الفصل الاول :

خطه البحث (الاطار العام)

الفصل الأول:

(1-1) مقدمة:-

معادلتا كوشي- ريمان التفاضلية في التحليل المركب تنسب الي عالم الرياضيات أوغستين لوي كوشي وعالم الرياضيات برنارد - ريمان وتكون معادلتا كوشي ريمان لدالتين قيمهما حقيقيتان لكل واحدة منهما متغيران اثنان $v(x,y),u(x,y)$ هما المعادلتان التاليتان :

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \quad (1$$

$$2¿\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-\partial v}{\partial x}$$

ليكن $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ دالة لمتغير مركب وهي قابلة للاشتقاق عند النقطة z_0 ومن الطبيعي أن نبحث عن صيغ لحساب $f(z)$ بدلالة المشتقات الجزئية $v(x,y),u(x,y)$ ولدراسة ذلك نجد ان الصيغة المطلوبة تحقق الشروط التي تربط المشتقات الجزئية v,u التي اكتشفها العالم الفرنسي كوش والعالم الألماني ريمان بتدقيق أكثر اعتماد النهاية على المسار اثبت كوش ومعه ريمان هذه النظرية الشهيرة وهي التميز الأكبر في باب الاشتقاق الدوال المركبة عنها الدوال الحقيقة إذ لا يوجد نظرية مماثلة في هذا الفراغ 0بالنظر إلى مفكوك لورانت الدالة $f(z)$

$$f(z)=\sum_{n\to\infty}^{\infty} a_{n(z-a)^n}$$

حيث $f(z)$ دالة تحليلية على وداخل الدائرة C إلا عند النقطة $z=a$ والتي هي مركز الدائرة أيضاً وحيث

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz, n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$$

فإذا أردنا ايجاد $\oint f(z)dz$ فإن الجزء التحليلي من المفكوك يعطي صفراً أما الجزء الأساسي فيعطي تكاملات على صورة

$$\oint \frac{dz}{(z-a)^m} = \begin{bmatrix} 2\pi i & m=1 \\ 0 & m\neq 1 \end{bmatrix}$$

أي لا ينبغي من هذه التكاملات إلا التكامل $\oint \frac{dz}{(z-a)}$ وهو الخاص بالمعامل a_{-1}

ولذلك ومن وجهة نظر التكامل $\oint f(z)\,dz$ فإن a_{-1} هي المعامل الباقي الوحيد في الحسابات $\cdots\cdots\cdots$ ولذلك يسمى بالباقي residue ويكون التكامل كالاتي :

$$\oint f(z)\,dz = 2\pi i\, a_{-1}$$

ويظهر لنا أهمية ايجاد مفكوك لورانت للدالة $f(z)$ بغض النظر عن نوع النقطة الشاذة $z=a$ فبعد ايجاد المفكوك يلعب الباقي a_{-1} دورا هاما ومحوريا في ايجاد قيمة التكامل $\oint f(z)\,dz$

فإذا كان الشذوذ من النوع القطبي فقط أي أن $z=a$ قطب من رتبة m فإن مفكوك لورانت حول النقطة $z=a$ يعطي بالصورة .

$$f(z) = \underbrace{\frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \cdots\cdots + \frac{a_{-1}}{(z-a)}}_{\text{بالجزءالا ساسى}} + a_0 + a_1(z-a) + \cdots\cdots$$

وهذا شيء أشرنا إليه سابقاً ان عدد الحدود التي تظهر في الجزء الأساسي تساوي رتبة هذا القطب والان بالضرب في $(z-a)^m$ فإن

$$(z-a)^m f(z) = a_{-m} + a_{-(m-1)}(z-a) + a_{-1}(z-a)^{m-1} + a_0(z-a)^m \cdots \rightarrow \quad (1)$$

وهي تمثل مفكوك تايلور للدالة التحليلية $(z-a)^m f(z)$ حول النقطة $z=a$

ويتفاضل العلاقة (1) $(m-1)$ مرة فإننا سنحصل على

$$\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-a)^m f(z) = (m-1)\,a_{-1} + m(m-1)\ldots\ldots + 2a_0(z-a) + \ldots$$

وعند أخذ النهاية $z \rightarrow a$ فان $\boxed{}$ $\boxed{}$

$$z-a$$
¿
$$(¿¿m f(z))$$
¿
$$d^{m-1}¿$$
¿
$$\lim_{z \to a} ¿$$

أي أن في حالة وجود قطب عند $z=a$ من رتبة m

فإن

$$a_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z \to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-a)^m f(z)$$

(1-2) مشكلة ا لبحث *:-*

تنبع مشكلة البحث من حيث أن معادلتي كوشي - ريمان ونظرياتها لها أهمية في التحليل المركب حيث أنها تعتبر من أعظم فروع الرياضيات وبالرغم من أهمية هذه النظرية في حل كثير من المسائل وفي المجالات الأخرى وهذا ما يسبب لنا أهمية المعادلتان ونظرياتها والتعمق فيها أما بالنسبة لمشكلة البحث من حيث نظرية البواقي وما يتعلق بهما ايجاد حل تكامل الدوال المركبة التي يصعب تكامل كوشي ايجاد حلها .

(1-3) أهمية البحث :-

من خلال دراستنا لمقرر التحليل المركب استشعرنا أهمية أن معادلتي كوشي - ريمان ونظرياتها أهمية قصوى حيث أنها تدخل في حل المسائل الفيزيائية والمجالات الأخرى لذلك يجب أهمية التطرق لها وكذلك نظرية البواقي لها أهمية في تكامل الدوال المركبة التي يجب النظر إليها وأهمية كوشي ريمان في معرفة أن الدالة تحليلية أم لا.

(1-4) اهداف البحث :-

يجب التعرف على اهمية معادلتي كوشي وريمان ونظرياتها

استنتاج التعرف على أهمية النظرية البواقي في التحليل المركب

تركيب التعرف على اهمية متسلسلات تايلور في التحليل المركب
التعرف على تطبيقات كوشي ريمان في النتائج المتحصل عليها

(1-5) أسئلة البحث :-

- لمعادلتي كوشي ريمان ونظرياتها دور في حل مسائل التكامل المعقدة
- نظرية البواقي لها دور في حل مسائل التكامل التي يصعب صيغة تكامل كوشي في حلها
- ما هي العلاقة بين نظرية الباقي والمتسلسلات .

(1-6) منهج البحث :-

المنهج الوصفي

(1-7) مصطلحات البحث:-

- المتسلسلة اللانهائية : هي المتسلسلة التي توجد فيها مشاكل في مجموعها فإذا كان محدداً فهي متقاربة وإذا كان غير محدود (لا نهائي) فهي متباعدة .
- النقاط الشاذة :هي النقاط التي يكون عنها الدالة $f(z)$ غير تحليلية
- الاقطاب :هي البواقي للدالة $f(z)$ عند نقطة محدودة .
- المتبقي: في حالة وجود قطب عند $z=a$ من الرتبة m فإن

$$a_{-1}=\frac{1}{(m-1)!}\lim_{z\to a}\frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}}(z-a)^m f(z)$$

الفصل الثاني:-

* معادلتي كوشي-ريمان ونظرياتها في تكامل الدوال المركبة :-

(2-1) مقدمة :-

ليكن $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ دالة لمتغير مركب وهي قابلة للاشتقاق عند النقطة z_0 ومن الطبيعي أن تبحث عن صيغة لحساب $\acute{f}(z)$ بدلالة المشتقة الجزئية $u(x,y),v(x,y)$ ولدراسة هذه الفكرة فإنه يسهل أن نجد الصيغة المطلوبة وكذلك الشروط الخاصة التي يجب أن تحققها ومنه نكشف معادلتين هامتين قام باكتشافها العالم الفرنسي كوشي والعالم الألماني ريمان . بتدقيق أكبر في اعتماد النهاية علي المسار ...... أثبت كوشي ومعه ريمان هذة النظرية الشهيرة وهي التمييز الاكبر في باب الاشتقاق للدوال المركبة عنها للدوال الحقيقية اذ لايوجد نظرية مماثلة في هذا المقرر

(2-2) نظرية معادلتي كوشي ريمان في الصورة الكارتيزية:-

ليكن $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ قابلتان للاشتقاق عند $z_0=x_0+iy_0$

فإن المشتقات الجزئية لكل من u وv موجودتان عند النطقة (x_0,y_0) وتحقق المعادلتان

$$u_x(x_0,y_0)=v_y(x_0,y_0)$$

$$u_y(x_0,y_0)=-v_x(x_0,y_0) \rightarrow \quad (1)$$

البرهان

سوف نختار الخطين الافقي والراسي المارين بالنقطة (x_0,y_0) ونحسب $\lim \frac{\Delta W}{\Delta Z}$ علي هذين الخطين المستقيمين وبمساواة النهايات التي نحصل عليها تعطينا العلاقتين (1)

أ- عند الاقتراب الافقي للنقطة z_0 نضع $z=x_0+iy_0$ فنحصل على .

$$\acute{f}(z)=\lim_{(x,y)\rightarrow(x_0,y_0)} \frac{f(x+iy_0)-f(x_0+iy_0)}{(x+iy_0)-(x_0+iy_0)}$$

$$¿\lim_{x\to x_0}\frac{u(x,y_0)-u(x_{0,}y_0)+i\{v(x_,y_0)-v(x_{0,}y_0)\}}{x-x_0}$$

$$¿\frac{\lim_{x\to x_0} u(x,y_0)-u(x_{0,}y_0)}{x-x_0}+i\frac{\lim_{x\to x_0} v(x_,y_0)-v(x_{0,}y_0)}{x-x_0}$$

أي أن

$$\grave{f}(x_0)=u_x(x_{0,}y_0)\quad +i\,v_x(x_{0,}y_0)\rightarrow(2)$$

وهذا يعطي المشتقات الجزئية u_x, v_x

ب- عند الاقتراب الرأسي للنقطة z_0 نضع $z=x_0+iy_0$ فنحصل علي

$$\grave{f}(z)=\lim_{(x_{0,}y)\to(x_{0,}y_0)}\frac{f(x_0+iy)-f(x_0+iy_0)}{(x_0+iy)-(x_0-iy_0)}$$

$$¿\lim_{y\to y_0}\frac{u(x_{0,}y)-u(x_{0,}y_0)+i(v(x_{0,}y)-v(x_{0,}y_0))}{i(y-y_0)}$$

$$¿\frac{\lim_{y\to y_0} v(x_{0,}y)-v(x_{0,}y_0)}{y-y_0}-i\frac{\lim_{y\to y_0} u(x_{0,}y)-u(x_{0,}y_0)}{y-y_0}$$

وهذا يعطي المشتقات الجزئية v_y, u_y

$$\grave{f}(z_0)=v_y(x_{0,}y_0)-i\,u_y(x_{0,}y_0)\rightarrow(3)$$

وحيث أن f قابلة للاشتقاق عند z_0 والنهايتان (2) , (3) متساويتان فإذا ساوينا الجزء الحقيقي والتخيلي في كل من المعادلتين نحصل على المعادلات (1).

(2-3) نظرية الشروط الكافية لمعادلتي كوشي -ريمان:-

ليكن $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ دالة متصلة ومعرفة في جوار $z_0=x_0+iy_0$ إذا كانت المشتقات الجزئية u_x,u_y,v_x,v_y متصلة عند النقطة (x_0,y_0) وإن معادلتي كوشي– ريمان متحققة عند (x_0,y_0) فإن f تكون قابلة للاشتقاق عند z_0 ويمكن حساب المشتقة من (2) أو (3) ← (4)

(2-4) نظرية معادلتي كوشي - ريمان في الصورة القطبية :-

في كثير من الحالات يكون من الأفضل استعمال الصورة القطبية للمتغير المركب وهي $z=re^{i\theta}$ وبالتالي فيجب تعديل المعادلات من (x,y) إلى (r, θ)

معادلتي كوش ريمان في الصورة القطبية هما :

$$\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\qquad \frac{\partial v}{\partial r}=-\text{¿}\quad,\quad \frac{\partial u}{\partial\theta}=\text{¿}\qquad \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}$$

البرهان

اثبات هذين المعادلتين يتم بعملية تحويل فقط المعادلات الاصلية من (x,y) إلى (r, θ) باستعمال

1

$$x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta.\ r=\sqrt{x^2+y^2}\,\theta=\tan^{-1}\frac{y}{x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\cdot\frac{\partial r}{\partial x}+\text{¿}\qquad \frac{\partial u}{\partial\theta}\quad\cdot\quad\frac{\partial\theta}{\partial x}$$

$$\text{¿}\,\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\frac{\partial u}{\partial r}-\text{¿}\qquad \frac{y}{x^2+y^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}$$

$$\theta-\text{¿}$$

$$\text{¿}\,\frac{\partial u}{\partial r}\cos\text{¿}\qquad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\sin\theta\rightarrow\ (1)$$

وكذلك:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\text{¿}\qquad \frac{\partial u}{\partial r}\ \cdot\ \frac{\partial r}{\partial y}\qquad \frac{+\partial u}{\partial\theta}\ \cdot\ \frac{\partial\theta}{\partial y}$$

$$\text{¿}\,\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\qquad \frac{\partial u}{\partial r}\qquad \frac{+x}{x^2+y^2}\frac{\partial u}{\partial\theta}$$

$$¿\frac{\partial u}{\partial r}\sin\theta \qquad \frac{+1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta}\cos\theta \rightarrow \qquad (2)$$

وكذلك :

$$\frac{\partial V}{\partial X}=¿ \qquad \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial x}+¿ \qquad \frac{\partial v}{\partial\theta} \cdot \frac{\partial\theta}{\partial x}$$

$$\theta-¿$$
$$¿\frac{\partial v}{\partial r}\sin ¿ \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}\cos\theta \rightarrow \qquad (3)$$

وكذلك

$$\frac{\partial v}{\partial y}=¿ \qquad \frac{\partial v}{\partial r} \cdot \frac{\partial r}{\partial y} \qquad \frac{+\partial v}{\partial\theta} \cdot \frac{\partial\theta}{\partial y}$$

$$¿\frac{\partial v}{\partial r}\sin\theta \qquad \frac{+1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta}\cos\theta \rightarrow \qquad (4)$$

وبالتالي فإن:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=¿ \qquad \frac{\partial v}{\partial y} \Longrightarrow \qquad \theta=¿ \quad \frac{\partial u}{\partial r}\cos\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}\sin ¿ \qquad \frac{\partial v}{\partial r}\sin\theta+¿ \qquad \frac{\partial v}{\partial\theta}\frac{1}{r} \qquad \cos\theta$$

ومن استقلال الدوال $\cos\theta$ $\sin\theta,$ فإنه لابد أن يكون

$$\frac{\partial u}{\partial r}=¿ \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial\theta} \quad , \quad \frac{\partial v}{\partial r}=-¿ \qquad \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial\theta} \rightarrow \qquad (5)$$

تطبيق (2-5):-

1-اثبت أن الدالة

$$f(z)=\frac{(z)^2}{z}=\frac{x^3-3x\,y^2}{x^2+y^2}+i\frac{y^3-3x^2y}{x^2+y^2}$$

$f(0)=0, z\neq0$ غير قابلة للاشتقاق عند $z=0$ بالرغم من تحقيقها لمعادلتي كوشي -ريمان-

الحل

$$u_x(0,0)=\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{u(x,0)-u(0,0)}{x-0}=\lim_{x\rightarrow\infty}\frac{(x^3-0)/(x^2-0)}{x}=1$$

وبنفس الطريقة يمكن اثبات أن

$$u_y(0,0)=0;\ v_x(0,0)=0;\ v_y(0,0)=1$$

وبالتالي فإن معادلتي كوشي– ريمان متحققة عند $(0,0)$ والان سوف نثبت أن f غير قابلة للاشتقاق عند $z_0=0$

(i) اذا كانت z تقترب من الصفر علي محور x فإن :

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)}\frac{f(x+0)-f(0)}{x+oi-0}=\lim_{x\to 0}\frac{x-0}{x-0}=+1$$

(ii) اذا كانت z تقترب من الصفر علي محور y فإن :

$$\lim_{(0,y)\to(0,0)}\frac{f(x+iy)-f(0)}{x+0\mathrm{i}-0}=\lim_{y\to 0}\frac{-y-iy}{y+iy}=-1$$

وحيث أن النهايتين مختلفتان فإن الدالة f غير قابلة للاشتقاق عند نقطة الأصل .

2- اثبت أن الدالة $f(z)=x^3+3xy^2+i(y^3+3x^2y)$ قابلة للاشتقاق على نقاط تقع على محاور الاحداثيات فقط

الحل :

لدينا $u(x,y)=x^3+3xy^2,\ v(x,y)=(y^3+3x^2y)$

نحسب المشتقات الجزئية :

$$u_y=6xy$$
$$u_x=3x^2+3y^2$$

$$v_y=3y^2+3x^2$$
$$v_x=6xy$$

وحيث أن u, u_x, u_y, v_x, v_y , دوال متصلة وأن $\frac{x = ¿ v_y}{u_¿}$ تتحقق لجميع قيم z

ولكن $u_{y=-v_x}$

أي أن $6xy = -6xy$ لا تتحقـــق إلا إذا كـــان $12xy = 0$ وبالتـــالي فـــإن معادلات كوشي –ريمان تتحقق عندما $y = 0, x = 0$ طبقاً لنظريـــة (2-3) فإن f قابلة للاشتقاق على نقاط تقع على محاور الإحداثيات .

3- اثبـت أنـه إذا كـانت $f(z)$ دالـة تحليليـة فـي منطقـة R فـي مستوى Z وكان $f(z) = 0$ ، و $z \in R$ فإن (ثابت) $f(z) = \alpha$

الاثبات

بما ان $f(z)$ دالة تحليلية فإن :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = ¿ \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad , \quad \frac{\partial u}{\partial Y} = -¿ \quad \frac{\partial v}{\partial x}$$

ولذلك $f'(z) = 0$ .... أي أن $\frac{\partial u}{\partial x} + i \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$

وهذا معناه أن

.... $\frac{\partial u}{\partial x}$ $¿0$ اي ان u $¿ f_1(y)$

وكذلك $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ .... اي أن (y $¿ f_2$ (v

ولكن من معادلتي كوشي - ريمان يكون $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$ ..... أي أن $¿ f_3$ v ((x

وكذلك $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$ ...... أي أن u $¿ f_4(x)$

ولايمكن أن يكون ذلك إلا إذا كان

$u=¿$ ثابت $¿\propto_1$

$v=¿$ ثابت $¿\propto_2$

وبالتالي فإن (ثابت) f (z) $¿\propto$

4- اثبت أنه إذا كان $f(z)=¿$ (θ ,iv(r, θ + u (r) دالة تحليله فإن

$$\frac{df}{dz} \quad ¿\frac{\partial f}{\partial r}\cos ¿ \overset{\theta-¿}{} \quad \frac{\partial f}{\partial \theta}\frac{Sin\theta}{r}$$

الاثبات

باستعمال

$$\frac{df}{dz}=¿ \quad \frac{\partial u}{\partial x}+i \quad \frac{\partial v}{\partial x}$$

فإن :-

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial \theta}\frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=¿ \quad u_r\cos\theta-\frac{1}{r}u_\theta\sin\theta$$

: وكذلك فإن

$$\frac{\partial v}{\partial x}=¿ \quad v_r\cos\theta\frac{-1}{r}v_\theta\sin\theta$$

وبالتالي فإن :-

$$\frac{df}{dz}=u_x+iv_x$$

$$¿ \quad (\quad u_r+iv_r¿\cos\theta-\frac{1}{r}(u_\theta+iv_\theta)$$

$$¿ \quad \frac{\partial f}{\partial r}\cos\theta-\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\sin\theta$$

(2-6) الدالة التحليلية والمترافقة :-

1- الدالة التحليلية : Annalistic function

إذا كانت المشتقة $f(z)$ معرفة عند كل النقاط في منطقة ما D فإنه يقال أن $f(z)$ تحليلية في D وتستخدم الاصطلاحات الدالة المنتظمة regular أو هولومورفيه كبديل لمصطلح الدالة التحليلية ويقال أن الدالة $f(z)$ تحليلية عند النقطة z_0 إذا كان يوجد δ >0 بحث $|z-z_0|<\delta$ عند كل النقاط التي توجد عندها $\acute{f}(z)$.

2- الدالة التوافقية : Harmonic Function

إذا وجدت المشتقات الجزئية التالية لكل من u,v بالنسبة إلى x,y وكانت متصلة في D فإننا نجد من معادلتي كوشي–ريمان

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0,\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

ويلي ذلك تحت هذه الشروط أن كل من الجزء الحقيقي والجزء التخيلي لدالة تخيلية يحققان معادلة لابلاس

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 \Psi}{\partial y^2}=0 \text{ أو } \nabla^2\Psi=0,\nabla\equiv\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

ويسمي ∇^2 عادة بموثر لابلاس وتسمي الدوال مثل $u(x,y),v(x,y)$ والتي تحقق معادلة لابلاس في منطقة ما D بالدوال التوافقية ، ويقال أنها توافقية في D

*برهن أن كلا من الجزء الحقيقي والجزء التخيلي لدالة تحليلة لمتغير مركب تحقق معادلة لابلاس في الصورة القطبي

$$\frac{\partial^2 \Psi}{\partial r^2}+\frac{1}{r} \qquad \frac{\partial \Psi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 \Psi}{\partial \theta^2}=0$$

الاثبات

من معادلات كوشي– ريمان في الصورة القطبية

(1) $\frac{\partial v}{\partial \theta}=r\frac{\partial u}{\partial r}(2)\frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta}=\frac{-1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}$

لحذف vنفاضل المعادلة(1) جزيئا بالنسبة الي r والمعادلة (2) بالنسبة الي θ

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta}=\frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial v}{\partial \theta}\right]=\frac{\partial}{\partial r}\left[r\frac{\partial u}{\partial r}\right]=r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\partial u}{\partial r} \qquad \rightarrow (3)$$

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial r}=\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{\partial v}{\partial r}\right]=\frac{\partial}{\partial \theta}\left[\frac{-1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}\right]=\frac{-1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \rightarrow (4)$$

ولكن $\frac{\partial^2 v}{\partial r \partial \theta}=\frac{\partial^2 v}{\partial \theta \partial r}$ بافتراض أن المشتقة الجزئية ذات الرتبة الثانية متصلة إذن من (3) ، (4)

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} \text{ أو } r\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{\partial u}{\partial r}=\frac{-1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2}$$

وبالمثل حذف *u* نجد أن :

$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \theta^2}=0$ بالتالي نكون قد برهنا المطلوب

3- الدوال المترافقة : Conjugate

تسمى الدالتان $u(x,y),v(x,y)$ أحياناً بدالتين مترافقتين إذا أعطينا أحدهما يمكن ايجاد الأخرى (ثابت إضافة اختياري) بحيث أن $f(z)=u+iv$ تكون

تحليلية وتسمى الدالة $f(z)$ شاملة إذا كانت تحليلية في كل المستوى المركب الشامل

(2-7) تطبيق:-

1- إذا كانت f دالة تحليلية في D وإذا كانت $|f(z)| \equiv k$ حيث k ثابت فإن f تكون ثابتاً في D

الحل

لنفرض $k=0$ فإن $|f(z)|^2 \equiv 0$

وبالتالي $u+v=0$ فإنه ينتج أن كلا من $v \equiv 0, u \equiv 0$ وبالتالي $f(z) \equiv 0$ في D .

نفرض أن $K \neq 0$ وبتفاضل المعادلة $u^2+v^2 \equiv k^2$ جزئياً بالنسبة إلى X ثم بالنسبة إلى Y لنحصل على :

$$2\mathrm{u}\,u_x+2\mathrm{v}\,v_x=0\,,\,2\mathrm{u}\,u_y+2\mathrm{v}\,v_y=0$$

وباستخدام معادلتي كوشي -ريمان نحصل على :

$$u\,u_x-v\,v_y=0;\,v\,v_x+u\,u_y=0$$

وبمعاملة u, v كعاملين ويحل المعادلتين السابقتين بالنسبة إلى u_y, u_x فنحصل على

$$u_x=\frac{\begin{vmatrix}0 & -v\\ 0 & u\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}u & -v\\ v & u\end{vmatrix}}=\frac{0}{u^2+v^2}=0\,,\,u_y=\frac{\begin{vmatrix}u & 0\\ v & 0\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}u & -v\\ v & u\end{vmatrix}}=\frac{0}{u^2+v^2}=0$$

ومن نظرية التحليل الحقيقي التي تنص أن الشروط $u_x=0, u_y=0$ معاً فهذا يؤدي إلى $u(x,y) \equiv c_1$ حيث c_1 ثاب وبالمثل نجد أن $v(x,y) \equiv c_2$ وبالتالي $f(z)=c_1+ic_2$

2- إذا كانت $f(z)=u+iv$ تحليلية في منطقة ما R برهن أن u,v تكونان توافقيتين في R إذا كانت المشتقات الجزئية من الرتبة الثانية لهما متصلة في R .

الحل

إذا كانت $f(z)$ تحليلية في R فإن معادلات كوشي - ريمان تتحقق

$$\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-\partial u}{\partial y} \rightarrow (2); \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \rightarrow (1)$$

إذا أفترض أن U,V لهما مشتقات جزئية متصلة من الرتبة الثانية ، فيمكننا أن نفاضل طرفي المعادلة (1) بالنسبة إلى X والمعادلة (2) بالنسبة إلى Y لنحصل على

$$\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}=\frac{-\partial^2 u}{\partial y^2} \rightarrow (4); \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \rightarrow (3)$$

ومنهما

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0 \text{ او } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{-\partial^2 u}{\partial y^2}$$

أي أن uتوافقية

بالمثل بتفاضل طرفي المعادلة (1) بالنسبة إلى y والمعادلة (2) بالنسبة إلى X نجد أن

$$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}=0$$

وتكون v توافقية

وسوف نثبت فيما بعد أنه إذا كانت $f(z)$ تحليله في R فإن جميع مشتقاتها توجد وتكون متصلة في R

إذن الفروض تكون غير ضرورية .

(2-8) صيغ ونظريات كوشي وبعض النتائج المتعلقة بها:-

أ/ صيغ تكامل كوشي :

إذا كانت $f(z)$ تحليلية على المنحنى البسيط المقفل c وداخله و a أي نقطة داخل c تشكل(1-1) فإن

$$F(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{F(z)}{z-a}dz \rightarrow (1)$$

حيث يعبر C في الاتجاه الموجب (عكس اتجاه دوران عقارب الساعة) كذلك المشتقة النونية للدالة $f(z)$ عند $z=a$ تعطى بالاتي :

$$\int^{(n)}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_c \frac{F(z)}{(z-a)^{n+1}}dz \rightarrow (2)\, n=1,2,3,4,..............$$

A *

C

x

y

يمكن اعتبار النتيجة (1) حالة خاصة من النتيجة (2) عندما $n=0$ وذلك إذا عرفنا $0!=1$ تسمى النتيجتان (1) و(2) بصيغ تكامل كوشي وهما نتيجتين مدهشتان جداً لأنهما يثبتان إنه كانت دالة ما $f(z)$ معرفة على منحنى بسيط مقفل c فإنه يمكن ايجاد قيم الدالة وكل مشتقاتها عند كل النقاط داخل c وبالتالي إذا وجدت المشتقة الأولى لدالة ما لمتغير مركب أي إذا كانت الدالة تحليلية في منطقة بسيطة الترابط R فإن كل مشتقاتها من الرتبة الأعلى توجد في R وليس من الضروري أن يكون ذلك صحيحاً لدوال المتغير الحقيقي.

(1-1)

بعض النظريات الهامة:-

1 - نظرية موريرا:- (عكس نظرية كوشي)

إذا كان $f(z)$ في منطقة بسيطة الترابط R وإذا كانت $\oint_c f(z)dz=0$ حول كل منحنى بسيط مقفل في R فإن $f(z)$ تكون تحليلية في R .

البرهان :-

اذا كان $\oint_c F(Z)dz=0$ لايعتمد علي المسار c ويلي ان $F(z)=\oint_a^z f(z)dz$ لايعتمد علي المسار الذي يصل a,z طالما ان هذا المسار يقع في R

وعلي ذلك نفس اسلوب الجدل الذي استخدم لاحقا ويلي ان $F(z)$ تحليلة في R و $\grave{f}(z)=F(z)$ وان $\grave{F}(z)$ تحليلة ايضا اذا كانت $F(z)$ كذلك

اذن تحليلة في R $F(z)$

2- متباينة كوشي:-

إذا كانت $f(z)$ تحليلية داخل وعلى الدائرة c التي تصف قطرها R ومركزها عند $a=z$ فان

$$\left|f^n(a)\right| \le \frac{m.n!}{r^n} \rightarrow (3)\, n=0,1,2,\ldots\ldots\ldots\ldots$$

حيث m ثابت ما بحيث أن $|f(z)|<m$ على C أي أن m هي الحد الأعلى لـ $|f(z)|$ على C

البرهان

يكون لدينا من صيغ تكامل كوشي $¿m$ *f(z)* إذا كان m ثابت ما بحيث

$$F^{n}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{c}\frac{F(z)}{(z-a)^{n+1}}dz \quad n=0,1,2,3,\ldots\ldots\ldots\ldots.$$

حيث $|z-a|=r$ علي c وطول المنحني c هو 2 πr يكون لدينا

$$\left|F^{(n)}(a)\right|=\frac{n!}{2\pi}\left|\oint_{c}\frac{F(z)}{(z-a)^{n+1}}dz\right|\leq\frac{n!}{2\pi}\cdot\frac{m}{r^{n+1}}2\pi r=\frac{m.n!}{r^{n}}$$

3- نظرية ليوفيل:-

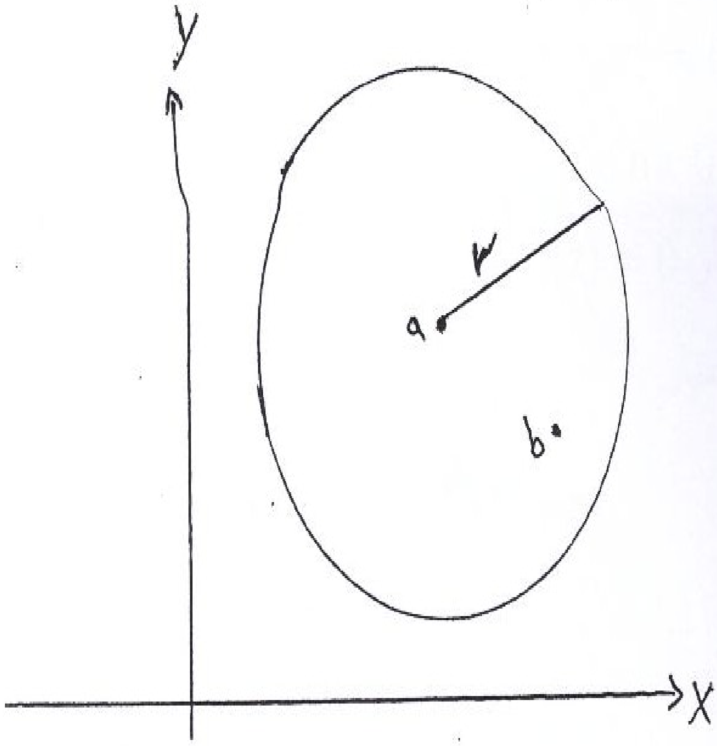
أفرض ان: $F(z)(i)$ تحليلية، $F(z)(ii)$ محددة أي $|f(z)|<m$ لثابت ما m ، لجميع قيم z في المستوى الشامل يتكون من ذلك أن $f(z)$ يجب أن تكون ثابتة .

البرهان :

ليكن b,a أي نقطتين في المستوى z أفترض أن c هي دائرة نصف قطرها R ومركزها عند a وتحيط بالنقطة b أنظر شكل (1-2) سترى من صيغة تكامل كوشي أن

$$F(b)-F(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{c}\frac{F(z)}{z-b}dz-\frac{1}{2\pi i}\oint_{c}\frac{F(z)}{z-a}dz$$

$$¿\frac{b-a}{2\pi i}\oint_{c}\frac{F(z)}{(z-b)(z-a)}dz$$



شكل(2-1)

ولكن

$$|z-a| = ¿\ r\ , \qquad |z-b| = |z-a+a-b| \geq |z-a| - |a-b| = r - |a-b| \geq \frac{r}{2}$$

إذا اخترنا R كبيرة بأي درجة نريد بحيث أن وبما أن $\frac{r}{2}$ $|b-a|<¿$ بما أن
$F(z)<m$ وطول المنحنى c وهو $2\ \pi i$ من المعلوم سابقا أن

$$|f(b)-f(a)| = \frac{|b-a|}{2\pi}\oint_{c} \frac{F(z)}{(z-b)(z-a)}\,dz \leq \frac{|b-a|\,m(2\pi i)}{2\pi\left(\frac{r}{2}\right)n}$$

$$¿\,\frac{2|b-a|\,m}{r}$$

إذا جعلنا $r \to \infty$ نري ان $F(b)=F(a), |F(b)-F(a)|=0$ التي تثبت أن $f(z)$ يجب أن تكون ثابتاً .

4- نظرية أساسية في الجبر:-

كل معادلة كثيرة حدود

$$f(z)=a_0+a_1 z+a_2 z^2+\cdots\cdots\cdots+a_n z^n=0$$

ذات درجة $a_n \neq 0, n\geq 1$ لهاجزر واحد على الأقل .

ويترتب على ذلك أن $f(z)=0$ هنا بالضبط n من الجزور مع أخذ تكرار الجذور في الاعتبار

البرهان

إذا كانت $p(z)=0$ ليس لهاجزر فإن $f(z)=\frac{1}{p(z)}$ تكون تحليلية لجميع قيم Z وأيضاً $|f(z)|=\frac{1}{|p(z)|}$ تكون محدودة و(هي في الحقيقية تقترب من الصفر) كما $|z|\to\infty$ وعلى ذلك ينتج من نظرية ليوفيل أن $f(z)$ وبالتالي $p(z)$ يجب أن تكون $p(z)=0$ ثابتاً أي أن يوجد تناقض ونستنتج أن يجب أن يكون لها على الأقل جذر واحد وكما يقال في بعض الأحيان أن $p(z)$ لها على الأقل صفرا واحدا .

5- نظرية جاوس للقسمة المتوسطة:-

إذا كانت $f(z)$ تحليلية داخل وعلى ا لدائرة C لتي مركزها a ونصف قطرها r ، فإن $f(a)$ هي متوسط قيم الدالة $f(z)$ على C أي

$$F(a)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} F\left(a+r e^{i\varphi}\right) d\varphi \to (4)$$

البرهان

من صيغ تكامل كوشي

$$F(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_c \frac{f(z)}{z-a}dz$$

إذا كان نصف قطر c هو rفإن معادلة (C) هي $|z-a|=r$ او $z=a+re^{i\varphi}$
بالتالي تصبح المعادلة (1)

$$F(a)=\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{F\left(a+re^{i\varphi}\right)ire^{i\varphi}}{re^{i\varphi}}d\varphi$$

$$¿\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}F\left(a+re^{i\varphi}\right)d\varphi$$

وهي النتيجة المطلوبة

6- نظرية أكبر مقياس :

إذا كانت $f(z)$ تحليلية على المنحنى المقبل C وداخله ولا تساوي ثابتاً بالتطابق .فإن $f(z)$ تأخذع أكبر قيمة هنا على C

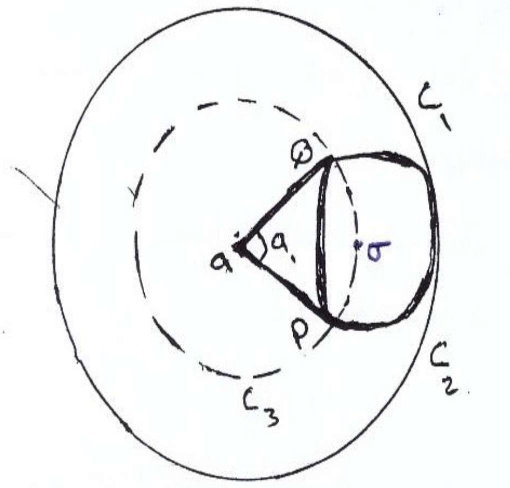
البرهان

بما أن $f(z)$ تحليلية أو بالتالي متصلة على المنحنى C وداخله فينتج أن $f(z)$ تأخذ أكبر قيمة لها لقيمة واحدة على الأقل للمتغير z على المنحنى C أو أن هذه القيمة العظمى لم تصل إليها على حد المنحنى وليكن وصلنا إليها عند نقطة داخلية a أي m $|F(a)|=¿$

لتكن C_1 هي دائرة داخل C ومركزها عند a (انظر شكل 1-3) إذا افترضنا ان $F(z)$ ليست ثابتة داخل c , فيجب ان توجد نقطة داخل c_1 ولتكن b بحيث $|F(b)<m|$ أو هو نفس الشئ $|F(b)|=m-\in$ حيث $\in>0$ ومن اتصال $|F(z)|$ عند b نرى أنه يوجد $\delta>0$ بحيث أن لاي $(1)|z-b|<\delta|F(z)-F(b)|<\frac{1}{2}\in \in>0$

$$(2) \left|F(z)\right| < \left|F(b)\right| + \frac{1}{2}\in = m - \in + \frac{1}{2}\in = m - \frac{1}{2}\in$$

لجميع النقاط داخل الدائرة C_2 مركزها عند b ونصف قطرها δ ، كما هو مبين في الشكل التالي



شكل(3-1)

تنشأ دائرة C_3 مركزها عند a وتمر بالنقطة b (المنطقة المظلة) وعلى جزء من هذه الدائرة (بالذات الجزء PQ المحتوى في C_2) يكون لدينا من (2) $f(z) \le m - \frac{1}{2}$

وعلى الجزء الباقي من الدائرة يكون لدينا $F(z) \le m$ إذا حسبنا θ في عكس اتجاه دوران عقارب الساعة من op نفرض أن $2poQ=0$ وأنه إذا كان $r=b-a$ فإن

$$F\left(a+re^{i\varphi}\right)d\varphi+¿\frac{1}{2\pi}\int_{a}^{2\pi}F\left(a+re^{i\varphi}\right)d\varphi$$
$$F(a)=\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{a}¿$$

$$\left|F\left(a+re^{i\varphi}\right)\right|d\varphi+¿\frac{1}{2\pi}\int_{a}^{2\pi}\left|F\left(a+re^{i\varphi}\right)\right|d\varphi$$
$$|F(a)|\leq\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{a}¿$$

$$\leq\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{a}\left(m-\frac{1}{2}\varepsilon\right)d\varphi+\frac{1}{2\pi}\int_{a}^{2\pi}md\varphi$$

$$¿\frac{a}{2\pi}\left(m-\frac{1}{2}\varepsilon\right)+\frac{m}{2\pi}(2\pi-a)$$
$$¿m-\frac{a\varepsilon}{4\pi}$$

اي ان $|F(a)|=m\leq m-\frac{a\varepsilon}{4\pi}$ ، هو مستحيل . من هذا التناقض نستنتج أن $|f(z)|$ لا يمكن أنتصل إلى قيمتها العظمى عند أي نقطة داخلية في الدائرة C وبالتالي يجب أن تصل إلى قيمتها العظمى عند المنحنى C .

7- نظرية أصغر مقياس :

إذا كانت $f(z)$ تحليلية على المنحنى المقفل C وداخله و $f(z)\neq 0$ داخل C فإن $|F(z)|$ تأخذ أصغر قيمة على C

البرهان

بما أن $f(z)$ تحليلية على المنحنى C وداخله $f(z)\neq 0$ داخل C – فيلي ان $f(z)$ تحليلية داخل C ومن نظرية أكبر مقياس ينتج أن $|F(z)|$ لا يمكن أن تأخذ قيمتها العظمى C وبالتالي $|F(z)|$ لا يمكن أن تأخذ قيمتها الصغرى داخل C وبالتالي بما أن $|F(z)|$ لها قيمة صغرى فإن هذه القيمة الصغرى يجب أن نصل إليها على المنحني C .

8- نظرية المدلول :-

لتكن $f(z)$ تحليلية على المنحنى C المقفل وداخله ما عدا بعض الأقطاب المحددة داخل C فإن :

$$\frac{1}{2\pi}\oint_{c} \frac{\grave{f}(z)}{f(z)}dz=N-p$$

البرهان

ليكن r_1, c_1 دائرتين غير متداخلتين يقعان داخل C ويحيطان $Z_2 \propto$ $Z_2 B,$ على الترتيب فإن :

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{c} \frac{\grave{f}(z)}{f(z)}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{2} \frac{\grave{f}(z)}{f(z)}dz+\frac{1}{2\pi i}\oint_{c} \frac{\grave{f}(z)}{f(z)}dz \rightarrow (1)$$

بما ان $f(z)$ لها قطب من رتبة p عند $z=\propto$ فان

$$F(z)=\frac{f(z)}{(z-a)^p} \rightarrow (2)$$

حيث $f(z)$ تحليلية وتختلف من الصفر على المنحني c_1 وداخله بأخذ اللوغيرثيم في (z) وبالتفاصيل نجد أن

$$\frac{\grave{f}(z)}{f(z)}=\frac{\grave{f}(z)}{f(z)}-\frac{p}{z-\propto} \rightarrow (3)$$

وبالتالي :

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1} \frac{\grave{f}(z)}{f(z)}dz=\frac{1}{2\pi i}\int_{c_1} \frac{\grave{f}(z)}{f(z)}dz-\frac{p}{2\pi i}\int_{c_1} \frac{dz}{z-\propto}=0-p=-p \rightarrow (4)$$

بما ان $f(z)$ لها صفر من رتبة n عند $Z=B$ فان

$$F(z)=(Z-B)^n G(z) \rightarrow (5)$$

حيث $G(z)$ تحليلية وتختلف عن الصفر على المنحنى r_1 وداخله وبأخذ اللوغريثم والتفاضل نجد أن

$$\frac{\grave{f}(z)}{f(z)} \quad ¿\frac{n}{Z-B}+\frac{\grave{G}(z)}{G(z)} \rightarrow \qquad (6)$$

وبالتالي :

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{\grave{f}(z)}{f(z)}dz=\frac{n}{2\pi i}\oint_{r_1}\frac{dz}{Z-B}+\frac{1}{2\pi i}\oint\frac{\grave{G}(z)}{G(z)}dz=n \rightarrow \quad (7)$$

وعلى ذلك نحصل على النتيجة المطلوبة من (1) ،(4)، (7)

$$\frac{\grave{f}(z)}{f(z)}dz+¿\frac{1}{2\pi i} \quad \frac{1}{2\pi i}\oint_{C}¿ \qquad \oint\frac{\grave{f}(z)}{f(z)}dz=n-p$$

9- نظرية روشيه:-

إذا كانت $g(z),f(z)$ تحليليتين على المنحنى المقفل C وداخله وإذا كانت $|g(z)|<|f(z)|$ على C فإن $f(z),f(z)+g(z)$ لها نفس عدد الأصفار داخل C

البرهان

ليكن $f(z)=g(z)/f(z)$ بحيث $g(z)=f(z)/g(z)$ أو باختصار $g=jf$ إذا كان N_1,N_2 هما عدد الأصفار داخل C للدالتين $f,f+g$ على الترتيب وباستخدام حقيقة أن الدالتين لهما أقطاب داخل C ينتج أن

$$N_1=\frac{1}{2\pi i}\oint_{c}\frac{\grave{f}+\grave{g}}{f+g}dz,\ N_2=\frac{1}{2\pi i}\oint_{c}\frac{\grave{f}}{f}dz$$

وبالتالي :

$$N_1-N_2=\frac{1}{2\pi i}\oint_{c}\frac{\grave{f}+\grave{f}F+f\grave{F}}{f+fF}dz-\frac{1}{2\pi i}\oint_{c}\frac{\grave{f}}{f}dz$$

$$¿\frac{1}{2\pi i}\oint_{c}^{\square}\frac{\grave{f}(1+F)+f\grave{F}}{f(1+F)}dz-\frac{1}{2\pi i}\oint_{c}^{\square}\frac{\grave{f}}{f}dz$$

$$\frac{\grave{f}}{f}+¿$$
$$¿$$
$$¿$$
$$¿\frac{1}{2\pi i}\oint_{c}^{\square}¿$$

$$¿\frac{1}{2\pi i}\oint_{C}^{\square}\frac{\grave{F}}{1+F}dz$$

$$\grave{F}(1-f+f_2+¿f_3+........)dz$$
$$¿\frac{1}{2\pi i}\int_{c}^{\square}¿$$

وباستخدام الحقيقة المعطاه وهي $|f|<1$ علي c ينتج أن المسلسلة منتظمة التقارب علي c وبالتكامل حدا ينتج أن القيمة صفر وبالتالي $N_1=N_2$ كما هو مطلوب

10- صيغ تكامل بواسون لنصف مستوي:-

لتكن الدالة $f(z)$ تحليلية في النصف الاعلي $Y\geq 0$ للمستوى المركب z ولتكن $\xi=\xi+¿$ أي نقطة في هذا النصف الأعلى للمستوى فإن :

$$f(\xi)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{nf(x)}{(x-\xi)^2+n^2}dx\rightarrow(i)$$

وبدلالة الجزءين الحقيقي والتخيلي للدالة $f(\xi)$ ويمكن كتابة المعادلة (i) على الصورة

$$u(\xi,n)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{nu(x,0)}{(x-\xi)^2+n^2}dx \to (ii)$$

$$v(\xi,n)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{nv(x,0)}{(x-\xi)^2+n^2}dx \to (iii)$$

تسمى هذه النتائج بصيغ تكامل بواسون لنصف المستوى وهي تعبير عن قيم دالة توافقية في نصف المستوى الأعلى بدلالة قيمها على المحور (الحد الأسفل)

البرهان

ليكن c هو نصف دائرة قطرها R والتي تحتوي علي ξ كنقطة داخلية
بما أن c تحتوي علي $\bar{\xi}$ فمن صيغة تكامل كوشي

$$\frac{f(z)}{z-\xi}dz, 0=\text{¿}\frac{1}{2\pi}\oint_c \frac{f(z)}{z-\xi}dz$$

$$f(\xi)=\frac{1}{2\pi}\oint_c \text{¿}$$

وبالتالي نحصل بالطرح على

$$f(\xi)=\frac{1}{2\pi i}\oint_c\left\{\frac{1}{z-\xi}-\frac{1}{z-\xi}\right\}dz$$

$$\xi$$
$$\xi-\text{¿}$$
$$\text{¿}$$
$$f(z)$$
$$\text{¿}$$
$$\xi$$
$$z-\text{¿}$$
$$\text{¿}$$
$$\text{¿}$$
$$\text{¿}$$
$$\text{¿}\frac{1}{2\pi i}\oint_c \text{¿}$$

نفرض أن $\xi=\xi-\text{¿}$, $\xi=\xi+\text{¿}$ يمكن كتابة المعادلة على الصورة

$$\xi$$
$$z-¿$$
$$¿$$
$$(z-\xi)¿$$
$$\frac{nf(z)}{¿}$$
$$\frac{nf(x)}{(x+\xi)^2}dx+¿\frac{1}{\pi}\int_r ¿$$
$$f(\xi)=\frac{1}{\pi}\int_{-R}^{R} ¿$$

حين r هو قوس نصف الدائرة التي حدها C التكامل الأخير يقترب من الصفر كما $R\rightarrow\infty$ ويكون لدينا

$$f(\xi)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{nf(x)}{(x-\xi)^2+n^2}dx$$

ويمكن كتابة $f(x)=u(x,0)+iv(x,0)$, $f(\xi)=f(\xi+¿)=u(\xi,n)+iv(\xi,n)$ فنحصل علي

$$u(\xi,n)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{nu(\xi,0)}{(x-\xi)^2+n^2}dx$$

$$v(\xi,n)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{nv(\xi,0)}{(x-\xi)^2+n^2}dx$$

11- نظرية كوشي - جورسان:-

لتكن $f(z)$ تحليلية في منطقة ما R وكذلك على حدها C فإن

$$\oint_c f(z)\,dz=0$$

هذه النظرية الأساسية ، وتنتمي غالباً بنظرية كوشي للتكامل أو باختصار نظرية كوشي وهي تحقق لكل من المناطق البسيطة والمتعددة الترابط

وقد برهنت أولاً باستخدام نظرية جرين مع قيد إضافي هو أن $\acute{f}(z)$ متصلة في R وقد أعطى جورسات برهاناً بدون هذا القيد الإضافي -ولهذا السبب فإن النظرية تسمى في بعض الأحيان بنظرية كوشي - جورسات عندما نريد أن تؤكد على عدم ضرورة هذا القيد .

*برهن :

نظرية كوشي $\oint_c f(z)dz=o$ إذا كانت $f(z)$ دالة تحليلية والمشتقة $f(z)$ متصلة عند جميع النقاط داخل وعلى المنحنى البسيط المقفل c .

الاثبات

بما أن $f(z)=u+iv$ تحليلية ومشتقاتها متصلة فإن

$$\acute{f}(z)=\frac{\partial u}{\partial x}+i\frac{\partial v}{\partial x}=¿ \qquad \frac{\partial u}{\partial y}-i\frac{\partial u}{\partial y}$$

ويلي من ذلك أن المشتقات الجزئية $\frac{\partial v}{\partial x}=\frac{-\partial u}{\partial x},\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y}$ متصلة داخل وعلى المنحنى c .

∴ ويمكن تطبيق نظرية نظرية جرين فيكون لدينا

$$\oint_C f(z)dz=¿ \qquad \oint_C (u+iv)(dx+idy)=\oint_C u\,dx-v\,dy+i\oint_C vdx+udy$$

$$¿\,liint¿R¿\,¿ \frac{-\partial v}{\partial x}-¿ \qquad \left(\frac{\partial u}{\partial x}-¿\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy=0$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}¿\,dx\,dy+i\,liint¿R¿$$

(وذلك باستخدام معادلتي كوشي - ريمان (1) ، (2

باستخدام حقيقة أنه يمكن تطبيق نظرية جرين على المناطق المتعددة الترابط فإنه يمكن تعميم النتيجة إلى المناطق المتعددة الترابط تحت الشروط المعطاه للدالة $f(z)$و يلاحظ أن نظرية كوشي - جورسات تزيل قيد أن $\acute{f}(z)$ متصلة .

ج- بعض نتائج نظرية كوشي:-

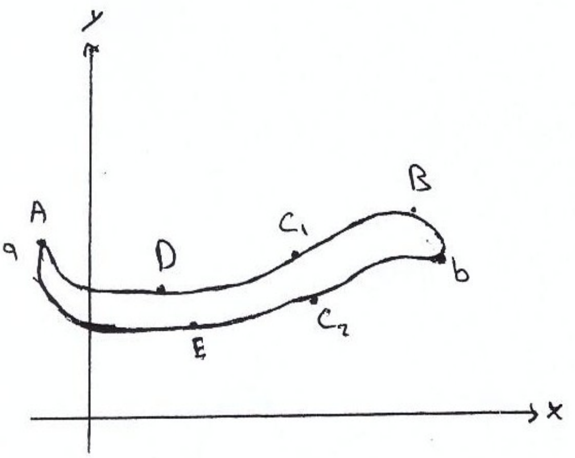
لتكن $f(z)$ دالة تحليلية في منطقة ما بسيطة الترابط تحقق النظريات التالية :

نظرية (1):-

إذا كانت z,a نقطتين في R فإن

$$\int_{a}^{\square} f(z)\,dz$$

لا يعتمد على المسار في الذي يصل النقطة



شكل(1-4)

البرهان

من نظرية كوشي

$$\int_{ADBEA}^{\square} f(z)\,dz=0$$

أو

$$\int_{ADB} f(z)\,dz + \int_{BEA} f(z)\,dz = 0$$

وبالتالي

$$\int_{ADB} f(z)\,dz = -\int_{BEA} f(z)\,dz = \int_{AEB} f(z)\,dz$$

إذن

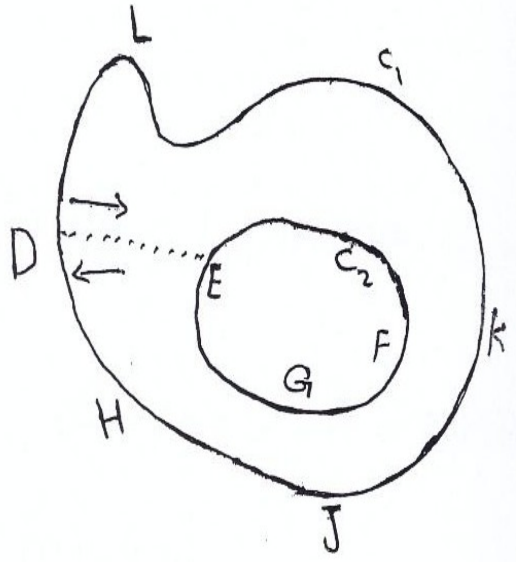
$$\int_{c_1} f(z)\,dz = \int_{c_2} f(z)\,dz = \int_a^b f(z)\,dz$$

نظرية (2):-

لتكن $f(z)$ تحليلية في منطقة محددة ما بمنحنيين بسيطين C, C_1 حيث C_1 الموقع داخل C كما في الشكل(1-5) وكذلك على المنحنيين فإن

$$\oint_C f(z)\,dz = \oint_{C_1} f(z)\,dz$$

البرهان



شكل(1-5)

ننشئ القاطع المستعرض DE بما أن $f(z)$ تحليلية في المنطقة R فمن نظرية كوشي

$$\int_{DEfGEaJKLD} f(z)\,dz = o$$

أو

$$\int_{DE} f(z) + \int_{EfGE} f(z)\,dz + \int_{ED} f(z)\,dz + \int_{DHJKLb} f(z)\,dz = 0$$

بما أن

$$\int_{DE} f(z)\,dz = -\int_{ED} f(z)\,dz$$

فإن

$$\oint_{c} f(z)\,dz=\oint_{c_1} f(z)\,dz$$

أو

$$\int_{DHJKLD} f(z)\,dz=\int_{EfGE} f(z)\,dz=\int_{EGfF} f(z)\,dz$$

نظرية (3):-

أذا كان b,a أي نقطتين في R , $\grave{F}(z)=f(z)$ فإن

$$\int_{G}^{b} f(z)\,dz=f(b)-f(a)$$

ويمكن كتابة ذلك على الصورة ، وهي مألوفة في حساب التفاضل

مثلاً

$$\int_{3i}^{1-i} a\,z\,dz$$

الحل

$$¿\,2Z^2\Big|_{3i}^{1-i}$$

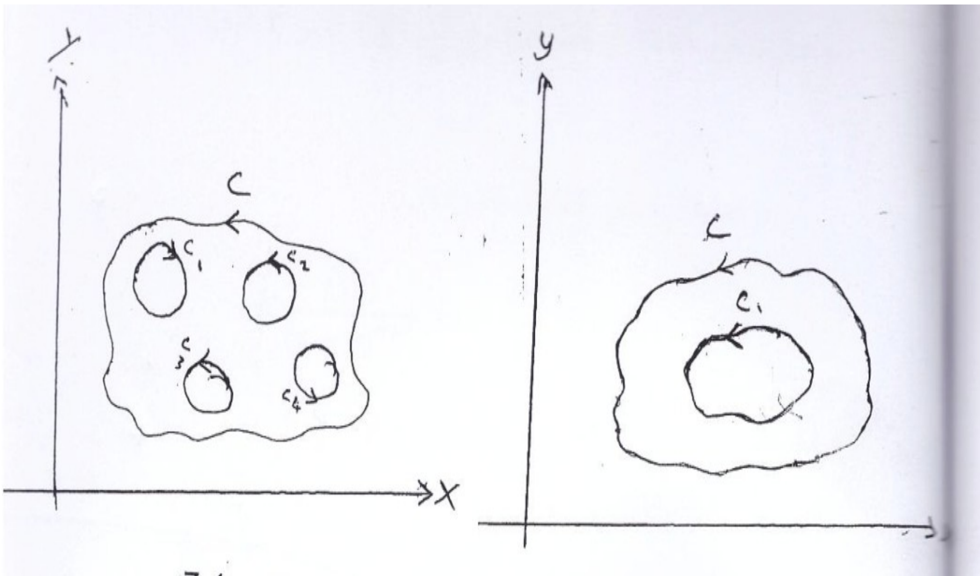
$$¿\,2(1-i)^2-2(3i)^2=18-4i$$

نظرية (4):-

لتكن $f(z)$ تحليلية في منطقة ما محددة بمنحنيين بسيطين مغلقين c,c_1 (حيث c_1 داخل c كما في الشكل (1-1)) وكذلك على هذين المنحيين فإن :

$$\oint_{C} f(z)\,dz=\oint_{C1} f(z)\,dz \rightarrow (6)$$

حيث يعبر كل من c, c_1 في الاتجاه الموجب بالنسبة إلى داخلها (عكس اتجاه عقارب الساعة في شكل (1-6)و(1-7) تبين النتيجة أنه إذا أردنا أن نكامل $f(z)$ على المنحنى c فإنه يمكن أن تكامل على المنحنى c_1 بدلاً من c طالما أن $f(z)$ تحليلية في المنطقة بين المنحنين c, c_1



شكل (1-7)

شكل (1-6)

نظرية (5):-

لتكن $f(z)$ دالة تحليلية في منطقة ما R محددة بالمنحنيات البسيطة الغير متداخلة $, c, c_1, c_2, \ldots, c_n$ حيث $c, c_1, c_2, \ldots, c_n$ تقع داخل C كما في الشكل (1-2) وكذلك على هذه المنحنيات فإن

$$\oint_C f(z)\,dz=\oint_{c_1} f(z)\,dz+\oint_{c_2} f(z)\,dz+\ldots+\oint_{c_n} f(z)\,dz \rightarrow (7)$$

تعتبر هذه النظرية تعميماً للنظرية (4)

(2-9) تطبيق:-

1) أوجد التكامل $\oint_c \frac{e^{5z}}{(z-1)^5}dz$ حيث C يحتوي النقطة $z=1$

الحل

من صيغة كوشي للتكامل مباشرة فإن :

$$\oint_c \frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz=\frac{2\pi i}{n!}f(n)(a)$$

ولكن $f(z)=e^{5z}$ دالة تحليلية في كل مكان ومشتقاتها النونية

فإن $f^{(n)}(z)=(5)^n e^{5z}$

$$\oint_c \frac{e^{5z}}{(z-1)^5}dz=\frac{2\pi i}{4!}(5)^4 e^5$$

2) أوجد التكامل $\oint_C \frac{\sin z}{(z-1)(z-2)}$ حيث C يحيط النقطتين $z=1,2$

الحل

باستخدام الكسور الجزئية :

$$\frac{1}{(z-1)(z-2)} \quad \text{¿}\frac{A}{Z-1}+\frac{B}{Z-2}$$

حيث $A=-1, \quad B=1$

أي أن

$$\oint_C \frac{SinZ}{(Z-1)(z-2)}dz \quad \text{¿}-\oint_c \frac{SinZ}{(Z-1)} \quad +\oint_c \frac{SinZ}{(z-2)}$$

ويمكننا هنا استعمال صيغة تكامل كوشي بيسر تام حيث

$$\oint_{C} \frac{SinZ}{z-a} dz = 2\pi i f(a)$$

أي أنّ

$$\oint_{C} \frac{SinZ}{(Z-1)(z-2)} dz \quad ¿-2\pi i \sin(1) + 2\pi i Sin(2)$$

$$\sin(2)-\sin(1)$$
$$¿2\pi i ¿$$

الفصل الثالث:المتسلسلات اللانهائية ومتسلسلة تايلور و متسلسلة لورنت:-

(3-1) نظرية تايلور:-

(3-1-1) نظرية (1) :-

دع $f(z)$ دالة تحليلية على و داخل منحنى مغلق يسير c و دع النقطتان $a+h, a$ داخل c فإن:

$$f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{h^2}{2!} f''(a) + ¿ \quad \ldots \quad \frac{h^n}{n!} f^n(a) + \ldots$$

أو بوضع $z=a+h$ و بالتالي $h=z-a$ فإن

$$f(a)\} \text{ over } \{2!\} \{\text{left } (z-a \text{ right }) \} \wedge \{2\} +$$
$$f(z) = f(a) + f'(a)(z-a) + ¿ \quad \ldots \quad \frac{f^n(a)}{n!}(z-a)^n + \ldots$$

البرهان

لكل z داخل c (أنظر إلى الشكل) يمكن أخذ دائرة c_1 مركزها عند النقطة a و تحتوي z ...

و بالتالي و بتطبيق صيغة كوشي للتكامل فإن

$$f(z) = \frac{1}{z\pi i} \oint_{c_1} \frac{f(w)}{w-z} d\omega \rightarrow (1)$$

ولكن

$$\frac{1}{\omega-z}=\frac{1}{(\omega-a)-(z-a)}=\frac{1}{\omega-a}\left[\frac{1}{1-\frac{z-a}{\omega-a}}\right]$$

$$¿\,\frac{1}{\omega-a}\left[1-\frac{z-a}{\omega-a}\right]^{-1},\left[\frac{z-a}{\omega-a}\right]<1$$

$$¿\,\frac{1}{\omega-a}\left[1+\left(\frac{z-a}{\omega-a}\right)+\left(\frac{z-a}{\omega-a}\right)^{2}+\cdots\cdots+\left(\frac{z-a}{\omega-a}\right)^{n-1}+\left(\frac{z-a}{\omega-a}\right)^{n}+\frac{1}{1-\frac{z-a}{\omega-a}}\right]$$

باستعمال المفكوك

$$(1-z)^{-1}=1+z+z^{2}+\cdots\cdots+z^{n-1}+z^{n}\frac{1}{1-z}$$

بالتالي:

$$\frac{1}{\omega-z}=\frac{1}{\omega-a}+\frac{z-a}{(\omega-a)^{2}}+\frac{(z-a)^{2}}{(\omega-a)^{3}}+\ldots+\frac{(z-a)^{n-1}}{(\omega-a)^{n}}+\left(\frac{z-a}{w-a}\right)^{n}\frac{1}{w-z}\rightarrow \qquad (2)$$

و الأن بضرب 2)) في $f(\omega)$ و استعمال الصيغة في (1) فإن :

$$2\pi i f(z)=\oint_{c_1}\frac{f(\omega)}{\omega-a}d\omega+z-a\oint_{c_1}\frac{f(\omega)}{(\omega-a)^{2}}d\omega+\cdots+(z-a)^{n-1}\oint_{c_1}\frac{f(\omega)}{(\omega-a)^{n}}d\omega+R_n\rightarrow(3)$$

حيث $R_n=\oint_{c_1}\left[\frac{z-a}{\omega-a}\right]^{n}\frac{f(\omega)}{\omega-z}d\omega$

و باستخدام صيغة تكامل كوشي

$$f^{n}(a)=\frac{n!}{2\pi i}\oint_{c_1}\frac{f(\omega)}{(\omega-a)^{n+1}}d\omega \quad n=0,1,2,3,\cdots\cdots$$

فإن (3) تصح

$$f(z)=f(a)+\grave{f}(a)(z-a)+\frac{\grave{f}(a)}{2!}(z-a)^{2}+\cdots\cdots$$

حيث $u_n=\frac{1}{2\pi i}R_n$

و الأن بما أن ω على الدائرة c_1 فإن $r<1$ $¿\left|\frac{z-a}{\omega-a}\right|$

أيضاً فإن $|f(\omega)|<m$ حيث m ثابت موجب كذلك

$|\omega-z|$ $¿|(\omega-a)-(z-a)|\geq|\omega-z|$ - $|z-a|=r_1$ - $|z-a|$

حيث r_1 هي نصف قطر الدائرة c_1 فإن

$$|U_n| \quad ¿\frac{1}{z\pi}\left|\oint_{c_1}\left[\frac{z-a}{\omega-a}\right]^{n}\frac{f(\omega)}{\omega-z}d\omega\right|\leq\frac{1}{2\pi}\oint_{c_1}\left[\frac{z-a}{\omega-a}\right]^{n}\left|\frac{f(w)}{\omega-z}\right||d\omega|\leq\frac{1}{2\pi}\frac{r^{n}M}{r_1-|z-a|} \quad 2\pi r_1\frac{r^{n}Mr_1}{r_1-|z-a|}$$

بالتالي فإن $\lim ¿_{n\to\infty}|U_n|=0$ ¿

و بذلك نكزن قد أثبتنا صدق متسلسلة تايلور

$$f(a)(z-a)+\cdots\cdots+¿\frac{f^{n}(a)}{n!}(z-a)^{n}+\ldots$$
$$F(z)=f(a)=\grave{¿}$$

(3.1.2 ملاحظات:

1. يلاحظ أن متسلسلة تايلور هي المتسلسلة المعتاد عليها في فك الدوال الحقيقية و نحن نفس الشروط تقريباً مع الاكتفاء بأن $f(z)$ دالة حقيقية؛ لأن ذلك يعني وجود كل رتب مشتقات هذه الدالة بشكل تلقائي، فحسب مفكوك تايلور للدوال المركبة سيكون نسبيها لنفس الدوال الحقيقية في صورتها الحقيقية مثلاً:

$$(i)e^{z}=1+Z+\frac{Z^{2}}{2!}+\cdots\cdots+¿ \quad \frac{Z^{n}}{n!}$$

$$Z=Z-¿\frac{Z^3}{2!}+\frac{Z^5}{3!}+\ldots+(-1)^{n-1}\frac{Z^{2n-1}}{(2n-1)!}+\ldots$$
$$(ii)\sin ¿$$

و هذه الدوال التحليلية في كل مكان و لذلك فليس هناك قيد على قيمة Z طالما كانت $|z|<\infty$.

2. مثل أي متسلسلة لا نهائية لابد أن يكون مشاكل في مجموعها فإذا كانت محدودة فهي متقاربة ، و إذا كانت غير محدودة فهي متباعد و تسمى هذه المنطقة بمنطقة التقارب ، بالنسبة لمفكوك تايلور فإن منطقة التقارب تعطى بــ $|z-a|<R$ حيث R هي نصف قطر التقارب .
3. خارج نطاق هذه الدائرة $|z-a|>R$ فإن المتسلسلة تكون متباعدة و على ضوء ذلك هنالك هنالك متسلسلات عليها قيود كالآتي:

$$(1+Z)=Z-\frac{Z^2}{2}+¿\frac{Z^3}{3}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}+\cdots\cdots,|z|<1$$
$$(iii)\ln ¿$$

$$(v)\tan^{-1}z=z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{2n-1}+\cdots\cdots,|z|<1$$

(3-1-3) تطبيق:-

1) أثبت ان مفكوك $f(z)=\ln(1+z)$ حول $z=0$ هو

$$(1+Z)=Z-\frac{Z^2}{2}+¿\frac{Z^3}{3}+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}+\cdots\cdots,|z|<1$$
$$\ln ¿$$

البرهان

باستخدام صيغة مفكوك تايلور فإن

$$f(z)=\ln(1+z),f(0)=\ln 1=0$$

وبالتالي:

$$\grave{f}(z)=\frac{1}{1+z} \quad , \quad f(0)=\frac{1}{1}=1$$

$$\grave{\grave{f}}(z)=\frac{-1}{(1+z)^2} \quad , \quad f(0)=-1$$

$$f(z)=\frac{2!}{(1+z)^3} \quad , \quad f(0)=2!$$

$$f^n(z)=\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+z)^n}, f^n(0)=(-1)^{n-1}$$

وبالتالي فإن

$$f(z)=f(a)+\frac{f'(a)}{1!}(z-a)+\frac{f''(a)}{2!}(z-a)^2+\cdots\cdots+\frac{f^n(a)}{n!}(z-a)^n+\cdots$$

$$=f(0)+\frac{f'(0)}{1!}(z)+\frac{f''(0)}{2!}z^n+\cdots\cdots+\frac{f^n(0)}{n!}+\cdots\cdots$$

$$=z-\frac{z^2}{2}+2!\frac{z^3}{3!}+\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n-1}(n-1)!z^n}{n!}+\cdots\cdots$$

$$=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}+\cdots\cdots+\frac{(-1)^{n-1}z^n}{n}+\cdots\cdots$$

و الأن فهناك نقطة شاذة عند $z=-1$ و لذلك فإن نصف قطر التقارب سيكون $R=1$ وتكون منطقة التقارب هي $|z-0|<1$ وبالتالي شرط التقارب هو $|z|<1$.

2) أوجد مفكوك ما كلورين للدالة $f(z)=\frac{1}{1+3Z}$

الحل

في هذه الحالة فإن

$$f(z)=\frac{1}{1+3z}=(1+3z)^{-1}$$

$$¿1-3z+9z^2-27z^3+\cdots\cdots+(-1)^{n-1}(3z)^n+\cdots\cdots$$

$$¿1-3z+9z^2-\cdots\cdots+(-1)^{n-1}(3)^n(z)^n+\cdots\cdots$$

و شرط التقارب في هذه الحالة $|3z|<1$

أي أن $|z|<\frac{1}{3}$.

(3-2) نظرية لورانت:-

(3-2-1) نظرية:-

دع $f(z)$ دالة تحليلية و ذات قيمة وحيدة على الدائرتين c_2,c_1 وبينها في R (أنظر الشكل) ذو الشكل الحلقي والذي له المركز عند النقطة $z=a$ و نصف قطر c_1 هو R_1 ونصف قطر c_2 هو R_2 مبين الشكل فإنه لكل $Z=R$

$$f(z)=a_0+a_1(z-a)+a_2(z-a)^2+\cdots\cdots+\frac{a_{-1}}{z-a}+\frac{a_{-2}}{(z-a)^2}+\cdots\cdots$$

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_1}\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz,\quad \text{حيث} \quad n=0,\pm1\pm2\cdots$$

و المسار المغلق اليسير C داخل المنطقة R

$$\underbrace{\frac{f(\omega)}{\omega-z}}d\omega-¿\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_1}\underbrace{\frac{f(n)}{n-z}}dn\rightarrow(1)$$

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_1}¿$$

و هي صيغة كوشي للتكامل مطبقة على هذا الشكل الحلقي

وبالنسبة للتكامل الأول في الطرف الأيمن من (1) فإن:

$$\frac{1}{\omega-z}=\frac{1}{(\omega-a)-(z-a)} \qquad \text{¿}\frac{1}{\omega-z\left[1-\frac{z-a}{w-a}\right]}$$

$$\text{¿}\left[\frac{1}{\omega-a}\right]\left[1+\left[\frac{z-a}{\omega-a}\right]+\left[\frac{z-a}{\omega-a}\right]^2+\ldots+\left[\frac{z-a}{\omega-a}\right]^{n-1}+\left[\frac{z-a}{\omega-a}\right]^n-\left[\frac{1}{1-\frac{z-a}{\omega-a}}\right]\right]$$

$$\text{¿}\frac{1}{\omega-a}+\frac{z-a}{(\omega-a)^2}+\frac{(z-a)^2}{(\omega-a)^3}+\cdots\cdots+\left[\frac{(z-a)}{\omega-a}\right]^{n-1}.\frac{1}{\omega-z}\rightarrow(2)$$

مع الشرط المعتاد لهذا الفك و هو أن $\left|\frac{z-a}{\omega-a}\right|<1$ و هذا حادث فعلاً لأن ω موجودة علي الدائرة z, c_1 نقطة في R و بالتالي فإن:

$$\frac{f(\omega)}{\omega-z}d\omega=\text{¿}\oint_{c_1}\frac{f(\omega)}{\omega-a}d\omega+(z-a)\oint_{c_1}\frac{f(\omega)}{(\omega-a)^2}d\omega+\cdots+(z-a)^{n-1}\oint_{c_1}\frac{f(\omega)}{(\omega-a)^n}d\omega+R_n$$

$$\oint_{c_1}\text{¿}$$

حيث $$R_n=\oint_{c_1}\left[\frac{z-a}{\omega-a}\right]^n\frac{f(\omega)}{\omega-a}d\omega$$

و باستعمال صيغة تكامل كوشي فإننا نصل إلى:

$$\frac{f(\omega)}{\omega-z}d\omega=\text{¿}a_0+a_1(z-a)+\cdots\cdots+a_{n-1}(z-a)^{n-1}+u_n\rightarrow(3)$$

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_1}\text{¿}$$

حيث

$$a_j=\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_1}\frac{f(\omega)}{(\omega-a)^{j+1}}d\omega,\ j=0,1,2,\cdots\cdots,j+1\rightarrow(4)$$

وكذلك فإن

$$u_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_1}\left[\frac{z-a}{\omega-a}\right]^n\frac{f(\omega)}{\omega-z}d\omega\rightarrow(5)$$

وبأخذ التكامل الثاني في الطرفالأيمن من (1) فإن:

$$\frac{-1}{h-z}=\frac{1}{z-n}=\text{¿} \qquad \frac{1}{(z-a)-(h-a)}=\frac{1}{(z-a)\left[1-\frac{h-a}{z-a}\right]}$$

لاحظ أن $\left|\frac{h-0}{z-0}\right|<1$ لأن h تقع الدائرة c_2 ، وبالتالي يمكننا استخدام نفس المفكوك السابق استخدامه في التكامل الأول

$$\frac{-1}{h-z}=\text{¿} \qquad \frac{1}{z-a}+\frac{h-a}{(z-a)^2}+\cdots\cdots+\text{¿} \qquad \frac{(h-a)^{n-1}}{(z-a)^n}+\left(\frac{h-a}{z-a}\right)^n\frac{1}{2-h}$$

بالتالي

$$\frac{f(n)(n-a)}{(z-a)^2}dn+\text{¿}\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_2}\frac{(n-a)^{n+1}}{(z-a)^n}+v_n$$

$$\frac{f(n)}{z-a}dn+\text{¿}\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_2}\text{¿}$$

$$\frac{-1}{2\pi i}\oint_{c_2}\frac{f(n)}{n-z}dn=\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_2}\text{¿}$$

$$\text{¿}\frac{a_{-1}}{z-a}+\frac{a_{-2}}{(z-a)^2}+\cdots\cdots+\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}+v_n\rightarrow(6)$$

حيث

$$a_{-n}=\frac{1}{2\pi i}\oint_{c}(n-a)^{n-1}f(n)\,dn\rightarrow(7)\,n=0,1,2,\cdots\cdots$$

$$v_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_{c_2}\left[\frac{n-a}{z-a}\right]^n\frac{f(n)}{z-n}dn$$

من (3),(6) فإن

$$f(z)=a_0+a_1(z-a)\cdots+a_{n-1}(z-a)^{n-1}+\frac{a_{-1}}{z-a}+\frac{a_{-2}}{(z-a)^2}+\ldots+\frac{a_{-n}}{(z-a)^n}+U_n+V_n\rightarrow(8)$$

و يبقى أن نثبت أن U_n, V_n يتلاشيان عند n $\to \infty$ و فليل من الإضافات الصغيرة وإثبات أن $\lim_{n \to \infty} |U_n| = 0$ نسبة تماماً بما قمنا به في نظرية تايلور

و الأن على c_1 فإن $\left| \frac{n-a}{z-a} \right| = K < 1$

وكذلك نعلم أن $|f(n)| < m$

و أيضاً

$$|z-n| = |(z-a)-(n-a)| \geq |z-a| - R_2$$

و بالتالي فإن:

$$|V_n| = \frac{1}{2\pi i} \left| \oint_{c_2} \left[\frac{n-a}{z-a} \right]^n \frac{f(n)}{z-n} \right| |dn|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \oint_{c_2} \left| \frac{n-a}{z-a} \right|^n \frac{|f(n)|}{|z-n|} |dn|$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \frac{k^n M}{|z-a| - R_2}$$

$$¿ \frac{k^n M R_2}{|z-a| - R_2}$$

و بالتالي فإن: $\lim_{n \to \infty} |U_n| = 0$

أي أن

$V_n = 0$ وبالتالي يكتمل الاثبات

(3-2-2) ملاحظات:

1. وجود النقطة الشاذة عن $z=a$ في المركز هو الذي يسبب ذلك التغيير و في حالة عدم وجودها فإن مفكوك لورتن يصبح مفكوك تايلور لأن $f(z)$ في هذه الحالة تصبح تحليلية في المنطقة R والتي تمتد لأسفل لتصبح دائرة واحدة.
2. يمكننا التكامل على الدائرة C بين الدائرتين C_2, C_1 بحيث يكون

$$(i)\, a_j = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_1} \frac{f(\omega)}{(\omega - a)^{j+1}} d\omega, \; j = 0, 1.2, \ldots$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{c} \frac{f(\omega)}{(\omega - a)^{j+1}} d\omega$$

كذلك $(ii)\, a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_2} (n-a)^{n-1} f(n)\, dn, \; n = 1, 2.3$

$$= \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_2} (n-a)^{n-1} f(n)\, dn$$

و هذا يجعلنا نكتب الحد العام الآتي:

$$a_m = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z-a)^{m+1}} dz, \; m = 0, \pm, 1 \pm 2,$$

(3-2-3) تطبيق:

1) أوجد مفكوك لورنت ل $f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^z}$ }حول $z=1$

الحل

بناءً على نظرية لورانت فإن

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-a)^m}$$

حيث

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_1} \frac{f(\omega)}{(\omega - a)^{n+1}} d\omega, \; n = 0, 1, 2$$

$$a_{-n} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_1} \frac{f(n)}{(n-a)^{n+1}} dn, \; n = 1, 2, 3$$

حيث $|\omega - a| = R$ c_1

$$R_1 > R_2 |n-a| = R_2$$

و هي تمثل الحالة الشاذة $a=1$

$$f(z) = \sum_{m=0}^{\infty} a_n (z-a)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_{-n}}{(z-a)^m}$$

حيث $a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_1} \frac{e^{\omega}}{(\omega-1)^{n+3}}$

ومن صيغة تكامل كوشي

$$\frac{e^{\omega}}{(n+2)!}]$$
$$¿$$
$$¿$$
$$a_n = ¿$$

كذلك $a_{-n} = ¿ \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_2} \frac{e^n}{(n-1)^{3-n}} dn$

و التكامل ينعدم عند $n = 3,4,5$

ولكن عندما تكون $n=1$ فإن

$$a_{-1} = ¿ \quad \frac{1}{2\pi i} \oint_{c_2} \frac{e^n}{(n-1)^2} dn$$

$$e^n]$$
$$¿$$
$$¿$$
$$¿¿$$

بينما تنعدم بقيمة الحدود فيالجزء الأساسي من المفكوك ... و بالتالي فإن :

$$\underbrace{f(z) = \frac{e^z}{(z-1)^2} = \frac{e}{z-1} + \frac{e}{(z-1)^2}}_{\text{الجزء الأساسي}} \quad \underbrace{+ e\left[\frac{1}{2!} + \frac{(z-1)}{3!} + \frac{(z-1)^2}{4!} + \ldots + \frac{(z-1)^n}{(n+2)^1} + \ldots\right]}_{\text{الجزء التحليلي}}.$$

حل آخر:-

بوضع $z-1=4$

$$\frac{e^z}{(z-1)^2} = \text{¿} \qquad \frac{e^{1+4}}{u^2} = \frac{e}{u^2} e^u$$

$$\text{¿}\, \frac{e}{u^2}\left[1+u+\frac{u^2}{2!}+\ldots+\frac{u^n}{n!}+\ldots\right]$$

$$\text{¿}\, e\left[\frac{1}{u}+\frac{1}{u^2}+\frac{1}{2}+\frac{4}{3!}+\ldots+\frac{u^{n-e}}{n!}+\ldots\right]$$

بوضع $u=z-1$ مرة أخرى فإن :

$$\frac{e^z}{(z-1)^2} = e\left[\frac{1}{z-1}+\frac{1}{(z-1)^2}+\frac{1}{2}+\frac{z-1}{3!}+\frac{(z-1)^2}{4!}+\ldots+\frac{(z-1)^{n-2}}{n!}+\ldots\right] \qquad n \geq 1$$

وهو بالطبع نفس المفكوك السابق.

(3-3)تقارب المتباعدات و المتسلسلات:-

يقال أن للمتباعدة اللانهائية $Z_1, Z_2, \cdots\cdots, Z_n$ من الأعدادالمركبة نهاية z وإذا كان لكل عدد حقيقي موجب ε يوجد عدد حقيقي موجب Z_0 بحيث : $|z_n - z| < 4$ طالما $n > n_0$.

و التفسير الهندسي لهذا المفهوم هو أنه يمكننا دائماً اختيار عددصحيح موجب n مهما كان كبيربحيث يكون جميع النقط Z_n حيث $n > N$ من هذه المتباعدة

قريبة قرباً كافياً وكيفما يشاء من النقطة z ، إذا كانت المتباعدة لا نهائية فإن هذه المتباعدة لابد أن تكون وحيدة و المتباعدة التي يطلق عليها متباعدة تقاربية و تعبر عن ذلك رمزياً كالآتي: $\lim_{n \to \infty} Z_n = Z$

والمتتابعة التي ليس لها نهاية تسمي متتابعة تباعدية

(1-3-3) نظرية(1):

اذا كان

$z_n = x_n + i y_n$

$$z = x + iy$$

فإن $\lim_{n \to \infty} z_n = z$

إذا و فقط إذا كان $\lim_{n \to \infty} x_n = x \quad , \lim_{n \to \infty} y_n = y \to (3)$

البرهان

- نفرض أولاًصحة (2) ثم نبرهن تحقيق الشرط(3) فإنه لكل عدد حقيقي موجب معطى (ε) يوجد عدد صحيح موجب n_0 بحيث

$$|x_n - x + i(y_n - y)| < \varepsilon \text{ طالما } n > n_0$$

لكن

$$|x_n - x| \leq |x_n - x + i(y_n - y)|$$

$$|y_n - y| \leq |x_n - x + i(y_n - y)|$$

وهذا يستنتج بالضرورة

$$|y_n - y| < \varepsilon , |x_n - x| < \varepsilon$$

لجميع $n > n_0$ وهذه هي الشروط (3) المطلوب.

- نفرض صحة الشروط(3) ، نعلم أنه لكل عدد حقيقي موجب معطى (ε) يوجد عددان صحيحان موجبان n_2, n_1 بحيث:

$$|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{طالما} \quad n > n_1$$

$$|y_n - y| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{طالما} \quad n > n_2$$

لكن $|x_n + i\,y_n - (x+iy)| \le |x_n - x| + |y_n - y|$

ومن ثم فإن $|x_n - x| < \frac{\varepsilon}{2}$ طالما $n > n_2$ و الشرط (3) يقال المتسلسلة لا نهائية $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n, \cdots$ حيث كل من Z_n عدد مركب أنها تؤول إلى العدد S إذا مانت متباعدة المجامع الجزئية $S_N = \sum_{n=1} Z_n, N(1,2,\cdots)$ تقاربية و نهايتها S في هذه الحال

نقول أن مجموع المتسلسلة اللانهائية قيد البحث و نعبر عنه بـ($\sum_{n=1}^{\infty} z_n = s$)

حيث أنها نهائية أي متتابعة تقاربية تكون وحيدة فإننا نستنتج أن أي متسلسلة تقاربية لا يمكن أن يكون لها أكثر من مجموع.

(3-4)خواص أخرى للمتسلسلات:-

- إذا كانت المتسلسلة $\sum_{n=1} z_n$ من الأعداد المركبة $Z_n = X_n + iy_n$ متسلسلة تقاربية فإن كل من المتسلسلتين $\sum_{n=1} y_n, \sum_{n=1} x_n$ تكون متلسلة تقاربية و لما كنا نعلم أن الشرط اللازم للتقارب متسلسلة لا نهائية حدودها أعداد حقيقية هو أن تؤول إلى الحد الذي رتبتة n إلى الصفر عندما يؤول إلى اللانهائية ، فإننا نستنتج أن كلاً من y_n, x_n تؤول إلى الصفر عندما يؤول إلى اللانهائية ومنه تقترب z_n إلى الصفر $\lim_{n \to \infty} z_n = 0$.
- التقارب المطلقة لمتسلسلة الأعداد المركبة يستلزم بالضرورة تقارب المتسلسلة نفسها.
- من المعلوم أنه إذا كانت f دالة تحليلية z_0 فإن المشتقات $f^n(z)$ تكون موجودة لكل قيم n ، و في هذا الجزء سوف نثبت أنه إذا كانت f تحليلية عند z_0 فإنه يكون لهامتسلسلة تايلور في الصورة المركبة و التي تحقق في

قرص مركزها z_0 ، و كذلك سوف نرى أن متسلسلة ماكلورين في الصورة المركبة للدوال الأولية $\ln(1-z)\sin z, \cos z, expz$ يمكن الحصول عليه باستخدام معاملات متسلسلة ما كلورين لمتغيرات حقيقته للدوال $\sin x, \cos x, e^8$ و ذلك بإحلال المتغير الحقيقي (x) بالمتغير المركب (z) .

(3-4-1) نظرية تفاضل وتكامل متسلسلة تايلور:-

لتكن للدالة متسلسلة تايلور المعطاة بالمعادلة (1)و متحققة في الفرض $|z-z_0|<R$ فإنه يمن تفاضلها حداً حداً للحصول على

$$\grave{f}(z)=\sum_{n=8}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{(n-1)!}(z-z_0)^{n-1}, |z-z_0|<R \rightarrow (i)$$

$$\int_{z_0}^{z} f(\xi)\,d\xi=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f^{(n)}(z_0)}{(n-1)!}(z-z_0)^{n+1}. |z-z_0|<R \rightarrow (ii)$$

البرهـــــــــان

ليكن $g(z)=f(z)$ و حيث g تحليلية في القرص $|z-z_0|<R$ فيكون لها تمثيل متسلسلة تايلور:

$$g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{g^{(n)}(z_0)}{n!}(z-z_0)^{n}, |z-z_0|<R \rightarrow (iii)$$

وحيث أن $g^{(n)}(z_0)=f^{(n+1)}(z_0)$ فإن المعادلة (iii) تؤول إلى:

$$z$$
$$z$$
$$f^{(n)}\frac{(¿¿0)}{(n-1)!}(z-z_0)^{n-1}$$
$$f^{(n+1)}\frac{(¿¿0)}{n!}(z-z_0)^{n}=\sum_{n=0}^{\infty}¿$$
$$\grave{f}(z)=g(z)=\sum_{n=0}^{\infty}¿$$

(3-4-2) تطبيق:

1) أثبت أن : $\frac{1}{(1-z)^2}=\sum_{n=1}^{\infty} n z^{n-1}; |z|<1$

الحــــــــل

ليكن $f(z)=\frac{1}{1-z}$ فيكون

$$f^{(n)}(z)=\frac{n!}{(1-z)^{n+1}}$$

$f^{(n)}(0)=n!$ و تكون متسلسلة ماكلورين لهذه الدالة هي

$$f(z)=\frac{1}{1-z}=\sum_{n=0}^{\infty} z^n, |z|, 1$$

وحيث أن $\grave{f}(z)=\frac{1}{(1-z)^2}$ فإن

$$\frac{1}{(1-z)^2}=\grave{f}(z)=n z^n, |z|<1$$

(3-5) متسلسلة القوى:-

تسمى متسلسلة معامل الصورة

$$a_0+a_1(z-z_0)+a_0(z-z_0)^2+\cdots\cdots=\sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \rightarrow (1)$$

بمتسلسلة القوى في $(z-a)$ حيث z عدد مركب و $a_0, a_1, \cdots\cdots$ ثوابت تسمى بالمعاملات، أما z فيسمى بمركز المتسلسلة، المتسلسلة (1) تتقارب عند $z=z_0$ و يكون مجموعها هو القيمة a_0 .

(3.5.1 نظرية:

- إذا كانت متسلسلة القوى في (1) تتقارب عند النقطة $z_1 \neq z_2$ فإنها تتقارب إلى قيمة z في الفرص $|z-z_0|<R$ حيث $R=(Z-Z_0)$.
- إذا كانت متسلسلة القوى في (1) تتباعد عند النقطة z_2 فإنها تتباعد لجميع قيم z التي تحقق $|z-z_0|<P$ حيث $P=(Z_2-Z_0)$.
- علاوة على ذلك أي متسلسلة قوى تتقارب عند $Z \pm 0$ تعرف دالة ذات متغير مركب $g(z)$ الذي مجموع المتسلسلة فكتب:

$$|z-z_0|<R,\ g(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n \to (2)$$

البرهـــــان

أ- ليكن r عدد حقيقي يحقق $0<r<R$ وسوف نثبت أن المتسلسلة في (r) تتقارب عند كل نقطة في الفرص المغلق $R=|z-z_0|<r$ و حيث أن المتسلسلة تتقارب عند z_1 فإن $\lim_{n-0} a_n(z_1-z_0)^n=0$ ، و بالتالي يوجد عدد صحيح $|a_n(z_1-z_0)^n|\le 1, x\ge N$ فإذا وضعنا

ب- $M=Max\{1,|a_0|,\cdots|a_{n-1}(z-z_0)^{n-1}|\}$ فإن:

$$|a_n||z-z_0|\le M\ ,n=0,1,2 \to (3)$$

وليكن لدينا متسلسلة القيمةالمطلقة

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n||Z-Z_0|^n=\sum_{n=0}^{\infty}|a_n||Z_1-Z_0|^n\frac{|Z-Z_0|^n}{|Z_1-Z_0|^n}(4)$$

وإذا استخدمنا الحقيق $|z-z_0|^n/|z_1-z_0|^n\le r^2/R^n=K^n$ حيث $0<K<1$

فإنه باستخدام (4),(3) نحصل على :

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n||Z-Z_0|^n\le\sum_{n=0}^{\infty}M K^n=\frac{M}{1-K}\to(5)$$

و هذه النتيجة تثبت لنا أن المتسلسلة (1) تتقارب لكل $|z-z_0|\le r$ و بوضع $r\to R$ نحصل على المطلوب أعلاه.

ت- نفترض المتسلسلة (1) تتباعد عند z_2 ونفترض أيضاً انه توجد قيمة z_3 بحيث $|z_3-z_2|>|z_2-z_0|$ عندها تكون المتسلسلة (1) تقاربية، ومن الجزء (أ) من هذه النظرية فإنه يؤدي إلى المتسلسلة تتقارب لكل قيم z في الفرص $|z-z_0|<|z_3-z_0|$ وعلى وجه الخصوص تتقارب المتسلسلة عند النقطة z_2 و هذا يتعارض مع افتراضنا و بهذا نثبت الجزء الثاني.

❖ملحـــــوظة:-

إذا كان R هو أكبر عدد حقيقي بحيث أن ا لمتسلسلة في (1) تتقارب لجميع قيم Z في القرض $|z-z_0|<R$ فإننا نقول أن Rهو نصف قطر التقارب لمتسلسلة القوى، و إذا كانت المتسلسلة في (1) تتقارب لجميع قيم Z فإننا نضع $R\to\infty$.

(3-6) نظريات على متسلسلات القوى:-

(3-6-1) نظرية (1):-

تتقارب متسلسلة قوى ما تقارباً منتظماً و مطلقاً في منطقة تقع تماماً داخل دائرة تقاربها.

إذا كانت متسلسلة القوى $\sum a_n z^n$ تقاربية لكل $z = z_0 \pm 0$

برهن:

أ. تقارباً مطلقاً $|z| < |z_0|$

ب. تقارباً منتظماً لكل| $|z| \le |z_1|$ حيث $|z_1| < |z_0|$

البرهـــــــــــان

أ.بما أن $\sum a_n z_0^n$ تقاربية فيكون $\lim_{n \to \infty} a_n Z_0^n = 0$ و بالتالي يجعل $|a_n Z_0^n| < 1$ بإختيار n كبيرة كبراً كافياً، أي $|a_n| < \frac{1}{|Z_0|^n}$ لكل $n \ge N$ فإن

$$\sum_{N+1}^{\infty} |a_n Z_0^n| = \sum_{N+1}^{\infty} |a_n| |Z|^n \le \sum_{N+1}^{\infty} \frac{|Z|^n}{|Z_0|^n}$$

ولكن المتسلسلة تقاربية لكل $|z_1| < |z_0|$ و اختيار المقارنة بأن المتسلسلة (أ) تقاربية أي المتسلسلة المعطاة تقاربية تقارباًمطلقاً.

ب.ليكن $M_n = \frac{|Z_1|^n}{|Z_0|^n}$ فتكون $\sum M_n$ تقاربية، حيث $|z_1| < |z_0|$ وكما في الجزء (أ) $|a_n z^n| < M_n$ لكل $|z| \le |z_1|$ و بالتالي ،وإختيار فايرشتراس M تكون $\sum a_n Z^n$ تقاربية تقارباً منتظماً.

(3-6-2) نظرية(2):-

أ. يمكن تفاضل متسلسلة القوى حداً حداً في أي منطقة تقع بأكملها داخل دائرة تقاربها.
ب. يمكن تتكامل متسلسلة القوى على منحنى C واقع بأكمله داخل دائرة تقاربها.
ت. مجموع متسلسلة قوى يكون متصلاً في أي منطقة تقع بأكملها داخل دائرة تقاربها

(3-6-3) نظرية(3) نظرية أبل:-

لتكن $\sum a_n Z^n$ لها نصف قطر دائرة التقارب R و نفرض أن z_0 نقطة على دائرة التقارب بحيث يمكن بسهولة عمل تقسيمات لمتسلسلات قوى أخرى.

(3-6-4) نظرية (4):-

إذا كانت $\sum a_n Z^n$ تتقارب إلى الصفر لجميع قيم z بحيث أن $|z|<R$ حيث $R=0$ ، فإن $a_n=0$ ، و بعبارة مكافئة إذا كان $\sum b_n z^n = \sum a_n Z^n$ لجميع قيم z بحيث أن $|z|<R$ فإن $a_n=b_n$.

(3-7)بعض المتسلسلات الخاصة:-

البيان التالي يبين بعض المتسلسلات الخاصة وكذلك منطقة التقارب لكل منها و في حالة الدوال متعددة القيم فإننا نعتبر التفرع الرئيسي:

1. $e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \ldots + \frac{z^n}{n!} + \ldots |z| < \infty$

2. $\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-1}}{(2n-1)!} + \ldots |z| < \infty$

3. $\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots (-1)^{n-1} \frac{z^{2n-2}}{(2n-1)!} + \ldots |z| < \infty$

4. $(1+z)=z-\frac{z^2}{2}+\frac{z^3}{3}-\ldots(-1)^{n-1}\frac{z^n}{n}+\ldots|z|<1$

5. $\tan^{-1}z=z-\frac{z^3}{3}+\frac{z^5}{5}-\ldots(-1)^{n-1}\frac{z^{2n-1}}{2n-1}+\ldots|z|<1$

6. $(1+Z)^p=1+pz+\frac{p(p-1)}{2!}+z^2+\ldots+\frac{p(p-1)\ldots(p-n+1)z^n}{n!}+\ldots|z|<1$

الفصل الرابع: نظرية البواقي وتطبيقاتها علي التكاملات المحدودة:-

(4-1) مقدمة:-

بالنظر إلى مفكوك لورانت للدالة $f(z)$:

$$f(z)=\sum_{n=\infty}^{\infty}a_n(z-a)^n$$

حيث $f(z)$ دالة تحليلية على وداخل الدائرة C إلا عند النقطة $z=a$ و التي هي مركز الدائرة أيضا و حيث

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\oint_c\frac{f(z)}{(z-a)^{n+1}}dz,n=0,\pm1,\pm2,\ldots$$

فإذا أردنا إيجاد $\oint_c f(z)dz$ ... فإن الجزء التحليلي من المفكوك يعطي صفراً أما الجزء الأساسي فيعطي تكاملاً في صورة

$$\oint_c\frac{dz}{(z-a)^m}=\begin{cases}2\pi i & m=1\\ 0 & m\neq1\end{cases}$$

أي لا يبقى من هذه التكاملات إلا الشامل $\oint_c\frac{dz}{(z-a)^m}$ ... و هو الخاص بالمعامل

... a_{-1})) و لذلك فمن وجهة نظر التكامل $\oint_c f(z)dz$ فإن a_{-1} هي المعامل الباقي الوحيد في الحسابات...و لذلك يسمى بالباقي residue و يكون الشامل كالآتي:

$$\oint_c f(z)\, dz = 2\pi i\, a_{-1}$$

و يظهر لنا اهمية إيجاد مفكوك لورانت للدالة $f(z)$ بغض النظر عن النقطة الشاذة $z=a$ بعد إيجاد المفكوك يلعب الباقي a_{-1} دوراً هاماً و محورياً في إيجاد قيمة التكامل $\oint_c f(z) dz$.

فإذا كان الشذوذ من النوع القطبي فقط أي أن $z=a$ قطب من رتبة m فإن مفكوك لورانت حول النقطة $z=a$ يعطي الصورةالتالية:

$$f(z) = \underbrace{\frac{a_{-m}}{(z-a)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a}} \quad + a_0 + a_1(z-a) + \cdots \cdots$$

وهذا شيء أشرنا إليه سابقاً أن عدد الحدود في الجزء الأساسي تساوي رتبة هذا القطب ، و الأن بالضرب في $(z-a)^m$ فإن:

$$(z-a)^m f(z) = a_{-m} + a_{-(m-1)}(z-a) + \cdots + a_{-1}(z-a)^{m-1} + a_0(z-a)^m + \ldots \quad (1)$$

وهي تمثل مفكوك تايلور للدالة التحليلية $(z-a)^m f(z)$ حول نقطة $z=a$ وبتفاضل العلاقة $(m-1)(1)$ مرة فإننا نحصل على:

$$\frac{d^{m-1}z}{dz^{m-1}}\left((z-a)^m f(z)\right) = (m-1)!\, a_{-1} + m(m-1)\ldots 2\, a_0 (z-a) + \ldots$$

و عند أخذ النهاية z $\rightarrow a$ فإن:

أي أن في حالة وجود قطب عند $z=a$ من رتبة (m) فإن:

$$a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \to a} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} (z-a)^m f(z)$$

و من أهم التطبيقات التي يمكن أن تستفيد بها من نظرية الباقي هو حساب بعض التكاملات المحدودة، والتي كانت تمثل صعوبة أو حتى مستحيلة الحل في R و يتطلب التطبيق شروط خاصة سيتم ذكرها، ولكن بشكل عام لابد من أن

تنطبق نظرية الباقي على دالة مختارة بدقة $f(z)$ و على مسار مغلق مختارة بعناية وخبرة Contour .

(4-2) نظريةالباقي The residue The Orem:-

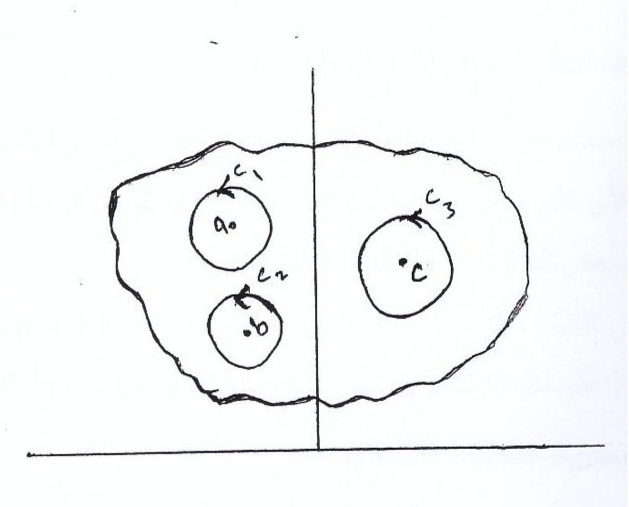
إذا كانت $f(z)$ دالة تحليليةعلى و داخل منحنى مغلق يسير c باستثناء عدد محدود من النقاط و ليكن $a,b,c,\cdots$ داخل c و التي لها البواقي $a_{-1},b_{-1},c_{-1},\cdots\cdots$ على الترتيب فإن:

$$\oint_c f(z)\,dz=2\pi i\{a_{-1}+b_{-1}+c_{-1}+\ldots\}$$

$$=2\pi i\sum \textit{residues of interior singuler points.}$$

الإثبات

بالنظر إلى الشكل



شكل(8-1)

وبأخذ المسارات الدائرية $c_1,c_2,\cdots$ و التي مركزها هو النقاط الشاذة كما موضح بالشكل فإن:

$$\oint_c f(z)\,dz=\oint_{c_1} f(z)\,dz+\oint_{c_2} f(z)\,dz+\oint_{c_3} f(z)\,dz+\ldots\rightarrow(1)$$

ولكن $\oint_{c_1} f(z)\,dz = 2\pi i\, a_{-1}$

$$\oint_{c_2} f(z)\,dz = 2\pi i\, b_{-1}$$

$$\oint_{c_3} f(z)\,dz = 2\pi i\, c_{-1}$$

و هكذا ....حيث $a_{-1}, b_{-1}, c_{-1}, \cdots\cdots$ هي البواقي كما قدمنا للنظرية وبالتالي فإن :

$$\oint_{c} f(z)\,dz = 2\pi i\left[a_{-1}+b_{-1}+c_{-1}+\ldots\right]$$

$$¿\,2\pi i\left[\sum of\ resydues\right]$$

(4-3) حسابات المتبقيات (الرواسب):-

يكون حساب مفكوك لمتسلسلة لورانت عملية مضنية، و حيث أن المتبقي عند z_0 يحتوي على معامل a_{-1} في مفكوك لورانت فإننا نبحث عن طريقة لحساب المتبقي عن بعض المعلومات حول طبيعة المتبقي عند z_0 .

إذا كان للدالة f نقطة شاذة مزالة عند z_0 فإن تعرف أن $n=1,2,\cdots$ و $z_{-n}=0$ و على ذلك إذا كانت z_0 نقطة شاذة مزاله فإن Res $[f, z_0]=0$

(4-3-1) نظرية متبقيات الأقطاب:-

i ¿ إذا للدالة f قطب بسيط عند z_0 فإن:

$$\text{Res}\ [f, z_0] = \lim_{z\to z_0}(z-z_0)f(z) \rightarrow (1)$$

ii ¿ اذا كان للدالة f قطب من الرتبة K عند z_0 فإن:

Res $[f, z_0]=\lim_{z \to z_0} \frac{1}{(k-1)!}(z-z_0)^k f(z)(2)$

البرهـــــــــــان

¿ i إذا كان z_0 قطب بسيط فإن:

$$f(z)=\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_{-1}(z-z_0)+\ldots$$

و إذا ضربنا الطرفين في $(z-z_0)$ وتأخذ النهاية عندما z $\to z_0$ فنحصل على:

¿

$$a_{-1}+a_0(z-z_0)+a_{-1}(z-z_0)^z+\ldots=a_{-1}$$

¿
¿
¿

$$(z-z_0)f(z)=\lim_{z \to z_0} ¿$$

$$\lim_{z \to z_0} ¿$$

=Res $[f, z_0]$

¿ ii إذا كان z_0 قطب من الرتبة K فإنه يمكن كتابة الدالة f على الصورة:

$$f(z)=\frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k}+\frac{a_k+1}{(z-z_0)^{k-1}}+\ldots+\frac{a_{-1}}{z-z_0}+a_0+a_1+(z-z_0)^2+\ldots$$

بضرب طرفي المعادلة في $(z-z_0)^k$ يتم إجراء التفاضل $(k-1)$ من المرات نحصل عليه:

$$\frac{d^{k-1}}{d z^k}(z-z_0)^k f(z)=(k-1)!a_{-1}+k!a_0(z-z_0)+\frac{(k+1)!}{2}a_1(z-z_0)^2+\ldots$$

و بأخذ النهاية عندما $z \to z_0$ نحصل على:

$$\lim_{z \to z_0}(z-z_0)^k f(z)=(k-1)!(k-1)!Res[f, z_0]$$

وبهذا يتم برهان النظرية.

(4-4) تطبيق:-

1) أوجد $\oint_c \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}dz$ حيث c يحتوي $z=\pm 2i, z=-1$

الحل

طبقاً لنظرية الباقي فإن:

$$\oint_c \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}dz = 2\pi i[R_1+R_2+R_3]$$

حيث (i) يوجد قطب من الرتبة الثانية عند $z=-1$ و بالتالي:

$$R_1 = \frac{1}{1!}\lim_{z\to -1}\frac{d}{dz}(z+1)^2\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}$$

$$¿\lim_{z\to -1}\frac{(z^2+4)(2z-2)-(z^2-2z)(2z)}{(z^2+4)^2}$$

$$¿-\frac{14}{25}$$

(ii) يوجد قطب من الدرجة الأولى عند $z=+2i$ و بالتالي :

$$R_2 = \lim_{z\to z!}(z-2i)\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z+2i)(z-2i)}$$

$$¿\frac{7+i}{25}$$

(iii) يوجد قطب من الدرجة الأولى عند $z=-2i$ وبالتالي:

$$R_3 = \lim_{z\to 2!}(z+2i)\frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z+2i)(z-2i)}$$

$$¿\frac{7-i}{25}=\acute{R}_2$$

وبالتالي فإن :

$$\oint \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}dz=2\pi i\left[\frac{-14}{25}+\frac{7+i}{25}+\frac{7-i}{25}\right]$$

$$¿2\pi i\frac{-14+14}{25}=0$$

(4.4.1 ملاحظات:-

1- إذا كان المطلوب $\oint_c \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}dz$ حيث c يحتوي فقط $z=-1$ فإنناحسب فقط R_2 و يكون التكامل:

$$\oint_c \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}dz=2\pi i\,R_1$$

$$¿2\pi i\left(\frac{-14}{25}\right)=\frac{-28\pi i}{25}$$

و إذا كانت c تحتوي النقطتين $z=\pm 2i$ فقط فإن:

$$\oint_c \frac{z^2-2z}{(z+1)^2(z^2+4)}dz=2\pi i\left[R_2+R_3\right]=2\pi i\left[\frac{14}{25}\right]$$

$$¿\frac{28\pi i}{25}$$

2- أحسب $\oint_{|z|=1} \sin\frac{1}{z}dz$

الحــــــــل

في هذه الحالة فإن $z=0$ نقطة شاذة من النوع الأساسي essential و هي داخل المسار $|z|=1$ ... وبالتالي

$$\oint_{|z|=1} \sin\frac{1}{z}\,dz = 2\pi i R$$

لإيجاد R نقوم بحساب مفكوك لورانت للدالة $\sin\frac{1}{z}$

$$\sin\frac{1}{z} = \frac{1}{z} - \frac{1}{3!}\cdot\frac{1}{z^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{z^5}$$

و هي جزء أساسي فقط و نجد منها أن $R = a_{-1} = 1$ وبالتالي:

$$\oint_{|z|=1} \sin\frac{1}{z} = 2\pi i$$

3- أوجد $\oint_c (z-3)\sin\frac{1}{z+2}\,dz$ حيث c يحتوي النقطة $z=-2$

الحـــــل

توجد نقطة شاذة اساسية عند $z=-2$ المحتواة داخل c و بالتالي :

$$\oint_c (z-3)\sin\frac{1}{z+2}\,dz = 2\pi i R$$

و لإيجاد R نوجد أولاً مفكوك لورانت للدالة $(z-3)\sin\frac{1}{z+2}$ حول النقطة $z=-2$ كالآتي:

$$(z-3)\sin\frac{1}{z+2} = (U-5)\sin\frac{1}{u}\ z+2=u$$

بوضع

$$¿(u-5)\left[\frac{1}{U} - \frac{1}{3!}\frac{1}{U^3} + \frac{1}{5!}\frac{1}{U^5} - \dots\right]$$

$$¿\left[1 - \frac{1}{3!}\frac{1}{U^2} + \frac{1}{5!}\frac{1}{U^5} - \dots - \frac{5}{u} + \frac{5}{3!}\frac{1}{u^3} - \frac{5}{5!}\frac{1}{u^5} - \cdots\right]$$

وبالتالي فإن $R = a_{-1} = -5$

أي أن

$$\oint_c ¿ \; (z-3)\sin\frac{1}{z+2}dz=2\pi i(-5)=10\pi i$$

و يلاحظ أن $\oint_c (z-3)\sin\frac{1}{z+2}dz=0$ إذا كانت $z=-2$ خارج C تذكر ذلك دائماً فنظرية كوشي جاهزة للتطبيق دائماً.

4- أوجد $\oint_{|z|=\pi} sec\, z\, dz$

الحــــل

نعلم أن $sec\, z=\frac{1}{\cos z}$

وأن $\cos ¿ 0$ تعطي $Z=\frac{\pi}{2}(2k+1), K=0,\pm 1,\ldots$

و بالتالي فإن القطب الوحيد المحتوي داخل $|z|=\pi$ هو $z=\frac{\pi}{2}$ و هو قطب يسير و بالتالي :

$$R=\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\left[z-\frac{\pi}{2}\right]\frac{1}{\cos z}$$

$$¿\lim_{z\to\frac{\pi}{2}}\frac{1}{-\sin z}$$

بتطبيق قاعدة لوبتال $R=-1$

أي أن

$$\oint_{|z|=\pi} sec\, z\, dz=-2\pi i$$

-5 أوجد متبقي الدالة $f(z)=\frac{\pi\cot(\pi z)}{z^2}$ عند $z_0=0$

الحـــــــــل

نكتب الدالة على الصورة $f(z)=\frac{\pi cot(\pi z)}{z^2}$ و حيث أن: $z^2\sin(\pi z)$ لها صفر من الرتبة الثالثة عند z_0 فإننا نرى أن f لها قطب من الرتبة الثالثة عند $z_0=0$ و بالتالي فإن:

$$\text{Res}\ [f,0]=\frac{1}{2!}\lim_{z\to 0}\frac{d^2}{dz^2}\pi z\,co\,t(\pi z)$$

$$¿\frac{1}{2}\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\left(\pi\cot(\pi z)-\pi^2\cos e\,c^2(\pi z)\right)$$

$$¿\frac{1}{\pi}\lim_{z\to 0}\left[\pi z\,cost(\pi z)-1\right]cosec^2(\pi z)$$

$$\pi^2 z\cos\frac{\pi z-¿\sin\pi z}{\sin^3.\pi z}$$

$$¿\pi^2\lim_{z\to 0}¿$$

باستخدام قاعدة لوبتال نحصل على :

$$\text{Res}\ [f,0]=\pi^2\lim_{z\to 0}\frac{-\pi^2 Z\sin\pi z}{3\pi\sin^2(\pi z)\cos(\pi z)}$$

$$¿\frac{-\pi^2}{3}\lim_{z\to 0}\frac{\pi z}{\sin(\pi z)}.\lim_{z\to 0}\frac{1}{\cos(\pi z)}$$

$$¿\frac{-\pi^2}{3}$$

6- حلل: $f(z)=\frac{z^2+3z+2}{z^2(z-1)}$ إلى الكسور الجزئية:

الحـــــل

بحساب المتبقيات:

$$\text{Res}\ [zf(z),0]=\lim_{z\to 0}\frac{z^2+3Z+2}{Z-1}=-2$$

$$\text{Res}\ [f,0]=\lim_{z\to 0}\frac{d}{dz}\frac{z^2+3z+2}{z-1}=-5$$

$$\text{Res}\ [f,1]=\lim_{z\to 1}\frac{z^2+3z+2}{z-1}=-6$$

وعلى ذلك فإن:

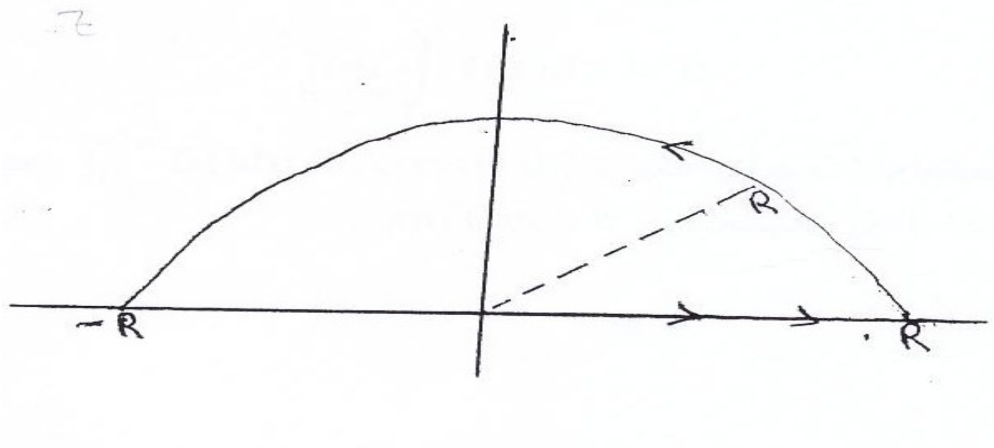
$A=-2, B=-5, C=6$

فيكون :

$$\frac{z^2+3z+2}{z^2(z-1)}=\frac{-2}{z^2}-\frac{5}{z}+\frac{6}{z-1}$$

(4-5) تطبيقات في التكامل المحدود Application on Definite integrals:-

(4-5-1) تكاملات على صورة $\int_{-\infty}^{\infty} F(x)\,dx$,F(x) دالة نسبية في هذه الحالة أحسب التكامل $\oint_c f(z)\,dz$ على المسار المغلق المبين في الشكل



الشكل (1-9)

الشكل (1-9)

و يتطلب الأمر بالنسبة للشكل حذفاً و مهارة لإيجاد التكامل على المسار Γ عندما **R** $\to \infty$

(4.5.1 نتيجة (1):

من الشكل أعلاه :-

إذا كانت $|f(z)| \le \frac{M}{R^k}$ لـ $Z = R e^{i\theta}$ حيث $M, K > 1$ ثابت فإن : $\lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma} F(z)\, dz = 0$ على نصف قطر الدائرة المبينة في الشكل أعلاه.

الإثبـــــــــــــــــات

$$\left| \int_{\Gamma} f(z)\, dz \right| \le \int_{\Gamma} |f(z)||dz|$$

$$\le \int_{\Gamma} \frac{M}{R^k} |iR e^{i\theta} d\theta|$$

$$¿ \frac{M}{R^k} \pi R = \frac{\pi M}{R^{k-1}}$$

فإذا كانت $K > 1$ فإن

$$\lim_{R \to \infty} \left| \int_{\Gamma} f(z)\, dz \right| = 0$$

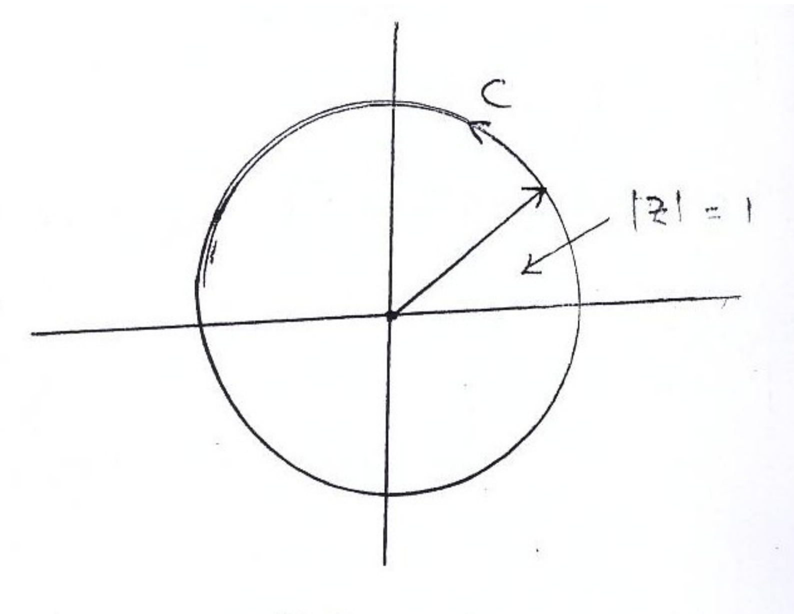
وبالتالي:

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma} f(z)\,dz = 0$$

(2-5-4) تكاملات على صورة $\int_{0}^{2\pi} G(\sin\theta, \cos\theta)\, d\theta$ حيث G()

دالة نسبية في $\sin\theta \cos\theta$:

في هذه الحالة نستعمل المسار المغلق الموضح بالشكل (1-10)



الشكل (1-10)

و بالتالي

فإن

$z = e^{i\theta}$ و تتكون $\sin\theta = \dfrac{z - \frac{1}{Z}}{2!}$

و كذلك $\cos \frac{z+\frac{1}{z}}{2}$ و أيضاً $dz = iz\, d\theta$

وبالتالي نحسب التكامل $\int_c f(z)\, dz$ بنظرية الباقي.

(4-5-3) تكاملات في صورة $\int_{-\infty}^{\infty} \left(Dr \begin{matrix} \cos mx \\ \sin mx \end{matrix} \right) . F(x)\, dx$ حيث F(x) دالة نسبية:

في هذه الحالة نأخذ المسار C الذي في الشكل (1-1) و تكامل الدالة $F(z) e^{imz} dz$ على C ننتظر طبعاً مشكلة التكامل ونتيجة (1) تواجه هذه المشكلة .

(4.5.3 نتيجة :

إذا كانت $|F(z)| \le \frac{M}{R^k}, k>0$ على $M, Z = \Re^{i\theta}$ ثابت فإن

$$\lim_{R \to \infty} \int_{\Gamma} F(z) e^{imz} dz = 0$$

الإثبـــــــــات

على Γ فإن $Z = \Re^{i\theta}$ و بالتالي

$$\int_{\Gamma} e^{imz} F(z)\, dz = \int_0^{\pi} e^{\Im R e^{i\theta}} f\left(R e^{i\theta}\right) iR e^{i\theta} d\theta$$

و بالتالي

$$\left| \int_0^{\pi} e^{\Im R e^{i\theta}} F\left(R e^{i\theta}\right) iR e^{i\theta} d\theta \right| \le \int_0^{\pi} \left|e^{\Im R e^{i\theta}}\right| \left|f\left(R e^{i\theta}\right)\right| \left|iR e^{i\theta}\right| d\theta$$

$$\le \frac{M}{R^k} \int_0^{\pi} \left| e^{imR} (\cos\theta + i \sin\theta) \right| R d\theta$$

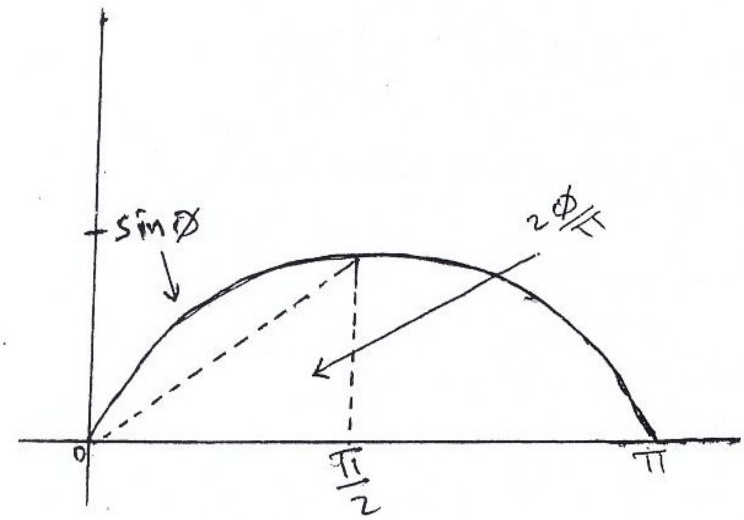
¿ $\frac{M}{R^k}\int_0^{\pi} \underbrace{\left|e^{imR\cos\theta}\right|}_{1}\left|e^{-mR\sin\theta}\right| R d\theta$

¿ $\frac{M}{R^{k-1}}\int_0^{\pi} e^{-m R\sin\theta} d\theta$

¿ $\frac{2M}{R^{k-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-m R\sin\theta} d\theta$

و ذلك لأن $\sin(\pi-\theta)=\sin\theta$ و متماثلة حولة $\frac{\pi}{2}$ و بالنظر للشكل (1-12) فإن

$\frac{2\theta}{\pi} \leq \sin\theta, 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$



الشكل (1-11)

وبالتالي:

فإن

$$\frac{2\mathrm{M}}{R^{k-1}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-mR\sin\theta}\,d\theta \le \frac{2\mathrm{M}}{R^{k-1}}\int_0^{\cdot} e^{-mR\left(2\frac{\theta}{\pi}\right)}\,d\theta$$

$$\text{¿}\,\frac{2\mathrm{M}}{R^{k-1}}\frac{-\pi}{2\mathrm{mR}}\,e^{-2\mathrm{mR}\frac{\theta}{\pi}}\Big|_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\text{¿}\,\frac{-M\pi}{m\,R^k}\left(e^{-mR}-1\right)$$

$$\text{¿}\,\frac{M\pi\left(1-e^{-mR}\right)}{m\,R^k}$$

والأن عندما R $\to\infty$

$$\lim_{R\to\infty}\left|\int_{\Gamma}^{\cdot} e^{imz}F(z)\,dz\right|=0$$

و بالتالي

فإن

$$\lim_{R\to\infty}\int_{\Gamma}^{\square} e^{imz}f(z)\,dz=0$$

لاحظ أنه للاستفادة من العارض السابق فلابد من إثبات أن :

$|F(z)|\le\frac{M}{R^k},k>0$ على Γ

(4-5-4) تطبيق:-

1) أوجد: $\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\left(1+x^2\right)^2}$

الحل

باستعمال نفس المسار المغلق في الشكل (1-1) فإن

$$\oint_c \frac{dz}{(1+z^2)^2} = \int_{-R}^{R} \frac{dx}{(1+x^2)^2} + \int_{\Gamma} \frac{dz}{(1+z^2)^2}$$

و الأن فإنه على $\left(z = Re^{i\theta}\right)$

$$|f(z)| = \frac{1}{|1+z^2|^2} = \frac{1}{|1+R^2 e^{2i\theta}|} \le \frac{1}{\left(|R^2 e^{2i\theta}|-1\right)^2}$$

$$¿\frac{1}{(R^2-1)^2}$$

ولكن $\frac{1}{R^2-1} < \frac{\frac{4}{3}}{R^2}$

إذن

$$\frac{1}{(R^2-1)^2} < \frac{\frac{16}{9}}{R^4} = \frac{M}{R^K}, K>1$$

وبالتالي فان

$$\lim_{R\to\infty} \left| \int_{\Gamma} \frac{dz}{(1+z^2)^2} \right| = 0$$

أي أن

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma} \frac{dz}{(1+z^2)^2} = 0$$

$$\oint_C \frac{dz}{(1+z^2)^2} = \int_{\infty}^{\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^2}$$

$$¿2\pi i\left[\sum Ri\right]$$

و الأن عندها قطب من الرتبة الثانية عند $z=i$ و بالتالي فإن

$$R=\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}(z-i)^2\frac{1}{(1+z^2)^2}$$

$$¿\lim_{z\to i}\frac{d}{dz}\frac{1}{(z+i)^2}$$

$$¿\lim_{z\to i}\frac{-2(z+i)}{(z+i)^4}$$

$$¿\frac{-2}{(2i)^3}=\frac{-1}{4i(-1)}=\frac{1}{4i}$$

و بالتالي فإن :

$$\frac{dx}{(1+x^2)^2}=¿2\pi i\left[\frac{1}{4i}\right]=\frac{\pi}{2}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}¿$$

2) **أحسب :** $\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\sin\theta}$

الحل

كلنا نعلم التعويضات المشهورة لأمثال هذا التكامل.....، دعنا نرى كيف تسير الأمور باستعمال نظرية الباقي باستعمال المسار الدائري $|z|=1$ فإن:

$$d\theta=\frac{dz}{iz},\sin\theta=\frac{z-\frac{1}{z}}{2i}$$

و بالتالي فإن

$$\frac{d\theta}{2+\sin\theta}=\frac{\frac{dz}{iz}}{\frac{z-\frac{1}{z}}{2+2i}}=\frac{2idz}{4i+z-\frac{1}{z}}\cdot\frac{1}{iz}$$

$$¿\frac{2dz.z}{z^2+4iz-1}\cdot\frac{1}{iz}$$

$$¿2\frac{dz}{z^2+4iz-1}$$

ولكن $z^2+4iz-1=0$ تعطي الجزرين $[Z=(-2\pm\sqrt{3})i]$ و العبرة بالذي داخل المسار وهو $Z=(-2\pm\sqrt{3})i$ حيث $|-2+\sqrt{3}|<1$ و بالتالي فإن:

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\sin\theta}=\oint_{c_{|z|=1}}\frac{2dz}{z^2+4iz-1}$$

$$¿2\pi i(R)$$

حيث

$$R=\lim_{z\to(-2+\sqrt{3})i}\frac{z-(-2+\sqrt{3})i)2}{z-(-2+\sqrt{3})i)(z-(-2-\sqrt{3})i)}$$

$$¿\frac{2}{(-2+\sqrt{3})i+(2+\sqrt{3})i}$$

$$¿\frac{2}{2\sqrt{3}i}$$

و بالتالي فإن:

$$\int_0^{2\pi}\frac{d\theta}{2+\sin\theta}=2\pi i\frac{2}{2\sqrt{3}i}$$

$$¿\frac{2\pi}{\sqrt{3}}$$

و على القارئ أن يعلم أن التكامل

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2+\sin\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2-b^2}}, a>|b|$$

و يمكنه محاولة إثبات ذلك بشكل عام.

3)أثبت ان $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{1+x^2} dx = \pi e^{-m}$

الإثبــــــات

لإيجاد $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{1+x^2} dx = \pi e^{-m}$ نلاحظ أن $f(z)=\frac{1}{1+x^2}$ تم التعامل معهاسابقاً و بالتالي فإن:

$$\lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma} F(z) e^{imz} dz = 0$$

وبالتالي فإن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{1+x^2} dx = \lim_{R\to\infty} \int_{\Gamma} \frac{e^{imz}}{1+x^2} dz$$

ويوجد قطبان للدالة $f(z)$ عند $z=+i$ و عند $z=-i$ و العبرة بالأول فقط وبالتالي فإن:

$$R = \lim_{z\to i} (z-i) \frac{e^{imz}}{(z-i)(z+i)}$$

$$¿ \frac{e^{-m}}{2i}$$

و بالتالي

$$\int_{-R}^{R} \frac{e^{imX}}{1+x^2} dx + \int_{\Gamma} \underbrace{\frac{e^{imz}}{1+Z^2}}_{0} dz = \frac{e^{imz}}{2i}(2\pi i)$$

وبأخذ $R \to \infty$ فإن:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{1+x^2}\,dx + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin mx}{1+x^2}\,dx = \pi\, e^{-m}$$

و بالتالي نحصل على

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos mx}{1+x^2}\,dx = \pi\, e^{-m}$$

و أيضا

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin mx}{1+x^2}\,dx = 0$$

(4-5-5) تكاملات ومسارات مغلقة مشهورة:-

(4-5-5-1) أوجد تكامل $\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$

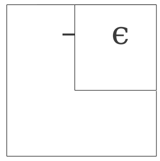
الحـــــــــل

لاحظ أن المسار لا نهائي و أن $\frac{\sin x}{x}$ دالة زوجية وبالتالي

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = 2\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx$$

اي ان $\int_{0}^{\infty} \frac{\sin x}{x}\,dx = \frac{1}{2}\lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} \frac{\sin x}{x}\,dx$

و بالتالي فالمسار نصف الدائري يصلح لذلك و لكن هنالك مشكلة تواجه تطبيق هذا المسار و ي أن النقطة الشاذة (المزالة) $Z=0$ تقع المسار الحقيقي من –R إلى R لذلك يتم عزل هذه النقطة بنصف دائرة $|z| = \in$ و بالتالي يصبح المسار كالتالي



الشكل (12-1)

وبالتالي فإن $\oint_c \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$ لأن) $Z=0$ نقطة خارج المسار المغلق C و بالتالي:

$$\int_{-R}^{-є} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{y} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}}{x} dx + \int_{\Gamma} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

ولكن

$\frac{e^{iX}}{X}$]

¿

¿ $X \rightarrow -X$

¿

¿

$\int_{-R}^{-\varepsilon}$ ¿

وبالتالي فإن

$$\int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x} dx + \int_{y}^{\cdot} \frac{e^{iz}}{z} + \int_{\Gamma}^{\cdot} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

أي أن

$$2i \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{ix}-e^{-ix}}{x} \frac{1}{x} dx + \int_{y}^{\cdot} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\Gamma}^{\cdot} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

أي أن

$$2i \int_{\varepsilon}^{R} \frac{\sin x}{x} dx + \int_{y}^{\cdot} \frac{e^{iz}}{z} dz + \int_{\Gamma}^{\cdot} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0 \rightarrow (1)$$

و لكن

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\Gamma}^{\cdot} \frac{e^{iz}}{z} dz = 0$$

لأن

$$|f(z)| = \left|\frac{1}{z}\right| = \frac{1}{R}$$

و الأن على نصف الدائرة الصغرى $|z| = \varepsilon$ ....أي أن $z = \varepsilon e^{i\theta}$ فإن

$$\int_{y}^{\cdot} \frac{e^{iz}}{z} dz = \int_{\pi}^{0} \frac{e^{i\varepsilon e^{i\theta}}}{\varepsilon e^{i\theta}} \in i e^{i\theta} d\theta$$

و بأخذ النهاية $\varepsilon \rightarrow 0$ فإن

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{y}^{\cdot} \frac{e^{iz}}{z} dz = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\pi}^{0} \frac{e^{i\varepsilon e^{i\theta}}}{1} i d\theta$$

$$¿ i \int_{\pi}^{0} (1) d\theta$$

$$¿ i (0 - \pi)$$

$$¿ - i\pi$$

و بالتالي نحصل بالتعويض في (1) و أخذ $R \rightarrow \infty ; \varepsilon \rightarrow 0$ على

$$2i\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx-\pi i+0=0$$

أي أن

$$\int_0^{\infty}\frac{\sin x}{x}dx=\frac{\pi}{2}$$

(4-5-5-2) ملاحظة:

من (4-5-5-1) يعطينا فكرة عن كيفية التصرف إذا وجدت نقاط شاذة على المحور الحقيقي، فنقوم بعزلها بأنصاف دائرة ثم نحاول إيجاد قيمة التكامل على هذه المسارات الفرعية و نأخذ النهاية عندما تؤول أنصاف الأقطار إلى الصفر.

الخلاصة:

تعرف الباحثون من خلال هذا البحث للنقاط التالية:

1- **عن طريق معادلتي كوشي وريمان عرفنا كيفية معرفة الدالة إذا كانت قابلة للإشتقاق أم لا .**

2- **من خلال معادلتي كوشي و ريمان توصلنا إلى أنه إذا كانت الدالة تقبل الاشتقاق فهي إما تحليلية أو غير تحليلية.**

3- **عن طريق متسلسلات تايلور وماكلورين توصلنا إلى نظرية الباقي**

4- **تعتبر معادلة كوشي وريمان من ابسط المعادلات في التحليل المركب.**

Conclusion:

Researchers know through this research the following points:

1. Using equations Cauchy and Riemann knew how to tell the function if they are derived or not.
2. Through Riemann equations Kochi and we reached that if the function accepts derivation are either analytical or non-analytical.
3. Using Markov Taylor and Maclaurin reached remainder theorem
4. Cauchy and Riemann equation is one of the simplest equations in the composite analysis.