\beta - it) = 0$
$x = \infty \quad \rightarrow y = \infty(\beta - it) = \infty$

مدى x يساوي مدى y

$$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma\alpha} \int_0^\infty \left(\frac{y}{\beta - it}\right)^{\alpha-1} e^{-y} \frac{dy}{\beta - t}$$
$$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma\alpha} \int_0^\infty \frac{y^{\alpha-1}}{(\beta - it)^{\alpha-1}} e^{-y} \frac{dy}{\beta - it}$$
$$= \frac{\beta^\alpha}{(\beta - it)^{\alpha-1}\Gamma\alpha} \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} \frac{dy}{\beta - it}$$
$$= \frac{\beta^\alpha}{(\beta - it)^{\alpha}\Gamma\alpha} \int_0^\infty y^{\alpha-1} e^{-y} dy$$
$$= \frac{\beta^\alpha}{(\beta - it)^{\alpha}\Gamma\alpha} \Gamma\alpha = \left(\frac{\beta}{\beta - it}\right)^\alpha$$
$$\therefore \phi(it) = \left(\frac{\beta}{\beta - it}\right)^\alpha$$

4-2-9:معامل الإلتواء:

$$\gamma_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

$$\mu_3 = \int_x (x-\mu)^3 \; f(x)\,dx \qquad ;0 \le x \le \infty$$

$$= \int_x \left(x^3 - 3\mu x^2 + 3\mu^2 x - \mu^3\right) f(x)\,dx$$

$$= \int_x x^3 f(x)\,dx - 3\mu \int_x x^2 f(x)\,dx + 3\mu^2 \int_x x f(x)\,dx - \mu^3$$

$$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_1'\mu_2' + 2\mu_1^{3} \qquad \rightarrow (*)$$

$$\mu_1' = Ex = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\mu_3' = \mathrm{E}x^3 = \int_x x^3 f(x)\,dx \qquad ;0 \le x \le \infty$$

$$= \int_0^\infty x^3 \frac{\beta^\alpha}{\lceil\alpha} e^{-x\beta} x^{\alpha-1}\,dx$$

$$= \frac{\beta^\alpha}{\lceil\alpha} \int_0^\infty x^3 \, e^{-x\beta} x^{\alpha-1}\,dx$$

let $\qquad y = x\beta$

$$x = y/\beta$$

$$dx = dy/\beta$$

$$=\frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma\alpha}\int_{0}^{\infty}\left(\frac{y}{\beta}\right)^{\alpha+2} e^{-y}\ \frac{dy}{\beta}$$

$$=\frac{\beta^{\alpha}}{\beta^{\alpha+3}\Gamma\alpha}\int_{0}^{\infty} y^{\alpha+2}e^{-y}\ dy$$

$$=\frac{1}{\beta^{3}\Gamma\alpha}(\alpha+1)(\alpha+2)\Gamma\alpha\,\alpha=\frac{1}{\beta^{3}\Gamma\alpha}(\alpha+1)(\alpha+2)\Gamma\alpha\,\alpha$$

$$\therefore \mu_3'=\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\beta^{3}}$$

$$\mu_2' = Ex^2 = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}$$

بالتعويض في (*)

$$\mu_3=\frac{(\alpha+1)(\alpha+2)\alpha}{\beta^{3}}-3\left(\left(\frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^{2}}\right)\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right)+2\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{3}$$

بفك الاقواس نحصل على

$$=\frac{\cancel{\alpha^{3}}+\cancel{3\alpha^{2}}+2\alpha-\cancel{3\alpha^{3}}-\cancel{3\alpha^{2}}+\cancel{2\alpha^{3}}}{\beta^{3}}=\frac{2\alpha}{\beta^{3}}$$

$$\therefore \mu_3=\frac{2\alpha}{\beta^{3}}$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{\alpha}}{\beta}$$

$$\gamma_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = \frac{2\alpha}{\beta^3} \div \left(\frac{\sqrt{\alpha}}{\beta}\right)^3$$

$$= \frac{2\alpha}{\beta^3} * \frac{\beta^3}{\alpha\sqrt{\alpha}} = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$$

$$\therefore \gamma_3 = \frac{2}{\sqrt{\alpha}}$$

4-2-10: معامل التفرطح :

$$\gamma_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

$$\mu_4 = \int_x (x-\mu)^4 f(x)\,dx \qquad ;0 \le x \le \infty$$

$$= \int_x \left(x^4 - 4\mu x^3 + 6\mu^2 x^2 - 4\mu^3 x + \mu^4\right) f(x)\,dx$$

$$= \int_x x^4 f(x)\,dx - 4\mu \int_x x^3 f(x)\,dx + 6\mu^2 \int_x x^2 f(x)\,dx - 4\mu^3 \int_x x f(x)\,dx + \mu^4$$

$$\mu_4 = \mu_4' - 4\mu_1'\mu_3' + 6\mu_1'^2 \mu_2' - 3\mu_1'^4 \qquad (*)$$

$$\mu_4' = \int x^4 f(x) = \int x^4 f(x)\,dx$$

$$= \mu_4' = Ex^4 = \int_0^\infty x^4 F(x)\,dx$$

$$= \int_0^\infty x^4 \frac{\beta^\alpha}{\Gamma\alpha} e^{-x\beta} x^{\alpha-1}\,dx$$

$$= \frac{\beta^{\alpha}}{\lceil\alpha} \int_0^{\infty} x^4 \, e^{-x\beta} x^{\alpha-1} \, dx$$

let $\quad y = x\beta$

$$x = y/\beta$$

$$dx = dy/\beta$$

$$= \frac{\beta^{\alpha}}{\lceil\alpha} \int_0^{\infty} \left(\frac{y}{\beta}\right)^{\alpha+3} e^{-y} \, \frac{dy}{\beta}$$

$$= \frac{\beta^{\alpha}}{\beta^{\alpha+4}\lceil\alpha} \int_0^{\infty} y^{\alpha+3} e^{-y} \, dy$$

$$= \frac{1}{\beta^4 \lceil\alpha} (\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\lceil\alpha \, \alpha = \frac{1}{\beta^4 \lceil\alpha} (\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)\lceil\alpha \, \alpha$$

$$\therefore \mu_4' = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)(\alpha+3)}{\beta^4}$$

$$\mu_1' = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$\mu_2' = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\beta^2}$$

$$\mu_3' = \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\beta^3}$$

$$\mu_4 = \mu_4' - 4\mu_1'\mu_3' + 6\mu_1'^2\mu_2' - 3\mu_1'^4$$

$$= \frac{(\alpha+3)(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha}{\beta^4} - 4\left(\frac{(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha}{\beta^3}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)\right) +$$

$$6\left(\frac{(\alpha+1)\alpha}{\beta^2}\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^2\right) - 3\left(\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^3\right)$$

$$=\frac{\alpha^4+6\alpha^3+11\alpha^2+6\alpha-4\alpha^4-12\alpha^3-8\alpha^2+6\alpha^4+6\alpha^3-3\alpha^4}{\beta^4}$$

$$=\frac{3\alpha^2+6\alpha}{\beta^4}$$

$$\therefore \mu_4=\frac{3\alpha(\alpha+2)}{\beta^4}$$

$$\gamma_4=\frac{\mu_4}{\mu_2^2}$$

$$=\frac{3\alpha(\alpha+2)}{\beta^4}\div\left(\frac{\alpha}{\beta^2}\right)^2$$

$$=\frac{3\alpha(\alpha+2)}{\beta^4}*\frac{\beta^4}{\alpha^2}=\frac{3(\alpha+2)}{\alpha}$$

$$\therefore \gamma_4=3+\frac{6}{\alpha}$$

4-3: التوزيع الأسي Exponential Distribution:

يعتبر التوزيع الأسي من العائلة الأسية، نجد أن التوزيع الأسي ذات أهميه كبيرة في كثير من المجالات التطبيقية لنظرية الإتمالات ،هذة القوانين يمكن تصف العديد من الحالات أو النمازج العملية كحالة وجود أحداث تقع أو تحدث عشوائياً في الزمن ، مثل ورود عدد من المكالمات الهاتفية على لوحة إستقبال في فترة زمنية محددة ، أو وقوع عدد من حوادث السيارات على طريق معين في فترة محددة ، كما يمكن بقوانين التوزيع الأسي تمثيل أعمار المصابيح الكهربائية التي تنتجها إحدى الشركات أو طول مدة الإنتظار للحصول على خدمة من الخدمات وغير ذلك من المجالات التطبيقية ، كما تعتبر إختبارات الحياة Life-testingمن أهم المجالات التطبيقية للتوزيع .والعمر life timeبصفة عامة يمكن تمثيله بمتغير عشوائي له توزيع أسي.

هو من أبسط التوزيعات الإحتمالية من حيث المعالجة الرياضية لذلك كثيراً ما نستخدم دوال المتغيرات أسية كتقريب لبعض المتغيرات العشوائية في بعض التطبيقات الإحصائية يقال المتغير العشوائي x يكون له توزيع أسي إذا كانت.

4-3-1: دالة كثافة الإحتمال:

$$f(x) = \lambda\, e^{-\lambda x}$$

$$;\ 0 \le x \le \infty$$

شروط دالة كثافة الإحتمال :

$$1\_\ 0 \le f(x) \le 1$$
$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$

نلاحظ أن λ كمية موجبة ،وإن قيمة الدالة الأسية موجبة (e) بغض النظر عن الأس سالبا كان أم موجبا لذلك فأن الدالة موجبة لجميع قيم x

$$2 - \int_0^\infty x\ f(x)\, dx = 1$$
$$= \int_0^\infty \lambda\ e^{-\lambda x} dx = \left(-e^{-\lambda x} \Big|_0^\infty \right)$$
$$= -e^{-\lambda \infty} + -e^{-\lambda 0} = 0 + 1 = 1$$

نلاحظ أن الدالة تحقق شروط دالة كثافة الإحتمال

4-3-2: الدالة التوزيعية:

$$F(x)=\int_{x} f(x)dx$$

$$=\int_{0}^{x}\lambda e^{-\lambda}dx=\lambda\left(-\frac{1}{\lambda}e^{-\lambda x}\Big|_{0}^{x}\right)$$

$$=-e^{-\lambda x}+e^{-\lambda 0}=1-e^{-\lambda x}$$

$$F(x)=1-e^{-\lambda x}$$

4-3-3: الوسط :

$$E(x)=\int_{0}^{\infty}x\,f(x)dx \qquad ;0\leq x\leq\infty$$

$$=\int_{0}^{\infty}x\lambda e^{-\lambda x}dx$$

بإستخدام التكامل بالتجزئة

$$\int u\,dv=uv-\int v\,du$$

$$\begin{aligned} let \qquad\qquad & u=x \\ & du=dx \\ & dv=\lambda\, e^{-\lambda x} \\ & v=-e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

$$\int_{0}^{\infty}x\,\lambda\,e^{-\lambda x}=-xe^{-\lambda x}-\int_{0}^{\infty}-e^{-\lambda x}dx$$

$$=\left(-(\infty)e^{-\lambda(\infty)}+(0)e^{-\lambda(0)}\right)-\int_{0}^{\infty}-e^{-\lambda x}dx$$

$$=\frac{1}{\lambda}(-e^{-\lambda(\infty)}+(0)e^{-\lambda(0)})$$

$$\therefore\ \mu_1'=E(x)=\frac{1}{\lambda}$$

4-3-4: التباين :

$$V(x) = Ex^2 - (Ex)^2$$

$$Ex^2 = \int_x x^2 f(x) dx \qquad ; 0 \le x \le \infty$$

$$= \int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$\int u \, dv = uv - \int v \, du$$

نكامل مرتين

$$\begin{aligned} let \qquad & u = x^2 \\ & du = 2x\,dx \\ & dv = \lambda e^{-\lambda x} \\ & v = -e^{-\lambda x} \end{aligned}$$

$$\int_0^\infty x^2 \lambda e^{-\lambda x} = -x^2 e^{-\lambda x} - \int_0^\infty -e^{-\lambda x} 2x\,dx$$

$$= \left(-(\infty)^2 e^{-\lambda(\infty)} + (0)^2 e^{-\lambda(0)}\right) + 2\int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx$$

$$= 0 + 2\int_0^\infty x e^{-\lambda x} dx$$

بالضرب في $\frac{\lambda}{\lambda}$

$$=\frac{2}{\lambda}\int_0^{\infty} x\lambda e^{-\lambda x}\,dx=\frac{2}{\lambda}*\frac{1}{\lambda}$$

$$\therefore Ex^2=\frac{2}{\lambda^2}$$

$$\therefore v(x)=\frac{2}{\lambda^2}-\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2=\frac{2-1}{\lambda^2}=\frac{1}{\lambda^2}$$

4-3-5 : الإنحراف المعياري :

$$\sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{v(x)}$$

$$\therefore \sigma=\sqrt{\frac{1}{\lambda^2}}=\frac{1}{\lambda}$$

4-3-6:العزم الرائي حول الصفر:

$$\mu_r'(x^r)=\int_0^{\infty} x^r f(x)\,dx$$

$$=\int_0^{\infty} x^r\lambda e^{-\lambda x}\,dx$$

$$=\lambda\int_0^{\infty} x^r e^{-\lambda x}\,dx$$

$let \qquad y=\lambda x$

$$dy=\lambda dx$$

$$dx=\frac{dy}{\lambda}$$

$$=\lambda\int_0^{\infty}\frac{y^r}{\lambda^r}e^{-y}\frac{dy}{\lambda}$$

$$=\frac{\lambda}{\lambda^{r+1}}\int_0^{\infty} y^r e^{-y}dy$$

ومن تعريف دالة جاما نجد أن

$$\int_0^\infty y^r\, e^{-y}\, dy = \overline{|(r+1)}$$

بما أن r عدد موجب صحيح فإن

$$\overline{|(r+1)} = r!$$

$$\therefore \mu_r' = \frac{1}{\lambda^r} * \overline{|(r+1)} = \frac{r!}{\lambda^r}$$

4-3-7:الدالة المولدة للعزوم:

$$M_x(t) = Ee^{tx}$$

$$= \int_0^\infty e^{tx} f(x)\, dx = \int_0^\infty e^{tx}\, \lambda e^{-\lambda x} dx = \lambda \int_0^\infty e^{-x(\lambda-t)} dx$$

$$= \lambda \left[\frac{-e^{-x(\lambda-t)}}{(\lambda-t)} \Big|_0^\infty \right]$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda-t} \left[-e^{-\infty(\lambda-t)} + e^{0(\lambda-t)} \right]$$

$$\therefore M_x(t) = \frac{\lambda}{\lambda-t}$$

4-3-8: الدالة المميزة :

$$\phi(it) = Ee^{itx}$$

$$= \int_x e^{itx} f(x)\, dx \qquad ;0 \le x \le \infty$$

$$= \int_0^\infty e^{itx}\, \lambda e^{-\lambda x} dx$$

$$= \lambda \int_0^\infty e^{-x(\lambda - it)} dx$$

$$= \lambda \left[\frac{-e^{-x(\lambda - it)}}{(\lambda - it)} \Big|_0^\infty \right]$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda - it} \left[-e^{-\infty(\lambda - it)} + e^{0(\lambda - it)} \right]$$

$$\therefore \phi(it) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

4-3-9:معامل الإلتواء:

$$\gamma_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

$$\mu_3 = \int_x (x - \mu)^3 f(x) \qquad 0 \le x \le \infty$$

$$= \int_x \left(x^3 - 3\mu x^2 + 3\mu^2 x - \mu^3 \right) f(x)$$

$$= \int_x x^3 f(x) - 3\mu \int_x x^2 f(x) + 3\mu^2 \int_x x f(x) - \mu^3$$

$$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_1'\mu_2' + 2\mu_1^3 \qquad \to (*)$$

$$\mu_1' = \frac{1}{\lambda}$$

$$\mu_2' = \frac{2}{\lambda^2}$$

لإيجاد العزم الثالث حول الصفر نستخدم العزم الرائي

$$\mu_r' = \frac{1}{\lambda^r} * \lceil(r+1) = \frac{r!}{\lambda^r}$$

$$r = 3$$

$$\therefore \mu_3' = \frac{3!}{\lambda^3} = \frac{6}{\lambda^3}$$

بالتعويض في (*)

$$\mu_3 = \frac{6}{\lambda^3} - 3\left(\frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda}\right) + 2\left(\frac{1}{\lambda}\right)^3$$

$$= \frac{6}{\lambda^3} - 3\frac{2}{\lambda^3} + \frac{2}{\lambda^3} = \frac{\cancel{6}}{\lambda^3} - \frac{\cancel{6}}{\lambda^3} + \frac{2}{\lambda^3}$$

$$\therefore \mu_3 = \frac{2}{\lambda^3}$$

$$\gamma_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

$$\sigma = \frac{1}{\lambda}$$

$$= \frac{2}{\lambda^3} \div \left(\frac{1}{\lambda}\right)^3 = \frac{2}{\lambda^3} * \lambda^3 = 2$$

$$\therefore \gamma_3 = 2$$

4-3-10:معامل التفرطح :

$$\gamma_4=\frac{\mu_4}{\mu_2^2}=\frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

$$\mu_4=\int_x (x-\mu)^4 f(x)\,dx \qquad ;0\le x\le\infty$$

$$=\int_x \left(x^4-4\mu x^3+6\mu^2x^2-4\mu^3x+\mu^4\right)f(x)\,dx$$

$$=\int_x x^4 f(x)\,dx-4\mu\int_x x^3 f(x)\,dx+6\mu^2\int_x x^2 f(x)\,dx-4\mu^3\int_x xf(x)\,dx+\mu^4$$

$$\mu_4=\mu_4'-4\mu_1'\mu_3'+6\mu_1'^2\mu_2'-3\mu_1'^4 \qquad (*)$$

$$\mu_1'=\frac{1}{\lambda}$$

$$\mu_2'=\frac{2}{\lambda^2}$$

$$\mu_3'=\frac{6}{\lambda^3}$$

لإيجاد العزم الرابع حول الصفر نستخدم العزم الرائي

$$\mu_r'=\frac{1}{\lambda^r}*\overline{|(r+1)}=\frac{r!}{\lambda^r}$$

$$r=4$$

$$\therefore\ \mu_4'=\frac{4!}{\lambda^4}=\frac{12}{\lambda^4}$$

$$\mu_4 = \frac{24}{\lambda^4} - 4\left(\frac{1}{\lambda}\left(\frac{6}{\lambda^3}\right)\right) + 6\left(\left(\frac{1}{\lambda}\right)^2\left(\frac{2}{\lambda^2}\right)\right) - 3\left(\frac{1}{\lambda}\right)^4$$

$$= \frac{24}{\lambda^4} - \frac{24}{\lambda^4} + \frac{12}{\lambda^4} - \frac{3}{\lambda^4} = \frac{12}{\lambda^4} - \frac{3}{\lambda^4}$$

$$\therefore\ \mu_4 = \frac{9}{\lambda^4}$$

$$\gamma_4 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

$$\sigma = \frac{1}{\lambda}$$

$$\gamma_4 = \frac{9}{\lambda^4} \div \left(\frac{1}{\lambda}\right)^4 = \frac{9}{\lambda^4} * \lambda^4$$

$$\therefore\ \gamma_4 = 9$$

4-4: توزيع بيتا Beta distribution:

إن هذا التوزيع مشتق من دالة بيتا Beta function أو ماتسمى في بعض الأحيان تكامل بيتا ، يُعد واحداً من التوزيعات ذات أهمية تطبيقية في حقل الرقابة على جودة الإنتاج من خلال تكوين ما يسمى " جداول عينات القبول"التي تستخدم في إتخاذ القرار بشأن قبول واجبات الإنتاج إستناداً الى نسب الوحدات المعيبة في العينة ، إن تكامل بيتا معطى بالصيغة التالية :

حيث $B(\alpha_1,\alpha_2)=\dfrac{\Gamma(\alpha_1).\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}\ ,\ \alpha_1,\alpha_2>0$ وبقسمة طرفي دالة بيتا على $B(\alpha_1,\alpha_2)$

وفي هذة الحالة يقال أن المتغير العشوائي X يتوزع وفق دالة بيتا بالمعلمتين α,β . وبالرمز

$$x \sim B(\alpha,\beta)$$

4-4-1: دالة كثافة الإحتمال :

$$f(x)=\frac{1}{\beta(\alpha_1,\alpha_2)}x^{\alpha_1-1}(1-x)^{\alpha_2-1}$$

$$;0\le x\le 1$$

$$\alpha_1,\alpha_2>0$$

شروط دالة كثافة الإحتمال :

$$1\_0\le f(x)\le 1$$

$$f(x)=\frac{1}{\beta(\alpha_1,\alpha_2)}x^{\alpha_1-1}(1-x)^{\alpha_2-1}\qquad 0\le x\le 1$$

وهذا يعني أن الدالة موجبة لجميع قيم x

$$2\_\int_x f(x)dx = 1$$

$$= \int_0^1 \frac{1}{\beta(\alpha_1,\alpha_2)} x^{\alpha_1-1}(1-x)^{\alpha_2-1}dx$$

$$= \frac{1}{\beta(\alpha_1,\alpha_2)} \int_0^1 x^{\alpha_1-1}(1-x)^{\alpha_2-1}dx$$

$$\int_0^1 x^{\alpha_1-1}(1-x)^{\alpha_2-1}dx = \beta(\alpha_1,\alpha_2)$$

$$= \frac{1}{\beta(\alpha_1,\alpha_2)}.\beta(\alpha_1,\alpha_2) = 1$$

4-4-2: الدالة التوزيعية :

$$F(x) = \int_x f(x)dx$$

$$= \int_0^x \frac{1}{\beta(\alpha_1,\alpha_2)} x^{\alpha_1-1}(1-x)^{\alpha_2-1}dx$$

$$= \frac{1}{\beta(\alpha_1,\alpha_2)} \int_0^x x^{\alpha_1-1}(1-x)^{\alpha_2-1}dx$$

4-4-3: الوسط :

$$Ex = \int_x x f(x)dx$$

$$= \int_x x \frac{1}{\beta(\alpha_1,\alpha_2)} x^{\alpha_1 - 1}(1-x)^{\alpha_2 - 1}dx \qquad ;0 \le x \le 1$$

$$\alpha_1, \alpha_2 > 0$$

$$= \frac{1}{\beta(\alpha_1,\alpha_2)} \int_x x^{\alpha_1}(1-x)^{\alpha_2 - 1}dx$$

$$\int_0^1 x^{\alpha_1}(1-x)^{\alpha_2 - 1}dx = \beta(\alpha_1 + 1, \alpha_2)$$

$$\frac{1}{\beta(\alpha_1,\alpha_2)} = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}$$

$$\beta(\alpha_1 + 1, \alpha_2) = \frac{\Gamma(\alpha_1 + 1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)}$$

$$= \frac{1}{\beta(\alpha_1,\alpha_2)} \beta(\alpha_1 + 1, \alpha_2)$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha_1 + 1)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} = \frac{\alpha_1 \Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\alpha_1 + \alpha_2 \Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)\Gamma(\alpha_1)}$$

$$Ex = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

4-4-4: التباين :

$$V(x) = Ex^2 - (Ex)^2$$

$$Ex^2 = \int_x x^2 f(x)dx$$

$$= \int_x x^2 \frac{1}{\beta(\alpha_1,\alpha_2)} x^{\alpha_1 - 1}(1-x)^{\alpha_2 - 1}dx \qquad ; 0 \le x \le 1$$

$$\alpha_1, \alpha_2 > 0$$

$$= \frac{1}{\beta(\alpha_1,\alpha_2)} \int_x x^{\alpha_1 + 1}(1-x)^{\alpha_2 - 1}dx$$

$$\int_0^1 x^{\alpha_1 + 1}(1-x)^{\alpha_2 - 1}dx = \beta(\alpha_1 + 2, \alpha_2)$$

$$\frac{1}{\beta(\alpha_1,\alpha_2)} = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}$$

$$\beta(\alpha_1 + 2, \alpha_2) = \frac{\Gamma(\alpha_1 + 2)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 2)}$$

$$= \frac{1}{\beta(\alpha_1,\alpha_2)} \beta(\alpha_1 + 2, \alpha_2)$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha_1 + 2)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 2)\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} = \frac{(\alpha_1 + 1)\alpha_1 \Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)(\alpha_1 + \alpha_2)\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)\Gamma(\alpha_1)}$$

$$Ex^2 = \frac{(\alpha_1 + 1)\alpha_1}{(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

$$v(x) = \frac{(\alpha_1 + 1)\alpha_1}{(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)(\alpha_1 + \alpha_2)} - \left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}\right)^2$$

$$= \frac{(\alpha_1 + 1)\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2) - \alpha_1^2(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)}{(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)(\alpha_1 + \alpha_2)^2}$$

$$= \frac{\alpha_1^3 + \alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1^2 + \alpha_1\alpha_2 - \alpha_1^3 - \alpha_1^2\alpha_2 - \alpha_1^2}{(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)(\alpha_1 + \alpha_2)^2}$$

$$= \frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)(\alpha_1 + \alpha_2)^2}$$

$$\therefore v(x) = \frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)(\alpha_1 + \alpha_2)^2}$$

4-4-5:العزم الرائي حول الصفر:

$$Ex^r = \int_x x^r f(x)dx$$

$$= \int_x x^r \frac{1}{\beta(\alpha_1,\alpha_2)} x^{\alpha_1-1}(1-x)^{\alpha_2-1}dx \qquad ;0\le x\le 1$$

$$\alpha_1,\alpha_2>0$$

$$= \frac{1}{\beta(\alpha_1,\alpha_2)}\int_x x^{\alpha_1+r-1}(1-x)^{\alpha_2-1}dx$$

$$\int_0^1 x^{\alpha_1+r-1}(1-x)^{\alpha_2-1}dx = \beta(\alpha_1+r,\alpha_2)$$

$$\frac{1}{\beta(\alpha_1,\alpha_2)} = \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}$$

$$\beta(\alpha_1+r,\alpha_2) = \frac{\Gamma(\alpha_1+1)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+1)}$$

$$= \frac{1}{\beta(\alpha_1,\alpha_2)}\beta(\alpha_1+r,\alpha_2)$$

$$= \frac{\beta(\alpha_1+r,\alpha_2)}{\beta(\alpha_1,\alpha_2)}$$

$$Ex^r = \frac{\Gamma(\alpha_1+r)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+r)\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} = \frac{\Gamma(\alpha_1+r)\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+r)\Gamma(\alpha_1)}$$

4-4-6: معامل الإلتواء:

$$\gamma_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

$$\mu_3 = \int_x (x-\mu)^3 f(x)dx$$

$$= \int_x (x^3 - 3\mu x^2 - 3\mu^2 x - \mu^3) f(x)dx$$

$$= \int_x x^3 f(x)dx - 3\mu \int_x x^2 f(x)dx - 3\mu^2 \int_x x f(x)dx - \mu^3 \int_x f(x)dx$$

$$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_1'\mu_2' + 2\mu_1'^3$$

$$\mu_3' = Ex^3 = \int_x x^3 f(x)dx$$

$$= \int_x x^3 \frac{1}{\beta(\alpha_1,\alpha_2)} x^{\alpha_1-1}(1-x)^{\alpha_2-1}dx \qquad ;0 \le x \le 1$$

$$\alpha_1, \alpha_2 > 0$$

$$= \frac{1}{\beta(\alpha_1,\alpha_2)} \int_x x^{\alpha_1+2}(1-x)^{\alpha_2-1}dx$$

$$\int_0^1 x^{\alpha_1+2}(1-x)^{\alpha_2-1}dx = \beta(\alpha_1+3, \alpha_2)$$

$$\frac{1}{\beta(\alpha_1,\alpha_2)} = \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}$$

$$\beta(\alpha_1+3,\alpha_2) = \frac{\Gamma(\alpha_1+3)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+3)}$$

$$= \frac{1}{\beta(\alpha_1,\alpha_2)} \beta(\alpha_1+3,\alpha_2)$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha_1+3)\Gamma(\alpha_2)\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2+3)\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}$$

$$= \frac{(\alpha_1+2)(\alpha_1+1)\alpha_1\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{(\alpha_1+\alpha_2+2)(\alpha_1+\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2)\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)\Gamma(\alpha_1)}$$

$$\mu_3' = \frac{(\alpha_1+2)(\alpha_1+1)\alpha_1}{(\alpha_1+\alpha_2+2)(\alpha_1+\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2)}$$

$$\mu_2' = \frac{(\alpha_1+1)\alpha_1}{(\alpha_1+\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2)}$$

$$\mu_1' = \frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}$$

$$\mu_3 = \frac{(\alpha_1+2)(\alpha_1+1)\alpha_1}{(\alpha_1+\alpha_2+2)(\alpha_1+\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2)} - 3\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}\right)\left(\frac{(\alpha_1+1)\alpha_1}{(\alpha_1+\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2)}\right) + 2\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1+\alpha_2}\right)^3$$

$$\mu_3 = \frac{(\alpha_1+2)(\alpha_1+1)\alpha_1(\alpha_1+\alpha_2)^3 - 3\alpha_1^2(\alpha_1+1)(\alpha_1+\alpha_2+2)(\alpha_1+\alpha_2) + 2\alpha_1^3(\alpha_1+\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2+2)}{(\alpha_1+\alpha_2+2)(\alpha_1+\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2)^3}$$

$$\mu_3 = \frac{2\alpha_1\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1)}{(\alpha_1+\alpha_2+2)(\alpha_1+\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2)^3}$$

$$\gamma_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2)^2}}$$

$$\gamma_3 = \frac{2\alpha_1\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1)}{(\alpha_1+\alpha_2+2)(\alpha_1+\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2)^3} \div \left(\sqrt{\frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2)^2}}\right)^3$$

$$\gamma_3 = \frac{2\alpha_1\alpha_2(\alpha_2-\alpha_1)}{(\alpha_1+\alpha_2+2)(\alpha_1+\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2)^3} * \frac{(\alpha_1+\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2)^3(\alpha_1+\alpha_2+1)^{\frac{1}{2}}}{\alpha_1\alpha_2\left(\alpha_1\alpha_2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\gamma_3 = \frac{2(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_1+\alpha_2+1)^{\frac{1}{2}}}{(\alpha_1+\alpha_2+2)\left(\alpha_1\alpha_2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

4-4-7: معامل التفرطح :

$$\gamma_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

$$\mu_4 = \int_x \left(x-\mu\right)^4 f(x)dx$$

$$(x-\mu)^4 = x^4 - 4\mu x^3 + 6\mu^2 x^2 - 4\mu^3 x - \mu^4$$

$$= \int_x \left(x^4 - 4\mu x^3 + 6\mu^2 x^2 - 4\mu^3 x - \mu^4\right) f(x)dx$$

$$= \int_x x^4 f(x)dx - 4\mu \int_x x^3 f(x)dx + 6\mu^2 \int_x x^2 f(x)dx - 4\mu^3 \int_x x f(x)dx - \mu^4 \int_x f(x)dx$$

$$\mu_4 = \mu_4' - 4\mu_1'\mu_3' + 6\mu_1'^2 \mu_2' - 3\mu_1'^4$$

$$\mu_4' = Ex^4 = \int_x x^4 f(x)dx$$

$$= \int_x x^4 \frac{1}{\beta(\alpha_1,\alpha_2)} x^{\alpha_1 - 1}(1-x)^{\alpha_2 - 1} dx \qquad ; 0 \le x \le 1$$

$$\alpha_1, \alpha_2 > 0$$

$$= \frac{1}{\beta(\alpha_1,\alpha_2)} \int_x x^{\alpha_1 + 3}(1-x)^{\alpha_2 - 1} dx$$

$$\int_0^1 x^{\alpha_1 + 3}(1-x)^{\alpha_2 - 1} dx = \beta(\alpha_1 + 4, \alpha_2)$$

$$\frac{1}{\beta(\alpha_1,\alpha_2)} = \frac{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)}$$

$$\beta(\alpha_1 + 4, \alpha_2) = \frac{\Gamma(\alpha_1 + 4)\Gamma(\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1 + \alpha_2 + 4)}$$

$$= \frac{1}{\beta(\alpha_1, \alpha_2)} \beta(\alpha_1 + 4, \alpha_2)$$

$$= \frac{\overline{|\alpha_1 + 4}\,\overline{|\alpha_2}\,\overline{|\alpha_1 + \alpha_2}}{\overline{|\alpha_1 + \alpha_2 + 4}\,\overline{|\alpha_1}\,\overline{|\alpha_2}}$$

$$= \frac{(\alpha_1 + 3)(\alpha_1 + 2)(\alpha_1 + 1)\alpha_1 \overline{|\alpha_1}\,\overline{|\alpha_1 + \alpha_2}}{(\alpha_1 + \alpha_2 + 3)(\alpha_1 + \alpha_2 + 2)(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)(\alpha_1 + \alpha_2)\overline{|\alpha_1 + \alpha_2}\,\overline{|\alpha_1}}$$

$$\mu_4' = \frac{(\alpha_1 + 3)(\alpha_1 + 2)(\alpha_1 + 1)\alpha_1}{(\alpha_1 + \alpha_2 + 3)(\alpha_1 + \alpha_2 + 2)(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

$$\mu_4' = \frac{(\alpha_1 + 2)(\alpha_1 + 1)\alpha_1}{(\alpha_1 + \alpha_2 + 2)(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

$$\mu_2' = \frac{(\alpha_1 + 1)\alpha_1}{(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)(\alpha_1 + \alpha_2)}$$

$$\mu_1' = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

$$\mu_4 = \frac{(\alpha_1 + 3)(\alpha_1 + 2)(\alpha_1 + 1)\alpha_1}{(\alpha_1 + \alpha_2 + 3)(\alpha_1 + \alpha_2 + 2)(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)(\alpha_1 + \alpha_2)} -$$

$$4\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}\right)\left(\frac{(\alpha_1 + 2)(\alpha_1 + 1)\alpha_1}{(\alpha_1 + \alpha_2 + 2)(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)(\alpha_1 + \alpha_2)}\right)$$

$$+6\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}\right)^2 \left(\frac{(\alpha_1 + 1)\alpha_1}{(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)(\alpha_1 + \alpha_2)}\right) - 3\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}\right)^4$$

$$\mu_4 = \frac{(\alpha_1 + 3)(\alpha_1 + 2)(\alpha_1 + 1)\alpha_1(\alpha_1 + \alpha_2)^3 - 4\alpha_1^2(\alpha_1 + 2)(\alpha_1 + 1)(\alpha_1 + \alpha_2 + 3)(\alpha_1 + \alpha_2)^2}{(\alpha_1 + \alpha_2 + 3)(\alpha_1 + \alpha_2 + 2)(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)(\alpha_1 + \alpha_2)^4}$$

$$+ \frac{+6\alpha_1^3(\alpha_1 + 1)(\alpha_1 + \alpha_2)(\alpha_1 + \alpha_2 + 2)(\alpha_1 + \alpha_2 + 3) - 3\alpha_1^4(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)(\alpha_1 + \alpha_2 + 2)(\alpha_1 + \alpha_2 + 3)}{(\alpha_1 + \alpha_2 + 3)(\alpha_1 + \alpha_2 + 2)(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)(\alpha_1 + \alpha_2)^4}$$

$$\mu_4 = \frac{3\alpha_1^3\alpha_2^2 + 3\alpha_1^2\alpha_2^3 + 6\alpha_1^3\alpha_2 + 6\alpha_1\alpha_2^3 - 6\alpha_1^2\alpha_2^2}{(\alpha_1+\alpha_2+3)(\alpha_1+\alpha_2+2)(\alpha_1+\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2)^4}$$

$$\mu_4 = \frac{3\alpha_1\alpha_2\left(\alpha_1^2\alpha_2 + \alpha_1\alpha_2^2 + 2\alpha_1^2 + 2\alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_2\right)}{(\alpha_1+\alpha_2+3)(\alpha_1+\alpha_2+2)(\alpha_1+\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2)^4}$$

$$\mu_4 = \frac{3\alpha_1\alpha_2\left(2(\alpha_1+\alpha_2)^2 + \alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2-6\right)}{(\alpha_1+\alpha_2+3)(\alpha_1+\alpha_2+2)(\alpha_1+\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2)^4}$$

$$\gamma_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

$$\sigma^2 = \frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2)^2}$$

$$\gamma_4 = \frac{3\alpha_1\alpha_2\left(2(\alpha_1+\alpha_2)^2 + \alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2-6\right)}{(\alpha_1+\alpha_2+3)(\alpha_1+\alpha_2+2)(\alpha_1+\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2)^4} \div \left(\frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2)^2}\right)^2$$

$$\gamma_4 = \frac{3\alpha_1\alpha_2\left(2(\alpha_1+\alpha_2)^2 + \alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2-6\right)}{(\alpha_1+\alpha_2+2)(\alpha_1+\alpha_2+2)(\alpha_1+\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2)^4} * \frac{(\alpha_1+\alpha_2+1)^2(\alpha_1+\alpha_2)^4}{\alpha_1^2\alpha_2^2}$$

$$\gamma_4 = \frac{3(\alpha_1+\alpha_2+2)\left(2(\alpha_1+\alpha_2)^2 + \alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2-6)\right)}{\alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2+2)(\alpha_1+\alpha_2+3)}$$

4-5: التوزيع الطبيعي Normal distribution :

يعتبر من أهم التوزيعات الإحتمالية وذلك لأن معظم الظواهر في الحياة اليومية تتبع التوزيع الطبيعي فهو يستخدم في كثير من المجالات مثل الزراعة والصناعة ....ألخ، أهمية هذا التوزيع تكمن في إن كل التوزيعات الإحتمالية متقطعة كانت أم متصلة فإنها تتقارب وفق شروط معينة الى التوزيع الطبيعي عن طريق ما يسمى بنظرية الغاية المركزية .

يعود أصل التوزيع الطبيعي الى عام 1733حيث توصل العالم الرياضي ديمورقي للشكل الأول لهذا التوزيع وبعد ذلك طور كثيرا من قبل العالم جاوس وأصبح بالشكل المتعارف عليه الأن ولذلك ينسب إليه هذا التوزيع ويسمى في بعض الأحيان بتوزيع جاوس.

التوزيع الطبيعي هو أشهر التوزيعات الإحتمالية وذلك لسببين. السبب الأول هو أن الكثير من الظواهر تتبع منحنى التوزيع الطبيعي. السبب الآخر هو أن هناك نظرية تقول أن متوسط قيم عينات متعددة يأخذ شكل التوزيع الطبيعي ولو لم يكن توزيع المتغير نفسه يتبع التوزيع الطبيعي. لذلك فإن التوزيع الطبيعي هو شيء محوري في علم الإحصاء.

إن منحنى هذا التوزيع يشبه شكل الجرس وهو توزيع متماثل المتوسط μ بمعنى أن أي نقطة مختارة يمين المتوسط تعطي قيمة الدالة لنفس النقطة المختارة يسار المتوسط .

حيث أن معلمتا التوزيع هي μ,σ^2 وللإختصار يمكن إن تكتب بالشكل $x \sim N(\mu,\sigma^2)$

4-5-1: دالة كثافة الإحتمال:

$$f(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad ;-\infty\le x\le\infty$$

4-5-3: الوسط :

$$E(x)=\int_x xf(x)\,dx$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}dx \qquad ;-\infty\le x\le\infty$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}\ dx$$

نفرض أن

$$w = \frac{x - \mu}{\sigma}$$
$$w \sigma = x - \mu$$
$$x = w \sigma + \mu$$
$$d x = \sigma d x$$

ننقل المدى x الي w

$$w = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

عندما $x = -\infty$

$$w = \frac{-\infty - \mu}{\sigma} = -\infty$$

عندما $x = \infty$

$$w = \frac{x - \mu}{\sigma} = \infty$$

مدى w يساوي مدىx

$$-\infty \leq w \leq \infty$$

بالضرب والقسمه في(1-)

$$= \frac{-\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} -we^{-\frac{1}{2}W^2} + \mu$$
$$= \frac{-\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{1}{2}W^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} \right] + \mu$$
$$= \frac{-\sigma}{\sqrt{2\pi}} \left[e^{-\frac{1}{2}(\infty)^2} + e^{-\frac{1}{2}(-\infty)^2} \right] + \mu$$
$$= 0 + \mu$$
$$Ex = \mu$$

4-5-4: التباين :

$$v(x) = Ex^2 - (Ex)^2$$

$$Ex^2 = \int_x x^2 f(x)dx$$

$$= \int_x x^2 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx \qquad ; -\infty \le x \le \infty$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx$$

نفرض أن :

$$w = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

$$w\sigma = x - \mu$$

$$x = w\sigma + \mu$$

$$dx = \sigma\, dw$$

ننقل المدى عند $x = \infty$

$$w = \frac{\infty - \mu}{\sigma} = \infty$$

عند $x = -\infty$

$$w = \frac{-\infty - \mu}{\sigma} = -\infty$$

$$=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(w\sigma+\mu)^2 e^{-\frac{1}{2}w^2}\sigma dw$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}(w^2\sigma^2+2\mu w\sigma+\mu^2)e^{-\frac{1}{2}w^2}dw$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}w^2e^{-\frac{1}{2}w^2}dw+2\frac{\mu\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}we^{-\frac{1}{2}w^2}dw+\frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-\frac{1}{2}w^2}dw$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}w^2e^{-\frac{1}{2}w^2}dw+2\frac{\mu\sigma}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}we^{-\frac{1}{2}w^2}dw+\frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2\pi}$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}w^2e^{-\frac{1}{2}w^2}dw+2\frac{\mu\sigma}{\sqrt{2\pi}}\left[e^{-\frac{1}{2}w^2}\Big|_{-\infty}^{\infty}\right]+\mu^2$$

$$=\frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}w^2e^{-\frac{1}{2}w^2}dw+0+\mu^2 \qquad (*)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}w.we^{-\frac{1}{2}w^2}$$

نكامل بالتجزئة :

$$u = w \qquad du = dw$$

$$dv = w\, e^{-\frac{1}{2}w^2} \qquad v = -e^{-\frac{1}{2}w^2}$$

$$\int u\,dv = uv - \int v\,du$$

$$= \left(-we^{-\frac{1}{2}w^2} \Big|_{-\infty}^{\infty} \right) - \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-\frac{1}{2}w^2} dw$$

$$= \left(-(\infty)e^{-\frac{1}{2}(\infty)^2} + (\infty)e^{-\frac{1}{2}(-\infty)^2} \right) + \int_{-\infty}^{\infty} -e^{-\frac{1}{2}w^2} dw$$

$$= 0 + \sqrt{2\pi}$$

نعوض في(*)

$$\therefore Ex^2 = \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} * \sqrt{2\pi} + \mu^2 = \sigma^2 + \mu^2$$

$$v(x) = Ex^2 - (Ex)^2$$

$$= \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$$

4-5-5: الإنحراف المعياري :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{v(x)}$$

$$\therefore \sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sigma$$

4-5-6 : الدالة المولدة للعزوم :

$$M_x(t) = E\,e^{tx} = \int_x e^{tx} f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx \qquad ;-\infty \le x \le \infty$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx$$

نفرض أن :

$$w = \frac{x-\mu}{\sigma}$$
$$w\sigma = x - \mu$$
$$x = w\sigma + \mu$$
$$dx = \sigma dw$$

ننقل المدى عند $x = \infty$

$$w = \frac{\infty - \mu}{\sigma} = \infty$$

عند $x = -\infty$

$$w = \frac{(-\infty) - \mu}{\sigma} = -\infty$$

$$-\infty \le w \le \infty$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(w\sigma+\mu)} e^{-\frac{1}{2}w^2} \sigma dw$$

$$= \frac{e^{\mu t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tw\sigma - \frac{1}{2}w^2} dw$$

$$= \frac{e^{\mu t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(w^2 - 2tw\sigma)} dw$$

للكمية داخل القويسين $\sigma^2 t^2$ بإضافة وطرح

$$= \frac{e^{\mu t}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(w^2 - 2tw\sigma + t^2\sigma^2 - t^2\sigma^2)} dw$$

$$= \frac{e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(w - t\sigma)^2} dw$$

نفرض أن :

$$z = w - t\sigma$$

$$w = z + t\sigma \qquad dw = dz$$

ننقل المدى عند $w = \infty$

$$z = \infty - t\sigma = \infty$$

$$w = -\infty$$

$$z = -\infty - t\sigma = -\infty$$

$$-\infty \le z \le \infty$$

$$\frac{e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2} dz = \sqrt{2\pi}$$

$$M_x(t) = \frac{e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}} * \sqrt{2\pi}$$

$$M_x(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}$$

7 -4-5: الدالة المميزة :

$$\phi(it) = E\,e^{itx} = \int_x e^{itx} f(x)dx$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx \qquad ; -\infty \le x \le \infty$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx$$

نفرض أن:

$$w = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

$$w\sigma = x - \mu$$

$$x = w\sigma + \mu$$

$$dx = \sigma\, dw$$

ننقل المدى عند $x = \infty$

$$w = \frac{\infty - \mu}{\sigma} = \infty$$

$x = -\infty$

$$w = \frac{(-\infty) - \mu}{\sigma} = -\infty$$

$$-\infty \le w \le \infty$$

$$= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{it(w\sigma+\mu)} e^{-\frac{1}{2}w^2} \sigma\, dw$$

$$= \frac{e^{\mu it}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{itw\sigma - \frac{1}{2}w^2} dw$$

$$= \frac{e^{\mu it}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(w^2 - 2itw\sigma)} dw$$

بإضافة وطرح $\sigma^2(it)^2$ للكمية داخل القويسين

$$=\frac{e^{\mu it}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(w^2-2itw\sigma+(it)^2\sigma^2-(it)^2\sigma^2)}dw$$

$$=\frac{e^{\mu it+\frac{1}{2}(it)^2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(w-it\sigma)^2}dw$$

نفرض أن :

$$z=w-it\sigma$$

$$w=z+it\sigma \qquad dw=dz$$

ننقل المدى عند $w=\infty$

$$z=-\infty-t\sigma=-\infty$$

$$-\infty\le z\le\infty$$

$$\frac{e^{\mu it+\frac{1}{2}(it)^2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2}dz$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}z^2}dz=\sqrt{2\pi}$$

$$\phi(it)=\frac{e^{\mu i+\frac{1}{2}(it)^2\sigma^2}}{\sqrt{2\pi}}*\sqrt{2\pi}=e^{\mu it+\frac{1}{2}(it)^2\sigma^2}$$

$$\phi(it)=e^{\mu it+\frac{1}{2}t^2\sigma^2}$$

4-5-8: معامل الإلتواء :

$$\gamma_3 = \frac{\mu_3}{\sigma}$$

$$\mu_3 = \int_x (x-\mu)^3 f(x)dx$$

$$= \int_x (x^3 - 3\mu x^2 + 3\mu^2 x - \mu^3) f(x)dx$$

$$= \int_x x^3 dx - 3\mu \int_x x^2 dx + 3\mu^2 \int_x x dx - \mu^3 \int_x f(x)dx$$

$$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_1'\mu_2' + 3\mu_1'^3 - 2\mu_1'^3$$

$$= \mu_3' - 3\mu_1'\mu_2' + 2\mu_1'^3$$

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

$$\mu_3' = \frac{d^3\mu_x(t)}{dt^3}$$

$$\mu_3' = \frac{d^3}{dt^3} e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}$$

$$= \left(\mu + \sigma^2 t\right) e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}$$

$$\frac{d\mu_x(t)}{dt} = \mu e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2} + \sigma^2 t e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}$$

$$\mu\left(\mu + t\sigma^2\right) e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2} + \sigma^2 t\left(\mu + t\sigma^2\right) e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2} + e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}\sigma^2$$

$$\frac{d^2\mu_x(t)}{dt^2} = \mu^2 e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2} + t\sigma^2 e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2} + \sigma^2 t\mu e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2} + t^2\sigma^4 e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2} + \sigma^2 e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}$$

$$\frac{d^3\mu_x(t)}{dt^3} = \mu^2\left(\mu + t\sigma^2\right) e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2} + 2t\sigma^2\mu\left(\mu + \sigma^2 t\right) e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2} + 2\sigma^2\mu e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}$$

$$+ t^2\sigma^4\left(\mu + t\sigma^2\right) e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2} + e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2} t^2\sigma^4 + \sigma^2\left(\mu + t\sigma^2\right) e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}$$

$t=0$

$$\mu_3' = \mu^3 + 3\sigma^2\mu$$

$$\mu_2' = \mu^2 + \sigma^2$$

$$\mu_1' = \mu$$

$$\mu_3 = \mu_3' - 3\mu_1'\mu_2' + 2\mu_1'^3$$

$$\mu_3 = \mu^3 + 3\mu\sigma^2 - 3\mu(\mu^2 + \sigma^2) + 2\mu^3$$

$$\mu_3 = \mu^3 + 3\mu\sigma^2 - 3\mu^3 - 3\mu^3\sigma^2 + 2\mu^3 = 0$$

$$\gamma_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3} = 0$$

4-5-9:معامل التفرطح :

$$\mu_3' = \mu^3 e^{\mu t+\frac{1}{2}t^2\sigma^2} + 3\mu^2\sigma^2 t e^{\mu t+\frac{1}{2}t^2\sigma^2} + 3\mu^2\sigma^4 t^2 e^{\mu t+\frac{1}{2}t^2\sigma^2}$$

$$+ t^3\sigma^6 e^{\mu t+\frac{1}{2}t^2\sigma^2} + 3t\sigma^4 e^{\mu t+\frac{1}{2}t^2\sigma^2} + 3\sigma^2\mu e^{\mu t+\frac{1}{2}t^2\sigma^2}$$

$$\mu_4' = \frac{d^4\mu_x'(t)}{dt^4}$$

$$\frac{d}{dt}\left[\begin{array}{l} \mu^3 e^{\mu t+\frac{1}{2}t^2\sigma^2} + 3\mu^2\sigma^2 t e^{\mu t+\frac{1}{2}t^2\sigma^2} + 3\mu^3\sigma^4 e^{\mu t+\frac{1}{2}t^2\sigma^2} + t^3\sigma^6 e^{\mu t+\frac{1}{2}t^2\sigma^2} \\ +3t\sigma^4 e^{\mu t+\frac{1}{2}t^2\sigma^2} + 3\sigma^2\mu e^{\mu t+\frac{1}{2}t^2\sigma^2} \end{array}\right]$$

$$\mu_4' = \mu^3\left[\mu + \sigma^2 t\right]e^{\mu t+\frac{1}{2}t^2\sigma^2} + 3\mu^2\sigma^2 t\left[\mu + t\sigma^2\right]e^{\mu t+\frac{1}{2}t^2\sigma^2}$$

$$+e^{\mu t+\frac{1}{2}t^2\sigma^2} 3\mu^2\sigma^2 + 3\mu\sigma^4 t^2\left[\mu + t\sigma^2\right]e^{\mu t+\frac{1}{2}t^2\sigma^2} + e^{\mu t+\frac{1}{2}t^2\sigma^2}\sigma\mu\sigma^4 t + t^3\sigma^6\left[\mu + t\sigma^2\right]e^{\mu t+\frac{1}{2}t^2\sigma^2}$$

$$+e^{\mu t+\frac{1}{2}t^2\sigma^2} 3\sigma^6 t^2 + 3t\sigma^4\left[\mu + t\sigma^2\right]e^{\mu t+\frac{1}{2}t^2\sigma^2} + e^{\mu t+\frac{1}{2}t^2\sigma^2} 3\sigma^4 + 3\sigma^4\mu\left[\mu + t\sigma^2\right]e^{\mu t+\frac{1}{2}t^2\sigma^2}$$

$$t = 0$$

$$\mu_4' = \mu^4 + 3\mu^2\sigma^2 + 3\sigma^4 + 3\sigma^2\mu^2$$

$$\mu_4' = \mu^4 + 3\sigma\mu^2\sigma^2 + 3\sigma^4$$

$$\mu_4' = \mu^4 - 4\mu_1'\mu_3' + 6\mu_1'^2\mu_2' - 3\mu_1^4$$

$$\mu_4' = \mu^4 + 6\mu^2\sigma^2 + 3\sigma^4 - 4\mu\left[\mu^{3.} + 3\sigma^2\mu\right]$$

$$+6\mu^2\left[\mu^2 + t\sigma^2\right] - 3\mu^4$$

$$\mu_4' = \mu^4 + 6\mu^2\sigma^2 + 3\sigma^4 - 4\mu^4 - 12\mu^2\sigma^2 + 6\mu^4 + \frac{6\mu^2}{\sigma^2} - 3\mu^4$$

$$\mu^4 = 3\sigma^4$$

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

$$\alpha_4 = \frac{3\sigma^4}{\sigma^4} = 3$$

4-6: التوزيع الطبيعي المعياري Standard Normal distribution:

حيث يقصد بكلمة قياسي هنا إن متوسط التوزيع يساوي صفر والتباين يساوي واحد وعادة يرمز للمتغير العشوائي الذي يتوزع توزيع طبيعي قياسي بالرمز Z أن :

$$z = \frac{x - \mu}{\sigma}$$

وهذه تسمى بالدرجة القياسية

4-6-1: دالة كثافة الإحتمال :

إن التعامل مع دالة كثافة الإحتمال وخاصة عند إيجاد الدالة x موجودة في دالة التوزيع الطبيعي يكون صعبا التراكمية وحساب الإحتمالات والسبب في ذلك إن المدى سوف يتغير لذلك من الصعوبه إيجاد نتيجة التكامل عليه 21.

$$f(x) = \int_x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}z^2} \qquad -\infty \leq z \leq \infty$$

4-5-2: الوسط :

$$\mathrm{E}(z) = \mathrm{E}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

$$= \mathrm{E}\left(\frac{x}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma}\right) = \frac{\mathrm{E}x}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma}$$

$$x \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\mathrm{E}x = \mu$$

$$\mathrm{E}(z) = \frac{1}{\sigma}(\mu - \mu) = 0$$

4-6-3: التباين :

$$v(z) = v\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) = v\left(\frac{x}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma}\right)$$
$$= v\left(\frac{x}{\sigma}\right) - v\left(\frac{\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2} v(x)$$
$$x \sim N(\mu, \sigma^2)$$
$$v(x) = \sigma^2$$
$$v(z) = \frac{1}{\sigma^2}\sigma^2 = 1$$

4-6-4: الإنحراف المعياري :

$$\sigma = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{v(z)}$$
$$\sigma = \sqrt{1} = 1$$

4-6-5: معامل الإلتواء :

عند مقارنة التوززيع الطبيعي القياسي مع التوزيع الطبيعي نجد أن معامل الإلتواء يساوي :

$$\alpha_3 = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$
$$x \sim N(\mu, \sigma^2)$$
$$\mu_3 = 0$$
$$z \sim N(0,1)$$
$$\mu_3 = 0$$
$$\alpha_3 = \frac{0}{\sigma^3} = 0$$

4-6-6: معامل التفرطح :

عند المقارنة بالتوزيع الطبيعي نجد أن :

$$\alpha_4 = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$$

$$x \sim N(\mu, \sigma^2)$$

$$\mu_4 = 3\sigma^4$$

$$z \sim N(0,1)$$

$$\mu_4 = 3$$

$$\sigma = 1$$

$$\alpha_4 = \frac{3}{(1)^4} = 3$$

4-6-7: الدالة المولدة للعزوم :

عند المقارنة بالتوزيع الطبيعي نجد أن :

$$M_x(t) = e^{\mu t + \frac{1}{2}t^2\sigma^2}$$

$$\mu = 0$$

$$M_x(t) = e^{\frac{1}{2}t^2\sigma^2}$$

الفصل الخامس

أمثلة تطبيقية للخواص الإحصائية في التوزيعات الإحتمالية

5-1:توزيع برنولي :

أفرض أن

$X \sim Ber(0.6)$

$p(x;0.6) = (0.6)^x .(0.4)^{1-x} \qquad ; x = 0,1$

دالة الإحتمال:

$P(x) = p(1-p)^{1-x} \qquad ; x = 0,1$

الوسط:

$\mathrm{E}x = p = 0.6$

التباين:

$v(x) = pq$
$v(x) = (0.4)(0.6) = 0.24$

الإنحراف المعياري :

$\sigma = \sqrt{pq}$
$\sigma = \sqrt{(0.6)(0.4)}$
$\sigma = \sqrt{0.24}$
$\sigma = 0.48$

الدالة المولدة للعزوم :

$M_x(t) = q + pe^t$
$M_x(t) = 0.6 + 0.4e^t$

الدالة المميزة :

$$\phi(it) = q + e^{it} p$$
$$\phi(it) = 0.6 + e^{it} 0.4$$

معامل الإلتواء :

$$\gamma_3 = \frac{q^2 - p^2}{\sqrt{pq}}$$
$$\gamma_3 = \frac{0.4^2 - 0.6^2}{\sqrt{(0.6)(0.4)}}$$
$$\gamma_3 = \frac{-0.2}{\sqrt{0.24}}$$
$$\gamma_3 = -0.4$$

معامل التفرطح :

$$\gamma_4 = \frac{q^3 - p^3}{pq}$$
$$\gamma_4 = \frac{0.4^3 - 0.6^3}{(0.4)(0.6)}$$
$$\gamma_4 = -63$$

2-5: توزيع ذي الحدين :

أفرض أن

$$x \sim b\left(8, \frac{1}{4}\right)$$

دالة كتلة الإحتمال :

$$p(x) = C_x^n p^x q^{n-x}$$
$$p(x) = C_x^8 \left(\frac{1}{4}\right)^x \left(\frac{3}{4}\right)^{8-x}$$
$$x = 1, 2, \ldots, 8$$

الدالة المولدة للعزوم:

$$M_x(t) = \left(pe^t + q\right)^n$$
$$= \left(0.3e^t + 0.7\right)^n$$

الدالة المميزة :

$$\phi(it) = \left(pe^{it} + q\right)^n$$
$$\phi(it) = \left(0.25e^{it} + 0.75\right)^n$$

الوسط :

$$\mathrm{E}x = np$$
$$\mathrm{E}x = 8\left(\frac{1}{4}\right) = 2$$

التباين:

$$v(x) = npq$$
$$v(x) = 8\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right) = 1.5$$

الإنحراف المعياري :

$$\sigma = \sqrt{npq}$$
$$= \sqrt{1.5} = 1.22$$

معامل الإلتواء :

$$\gamma_3 = \frac{\frac{3}{4} - \frac{1}{4}}{\sqrt{8\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{4}\right)}}$$
$$\gamma_3 = 0.4$$

معامل التفرطح :

$$\gamma_4 = 3 + \frac{1 - 6pq}{npq}$$
$$\gamma_4 = 3 + \frac{1 - 6\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)}{8\left(\frac{1}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)} = 2.99$$

5-3: ذي الحدين السالب :

أفرض أن

$$x \sim Nb(7, 0.5)$$

دالة كتلة الأحتمال :

$$p(x) = C_{r-1}^{x+r-1} p^r q^x \qquad x = 0,1,2,\ldots$$

الدالة المولدة للعزوم :

$$M_x(t) = p^r \sum_{x=0}^{\infty} C_x^{-r} (-qe^t)^x$$

$$= 0.3^r \sum_{x=0}^{\infty} C_x^{-4} (-0.7e^t)^x$$

الدالة المميزة :

$$\phi(it) = p^r \sum_{x=0}^{\infty} C_x^{-r} \left(-qe^{it}\right)^x$$

$$= p^3 \sum_{x=0}^{\infty} C_x^{-4} \left(-qe^{it}\right)^x$$

الوسط :

$$\mu = \frac{rq}{p}$$

$$\mu = \frac{4(0.7)}{0.3} = 9.3$$

التباين :

$$\sigma^2 = \frac{rq}{p^2}$$

$$\sigma^2 = \frac{4(.7)}{0.3^2} = 31.3$$

معامل الإلتواء :

$$\gamma_3 = \frac{2-p}{\sqrt{rq}}$$

$$\gamma_3 = \frac{2-0.3}{\sqrt{4(.7)}}$$

معامل التفرطح :

$$\gamma_4 = 3 + \frac{4}{r} + \frac{1+q^2}{rq}$$

$$\gamma_4 = 3 + \frac{4}{4} + \frac{1+.7^2}{4(.7)}$$

$$\gamma_4 = 4.49$$

5-4: التوزيع فوق الهندسي :

أفرض أن

$$x \sim H(9,4,5)$$

دالة كتلة الإحتمال:

$$p(x) = \frac{C_x^M C_{n-x}^{N-M}}{C_n^N} \qquad ; x = 0,1,2,.....,n$$

$$p(x) = \frac{C_x^9 C_{5-x}^{4-9}}{C_5^4}$$

$$p(x) = \frac{C_x^9 C_{5-x}^{5}}{C_5^4}$$

الوسط :

$$\mathrm{E}x = \frac{Mn}{N}$$

$$\mathrm{E}x = \frac{4*5}{9} = 2.2$$

التباين :

$$v(x) = \frac{nM\,(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}$$

$$v(x) = \frac{5(4)(9-4)(9-5)}{4^2(4-1)} = 8.3$$

الإنحراف المعياري :

$$\sigma = \sqrt{\frac{nM\,(N-M)(N-n)}{N^2(N-1)}}$$

$$\sigma\sqrt{8.3} = 2.88$$

معامل الإلتواء :

$$\gamma_3 = \frac{(N-2M)(N-2n)\sqrt{(N-1)}}{(N-2)\sqrt{nM(N-M)(N-n)}}$$

$$\gamma_3 = \frac{(9-2*4)(9-2*5)\sqrt{(9-1)}}{(9-2)\sqrt{5*4(9-4)(9-5)}}$$

$$= -8.08$$

معامل التفرطح :

$$\lambda_4 = \left(\frac{N^2(N-1)}{nM(N-D)(N-2)(N-3)(N-n)}\right)$$

$$*\left(\frac{3nM(N-M)(6-n)}{N} + N(N+1-6n) + 6n^2 + 3M(N-M)(n-2) - \frac{18n^2M(N-M)}{N^2}\right)$$

$$\lambda_4 = \left(\frac{9^2(9-1)}{5*9(9-4)(9-2)(9-3)(9-5)}\right)$$

$$*\left(\frac{3*5*4(9-4)(6-5)}{9} + 9(9+1-6*5) + 6*5^2 + 3*5(9-4)(5-2) - \frac{18*5^2*4(9-4)}{9^2}\right)$$

$$\lambda_4 = 0.22$$

5-5: توزيع بواسون :

أفرض أن

$$X \sim PO(8)$$

دالة كتلة الإحتمال :

$$p(x)=\frac{e^{-\lambda}\lambda^{x}}{x!} \qquad x=0,1,2,....$$

$$p(x)=\frac{e^{-8}8^{x}}{x!} \qquad x=0,1,2,....$$

الدالة المولدة للعزوم :

$$M(t)=e^{-\lambda(1-e^{t})}$$
$$=e^{-8(1-e^{t})}$$

الدالة المميزة :

$$\phi(it)=e^{-\lambda(1-e^{it})}$$

$$\phi(it)=e^{-8(1-e^{it})}$$

الوسط :

$$\mathrm{E}\ x = \lambda$$
$$\mathrm{E}\ x = 8$$

التباين :

$$v(x)=\lambda$$
$$v(x)=8$$

معامل الإلتواء :

$$\gamma_3 = \frac{1}{\lambda}$$

$$\gamma_3 = \frac{1}{8} = 0.125$$

معامل التفرطح :

$$\gamma_4 = 3 + \frac{1}{\lambda}$$

$$\gamma_4 = 3 + \frac{1}{8}$$

$$= 3.125$$

5-6: التوزيع جاما :

أفرض أن

$$x \sim g(2,3)$$

دالة كتلة الإحتمال :

$$f(x) = \frac{\beta^{\alpha}}{\Gamma\alpha} e^{-x\beta}\ x^{\alpha-1}$$

$$f(x) = \frac{3^{2}}{\Gamma 2} e^{-x3}\ x^{2-1}$$

$$f(x) = \frac{9}{\Gamma 2} e^{-x3}\ x$$

الدالة المولدة للعزوم :

$$M_x(t) = \left(\frac{\beta}{\beta - t}\right)^{\alpha}$$

$$= \left(\frac{3}{3-t}\right)^{2}$$

الدالة المميزة:

$$\phi(it) = \left(\frac{\beta}{\beta - it}\right)^{\alpha}$$

$$\phi(it) = \left(\frac{3}{3 - it}\right)^{2}$$

الوسط :

$$E(x) = \frac{\alpha}{\beta}$$

$$E(x) = \frac{2}{3} = 0.67$$

التباين :

$$V(x)=\frac{\alpha}{\beta^{2}}$$
$$V(x)=\frac{2}{3^{2}}=0.22$$

الإنحراف المعياري :

$$\sigma=\frac{\sqrt{\alpha}}{\beta}$$
$$\sigma=\frac{\sqrt{2}}{3}=0.47$$

معامل الإلتواء :

$$\gamma_3=\frac{2}{\sqrt{\alpha}}$$
$$\gamma_3=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

معامل التفرطح :

$$\gamma_4=\frac{3(\alpha+2)}{\alpha}$$
$$\gamma_4=\frac{3(2+2)}{2}=6$$

7-5: التوزيع الطبيعي :

$x \sim N\,(3,4)$

دالة كتلة الإحتمال :

$$f\,(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2} \qquad ;-\infty \le x \le \infty$$

$$f\,(x)=\frac{1}{4\sqrt{2\pi}}e^{\frac{1}{2}\left(\frac{x-3}{4}\right)^2}$$

الدالة المولدة للعزوم :

$$M_x(t)=e^{\mu t+\frac{1}{2}t^2\sigma^2}$$

$$M_x(t)=e^{3t+\frac{1}{2}t^2\,4^2}$$

$$M_x(t)=e^{3t+t^2 8}$$

الدالة المميزة :

$$\phi\,(it)\,=\,e^{\mu\,it+\frac{1}{2}t^2\sigma^2}$$

$$\phi\,(it)\,=\,e^{3\,it+\frac{1}{2}t^2\,4^2}$$

$$\phi\,(it)\,=\,e^{\mu\,it+t^2\,8}$$

الوسط :

$\mu=3$

التباين :

$v(x)=\sigma^2 \qquad v(x)=4$

الإنحراف المعياري :

$$\sigma^2 = \sqrt{\sigma^2} = \sqrt{4} = 2$$

5-8: توزيع بيتا :

أفرض أن

$$x \sim beta(3,4)$$

دالة كتلة الإحتمال :

$$f(x) = \frac{1}{\beta(\alpha_1, \alpha_2)} x^{\alpha_1 - 1}(1-x)^{\alpha_2 - 1}$$

$$f(x) = \frac{1}{\beta(3,4)} x^{3-1}(1-x)^{4-1}$$

$$f(x) = \frac{1}{\beta(3,4)} x^{2}(1-x)^{3}$$

$$f(x) = \frac{x^2 - x^3}{\beta(3,4)}$$

الوسط :

$$Ex = \frac{\alpha_1}{\alpha_1 + \alpha_2}$$

$$Ex = \frac{3}{3+4}$$

$$Ex = 0.4$$

التباين :

$$v(x) = \frac{\alpha_1 \alpha_2}{(\alpha_1 + \alpha_2 + 1)(\alpha_1 + \alpha_2)^2}$$

$$v(x) = \frac{3*4}{(3+4+1)(3+4)^2}$$

$$v(x) = 0.03$$

الإنحراف المعياري :

$$\sigma = \sqrt{\frac{\alpha_1\alpha_2}{(\alpha_1+\alpha_2+1)(\alpha_1+\alpha_2)^2}}$$

$$= \sqrt{0.03}$$

$$= 0.173$$

معامل الإلتواء :

$$\gamma_3 = \frac{2(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_1+\alpha_2+1)^{\frac{1}{2}}}{(\alpha_1+\alpha_2+2)\left(\alpha_1\alpha_2\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\gamma_3 = \frac{2(4-3)(3+4+1)^{\frac{1}{2}}}{(3+4+2)\left(3*4\right)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\gamma_3 = 2.177$$

معامل التفرطح :

$$\gamma_4 = \frac{3(\alpha_1+\alpha_2+2)\left(2(\alpha_1+\alpha_2)^2+\alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2-6\right)}{\alpha_1\alpha_2(\alpha_1+\alpha_2+2)(\alpha_1+\alpha_2+3)}$$

$$\gamma_4 = \frac{3(3+4+2)\left(2(3+4)^2+3*4(3_1+4-6\right)}{3*4(3+4+2)(3+4+3)}$$

5-9: التوزيع الأسي :

أفرض أن

$x \sim Exp(6)$

دالة كثافة الإحتمال :

$$f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$$
$$f(x) = 6e^{-6x}$$

$$; 0 \leq x \leq \infty$$

الدالة المولدة للعزوم :

$$M_x(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t}$$
$$M_x(t) = \frac{6}{6 - t}$$

الوسط :

$$E(x) = \frac{1}{\lambda}$$
$$E(x) = \frac{1}{6}$$

التباين :

$$v(x) = \frac{1}{\lambda^2}$$
$$v(x) = \frac{1}{6^2}$$
$$v(x) = \frac{1}{6^2} = 0.02$$

الإنحراف المعياري :

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{\lambda^2}}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{6^2}} = 0.16$$

الدالة المميزة :

$$\phi(it) = \frac{\lambda}{\lambda - it}$$

$$\phi(it) = \frac{6}{6 - it}$$

معامل الالتواء

$$\gamma_3 = 2$$

5-10 : التوزيع الهندسي :

أفرض أن

$$x \sim g(8)$$

دالة كثافة الإحتمال :

$$p(x) = pq^{x-1}$$
$$p(x) = 0.6(1-0.6)^{x-1}$$
$$x = 1, 2, 3......n$$

الدالة المولدة للعزوم :

$$M_x(t) = \frac{pe^t}{1-e^t q}$$
$$M_x(t) = \frac{0.6e^t}{1-e^t 0.4}$$

الدالة المميزة :

$$\phi(it) = \frac{pe^{it}}{1-e^{it} q}$$
$$\phi(it) = \frac{0.6e^{it}}{1-e^{it} 0.4}$$

الوسط :

$$\mathrm{E}\, x = \frac{1}{p}$$
$$\mathrm{E}\, x = \frac{1}{0.6}$$

التباين :

$$v(x) = \frac{q}{p^2}$$

$$\sigma = \frac{0.4}{0.6^2} = 1.1$$

الإنحراف المعياري :

$$\sigma = \frac{\sqrt{q}}{p}$$

$$\sigma = \frac{\sqrt{0.4}}{0.6} = 1.05$$

معامل الإلتواء :

$$\gamma_3 = \frac{q+1}{\sqrt{q}}$$

$$\gamma_3 = \frac{0.4+1}{\sqrt{0.4}} = 2.21$$

معامل التفرطح :

$$\gamma_4 = 7 + \frac{1+q^2}{q}$$

$$\gamma_4 = 7 + \frac{1+0.4^2}{0.4} = 9.9$$

النتائج :

1. تم التوصل إلي إشتقاق الخواص الإحصائة للتوزيعات الإحتمالية مع الإثبات .
2. التوزيعات الإحتمالية المتقطعة أسهل في إثباتها وإشتقاقها من التوزيعات الإحتمالية المستمرة.
3. إشتقاق معامل الإلتواء والتفرطح تعتمد بصورة أساسية علي العزوم جول الوسط والتي بدورها تعتمد في إشتقاقها علي العزوم حول الصفر.
4. إشتقاق العزوم يساعد ففي إيجاد الخواص الإحصائية كالوسط الحسابي والتباين .

التوصيات :

1. وضع هذا البحث في الجهات المختصة لإستفادة الباحثين منه .
2. عمل دراسة لاحقة لإشتثاق باقي التوزيعات الإحتمالية .
3. توجد صعوبة في إشتقاق معامل التفرطح للتوزيع المنتظم المتقطع لعدم معرفة العزم الرابع حول الصفر لهذا التوزيع .
4. الإهتمام بإشتقاق العزوم حول الصفر (من العزم الأول حتي العزم الرابع) حتي يسهل من عملية الإشتقاق حول الوسط.
5. يجب ايجاد العزم من الرتبة (r) ومن ثم يتم عن طريقها إشتقاق باقي العزوم .

المراجع :

حنا ،أمير ،هيرمز،الاحصاء الرياضي ، 1990 ،جامعة الموصل_الموصل