1-2 تمهيد:

يتضمن هذا الفصل عرض للإطار النظري من خلال توضيح مفهوم السلاسل الزمنية بإتجاهي الزمن والتكرار ومراحل تحليلها وبعض النماذج المستخدمة وخصائصها وكيفية بناءها.

2-2 تحليل السلاسل الزمنية Time Series analyses: [1] [7] [6] [14] [25]

السلسلة الزمنية هي مجموعة من المشاهدات الخاصة بظاهرة معينة خلال حقب متعاقبة وبحدود متتابعة، و تكون السلسلة الزمنية مستقرة Stationary إذا كانت الخصائص الإحتمالية لا تتأثر بالزمن أو غير مستقرة Non stationary إذا كانت الخصائص الإحتمالية تتأثر بالزمن.

ويتكون تحليل السلاسل الزمنية من مراحل متسلسلة تبدأ بمرحلة التشخيص Identification للنموذج والتي تعد المرحلة الأهم وتليها مرحلة تقدير Estimation معلمات النموذج ، ومن ثم مرحلة فحص مدى الملاءمة Diagnostics Checking للنموذج وتأتي المرحلة الأخيرة وهي مرحلة التكهن أو التنبؤ Forecasting، ومن الجدير بالذكر أن هناك إتجاهين لتحليل السلاسل الزمنية الأول هو إتجاه الزمن Time Domain والذي يعتمد على دوال الإرتباط الذاتي ودوال الإرتباط الذاتي الجزئيو الثانى هو إتجاه التكرار Frequency Domain والذي يعتمد على التحليل الطيف Spectrum Analysis وهنا سيكون تطبيقنا في هذا البحث على إتجاهي الزمن والتكرار.

1-2-2 أهداف تحليل السلاسل الزمنية Purpose of time series analysis

من أهم الأهداف لتحليل السلاسل الزمنية:

1. الحصول على وصف دقيق للملامح الخاصة للعملية التي تتولد منها السلسلة الزمنية وذلك بتمثيل السلسلة الزمنية بيانياً حيث يظهر ذلك إتجاه التزايد أو التناقص أو الثبات مع تغيير الزمن بالزيادة، بالإضافة لإظهار البيانات الشاذه.
2. تفسير وشرح سلوك السلسلة ويتم ذلك ببناء نماذج إحصائية ملاءمة للظاهرة المدروسة.
3. التنبؤ بسلوك السلسلة الزمنية فيالمستقبل بناءاً على المعلومات المتوفره عن الماضي.

4. التحكم في العملية التي تتولد منها السلسلة الزمنية لفحص ما يمكن حدوثه عند تغيير بعض معلومات النموذج.

2-2-2 بعض التعريفات :

التشويش الأبيض White Noise $\{a_t\}$ هو عبارة عن متتابعة من المشاهدات العشوائية غير المرتبطة (وأحياناً نفترض إنها متتابعة من المتغيرات العشوائية التي تكون مستقلة ولها توزيعات متطابقة (Independent, Identically Distributed (IID) بمتوسط صفري وتباين ثابت σ^2 و غالباً ما يكون لها الخصائص الآتية:

$$1-\quad E\left(a_t\right)=0, \forall t$$

$$2-\quad \operatorname{cov}\left(a_t, a_s\right)=\begin{cases}\sigma^2, & \forall t, \forall s, t=s \\ 0, & \forall t, \forall s, t \neq s\end{cases}$$

$$3-\quad a_t \sim N\left(0, \sigma^2\right)$$

$$4-\quad E\left(a_t, a_s\right)=0, \quad \forall t, \forall s, t \neq s$$

$$5-\quad E\left(z_s, a_t\right)=0, \quad \forall t, \forall s, t \neq s$$

عامل الإزاحة الخلفي Backshift Operator لأي مشاهدة هو المشاهدة السابقة لها ، ويرمز له بـ B وله الخواص التالية:

$$1-B z_t=z_{t-1}$$

$$2-B^m z_t=B^{m-1}\left(B z_t\right)=B^{m-2}\left(B\left(B z_t\right)\right)=\cdots=z_{t-m}$$

$$3-B c=c, \quad c \quad \text{is a constant}$$

السلاسل الزمنية الموسمية: Seasonal Time series

يقصد بها مجموعة من القيم المشاهدة المرتبطة مع بعضها تولدت بشكل متعاقب مع إستمرار الزمن وتحتوي على ظاهرة الموسمية والتي تشير الي النمط المتماثل لحركة السلسلة الزمنية في الأشهر المتقابلة خلال السنوات المتتالية، إي ان السلسلة الزمنية تعيد نفسها بعد فترات زمنية ثابتة (Fixed

(Intervals) وتدعي هذه الفترة بالفترة الموسمية ونرمز لها بالرمز (s) وقد تكون (s) سنة أو فصلاً أو شهراً ، إي ان $f(t+s) = f(t)$

ويصعب تمييز الموسمية اذا كانت مدمجة مع الإتجاه العام وهذه المشكلة يمكن تفاديها عن طريق تحديد الموسمية عندما تكون البيانات مستقرة، إي ان وجود الإتجاه العام في البيانات يعني انها غير مستقره وبالتالي يمكن تحويلها الي بيانات مستقرة بإستخدام الفروق.

3-2 إتجاهات تحليل السلاسل الزمنية: [14] [6] [4] [24] [17] [23]

هناك إتجاهين لتحليل السلاسل الزمنية الأول هو إتجاه الزمن Time Domain والثاني هو إتجاه التكرار Frequency Domain.

1-3-2 التحليل بإتجاه الزمن: Time Domain

تحليل السلاسل الزمنية بإتجاه الزمن يعتمد على دوال الإرتباط الذاتي ودوال الإرتباط الذاتي الجزئي الثانى.

1-1-3-2 الإرتباط الذاتي (Autocorrelation Function (ACF

يعرف معامل الإرتباط الذاتي بانه مقياس لدرجة العلاقة بين قيم المتغير، ويقدر معامل الأرتباط الذاتي حسب الصيغة الاتية:

$$\rho_k = \frac{E[(Z_t-\mu)(Z_{t+k}-\mu)]}{\sqrt{E(Z_t-\mu)^2 E(Z_{t+k}-\mu)^2}} = \frac{\sum_{t=1}^{n-k}(Z_t-\bar{Z})(Z_{t+k}-\bar{Z})}{\sum_{t=1}^{n}(Z_t-\bar{Z})^2} \quad \ldots\ldots (1-2)$$

ان دالة الارتباط الذاتي (ACF) تستخدم في تحليل السلاسل الزمنية لانها تعطي معلومات حول سلوك السلسلة وعن مكوناتها الاساسية، كما تساعد على تحديد استقرارية السلسلة من عدمها، كما تستخدم دالة الارتباط الذاتي للبواقي Residual Autocorrelation Function (RACF) لفحص ملاءمة النموذج عن طريق إختبار عشوائية أخطاء التنبؤ.

2-1-3-2 الارتباط الذاتي الجزئي: Partial Autocorrelation Function (PACF)

يعرف معامل الارتباط الذاتي الجزئي بانه مقياس لدرجة العلاقة بين مشاهدتين Z_t و Z_{t+1} بثبوت بقية المشاهدات الأخري ويقدر معامل الأرتباط الذاتي حسب الصيغة الاتية:

$$\rho_{kk} = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ \rho_1, & k = 1 \\ \dfrac{\begin{matrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_2 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & & \rho_1 & \rho_k \end{matrix}}{\begin{matrix} 1 & \rho_1 & \cdots & \rho_{k-2} & \rho_{k-1} \\ \rho_1 & 1 & \cdots & \rho_{k-3} & \rho_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \vdots \\ \rho_{k-1} & \rho_{k-2} & & \rho_1 & 1 \end{matrix}} & k = 2,3,\ldots \end{cases} \quad \ldots (2-2)$$

ان دالة الارتباط الجزئي (PACF) لاتقل أهمية عن دالة الارتباط الذاتي (ACF) فهي إيضاً أداة مهمة في تحليل السلاسل الزمنية وتستخدم إيضاً في تشخيص النموذج وتحديد درجته وفي فحص ملاءمة النموذج من خلال إختبار عشوائية أخطاء التنبؤ.

2-3-2 التحليل بإتجاه التكرار:Frequency Domain

تحليل السلاسل الزمنية بإتجاه التكرار يعتمد على تحليل الطيف Spectrum Analysis إي قوة الطيف power spectrum ودالة كثافة الطيف.

1-2-3-2 قوة الطيف power spectrum

هي عباره عن تحويل فورير لدالة التغاير المشترك الذاتي وهو اسلوب متبع لتحويل إي دالة تكون بدلالة الزمن g(t) الي دالة أخري f(w) بدلالة التكرار، حيث يعطي لقيم الدالة المحوله صفة الإستقلالية في قيمها.

اما في حالة تحويل دالة بدلالة التكرار إلي دالة بدلالة الزمن فيسمي بتحويل فورير المعكوس (Inverse Fourier Transformation) لنفرض أن $[z_t]_{t=1}^{\infty}$ سلسلة زمنية مستقرة وبإفتراض ان سلسلة قيم التغاير المشترك الذاتي γ_k قابله للجمع المطلق (absolutely summable) إي ان

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\gamma_k| < \infty$$

فقوة الطيف للسلسلة الزمنية Z_t هي دالة P(w) المعرفة بالصيغة الرياضية التالية:

$$P(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \; e^{-iwk} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (2-2)$$

حيث ان w=2πf تمثل عدد الزوايا النصف قطرية (Radians) في وحدة الزمن واما التكرار f= k/n فهو عدد الدوران في وحدة الزمن وقد تدعي P(w) بدالة قوة الطيف (Power spectrum Function) ان معكوس العلاقة بالمعادلة أعلاه هو

$$\gamma_k = \int_{-\pi}^{\pi} e^{-kw} P(w) dw \,, -\pi \le w \le \pi$$

ويمكن إعادة كتابة المعادلة (3-2) بالصيغة التالية:

$$P(w) = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \gamma_k \; (\cos(wk) - i\sin(wk))$$

$$= \frac{1}{2\pi} \gamma_0 \; (\cos(0) - i\sin(0)) + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \; (\cos(wk) + \cos(-wk) - i\sin(wk) - i\sin(-wk)))$$

$$= \frac{1}{2\pi} (\gamma_0 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k \; \cos(wk) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (4-2)$$

ويمكن إعادة كتابة تعريف الدالة P(w) بدلالة دالة الإرتباط الذاتي ρ_k، فمن المعادلة أعلاه نحصل على:

$$= \frac{\gamma_0}{2\pi} (1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \cos(wk) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . . (5-2)$$

لذلك نجد ان دالة الإرتباط الذاتي تدرس السلسلة في إتجاه الزمن وان قيم الدالة تكون مرتبطة مع بعضها مما يؤدي الي صعوبة تفسير قيمها، بينما دالة قوة الطيف فهي تدرس السلسلة في مجال التكرار والتي تعطي للدالة قيماً مستقلة عن بعضها للترددات المختلفة وعند معرفة إحدي الدالتين يمكن معرفة الأخري.

2-2-3-2 دالة الكثافة الطيفية:Spectral Density Function

تعرف دالة الكثافة الطيفية بانها مقياس لتوزيع القدرة كدالة التردد حيث أن التردد Frequency تمثل عدد الدورات في الثانية، ويتم الحصول على دالة الكثافة الطيفية f(w) (Spectral Density Function) وبالصيغة الرياضية التالية: $f(w) = \frac{P(w)}{\sigma_z^2}$

$$f(w) = \frac{1}{2\pi} (1 + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \cos(wk) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . . (6-2)$$

خواص هذه الدالة هي:

$$1. \int_{-\pi}^{\pi} f(W)dW = 1$$

$$2. f(W) \geq 0, \forall w$$

$$3. f(-w) = F(w)$$

للمعلمات ذات القيم الحقيقية

أن الطيف الذي يمثل معدل مربع دالة كثافة الطيف الي المتغير المستقل الذي يعتبر ثابت في نقطة معينة ومتغير في نقطة أخري يعرف بطيف القدرة.

4-2 الإستقرارية stationary [25] [22] [20] [27] [18] [19]

ويقصد بالإستقرارية من الناحية الإحصائية بان الوسط الحسابي والتباين للسلسلة الزمنية ثابتين، و عدم تحقق أي من الشرطين السابقين يؤدي إلى عدم إمكانية تحليل السلسلة الزمنية و لذلك يجب معالجته أولاً ومن بين الاساليب المستخدمة في تثبييت استقرارية السلسلة الزمنية ما يلي:

1-4-2 عدم الإستقرارية في المتوسط:

طريقة الفروق :

تتم معالجة عدم الإستقرار في المتوسط بإيجاد تحويل مناسب للسلسلة غير المستقرة لتحويلها إلى سلسلة مستقرة فإذا كان لدينا النموذج الآتي:

$$z_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_t \ldots \sim N(0, \delta^2)$$

نجد إن المتوسط هو $E(z_t) = \alpha_0 + \alpha_1 t$

وهو غير ثابت بالنسبة للزمن، أي أن شرط الإستقرار الأول غير متحقق في هذه الحالة.

نوجد التحويل∇z_t و كالتالي:

$$\nabla z_t = z_t - z_{t-1}$$

الآن نجد متوسط السلسلة الجديدةw_t

$$E(w_t) = \alpha_1 = constant \ldots \forall_t$$

أي أن تطبيق التحويل$(1 - B) = \nabla$ على السلسلة غير المستقرة (أي أخذ الفرق الأول للسلسلة) حولها إلى سلسلة مستقرة.

و كمثال آخر إذا كان لدينا النموذج الآتي:

$$z_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_1 t^2 + \alpha_t \ldots \sim N(0, \delta^2), \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in (-\infty, \infty)$$

بإيجاد المتوسط $E(z_t) = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_1 t^2$

وهو يعتمد على الزمن، أي أن النموذج غير مستقر. بأخذ التحويل$\nabla^2 z_t$ (أخذ الفرق الثاني) نجد

$$(1 - 2B + B^2)z_t = (1 - 2B + B^2)(\alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_1 t^2 + \alpha_t)$$
$$= 2\alpha_1 + E(\alpha_0 + \alpha_{t-1} + \alpha_{t-2})$$

وهكذا

$$w_t = \nabla^2 z_t = 2\alpha_1$$
$$E(w_t) = 2\alpha_1 = constant \dots \forall_t$$

أي أن تطبيق التحويل ∇^2 (أي أخذ الفرق الثاني) على السلسلة غير المستقرة حولها إلى مستقرة.

بشكل عام إذا كان النموذج غير المستقر على الشكل

$$z_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_1 t^2 + \alpha_t \dots \sim N(0, \delta^2), \alpha_0, \alpha_1, \alpha_2 \in (-\infty, \infty)$$

فإن التحويل$\nabla^{\mathrm{d}} z_t$ يحوله إلى نموذج مستقر، أي أن $w_t = \nabla^{\mathrm{d}} z_t$ هو نموذج مستقر.

2-4-2 في حالة عدم ثبات التباين:

تتم معالجة عدم الإستقرار في التباين بإيجاد تحويل مناسب للسلسلة غير المستقرة لتحويلها إلى سلسلة مستقرة فإذا كان لدينا النموذج الآتي:

$$z_t = z_{t-1} + \alpha_1, \alpha_t \dots \sim N(0, \delta^2)$$

نجد من التعويض المتكرر $z_t = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_t$

وبأخذ التوقع والتباين

$$E(z_t) = 0 = constant \dots \forall_t$$
$$V(z_t) = t\sigma^2$$

ونلاحظ إن التباين يعتمد على الزمن t.

بأخذ الفرق الأول $w_t = \nabla z_t = z_t - z_{t-1} = \alpha_t$

وبأخذ التوقع والتباين

$$E(w_t) = 0 = constant \dots \forall_t$$

$$V(w_t) = \sigma^2 = constant \dots \forall_t$$

إذن الفرق الأول حول السلسلة غير المستقرة في التباين إلى سلسلة مستقرة.

بشكل عام إذا كان التباين دالة في متوسط متغير على الشكل

$$V(z_t) = cf(\mu_t)$$

حيث $c > 0$ ثابت و $f(\mu_t)$ دالة معروفة تعطى قيمة غير سالبة و μ_t متوسط يتغير مع الزمن و بالتالي فإن التباين يعتمد على الزمن وهنا نحاول إيجاد تحويل $T(z_t)$ أي أيجاد دالة $T(z_t)$ لإستقرار التباين.

التحويل

$$y = T(z_t) = \frac{z_t^{\lambda} - 1}{\lambda} \qquad \dots.(7-2)$$

يعطي سلسلة مستقرة في التباين حيث $\lambda \in (-\infty, \infty)$ هي معلمة التحويل. الجدول التالي يعطي القيم الأكثر إستخداماً للمعلمة λ مع التحويلات المقابلة لها:

جدول (2-1): يعطي القيم الأكثر إستخداما للمعلمة λ مع التحويلات المقابلة لها:

λ	-0.1	-0.5	0.0	0.5	1.0
$T(z_t)$	$\frac{1}{z_t}$	$\frac{1}{\sqrt{z_t}}$	$Ln(z_t)$	$\sqrt{z_t}$	z_t

ماجد، د.عدنان عبد الرحمن (2002)، طرق التنبؤ الإحصائى

3-4-2 معالجة عدم الاستقرار السلاسل الزمنية الموسمية:

لتحقيق الإستقرارية في السلاسل الزمنية الموسمية يتم أخذ الفروق الموسمية وذلك بطرح القيم من بعضها البعض حسب فترات الإبطاء المتسقة مع نوع البيانات فمثلاً :

الفروق ربع سنوية $Y_t = Z_t - Z_{t-4}$

الفروق الشهرية $Y_t = Z_t - Z_{t-12}$

4-4-2 بعض الإختبارات لمعرفة إستقرارية السلسلة الزمنية

هنالك عدة إختبارات تستخدم في إختبار إستقرارية السلسلة الزمنية منها:

1. دالة الإرتباط الذاتي ACF

هي مقياس يقيس قوة الإرتباط بين مشاهدات المتغير نفسه عند فترات زمنية مختلفة إي الكشف عن الإرتباطات الداخلية للسلسلة الزمنية وصيغتها الرياضية عند الإبطاء K هي:

$$\rho_k = \frac{\gamma_k}{\gamma_0} \quad , k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots. \qquad (8-2)$$

$$\gamma_k = cov(z_t - z_{t-k})$$

$$E(z_t - \mu)(z_{t-k} - \mu) \quad , k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

$$\gamma_k = \frac{\sum_{k=1}^{n-k}(z_t - \mu)(z_{t-k} - \mu)}{n-k} \quad \dots \dots \dots \dots \dots (9-2)$$

حيث n = حجم العينة و k= طول الإبطاء و ρ_k يمتاز بالخصائص التالية:

$$|\rho_k| \le 1 \quad , \quad -\rho_k = \rho_k \quad , \quad \rho_0 = 1$$

يتطلب إستقرار السلسلة الزمنية ان تكون ρ_k مساوية للصفر وانه لايختلف عن الصفر بالنسبة لإي فجوة (k>0) إي بمعني أخر يجب ان تقع معاملات الارتباط الذاتي داخل حدود الثقة 5% فإذا وقعت خارج حدود الثقة لفترة طويلة فإن معاملات الإرتباط الذاتي تختلف معنوياً لعدد كبير من الفجوات الزمنية لذا يقال ان السلسلة الزمنية غير مستقرة وعندما تكون السلسلة مستقرة فإن معاملات الإرتباط

الذاتي تكون لها توزيع طبيعي بوسط صفر وتباين $(\frac{1}{n})$ وعليه فإن حدود الثقة عند مستوي معنوية 5% لعينة كبيرة الحجم هي:

$$-\frac{1.96}{\sqrt{n}} \leq \rho_k \leq \frac{1.96}{\sqrt{n}}$$

فإذا كان ρ_k يقع داخل هذه الحدود يتم قبول فرض العدم $H_0 = \rho_k = 0$ إي ان السلسلة مستقرة واذا كانت خارج هذه الحدود فإننا نقبل الفرض البديل $H_0 = \rho_k \neq 0$ إي ان السلسلة غير مستقرة ولإختبار معنوية الإرتباط الذاتي ككل يتم إستخدام صيغة إختبار Box-Perce للعينات الكبيرة وصيغة إختبار Box-Ljung في حالة العينات الصغيرة.

2. إختبار جذر الوحدة للإستقرارية The Unit Root Test of Stationary

يهدف إختبار جذور الوحدة (Unit Root) الي معرفة هل ان السلسلة الزمنية المراد دراستها مستقرة ام لا، وان من احد النماذج الرياضية لتقدير العلاقة بين المتغير التابع والمتغير المستقل الذي يمثل المتغير التابع ولكن لفترة زمنية سابقه هو:

$$z_t = \rho z_{t-1} + a_t \qquad , t = 1,2, ...$$

حيث ان ρ تمثل معلمة النموذج و a_t الخطأ العشوائي حيث ان $a_t \sim NID(0, \sigma^2)$ يمكن معرفة إستقرارية السلسلة الزمنية من خلال قيمة معلمة ρ فإذا كانت $\rho = 1$ هذا يعني وجود جذر الوحدة في السلسلة الزمنية وبالتالي فإن السلسلة الزمنية غير مستقرة وان تقدير المعلمة ρ لايكشف بشكل صحيح عن وجود او عدم وجود جذور الوحدة بهذه السلسلة حيث لايتضمن النموذج السابق العديد من المتغيرات المستقلة ولذلك فإن تقدير المعلمة ρ لايتصف بالكفاية كأحد خصائص طريقة المربعات الصغري ويرجع ذلك الي زيادة إحتمال ظهور الإرتباط الذاتي بسلسلة الأخطاء العشوائية لهذا النموذج ولإزالة الإرتباط الذاتي يتم إستخدام إختبارات أخري للكشف عن جذر الوحدة ومن اشهرها إختبار يكي- فوللر الموسع Augmented Dickey-Fuller Test (ADF) الذي صيغته الرياضية التالية:

$$\nabla z_t = a_0 + b_1 z_{t-1} + \sum_{j=1}^{k} \alpha_k \Delta z_{t-j} + a_t$$

ويتم إختبار الفرضية

$$H_0 = b_1 = 0$$

$$H_0 = b_1 \neq 0$$

وان قيمة t يتم حسابها بالصيغة التالية:

$$t = \frac{b_1}{s(b_1)}$$

حيث ان $b_1 = \rho - 1$ و $s(b_1)$ يمثل الخطأ المعياري لـb_1

فاذا كانت قيمة t المحسوبة أكبر من قيمة t الجدولية التي إقتراحها *Mackinnon* يتم رفض فرضية العدم إي عدم وجود جذر الوحدة في السلسلة الزمنية وتكون السلسلة الزمنية مستقرة وأما إذا كانت t الجدولية أقل من t الجدولية تكون السلسلة الزمنية غير مستقرة وبالتالي نقوم بإختبار إستقرارية الفرق الأول للسلسلة وهكذا.

5-2 نماذج تحليل السلاسل الزمنية بإتجاه الزمن Time Domain models :[28] [7] [6] [14]

تضم نماذج تحليل السلاسل الزمنية بصورة عامة عدة نماذج أساسية هي نماذج الإنحدار الذاتي Autoregressive Model (AR(P)) و نماذج المتوسطات المتحركة Moving Average Model (MA(Q)) والنماذج المختلطة أو نماذج الإنحدار الذاتي - المتوسط المتحرك Mixed (Autoregressive-Moving Average) Model ARMA (P,Q) والنماذج المختلطة التكاملية أو نماذج الإنحدار الذاتي - المتوسط المتحرك التكاملي Mixed (Autoregressive-Integration-Moving Average) Model ARIMA (P,Q) ونستعرض النماذج مع بعض خصائصها :

2-5-1 نماذج الإنحدار الذاتي(Autoregressive Model (AR(p) :

الصيغة الرياضية لنموذج الإنحدار الذاتي من الدرجة (P) تأخذ الشكل الأتي:

$$Z_t = \Phi_1 Z_{t-1} + \Phi_2 Z_{t-2} + \cdots + \Phi_P Z_{t-P} + a_t \dots\dots\dots (10-2)$$

حيث أن:

Z_t : قيم مشاهدات السلسة الزمنية $t = 0,1,\dots\dots\dots,p$

Φ_i : معلمات الإنحدار الذاتي $i = 1,2,\dots\dots\dots,p$

a_t : الخطأ العشوائي

2-5-1-1 نموذج الإنحدار الذاتي من الدرجة الأولي (AR(1 :

يمكن كتابة الصيغة العامة لنموذج الإنحدار الذاتي من الدرجة الأولي على النحو التالي:

$$Z_t = \Phi_0 + \Phi_1 Z_{t-1} + a_t \dots\dots\dots\dots (11-2)$$

الخصائص النظرية للنموذج:

1. الأستقرارية Stationary

لكي يكون الأنموذج مستقراً يشترط أن يكون جذر المعادلة

$\Phi(B) = 0$ إي $1 - \Phi(B) = 0$ خارج الدائرة التي نصف قطرها يساوي (1) وهذا يؤدي الي:

$$-1 \leq \Phi_1 \leq 1 \dots\dots\dots\dots (12-2)$$

2. المتوسط :Mean

$$E(Z_t) = \frac{\Phi_0}{1-\Phi_1 B} + (1-\Phi_1 B)E(a_t) = \frac{\Phi_0}{1-\Phi_1 B}$$
$$\mu = \Phi_0(1-\Phi_1)^{-1} \quad \dots\dots (13-2)$$

3. التباين المشترك الذاتي Autocovariance

يتم إشتقاق الصيغة العامة للتباين المشترك الذاتي للنموذج بالشكل الأتي:

$$\therefore EZ_tZ_{t-k} = \Phi\, EZ_tZ_{t-k} + E\mathrm{a}_tZ_{t-k}$$

$$\gamma_z(k) = \Phi\, \gamma_z(t-k) + \gamma_{\mathrm{a}z}(k) \ldots\ldots\ldots (14-2)$$

عندما $K = 0$

$$\gamma_z(0) = \Phi\, \gamma_z(k) + \sigma_{\mathrm{a}}^2 \ldots\ldots\ldots (15-2)$$

حيث

$$\gamma_{\mathrm{a}z}(k) = \begin{cases} \sigma_{\mathrm{a}}^2 & , k = 0 \\ 0 & , k \neq 0 \end{cases}$$

عندما $K = 1$

$$\gamma_z(1) = \Phi_s\gamma_z(0) + \gamma_{\mathrm{a}z}(1)$$

$$\therefore \gamma_z(s) = \Phi_1\gamma_z(0) \ldots\ldots\ldots (16-2)$$

نعوض المعادلة (2-16) بـ (2-15) ينتج:

$$\gamma_z(0) = \Phi_1(\Phi_1\gamma_z(0)) + \sigma_{\mathrm{a}}^2$$

$$\left(1-{\Phi_1}^2\right)\gamma_z(0) = \sigma_{\mathrm{a}}^2 \ldots\ldots\ldots (17-2)$$

وأن

$$\therefore \gamma_z(-1) = \gamma_z(1)$$

وبالتالي فأن الصيغة العامة للتباين المشترك الذاتي للنموذج تكون بالشكل الأتي:

$$\gamma_k = \begin{cases} \dfrac{\sigma_{\mathrm{a}}^2}{\left(1-{\Phi_1}^2\right)} & , k = 0 \\ \dfrac{\Phi_1\sigma_{\mathrm{a}}^2}{\left(1-{\Phi_1}^2\right)} & , k = 1 \\ 0 & , k \geq 2 \end{cases} \ldots\ldots\ldots (18-2)$$

4. الإرتباط الذاتي **Autocorrelation**

يمكن كتابة الصيغة العامة للإرتباط الذاتي للنموذج بالشكل الأتي:

$$\gamma_k = \begin{cases} 1 & , k = 0 \\ \Phi_1 & , k = 1 \\ 0 & , k \geq 2 \end{cases} \quad \ldots\ldots\ldots (19-2)$$

2-1-5-2 نموذج الإنحدار الذاتي من الدرجة الثانية AR(2) :

بإستخدام عامل الإزاحة الخلقي B في الصيغة الآتية:

$$\Phi_i(B)Z_t = a_t \quad \ldots\ldots\ldots (20-2)$$

وبما أن $\Phi_i(B)$ يمكن كتابتة بالصيغة الأتية:

$$\Phi_i(B) = 1 - \Phi_1 B - \Phi_2 B^2 - \cdots - \Phi_p B^p \quad \ldots\ldots (21-2)$$

بتعويض (21-2) في الصيغة (20-2) ينتج:

$$\left(1 - \Phi_1 B - \Phi_2 B^2 - \cdots - \Phi_p B^p\right) Z_t = a_t$$

$$Z_t - \Phi_1 B Z_t - \Phi_2 B^2 Z_t - \cdots - \Phi_p B^p Z_t = a_t$$

وبما أن $P = 2$

∴ صيغة نموذج الإنحدار الذاتي من الرتبة الثانية تكون بالصيغة الأتية:

$$Z_t = \Phi_0 + \Phi_1 Z_{t-1} + \Phi_2 Z_{t-2} + a_t \quad \ldots\ldots\ldots (22-2)$$

الخصائص النظرية للنموذج:

1. الأستقرارية . Stationary

كي تتحق الإستقرارية يشترط أن تكون جذور المعادلة $\Phi_i(B) = 1 - \Phi_1 B - \Phi_2 B^2 = 0$

خارج دائرة الوحدة Unit Circle التي نصف قطرها يساوي واحد.

ليكن B_1, B_2 جذور المعادلة

$$(1 - \Phi_1 B - \Phi_2 B^2) = 0$$

$$\Phi_1 B + \Phi_2 B^2 + 1 = 0 \quad \ldots\ldots\ldots (23-2)$$

لكي يكون النموذج مستقراً يشترط أن يكون:

$$\left.\begin{matrix} -1 < \Phi_2 < 1 \\ -2 < \Phi_1 < 2 \end{matrix}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots (24-2)$$

2. المتوسط :Mean

$$E(Z_t) = \frac{\Phi_0}{1 - \Phi_1 \mathrm{B} - \Phi_2 \mathrm{B}^2} + \frac{1}{1 - \Phi_1 \mathrm{B} - \Phi_2 \mathrm{B}^2} \mathrm{E}(\mathrm{a}_t)$$

$$\mu = \frac{\Phi_0}{1 - \Phi_1 \mathrm{B} - \Phi_2 \mathrm{B}^2} \quad \ldots\ldots (25-2)$$

3. التباين المشترك الذاتي Autocovariance :

$$(1 - \Phi_1 B - \Phi_2 B^2) Z_t = a_t$$

$$Z_t = \Phi_1 Z_{t-1} - \Phi_2 Z_{t-2} + a_t$$

بأخذ التوقع والضرب بالمقدار Z_{t-k} للطرفين ينتج:

$$EZ_t Z_{t-k} = \Phi_1 EZ_{t-1} Z_{t-k} - \Phi_2 EZ_{t-2} Z_{t-k} + Ea_t\, Z_{t-k}$$

$$\gamma_z(k) = \Phi_1 \gamma_z(k-1) + \Phi_2 \gamma_z(k-2) + \gamma_{az}(k) \quad \ldots\ldots\ldots (26-2)$$

$$\because \gamma_z(-k) = \gamma_z(k)$$

من المعادلة أعلاة يمكن كتابة الصيغة العامة للتباين المشترك الذاتي لنموذج الإنحدار الذاتي من الرتبة الثانية بالشكل الأتي:

$$\gamma(k) = \begin{cases} \Phi_1\gamma(1) + \Phi_2\gamma(2) + \sigma_a^2 & , k = 0 \\ \Phi_1\gamma(0) + \Phi_2\gamma(1) & , k = 1 \\ \Phi_1\gamma(1) + \Phi_2\gamma(0) & , k = 2 \\ 0 & , other\ wise \end{cases} \quad \ldots\ldots (27-2)$$

4. الإرتباط الذاتي Autocorrelation :

يمكن كتابة الإرتباط الذاتي للنموذج AR(2) بالشكل الأتي:

$$\rho_k = \Phi_1\rho_{k-1} + \Phi_2\rho_{k-2} \quad \ldots\ldots\ldots (28-2)$$

عندما $k = s$

$$\rho_1 = \Phi_1 + \Phi_2\rho_1$$

عندما $k = 2$

$$\rho_2 = \Phi_1\rho_1 + \Phi_2$$

من المعادلة أعلاة يمكن الصيغة العامة للإرتباط الذاتي للنموذج AR(2) بالشكل الأتي:

$$\rho(k) = \begin{cases} 1 & , k = 0 \\ \dfrac{\Phi_1}{1-\Phi_2} & , k = 1 \\ \dfrac{\Phi_1^2 + \Phi_2 + \Phi_2^2}{1-\Phi_2} & , k = 2 \\ 0 & , other\ wise \end{cases} \quad \ldots\ldots (29-2)$$

5. الأرتباط الذاتي الجزئي Partial Autocorrelation :

$$\Phi_{1,1} = \rho_2 = \frac{\Phi_1}{1-\Phi_2}$$

$$\Phi_{2,2} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & \rho_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & \rho_1 \\ \rho_1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\rho_1 - \rho_1^2}{1 - \rho_{1s}^2}$$

$$= \frac{\left(\frac{\Phi_1^2 + \Phi_2 + \Phi_2^2}{1-\Phi_2}\right) - \left(\frac{\Phi_1}{1-\Phi_2}\right)^2}{1-\left(\frac{\Phi_2}{1-\Phi_2}\right)^2}$$

$$= \frac{\Phi_2(1-\Phi_2)^2 - \Phi_1^2}{(1-\Phi_2)^2 - \Phi_1^2} = \Phi_2$$

من المعادلة أعلاة يمكن كتابة الصيغة العامة للإرتباط الذاتي الجزئي للنموذج AR(2) بالشكل الأتي:

$$\Phi_{kk} = \begin{cases} \frac{\Phi_1}{1-\Phi_2} & , k = 1 \\ \Phi_2 & , k = 2 \\ 0 & other\ wise \end{cases} \quad \ldots \ldots . . (30-2)$$

2-5-2 نموذج الاوساط المتحركة: Moving Average Model (MA)

الصيغة العامة لنموذج الاوساط المتحركة من الدرجة (Q) ستأخذ الشكل الأتي:

$$z_t = a_t - \Theta_1 a_{t-1} - \Theta_2 a_{t-2} - \cdots - \Theta_q a_{t-q} \quad \ldots \ldots (31-2)$$

1-2-5-2 نموذج الاوساط المتحركة من الدرجة الأولي MA(1) :

بإستخدام عامل الإزاحة الخلقي $\boldsymbol{B}$ في الصيغة الآتية:

$$z_t = \Theta_1(B)a_t \quad \ldots \ldots \ldots (32-2)$$

بما أن $\boldsymbol{\Theta_1(B)}$ يمكن كتابتة بالشكل التالي:

$$\Theta_1(B) = 1 - \Theta_1 B \ldots \ldots \ldots (33-2)$$

وبتعويض $\boldsymbol{(2-33)}$ في المعادلة $\boldsymbol{(2-32)}$ ينتج

$$z_t = (1 - \Theta_1 B)a_t$$

$$z_t = a_t - \Theta_1 B a_{t-1} \ldots \ldots \ldots (34-2)$$

الخصائص النظرية للنموذج:

1. **قابلية الإنعكاس Invertible**

$$\Theta_1 = \frac{1}{|B|};\ |B| > 1; |\Theta| < 1$$

2. **المتوسط :Mean**

$$E(Z_t) = \Theta_0 + (1 - \Theta_1 B)E(a_t)$$

$$\mu = \Theta_0 \quad , \quad E(a_t) = 0 \quad \dots\dots (35-2)$$

3. **دالة التباين المشترك الذاتي:Autocovariance Function**

أن الصيغة العامة للتباين المشترك الذاتي لأنموذج الاوساط المتحركة من الدرجة الأولي يمكن كتابتها بالشكل الأتي:

$$\gamma_k = \begin{cases} (1 + \Theta_1^2)\sigma_a^2 & , k = 0 \\ -\Theta_1 \sigma_a^2 & k, = 1 \\ 0 & , k > 1 \end{cases} \quad \dots\dots (36-2)$$

4. **دالة الإرتباط الذاتي :Autocorrelation Function**

يمكن كتابة الصيغة العامة لدالة الإرتباط الذاتي لأنموذج الاوساط المتحركة من الدرجة الأولي بالشكل الأتي:

$$\rho(k) = \begin{cases} \dfrac{-\Theta_1}{1 + \Theta_1^2} & , k = 1 \quad \dots\dots (37-2) \\ 0 & , k > 1 \end{cases}$$

5. **دالة الإرتباط الذاتي الجزئي :Partial Autocorrelation Function**

يمكن كتابة الصيغة العامة لدالة الإرتباط الذاتي الجزئي لأنموذج الاوساط المتحركة من الدرجة الأولي بالشكل الأتي

$$\Phi_{kk} = \frac{-\Theta_1^k(1-\Theta_1^2)}{1-\Theta_1^{2(k+1)}} \quad , k \geq 1 \qquad \dots\dots (38-2)$$

2-2-5-2 نموذج المتوسط المتحرك من الدرجة الثانية MA(2) :

بإستخدام عامل الإزاحة الخلقي B في الصيغة الآتية:

$$z_t = \Theta(B)a_t \quad \dots\dots (39-2)$$

بما أن $\Theta_1(B)$ يمكن كتابتة بالشكل التالي:

$$\Theta(B) = 1 - \Theta_1 B - \Theta_2 B^2 \dots\dots (40-2)$$

وبتعويض (2 – 40) في المعادلة(2 – 39) ينتج

$$z_t = (1 - \Theta_1 B - \Theta_2 B^2)a_t$$

$$z_t = a_t - \Theta_1 a_{t-1} - \Theta_2 a_{t-2} \dots\dots (41-2)$$

الخصائص النظرية للنموذج:

1. **المتوسط :Mean**

$$E(Z_t) = (\Theta_0 + \mathrm{a}_t - \Theta_1 \mathrm{a}_{t-1} - \Theta_2 \mathrm{a}_{t-2})$$
$$\mu = \Theta_0 \qquad \dots\dots\dots (43-2)$$

2. **دالة التباين المشترك الذاتي:Autocovariance Function**

أن الصيغة العامة للتباين المشترك الذاتي لأنموذج الاوساط المتحركة من الدرجة الثانية يمكن كتابتها بالشكل الأتي:

$$\gamma_k = \begin{cases} (1 + \Theta_1^2 + \Theta_2^2)\sigma_a^2 & , k = 0 \\ -\Theta_1(1-\Theta_2)\sigma_a^2 & , k, = 1 \\ -\Theta_2\sigma_a^2 & , k = 2 \\ 0 & , k > 2 \end{cases} \qquad \dots\dots (44-2)$$

3. **دالة الإرتباط الذاتي :Autocorrelation Function**

يمكن كتابة الصيغة العامة لدالة الإرتباط الذاتي لأنموذج الاوساط المتحركة من الدرجة الثانية بالشكل الأتي:

$$\rho(k) = \begin{cases} 1 & ,k = 0 \\ \dfrac{-\Theta_1(1-\Theta_2)}{1+\Theta_1^2+\Theta_2^2} & ,k = 1 \\ \dfrac{-\Theta_2}{1+\Theta_1^2+\Theta_2^2} & ,k = 2 \\ 0 & ,k \geq 3 \end{cases} \quad \ldots\ldots (45-2)$$

3-5-2 النموذج المختلط (الإنحدار الذاتي – الاوساط المتحركة):

Mixed (Autoregressive – Moving Average) Model (ARMA)

$$\Phi(B)Z_t = \Theta(B)a_t$$

$$(1-\Phi_1 B-\Phi_2 B^2-\cdots-\Phi_p B^p)Z_t = (1-\Theta_1 B-\Theta_2 B^2-\cdots-\Theta_q B^q)a_t$$

فان الصيغة العامة للنموذج المختلط من الدرجة ARMA(P,Q) ستأخذ الشكل الأتي:

$$Z_t = \Phi_1 Z_{t-1}+\Phi_2 Z_{t-2}+\cdots+\Phi_p Z_{t-p}+a_t-\Theta_1 a_{t-1}-\Theta_2 a_{t-2}\ldots-\Theta_q a_{t-q}$$

1-3-5-2 النموذج المختلط (الإنحدار الذاتي – الاوساط المتحركة) من الدرجة الأولي:

Mixed(Autoregressive – Moving Average) Model ARMA(1,1)

بإستخدام عامل الإزاحة الخلقي $\boldsymbol{B}$ في الصيغة الآتية:

$$\Phi_1(B)Z_t = \Theta_1(B)a_t \quad \ldots\ldots\ldots (46-2)$$

بما أن الصيغة أعلاه يمكن كتابتة بالشكل التالي:

$$(1-\Phi_1 B)Z_t = (1-\Theta_1 B)a_t \quad \ldots\ldots\ldots (47-2)$$

وبتعويض (2 – 47) في المعادلة(2 – 46) ينتج

$$Z_t = \Phi_1 Z_{t-1}+a_t-\Theta_1 a_{t-1} \quad \ldots\ldots\ldots (48-2)$$

الخصائص النظرية للنموذج:

1. الأستقرارية Stationary

لكي يكون الأنموذج مستقراً يشترط أن تقع جذر المعادلة $\Phi_1(B) = 1 - \Phi_1 B = 0$ خارج دائرة الوحدة unit circle أي أن:

$$|B| > 1$$

$$|\Phi_1| = \frac{1}{|B|}$$

$$\therefore |\Phi_1| < 1$$

لتحقيق الاستقرارية يجب ان يكون

$$-1 < \Phi_1 < 1$$

2. المتوسط :Mean

$$Z_t = \frac{\delta}{1 - \Phi_1 B} + \frac{1 - \Theta_1 B}{1 - \Phi_1 B} a_t$$

$$\therefore E(Z_t) = \frac{\delta}{1 - \Phi_1 B} + \frac{1 - \Theta_1 B}{1 - \Phi_1 B} E(a_t)$$

$$\therefore \mu = \frac{\delta}{1 - \Phi_1 B} \quad \ldots\ldots\ldots (49 - 2)$$

3. دالة التباين المشترك الذاتي:Autocovariance Function

أن الصيغة العامة للتباين المشترك الذاتي لأنموذج المختلط (الإنحدار الذاتي – الاوساط المتحركة) من الدرجة الأولي يمكن كتابتها بالشكل الأتي:

$$\gamma_k = \begin{cases} \dfrac{1 - 2\Phi_1\Theta_1 + {\Theta_1}^2}{1 - {\Phi_1}^2} & , k = 0 \\ \dfrac{(\Phi_1 - \Theta_1)(1 - \Phi_1\Theta_1)}{1 - {\Phi_1}^2} & , k, = 1 \\ \Phi_1 \gamma_{k-1} & , k \geq 2 \end{cases} \quad \ldots\ldots (50 - 2)$$

4. دالة الإرتباط الذاتي Autocorrelation Function:

يمكن كتابة الصيغة العامة لدالة الإرتباط الذاتي لأنموذج المختلط (الإنحدار الذاتي – الاوساط المتحركة) من الدرجة الأولي بالشكل الأتي:

$$\rho(k) = \begin{cases} 1 & ,k = 0 \\ \dfrac{(\Phi_1 - \Theta_1)(1 - \Phi_1\Theta_1)}{1 - 2\Phi_1\Theta_1 + \Theta_1^2} & ,k = 1 \\ \Phi_1\rho_{k-1} & ,k \geq 2 \end{cases} \quad \dots\dots (51-2)$$

4-5-2 نموذج الإنحدار الذاتي المتكامل مع المتوسطات المتحركة Autoregressive Integrated Moving Average Model ARIMA

عندما تكون السلسلة الزمنية غير مستقرة فإنه يجب اولاً تحويلها الي سلسلة زمنية مستقرة قبل بناء النموذج الرياضي وذلك بأخذ الفروق (d) او إستخدام احد التحويلات وعدد الفروق المطلوبة لتحويل السلسلة الي سلسلة مستقرة تسمي بدرجة التكامل (Integrated) حيث يتحول نموذج الإنحدار الذاتي والمتوسطات المتحركة ARMA(p,q) الي نموذج الإنحدار الذاتي المتكامل مع المتوسطات المتحركة ARIMA(p,d,q) حيث تمثل p رتبة الإنحدار الذاتي و d عدد الفروق (التكامل) و q تمثل رتبة المتوسط المتحرك والصيغة الرياضية للنموذج هي:

$$\Phi_P(B)W_t = \delta + \Theta_q(B)a_t \dots\dots\dots (52-2)$$

حيث

$$W_t = (1 - B)^d Z_t$$

ومن الامثله على هذه النماذج:

1-4-5-2 نموذج السير العشوائي Random Walk Model

نموذج السير العشوائي هو من النماذج الغير مستقرة التي تحدث التغيرات فيه عن طريق المتغير العشوائي a_t وعند أخذ الفرق الأول لهذه السلسلة تتحول الي سلسلة مستقرة من التغيرات العشوائية البحتة $(a_1, a_2, \dots, a_t)$ وصيغتة ARIMA(0,1,0) حيث ان الصيغة الرياضية هي:

$$\Phi_0(B)(1-B)Z_t = \delta + \Theta_0(B)a_t$$

$$Z_t = \delta + Z_{t-1} + a_t \quad \dots\dots (53-2)$$

2-4-5-2 نموذج الإنحدار الذاتي التكاملي من الرتبة ARIMA(1,1,0)

ان الصيغة الرياضية لهذا النموذج هي:

$$\Phi_1(B)(1-B)Z_t = \delta + \Theta_0(B)a_t$$

$$(1-\Phi_1 B)(1-B)Z_t = \delta + a_t$$

$$Z_t = \delta + (\Phi_1 + 1)Z_{t-1} - \Phi_1 Z_{t-2} + a_t \quad \dots\dots (54-2)$$

3-4-5-2 نموذج المتوسط المتحرك التكاملي من الرتبة ARIMA(0,1,1)

ان الصيغة الرياضية لهذا النموذج هي:

$$\Phi_0(B)(1-B)Z_t = \delta + \Theta_1(B)a_t$$

$$(1-B)Z_t = \delta + (1-\Theta_1 B)a_t$$

$$Z_t = \delta + Z_{t-1} + a_t - \Theta_1 a_{t-1} \quad \dots\dots (55-2)$$

4-4-5-2 نموذج المتوسط المتحرك التكاملي من الرتبة ARIMA(0,1,2)

ان الصيغة الرياضية لهذا النموذج هي:

$$\Phi_0(B)(1-B)Z_t = \delta + \Theta_1(B)a_t$$

$$(1-B)Z_t = \delta + (1-\Theta_1 B)a_t$$

$$Z_t = \delta + Z_{t-1} + a_t - \Theta_1 a_{t-1} - \Theta_2 a_{t-2} \quad \dots\dots (56-2)$$

2-5-4-5 نموذج الإنحدار الذاتي المتكامل مع المتوسطات المتحركة من الرتبة (ARIMA(1,1,1

ان الصيغة الرياضية لهذا النموذج هي:

$$\Phi_1(\mathrm{B})(1-\mathrm{B})Z_t = \delta + \Theta_1(B)\mathrm{a}_t$$

$$Z_t = \delta + (\Phi_1 + 1)Z_{t-1} - \Phi_1 Z_{t-2} + \mathrm{a}_t - \Theta_1 \mathrm{a}_{t-1} \ldots\ldots\ldots (57-2)$$

2-6 نماذج تحليل السلاسل بإتجاه التكرار Frequency Domain models: [36] [6] [10] [11]

2-6-1 قوة الطيف لنموذج الخطأ العشوائي: White noise

اذا كانت α_t سلسلة من المتغيرات العشوائية غير المرتبطة وان دالة التغاير المشترك الذاتي كما هي:

$$\gamma_k = \begin{cases} \sigma_a^2 & k = 0 \\ 0 & k \neq 0 \end{cases}$$

فإن قوة الطيف (Power Spectrum) لهذه السلسلة هي:

$$P(x) = \frac{\sigma_a^2}{2\pi} \ldots\ldots\ldots (58-2)$$

وان دالة الكثافة الطيفية (Spectral density function) لهذا النموذج هي:

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \ldots\ldots\ldots (59-2)$$

إي ان دالة الكثافة الطيفية عباره عن كمية ثابتة ولجميع التكرارات

2-6-2 قوة الطيف لنموذج الإنحدار الذاتي من الدرجة الأولي(AR(1 :

$$P(w) = \frac{\sigma_a^2}{2\pi(1-\Phi_1 e^{iw})(1-\Phi_1 e^{-iw})}$$

$$= \frac{\sigma_a^2}{2\pi\left(1 + \widehat{\Phi}_1^2 - 2\widehat{\Phi}_1 \cos(w)\right)} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (60-2)$$

ونلاحظ ان قوة الطيف لهذا النموذج تعتمد على قيمة Φ، فعندما تكون $\Phi_s > 0$ وكبيرة فإن قيمة قوة الطيف تتركز على التكرارات المنخفضه (low Frequencies) ، بينما اذا كانت $\Phi_s < 0$ فإن قوة الطيف تتركز على التكرارات العالية (High Frequencies) أما دالة كثافة الطيفية لهذا النموذج فتعطي بالصيغة الرياضية التالية:

$$f(w) = \frac{1 - \Phi_1^2}{2\pi(1 + \Phi_1^2 - 2\Phi_1 \cos(w))} \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots (61 - 2)$$

3-6-2 قوة الطيف لنموذج الإنحدار الذاتي من الدرجة الأولي AR(2) :

$$P(w) = \frac{\sigma_a^2}{2\pi|1 - \Phi_1 e^{-iw} - 1 - \Phi_2 e^{-iw}|^2}$$

$$= \frac{\sigma_a^2}{2\pi|1 - \Phi_2(\cos w - sin\ wi) - \Phi_2\ (\cos 2w - sin\ 2wi)|^2}$$

$$= \frac{\sigma_a^2}{2\pi|1 - \Phi_2 \cos w - \Phi_2 \cos 2w + i(\Phi_2 sin\ w + \Phi_2 \sin 2w)|^2}$$

$$= \frac{\sigma_a^2}{2\pi(1 + {\Phi_s}^2 cos^2 w + {\Phi_2}^2 cos^2 2w - 2\Phi_1 \cos w - 2\Phi_2 \cos 2w + 2\Phi_1\Phi_2 cos\ w\ cos 2w + {\Phi_1}^2 sin^2 w + {\Phi_2}^2 sin^2 2w + 2\Phi_1\Phi_2 \sin w \sin 2w)}$$

$$= \frac{\sigma_a^2}{2\pi(1 + {\Phi_1}^2 + {\Phi_2}^2 - 2\Phi_1 cos\ w - 2\Phi_2 cos\ 2w + 2\Phi_2\Phi_2 cos\ w\ cos\ 2w + 4\Phi_2\Phi_2 sin\ w\ sin\ 2w)}$$

$$= \frac{\sigma_a^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{1 + {\Phi_1}^2 + {\Phi_2}^2 - 2\Phi_s cos\ w - 2\Phi_2 cos\ 2w + 2\Phi_2\Phi_2 cos\ w\ cos\ 2w}$$

$$= \frac{\sigma_a^2}{2\pi} \cdot \frac{1}{1 + {\hat{\Phi}_1}^2 + {\hat{\Phi}_2}^2 - 2\hat{\Phi}_1(1 - \hat{\Phi}_2) cos\ w - 2\hat{\Phi}_2 cos\ 2w} \dots\dots\dots\dots\dots (62 - 2)$$

وان دالة الكثافة الطيفية لهذا النموذج هي:

$$f(w) = \frac{(1 + \Phi_2)((1 - \Phi_2)^2 - \Phi_1^2)}{2\pi(1 + \Phi_2)[1 + \Phi_1^2 + \Phi_2^2 - 2\Phi_1(1 - \Phi_2)\cos(w) - 2\Phi_2 \cos(2w)]} \dots\dots (63 - 2)$$

وبصورة عامة فان قوة الطيف لنموذج الإنحدار الذاتي من الدرجة (p) AR(p) :

$$P(w) = \frac{\sigma_a^2}{2\pi\left|1 - \Phi_1 e^{-iw} - 1 - \Phi_2 e^{-iw} \; \dots \; - \Phi_p e^{-ipw}\right|^2} \quad \dots \quad (64-2)$$

4-6-2 قوة الطيف لنموذج المتوسطات المتحركة من الدرجة الأولي(MA(1 :

ان نموذج المتوسطات المتحركة من الدرجة الأولي يعرف بالصيغة التالية:

$$Z_t = a_t - \Theta_1 a_{t-1}$$

فمن المعادلة أعلاة نجد أن قوة الطيف لهذا النموذج هي:

$$P(w) = \frac{\sigma_a^2}{2\pi(1 + \Theta_1 e^{iw})(1 + \Theta_1 e^{-iw})}$$

$$P(w) = \frac{\sigma_a^2}{2\pi\left(1 + {\Theta_1}^2 - 2\Theta_1 \cos(w)\right)} \dots \dots \dots \dots (65-2)$$

وان دالة الكثافة الطيفية لهذا النموج هي:

$$f(w) = \frac{(1 + {\Theta_1}^2 - 2\Theta_1 \cos(w))}{2\pi\left(1 + {\Theta_1}^2\right)} \dots \dots \dots \dots (66-2)$$

5-6-2 قوة الطيف لنموذج المتوسطات المتحركة من الدرجة الثانية (MA(2 :

ان نموذج المتوسطات المتحركة من الدرجة الثانية يعرف بالصيغة التالية:

$$Z_t = a_t - \Theta_1 a_{t-1} - \Theta_2 a_{t-2}$$

فمن المعادلة أعلاة نجد أن قوة الطيف لهذا النموذج هي:

$$P(w) = \frac{\sigma_a^2}{2\pi(1 + \Theta_1 e^{iw} + \Theta_2 e^{2iw})(1 + \Theta_1 e^{-iw} + \Theta_2 e^{-2iw})}$$

$$P(w) = \frac{\sigma_a^2}{2\pi\left(1 + {\Theta_1}^2 + {\Theta_2}^2 - 2\Theta_1(1 - \Theta_2)\cos(w) - 2\Theta_2 \cos(2w)\right)} \dots \dots (67-2)$$

وان دالة الكثافة الطيفية لهذا النموج هي:

$$f(w) = \frac{(1 + {\Theta_1}^2 + {\Theta_2}^2)}{2\pi}\left[1 + {\Theta_1}^2 + {\Theta_2}^2 - 2\Theta_1(1 - \Theta_2)\cos(w) - 2\Theta_2\cos(2w)\right] \dots\dots (68 - 2)$$

وبصورة عامة فان قوة الطيف لنموذج المتوسطات المتحركة من الدرجة (q) MA(q) والذي صيغتة الرياضية

$$Z_t = a_t - \Theta_1 a_{t-1} - \Theta_2 a_{t-2} - \cdots - \Theta_q a_{t-q}$$

يمكن كتابتها بالصيغة الرياضية التالية:

$$P(w) = \frac{\sigma_a^2}{2\pi}\left|\Theta_q(e^{-iw})\right|^2$$

$$= \frac{\sigma_a^2}{2\pi}\left|1 - \Theta_1 e^{-iw} - \Theta_2 e^{-2iw} - \cdots \Theta_q e^{-qiw}\right|^2 \dots\dots (69 - 2)$$

6-6-2 قوة الطيف لنموذج الإنحدار الذاتي والمتوسط المتحرك ARMA(1,1):

ان نموذج الإنحدار الذاتي والمتوسط المتحرك من الدرجة (1,1) والذي يعرف بالصيغة الرياضية التالية:

$$\Phi_1(B)Z_t = \Theta_1(B)a_t$$

من المعادلة أعلاة نجد أن قوة الطيف لهذا النموذج هي:

$$P(w) = \frac{\sigma_a^2(1 + {\Theta_1}^2 - 2\Theta_1\cos(w))}{2\pi(1 + {\Phi_1}^2 - 2\Phi_1\cos(w))} \dots\dots\dots (70 - 2)$$

وان دالة الكثافة الطيفية لهذا النموج هي:

$$f(w) = \frac{\left(1 - {\Phi_1}^2\right)(1 + {\Theta_1}^2 - 2\Theta_1\cos(w))}{2\pi\left(1 + {\Theta_1}^2 - 2\Phi_1\Theta_1\right)(1 + {\Phi_1}^2 - 2\Phi_1\cos(w))} \dots\dots\dots (71 - 2)$$

وبصورة عامة فإن نموذج الإنحدار الذاتي والمتوسط المتحرك من الدرجة (p,q) والذي يعرف بالصيغة الرياضية التالية:

$$\Phi_p(B)Z_t = \Theta_q(B)a_t$$

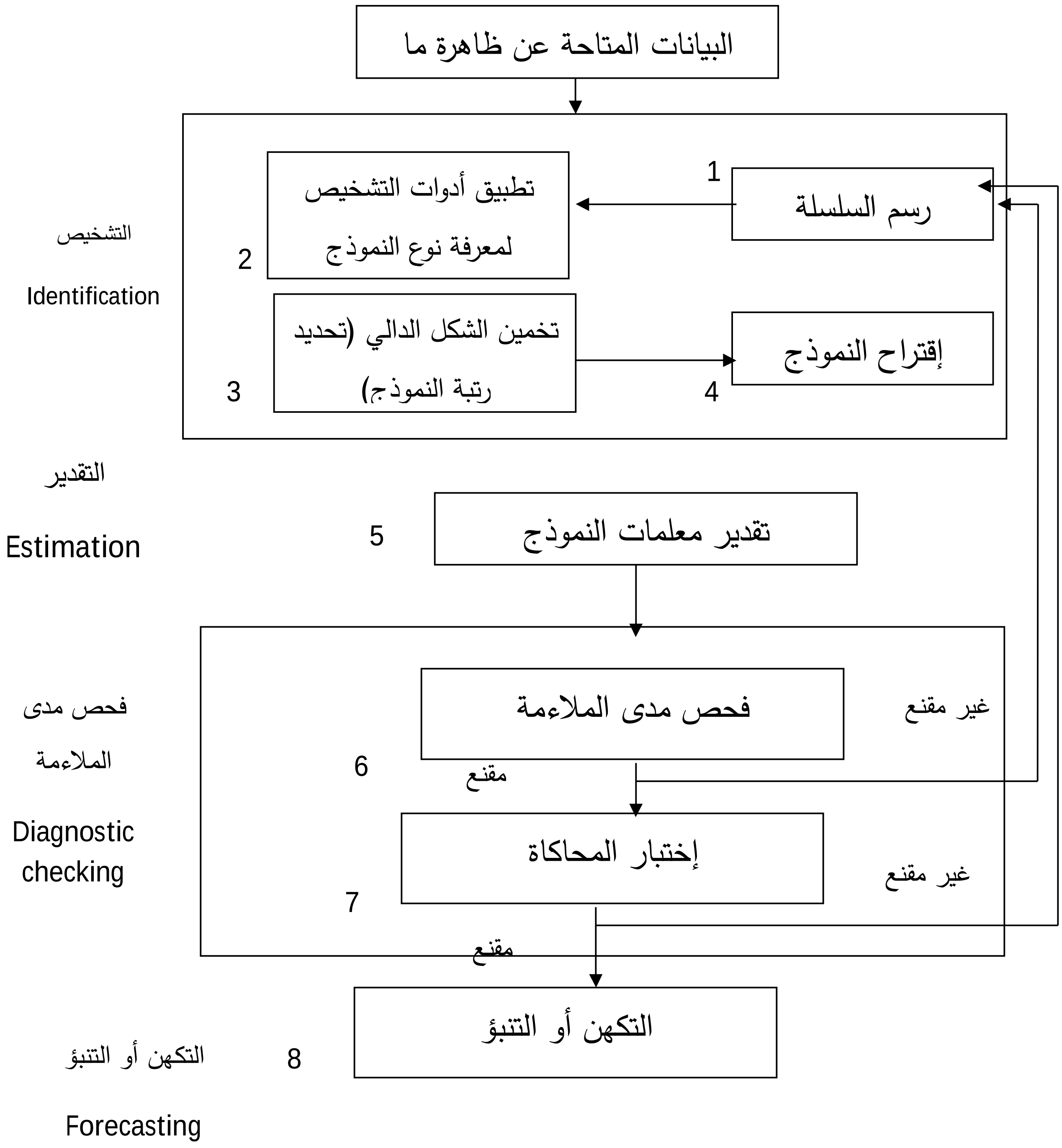
فإن قوة الطيف للنموذج أعلاه هي:

$$P(w) = \frac{\sigma_a^2\left|\Theta_q(e^{-iw})\right|^2}{2\pi\left|\Phi_p(e^{-iw})\right|^2}$$

$$= \frac{\sigma_a^2\left|1-\Theta_1 e^{-iw}-\Theta_2 e^{-2iw}-\cdots\Theta_q e^{-qiw}\right|^2}{2\pi\left|1-\Phi_1 e^{-iw}-\Phi_2 e^{-2iw}-\cdots\Phi_p e^{-piw}\right|^2} \ldots\ldots\ldots (72-2)$$

7-2 مراحل بناء النموذج Stages of Building Model

شكل (2-1): يوضح مراحل تحليل السلسلة الزمنية:



الزويعبي، عبيد محمود (2010-2011)

2-7-1 مرحلة التشخيص Identification Stage [27] [25] [26] [13] [15] [6] [14] [30]

بعد تحقيق الأستقرارية في السلسلة الزمنية تبدأ عملية تحديد النموذج المناسب لتمثيل السلسلة ودرجتة من خلال المعايير التي تستخدم للمقارنة بين النماذج لتحديد النموذج الأفضل.

2-7-1-1 معرفة نوع النموذج:

1- نرسم بيانات السلسلة ويعد رسم البيانات الخطوة الأولى في تحليل أية سلسلة زمنية ومن خلال الرسم تكون لدينا فكرة جيدة عن إحتواء السلسلة على إتجاه عام أو قيم شاذة أو عدم الإستقرارية الذي يقود إلى التحويلات الممكنة على البيانات، لذلك فإن رسم السلسلة يبين حاجتها إلى التحويل المناسب لتستقر في متوسطها أو تبايناتها إذا لم تكن مستقرة قبل أي تحليل.

2- نحسب ونفحص PACF,ACF للعينة المسحوبة من السلسلة الأصلية لتحديد درجة الفروق (في حالة عدم الاستقرارية)، فإذا كانت ACF للعينة تنحدر ببطء شديد ، PACF للعينة تقطع بعد الإزاحة الأولى (أو بالعكس) فإن هذا يستوجب أخذ الفرق الأول (1-B)Zt. وللتخلص من عدم الإستقرار ية نحتاج إلى أخذ أعلى رتبة من الفروق (1-B)dZt حيث d>0 (وغالباً ما تكون d=0,1,2). وا ٍن النتائج المترتبة على إستخدام الفروق غير الضروري تكون أقل خطورة من النتائج المترتبة على التقليل من أهمية الفروق.

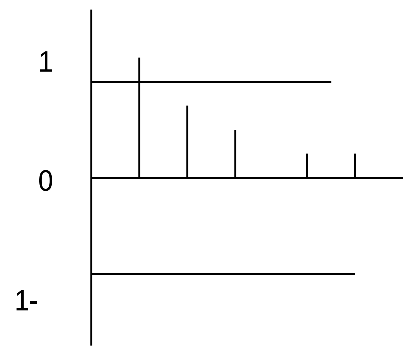
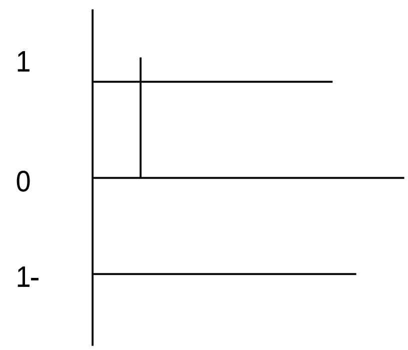
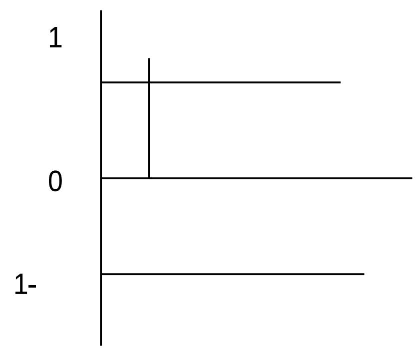
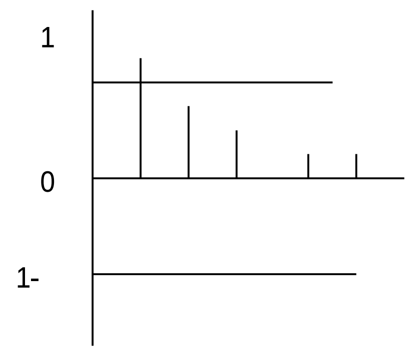
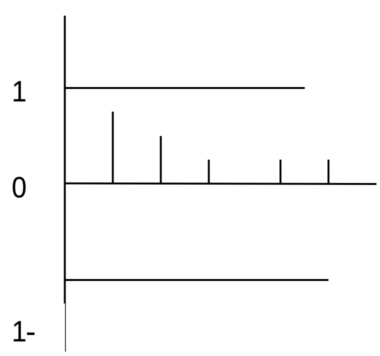
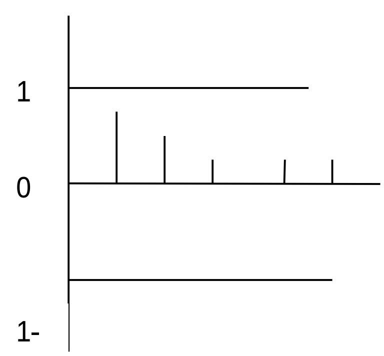
نحسب ونفحص PACF, ACF للعينة لتشخيص النموذج، وتوجد ثنائية ما بين نماذج ARMA(1,0) أو AR(1) ونماذج ARMA(0,1) أو MA(1) وفقاً للدالتين. وتزداد المشكلة تعقيداً في حالة النماذج المختلطة ARMA(p,q) ، لأن الاعتماد على PACF , ACF لتشخيص النموذج وتحديد رتبته لا يكون فاعلاً ، كون الدوال أعلاه في هذه الحالة تسلك سلوكاً متشابهاً هو سلوك التناقص التدريجي.

جدول (2-2) طبيعة النموذج وفقاً لمنحني الارتباط الذاتي و الإرتباط الذاتي الجزئي

النموذج Model	الإرتباط الذاتي (ACF)	الإرتباط الذاتي الجزئي (PACF)
AR(P)	تناقص تدريجياً سالكه سلوكاً أسياً أوسلوك دالة الجيب (يتلاشي تدريجياً) (Decays Exponentially)	قطع بعد الإزاحة P (Cuts-off)
AR(1)	يقترب من الصفر تدريجياً	يساوي الصفر بعد الإزاحة 1
AR(2)	يقترب من الصفر تدريجياً	يساوي الصفر بعد الإزاحة 2
MA(Q)	قطع بعد الإزاحة Q (Cuts-off)	تناقص تدريجياً سالكه سلوكاً أسياً أوسلوك دالة الجيب (يتلاشي تدريجياً) (Decays Exponentially
MA(1)	يساوي الصفر بعد الإزاحة 1	يقترب ن الصفر تدريجياً
MA(2)	يساوي صفر بعد الإزاحة 2	يقترب من الصفر تدريجياً
ARMA(P,Q)	تناقص تدريجياً سالكه سلوكاً أسياً أوسلوك دالة الجيب (يتلاشي تدريجياً) (Decays Exponentially	تناقص تدريجياً سالكه سلوكاً أسياً أوسلوك دالة الجيب (يتلاشي تدريجياً) (Decays Exponentially
ARMA(1,1)	تضاؤل تدريجي ومتذبذب بداية من التباطؤ الاول	تضاؤل تدريجي ومتذبذب بداية من التباطؤ الاول

عبدالمحمدي، أ.د.ناظم عبدالله و طعمه، م.م.سعدية عبدالكريم (2011)

جدول رقم (2-3) يوضح بعض الاشكال التي من خلالها يمكن تشخيص النموذج

Model	ACF	PACF
AR(1)		
MA(1)		
ARMA(1,1)		

الزويعبي، عبيد محمود (2010-2011)

2-1-7-2 إختبار رتبة النموذج :

و هنالك معايير تستخدم للمقارنة بين النماذج لتحديد رتبة النموذج من هذه المعايير:

معيار معلومات اكايكي : Akaike Information Criterion(AIC)

وصيغة هذا المعيار هي:

$$AIC = nLn\,SSR + 2k \ldots\ldots\ldots\ldots (73-2)$$

حيث:

SSR: مجموع مربعات البواقي

n: حجم العينة

$$k = p + d + q$$

معيار معلومات بيز: Bayesian Information Criterion (BIC)

لتصحيح نزعة معيار AIC نحو التقدير المفرط فان معيار SIC (معيار معلومات شوارز Schwarz Information Criterion) اقترح على نحو مستقل من قبل اكاكي عام 1978 وفي العام نفسه من قبل شوارز, الصيغة الاتية:

$$BIC = nlog\left(\frac{\mathrm{SSR}}{\mathrm{n}}\right) + k\log(n) \ldots\ldots\ldots\ldots (74-2)$$

حيث:

SSR: مجموع مربعات البواقي

n: حجم العينة

$$k = p + d + q$$

معيار معلومات اكاكي المصحح: Akaike Information Criterion corrected (AIC_c)

اقترح كل من (brockwell and davis 1993) تصحيح حالة التحيز في معيار AIC بإضافة المقدار

$$2(k+1)(k+2)/(n-k-2)$$

الي قيمة AIC في المعادلة (2-75) لتكون المعادلة على النحو الأتي:

$$AIC_c = nlog\sigma^2 + 2k + \frac{2(k+1)(k+2)}{(n-k-2)} \ldots\ldots (75-2)$$

وهذا يجعله أقل فرقاً للقيم الصغيرة لـ k بينما للقيم الكبيرة لـ k فانه يتعامل بصرامة أكبر مع المعلمات الإضافية أكثر من معيار AIC، ويمكن ملاحظة أن معيار AIC_c يستعمل عندما تكون k كبيرة نسبة إلي حجم العينة n (وهذا يتضمن أيضاً عندما تكون n صغيرة لإي k).

طبيعة معيار معلومات اكاكي:Normality of Akaike Information Criterion(NAIC)

إن كثيراً من المصادر تتناول صيغة لمعامل اكاكي يجعلها صيغة معيارية من خلال تقسيمها على حجم العينة وبذلك يتم الحصول على صيغة جديده تمت الإشارة اليها إختصاراً NAIC وكما يأتي:

$$NAIC = log\sigma^2 + \frac{2k}{n} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots . (76-2)$$

2-7-2 مرحلة التقدير Estimation Stage : [29] [14] [18] [21] [5] [4] [9] [14]

بعد تحديد شكل النموذج لابد من تقدير معلمات النموذج γ و $\Phi_1 \ldots \Phi_p$ و $\theta_1 \ldots \theta_q$ و σ^2 وذلك بإستخدام البيانات التاريخية المتوفرة لدينا، وهنالك عدة طرق للتقدير في إتجاهي الزمن والتكرار نذكر منها:

اولاً : التقدير في إتجاه الزمن:

هنالك طرق كثيرة لتقدير المعلمات منها طريقة المربعات الصغري الشرطية Conditional Least Square Method، وطريقة طريقة الإمكان الإعظم المضبوطة Exact Maximum Likelihood Method، وطريقة العزوم التي سوف نستخدمها في البحث

طريقة العزوم: The Method of The Moments

تعتمد هذه الطريقة على مساواة عزوم العينة مثل متوسط العينة $\bar{z}$ والإرتباطات الذاتية للعينة ρ بالعزوم النظرية مثل المتوسط μ ودالة الإرتباط الذاتي ρ_k وحل المعادلات الناتجة بالنسبة للمعلمات المراد تقديرها.

ويتم التقدير بإستخدام هذه الطريقة لنموذج AR(p) كالتالي:

1- يقدر المتوسط μ بالمقدر Z أي $\hat{\mu} = \bar{z} = \sum_{i=1}^{n} \frac{z_i}{n}$

3- لتقدير $\Phi_1, \dots, \Phi_p$ نستخدم العلاقة:

$$\rho_k = \Phi_1\rho_{k-1} + \Phi_2\rho_{k-2} + \cdots + \Phi_p\rho_{k-p} \quad , k > 1$$

والتي تنتج من ضرب المعادلة المعرفة لنموذج AR(p) بالحد $z_i - \mu$ وأخذ التوقع في المعادلة السابقة بوضع $k = 1,2,..,p$ نحصل على نظام المعادلات المسمى معادلات يول و ووكر Yule-Walker التالي:

$$\rho_1 = \Phi_1 + \Phi_2\rho_1 + \cdots + \Phi_p\rho_{p-1}$$

و بالتعويض عن ρ_k بالمقدر γ_k نحصل على مقدرات العزوم للمعلمات $\Phi_1, \dots, \Phi_p$ كالتالي:

بوضع معادلات يول و ووكر على الشكل المصفوفي:

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ . \\ \gamma_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 & \gamma_2 & . & . & \gamma_{p-2} & \gamma_{p-1} \\ \gamma_1 & 1 & \gamma_1 & \vdots & \vdots & \gamma_{p-3} & \gamma_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{p-1} & \gamma_{p-2} & \gamma_{p-3} & . & . & \gamma_1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\Phi}_1 \\ \hat{\Phi}_2 \\ \vdots \\ . \\ \hat{\Phi}_p \end{pmatrix} \quad \dots\dots (77-2)$$

وبحل هذه المعادلة للمعلمات

$$\begin{pmatrix} \hat{\Phi}_1 \\ \hat{\Phi}_2 \\ \vdots \\ . \\ \hat{\Phi}_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 & \gamma_2 & . & . & \gamma_{p-2} & \gamma_{p-1} \\ \gamma_1 & 1 & \gamma_1 & \vdots & \vdots & \gamma_{p-3} & \gamma_{p-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \gamma_{p-1} & \gamma_{p-2} & \gamma_{p-3} & . & . & \gamma_1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \vdots \\ . \\ \gamma_p \end{pmatrix} \quad \dots\dots (78-2)$$

تقدر σ^2 كالتالي

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\gamma}_0(1 - \hat{\Phi}_1\gamma_1 - \hat{\Phi}_2\gamma_2 - \cdots - \hat{\Phi}_p\gamma_p)$$

حيث

$$\hat{\gamma}_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z - \bar{z})^2$$

هو تباين العينة.

تقدير العزوم لبعض النماذج:

تقدير العزوم لنموذج AR(1) :

$$z_t - \mu = \Phi_1(z_{t-1} - \mu) + a_t \,, a_t \sim N(0, \sigma^2)$$

مقدر العزوم للمعلمة Φ_1 هو

$$\hat{\Phi}_1 = \gamma_1 \qquad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (79-2)$$

مقدر العزوم للمعلمة μ هو

$$\hat{\mu} = \bar{z} \qquad \dots\dots\dots\dots.. (80-2)$$

مقدر العزوم للمعلمة σ^2 هو

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\gamma}_0\left(1 - \hat{\Phi}_1\gamma_1\right) \quad \dots\dots\dots\dots (81-2)$$

حيث

$$\hat{\gamma}_0 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(z-\bar{z})^2$$

تقدير العزوم لنموذج (1)MA:

$$z_t - \mu = a_t - \theta_1 a_{t-1}\,,\, a_t \sim N(0,\sigma^2)$$

لإيجاد مقدر العزوم للمعلمة θ_1 نستخدم العلاقة

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1}{1+{\theta_1}^2} \quad \dots\dots\dots\dots (82-2)$$

وبتعويض المعلمات بمقدراتها

$$\rho_1 = \frac{-\hat{\theta}_1}{1+{\hat{\theta}_1}^2} \quad \dots\dots\dots\dots (83-2)$$

وبحل المعادلة للمقدر $\hat{\theta}_1$ نجد

$$\hat{\theta}_1 = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4\gamma_1}}{2\gamma_1} \qquad \dots\dots\dots\dots (84-2)$$

هذا الحل يعطي قيمتين للمقدر $\hat{\theta}_1$ نأخذ القيمة التي تحقق$1 > |\hat{\theta}_1|$ ، فمثلا إذا كانت $\gamma_1 = -0.4$ فإن $(\hat{\theta}_1)_1 = -0.77$ و $(\hat{\theta}_1)_2 = 3.27$ وبالتالي يكون مقدر العزوم للمعلم θ_1 هو $\hat{\theta}_1 =$ -0.77.

تقدير العزوم لنموذج (2)AR:

$$z_t - \mu = \Phi_1(z_{t-1}-\mu) + \Phi_2(z_{t-2}-\mu) + a_t\,,\, a_t \sim N(0,\sigma^2)$$

بإستخدام معادلات يول ووكر مقدرات العزوم للمعلمات Φ_1 و Φ_2 هي

$$\begin{pmatrix}\hat{\Phi}_1\\ \hat{\Phi}_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & \gamma_1\\ \gamma_1 & 1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}\gamma_1\\ \gamma_2\end{pmatrix}$$

ومنها نجد

$$\widehat{\Phi}_1 = \frac{\gamma_1 - \gamma_1\gamma_2}{1-\gamma_1^{\ 2}} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (85-2)$$

$$\widehat{\Phi}_2 = \frac{\gamma_2 - \gamma_1^{\ 2}}{1-\gamma_1^{\ 2}} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (86-2)$$

مقدر العزوم للمعلمة μ هو

$$\hat{\mu} = \bar{z} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots..(87-2)$$

مقدر العزوم للمعلمة σ^2 هو

$$\hat{\sigma}^2 = \hat{\gamma}_0\left(1 - \widehat{\Phi}_1\gamma_1 - \widehat{\Phi}_2\gamma_2\right) \ \ldots\ldots\ldots\ldots (88-2)$$

تقدير العزوم لنموذج MA(2):

$$z_t - \mu = a_t - \theta_1 a_{t-1} - \theta_2 a_{t-2}\,,\, a_t \sim N(0,\sigma^2)$$

لإيجاد مقدرات العزوم للمعلمات θ_1 و θ_2 نستخدم العلاقات

$$\rho_1 = \frac{-\theta_1(1-\theta_2)}{1+\theta_1^{\ 2}+\theta_2^{\ 2}} \ \ldots\ldots\ldots\ldots (89-2)$$

$$\rho_1 = \frac{-\theta_2}{1+\theta_1^{\ 2}+\theta_2^{\ 2}} \ \ldots\ldots\ldots\ldots (90-2)$$

وبتعويض المقدرات γ_1 و γ_2 نحصل على مقدرات العزوم للمعلمات θ_1 و θ_2

$$\gamma_1 = \frac{-\hat{\theta}_1(1-\hat{\theta}_2)}{1+\theta_1^{\ 2}+\theta_2^{\ 2}} \ \ldots\ldots\ldots\ldots (91-2)$$

$$\gamma_2 = \frac{-\hat{\theta}_2}{1+\hat{\theta}_1^{\ 2}+\hat{\theta}_2^{\ 2}} \ \ldots\ldots\ldots\ldots (92-2)$$

ونحل لكل من $\hat{\theta}_1$ و $\hat{\theta}_2$ ونأخذ الحلول التي تحقق $1 > \left|\hat{\theta}_2\right|, \theta_2 + \theta_1, 1 > \theta_2 - \theta_1$.

تقدير المعزوم لنموذج ARMA(1,1):

$$z_t - \mu = \Phi_1(z_{t-1} - \mu) + a_t - \theta_1 a_{t-1}, a_t \sim N(0, \sigma^2)$$

لإيجاد مقدرات العزوم للمعلمات θ_1 و Φ_1 نستخدم العلاقات

$$\rho_1 = \frac{(1 - \Phi_1\theta_1)(\Phi_1 - \theta_1)}{1 + {\theta_1}^2 + 2\Phi_1\theta_1} \quad \dots\dots\dots\dots (93-2)$$

$$\rho_2 = \frac{(1 - \Phi_1\theta_1)(\Phi_1 - \theta_1)}{1 + {\theta_1}^2 + 2\Phi_1\theta_1}\Phi_1 \quad \dots\dots\dots\dots (94-2)$$

وبتعويض المقدرات γ_1 و γ_2 نحصل على مقدرات العزوم للمعلمات θ_1 و Φ_1

$$\gamma_1 = \frac{(1 - \hat{\Phi}_1\hat{\theta}_1)(\hat{\Phi}_1 - \hat{\theta}_1)}{1 + {\hat{\theta}_1}^2 + 2\hat{\Phi}_1\hat{\theta}_1} \quad \dots\dots\dots\dots (95-2)$$

$$\gamma_2 = \frac{(1 - \hat{\Phi}_1\hat{\theta}_1)(\hat{\Phi}_1 - \hat{\theta}_1)}{1 + {\hat{\theta}_1}^2 + 2\hat{\Phi}_1\hat{\theta}_1}\hat{\Phi}_1 \quad \dots\dots\dots\dots (96-2)$$

وبقسمة المعادلة المعرفة للمقدر γ_2 على المعادلة المعرفة للمقدر γ_1 نجد

$$\hat{\Phi}_1 = \frac{\gamma_1}{\gamma_2} \quad \dots\dots\dots\dots\dots\dots (97-2)$$

ثانياً : التقدير في إتجاه التكرار:

ان جودة تقدير دالة كثافة الطيف تعتمد على جانبين الأول منهما يتمثل بتحديد نقطة بتر العملية التصادفية M التي تعتبر معلمة في دالة كثافة الطيف، اما الجانب الآخر فيتمثل في اختيار دالة الوزن المناسبة للعملية هنالك عدة طرق لتقدير دالة كثافة الطيف نذكر منها:

1.الطرائق اللامعلمية Nonparametric Methods

وهي الطرائق التي يتم فيها تقدير دالة كثافة الطيف من المشاهدات مباشرة ، ومن أشهر دوال الاوزان في هذا النوع من التقدير هي:

دالة وزن توكي هامنك : Tukey Hamming

$$\lambda_k = \frac{1}{2}\left(1 + cos\left(\frac{\pi k}{M}\right)\right) \quad k = 0,1, \dots M \qquad \dots\dots (98-2)$$

دالة وزن بارتلت Bartlett

$$\lambda_k = \begin{cases} 1 - \dfrac{|v|}{M} & , |v| \leq M \\ 0 & , other\ wise \end{cases} \qquad \dots\dots (99-2)$$

حيث

$$v = M(y-1)$$

دالة وزن بارزن : Parzen

$$\lambda_k = \begin{cases} 1 - 6\left(\dfrac{k}{M}\right)^2 + 6\left(\dfrac{k}{M}\right)^3 & 0 \leq k \leq \dfrac{M}{2} \\ 2\left(\dfrac{1-k}{M}\right)^3 & \dfrac{M}{2} \leq k \leq M \end{cases} \qquad \dots\dots (100-2)$$

حيث M تسمي بنقطة البتر Truncation Point ويتم إختيارها بشكل مناسب بحيث أن لا تكون صغيرة وبالتالي فإن الخصائص المهمة لـ f(w)يمكن أن تختفي ولا كبيرة جداً بحيث لا

يصبح هنالك داعي لإستخدام دالة الطيف، وقد إقترح الباحث C.Chatfield ، أن يتم إختيار نقطة البيتر بحيث تكون $M = 2\sqrt{n}$

2. الطرائق المعلمية : Parametric Methods

تعتبر من الطرائق المعاصرة في التقدير الطيفي وهي تعتمد على منهجية معينة في التقدير اذ تعتمد على مخرجات نماذج السلاسل الزمنية (AR,MA,ARMA) التي لها قوة كثافة الطيف Power Spectral Density (PSD) التي عباره عن دالة لمعلمات الإنموذج لذا تسمي بالطرائق المعلمية حيث يتم إختيار أنموذج السلسلة الزمنية الملائم لتمثيل البيانات ثم تقدير معلمات النموذج الذي يتم إختياره ثم تعويض المعلمات المقدرة بطريقة العزوم في صيغة PSD الخاصة بالنموذج وسوف نستخدم هذه الطريقة في التحليل .

2-7-3 مرحلةفحص وإختبار دقة النموذج Model Diagnostics Checking Stage [6] [14]

بعد تقدير النموذج لابد من إختبار مدي ملاءمة أو صلاحية النموذج لتمثيل بيانات السلسلة الزمنية وتوجد عدة طرق في إتجاهي الزمن والتكرار:

2-7-3-1فحص وإختبار دقة النموذج في إتجاه الزمن:

1. معاملات النموذج لابد ان تكون ذات معنوية إحصائية إي تختلف عن الصفر معنوياً ، ويستخدم لذلك إختبار ستودنت (t) فاذا كانت غير معنوية لابد من استبعاد احد AR أو MA.
2. تحليل البواقي Residual analysis ويستخدم لذلك الإختبارات الأتية:

بعد التعرف على نموذج مبدئي وتقدير معلمات هذا النموذج نجري بعض التشخيصات على البواقي أو أخطاء التطبيق لنرى مدى مطابقة النموذج للسلسلة المشاهدة ، ويفترض أن البواقي هي مقدرات التشويش الأبيض a_t والتي نفترض إنها موزعة طبيعياً بمتوسط صفري وتباين σ^2. البواقي تعطى بالعلاقة

$$e_t = z_t - \hat{z}_t = \hat{a}_t \ \ ,1,2, \dots n$$

يقوم الفحص والإختبارات على فحص البواقي هل هي تشويش أبيض أم لا ، فإذا كانت تشويش أبيض نعتبر النموذج المطبق مقبولاً أما إذا لم تكن كذلك فيجب علينا إعادة النظر وا إقتراح نموذج آخر ولإجراء الفحص وا إختبار الدقة, ويستخدم الإختبارات التالية لفحص الدقة.

إختبار المتوسط للبواقي:

$$H_0: E(a_t) = 0$$

$$H_1: E(a_t) \neq 0$$

وهو إختبار من طرفين ونستخدم الإحصائية $U = \frac{e}{se(e)}$ والتي لها توزيع طبيعي قياسي فعند مستوي معنوية $\alpha = 0.05$ نعتبر ان $E(a_t) = 0$ إذا كانت $|U| < 1.96$ (هذا علي إعتبار ان حجم العينة اكبر من 30وحدة وهذا دائماً متحقق للمتسلسلات الزمنية التي ندرسها).

إختبار عشوائية البواقي:

نختبر عشوائية البواقي بواسطة إختبار الجري Runs test حول المتوسط وحول الصفر وهو احد الإختبارات اللامعلمية.

إختبار الترابط أو إستقلال البواقي:

يختبر ترابط أو إستقلال البواقي بواسطة إختبار الترابط الذاتي Autocorrelation test وذلك بحساب ورسم الترابطات الذاتية للعينة ACF للبواقي ومقارنتها مع دالة الارتباط الذاتي التشويش الابيض.

$$H_0: r_1 = 0$$

$$H_1: r_1 \neq 0$$

حيث الإحصائية $U = \frac{r_1}{se(r_1)}$ لها توزيع طبيعي قياسي فعند مستوي معنوية $\alpha = 0.05$ نعتبر ان $r_1 = 0$ إذا كانت $|U| < 1.96$ فهذا يعني ان الأخطاء (البواقي) تتوزع عشوائياً وان النموذج

جيد وملائم (كفوء) ويمكن إستخدامه في التنبؤ وان الإرتباطات الذاتية للبواقي تكون مستقلة وتتوزع طبيعياً بمتوسط صفر وتباين $\left(\frac{1}{n}\right)$ أي ان

$$r_1(a) \sim NID\left(0, \frac{1}{n}\right) \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (101-2)$$

إختبار طبيعة البواقي:

نختبر في ما اذا كانت البواقي موزعة طبيعياً وذلك بعدة طرق مثل:

إختبار حسن التطابق Goodness of Fit Test ونستخدم الإختبار اللامعلمي كولموجوروف- سميرنوف Kolmogorov- Smirnov Test .

مخطط الإحتمال الطبيعي Normal probability Plot .

مخطط الربيعات- الربيعات Q-Q Plot .

إختبار Portmanteau :

من الإختبارات الأكثر شيوعاً لفحص ملاءمة النموذج هي الإحصاء Q (إحصائية Pierce & Box) والتي تستخدم لإختيار المعنوية الإحصائية للإرتباطات الذاتية للبواقي وفق الصيغة الأتية:

$$Q = n\sum_{k=1}^{L} r_k^2(a) \sim \ \chi^2{}_{((l-m),\alpha)} \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (102-2)$$

حيث ان

L: عدد الإزاحات ، m: عدد المعلمات المقدرة

فإذا كانت قيمة Q أصغر من χ^2 الجدولية تقبل فرضية العدم ويستنتج ان الإرتباطات الذاتية غير معنوية مما يشير الي ان البواقي عشوائية وتتوزع بشكل مستقل مما يؤكد ان توفيق النموذج جيد وملائم.

ولقد تم تعديل وتطوير هذه الصيغة من قبل Ljung and Box لتأخذ الصيغة الأتية:

$$Q = (n)(n+2)\sum_{k=1}^{L}\frac{r_k^2(a)}{(n-k)} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (103-2)$$

وتسمى الإحصائية Q بإحصائية Ljung-box و هي تتوزع توزيع ${\chi^2}_{((l-m),\alpha)}$ ، عليه فإذا كانت قيمة Q أقل من قيمة ${\chi^2}_{((l-m),\alpha)}$ فإن هذا يعني كفاءة و ملاءمة النموذج المقدر للبيانات

.

2-7-3-2فحص وا ختبار دقة النموذج في إتجاه التكرار:

إختبار مقدم :Mokkdem Test

هو أسلوب جديد في عملية الإختبار يعتمد على الحقيقة الرياضية المبنية على اساس أن دالة كثافة الطيف Spectral Density Function لسلسلة الأخطاء العشوائية المستقلة يكون لها الشكل التالي الذي يتصف بالثبات:

$$f(w) = \frac{1}{2\pi} \quad , -\pi < w < \pi$$

وان اختبار مقدم Mokkadem تعتمد على الفرضية التالية:

$$H_0 = f(w) = Constant$$

$$H_1 = f(w) \neq Constant$$

وان الصيغة الرياضية لإختبار كالاتي:

$$\hat{T}_{mok} = \frac{1}{\gamma_0^2}\sum_{k=1}^{m}\hat{\gamma}_k^2 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots.. (104-2)$$

حيث تستخرج قيمة T كما يلي:

$$T = log\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\mu} P(w)dw\right| - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} log|P(w)|dw$$

وتقديرها $\hat{T}$ كما في الصيغة التالية:

$$\hat{T} = log\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \hat{P}(w)dw\right| - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} log\left|\hat{P}(w)\right|dw$$

حيث ان

$$\hat{P}(w) = \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{n} \hat{\gamma}_k e^{-iwk}$$

وعليه فإن

$$\hat{T} = \log\left(\frac{\hat{\gamma}_0}{2\pi}\right) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} log\left|\hat{P}(w)\right|dw$$

وتكون الصيغة العملية للمعادلة أعلاه كالتالي:

$$\hat{T} = \frac{1}{\gamma_0^2}\sum_{k=1}^{m} \hat{\gamma}_k^2$$

وتقارن قيمة $\hat{T}_{mok}$ مع قيمة t_α الجدولية، حيث ان الصيغة الرياضية لها هي:

$$t_\alpha = \frac{\sqrt{2m}(1-\alpha)}{\Phi_n} + \frac{n}{m} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (105-2)$$

علماً أن t_α تمثل مستوي الدلالة، m تمثل أكبر تباطؤ لـ k ، n عدد المشاهدات، و Φ_n تستخرج من جداول التوريع الطبيعي المعياري.

وعند مقارنة القيمة المحسوبة بالجدولية نقبل فرضية العدم ونرفض البديلة اذا كانت قيمة $\hat{T}_{mok}$ أقل من t_αإي ان الأخطاء تتوزع عشوائياً وان دالة الكثافة الطيفية الخاصة بالبواقي ثابتة إي ان النموذج المشخص ملائم.

2-7-4 مرحلة التنبؤ :Forecasting Stage[6] [7] [32] [14] [34] [33] [35]

اولاً : التنبؤ في إتجاه الزمن

بعد ان يتم تشخيص النموذج وتقدير معلماته وفحصه وتدقيقه، يتم إستخدامه في التنبؤ بالقيم المستقبليه للسلسلة لمعرفة نمط وسلوك السلسلة وذلك عن طريق إحلال القيم الحالية والماضية للمتغير التابع (Z_t) والبواقي $\hat{a}_t$ كقيم تقديرية لحد الخطأ وذلك للحصول على القيمة المستقبلية (Z_{t+2}) بإحلال القيمة المستقبلية الأولي (Z_{t+1}) في معادلة التنبؤ مع إفتراض ان حد الخطأ خارج العينة للدالة يساوي صفر، وهكذا حتي نصل للفترة المطلوبة، توجد بعض المقاييس لإختبار دقة التنبؤ ومنها :

متوسط القيم المطلقة للخطأ : Mean Absolute Error (MAE)

وصيغتة الرياضية هي:

$$MAE = \frac{\sum_{i=1}^{n} |\hat{a}_t|}{n} \quad \dots\dots\dots (106-2)$$

متوسط القيم المطلقة النسبية للخطأ : (Mean Absolute Percentage Error MAPE)

وصيغتة الرياضية هي:

$$MAPE = \frac{\sum_{i=1}^{n} \left[\frac{\hat{a}_t}{Z_t}\right]}{n} * 100 \quad \dots\dots\dots (107-2)$$

وكلما قلت قيمة المقياس زاد دقة التنبؤ.

دوال التنبؤ بإستخدام نماذج تحليل السلاسل الزمنية:

اذا كانت لدينا سلسلة زمنية مشاهدة $(Z_1 Z_2, \dots, Z_n)$ وان القيم المستقبلية المراد التنبؤ بها هي $(Z_{n+1} Z_{n+2}, \dots)$ او بشكل عام $(Z_n(\ell), \ell \geq 1)$ فإن خطأ التنبؤ *(Forecasting Error)* $(e_n(\ell))$ يعرف بالصيغة الرياضية التالية:

$$e_n(\ell) = Z_{n+\ell} - Z_n(\ell) \quad \dots\dots\dots (108-2)$$

حيث ان $Z_{n+\ell}$ تمثل القيمة المشاهدة

$Z_n(\ell)$ تمثل القيمة المتنبأ بها

ان نموذج الإنحدار الذاتي والمتوسط المتحرك من الدرجة *ARMA(p,q)* يمكن كتابتة كما يلي:

$$Z_t - \mu = \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j \mathrm{a}_{t-j} \quad , \mathrm{a}_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

حيث ان $\Psi_0, \Psi_1, \Psi_2, \ldots$ تمثل الأوزان

وان $\Psi_0 = 1 \quad , \sum_{j=0}^{\infty} \Psi_j{}^2 < \infty$

$$Z_{t+\ell} - \mu = \mathrm{a}_{n+\ell} + \Psi_1 \mathrm{a}_{n+\ell-1} + \Psi_2 \mathrm{a}_{n+\ell-2} + \cdots + \Psi_{\ell-1} \mathrm{a}_{n+1} + \Psi_\ell \mathrm{a}_n + \Psi_{\ell+1} \mathrm{a}_{n+1} + \cdots \ell \geq 1$$

ويمكن كتابة القيم المشاهدة والمستقبلية لسلسلة زمنية بدلالة الأوزان كما يلي:

$$Z_n(\ell) = \xi_0 \mathrm{a}_n + \xi_1 \mathrm{a}_{n-1} + \xi_2 \mathrm{a}_{n-2} + \cdots, \ell \geq 1$$

ويمكن تعريف متوسط مربعات الخطأ *Mean Square Error* بالصيغة الرياضية التالية:

$$E[e_n(\ell)]^2 = E[Z_{n+\ell} - Z_n(\ell)]^2 \quad \ldots\ldots (109-2)$$

$$= E[\mathrm{a}_{n+\ell} + \Psi_1 \mathrm{a}_{n+\ell-1} + \cdots + \Psi_{\ell-1} \mathrm{a}_{n+\ell} + (\Psi_\ell - \xi_0)\mathrm{a}_n + (\Psi_{\ell+1} - \xi_1)\mathrm{a}_{n-1} + \cdots]^2$$

$$= \left(1 + \Psi_1{}^2 + \Psi_2{}^2 + \cdots + \Psi_{\ell-1}{}^2\right)\sigma_{\mathrm{a}}^2 + \sum_{j=0}^{\infty} (\Psi_{\ell+j} - \xi_j)^2 \sigma_{\mathrm{a}}^2 \quad \ldots\ldots (89-2)$$

نحصل على متوسط مربع الخطأ الادني اذا حققت الاوزان ξ_j العلاقة التالية:

$$\xi_j = \Psi_{\ell+j} \quad , j = 0,1,2 \ldots \ell \geq 1$$

وعليه فإن التنبؤات ذات متوسط مربع الخطأ الادني Minimum Mean Square Error Forecasting (MMSEF) تعطي بالصيغة التالية:

$$Z_n(\ell) = +\Psi_\ell a_n + \Psi_{\ell+1} a_{n-1} + \Psi_{\ell+2} a_{n-2} + \cdots, \ell \geq 1 \quad \ldots\ldots (110-2)$$

نجد ان الصيغة المعطاة بالمعادلة (110-2) غير عملية لإيجاد التنبؤات للقيم المستقبلية حيث $(a_1, a_2, \ldots a_n)$ قيم لايمكن قياسها ومشاهدتها لذلك نستخدم قيم السلسلة الزمنية $(Z_1 Z_2, \ldots, Z_n)$ بدلاً عنها وتستخدم الصيغة الشرطية التالية لإيجاد قيم التنبؤات ذات متوسط الخطأ الادني وتعطي بالصيغة الرياضية التالية:

$$Z_n(\ell) = E(Z_{n+\ell} | Z_n, Z_{n-1} \ldots), \qquad \ell \geq 1 \ldots\ldots (111-2)$$

حيث

$$E(Z_{n+\ell} | Z_n, Z_{n-1} \ldots) = \begin{cases} Z_{n+j} & , j \leq 0 \\ Z_n(j) & , j > 0 \end{cases}$$

وان

$$E(a_{n+j} | a_n, a_{n-1}, \ldots) = \begin{cases} a_{n+j} & , j \leq 0 \\ 0 & , j > 0 \end{cases}$$

1.دالة التنبؤ لنموذج الإنحدار الذاتي AR(P):

اذا كانت $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ تمثل سلسلة زمنية مشاهدة حتي الزمن *(t)* فان الصيغة الرياضية للنموذج *AR(p)* بدلالة الاوزان هي:

$$Z_t = \mu + \Phi_1(Z_{t-1} - \mu) + \Phi_2(Z_{t-2} - \mu) + \cdots + \Phi_p(Z_{t-p} - \mu) + a_t$$

وعندما يراد التنبؤ للقيم المستقبلية$(Z_{n+1}, Z_{n+2}, \ldots)$ او $(Z_{n+\ell}, \ell \geq 1)$ فإن قيم التنبؤات تعطي بالصيغة التالية:

$$Z_n(\ell) = E(Z_{n+\ell} | Z_n, Z_{n-1} \ldots), \qquad \ell \geq 1$$

$$= \mu + E\left[\Phi_1(Z_{t+\ell-1} - \mu) + \Phi_2(Z_{t+\ell-2} - \mu) + \cdots + \Phi_p(Z_{t+\ell-p} - \mu) + a_{t+\ell} | Z_n, Z_{n-1}, \ldots\right]$$

$$= \mu + \Phi_1[Z_n(\ell-1) - \mu] + \Phi_2[Z_n(\ell-2) - \mu] + \cdots + \Phi_p[Z_n(\ell-p) - \mu] \quad \ldots\ldots (112-2)$$

2. دالة التنبؤ لنموذج الإنحدار الذاتي من الدرجة الأولي AR(1)

لنفترض لدينا السلسلة الزمنية $(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ و التي تتبع نموذج *AR(1)* والذي يكتب على الشكل الأتي:

$$Z_t - \mu = \Phi_1(Z_{t-1} - \mu) + a_t \,, a_t \sim WN(0, \sigma^2), |\Phi_1| < 1 \,, \mu \in (-\infty, \infty)$$

وعندما يراد التنبؤ بالقيم المستقبلية $(Z_{n+1}, Z_{n+2}, \dots)$ او بشكل عام $(Z_{n+\ell}, \ell \geq 1)$ فإن قيم التنبؤات تعطي بالصيغة التالية:

$$Z_n(\ell) = E(Z_{n+\ell}|Z_n, Z_{n-1} \dots), \qquad \ell \geq 1$$

$$= \mu + E[[\Phi_1(Z_{n+\ell-1} - \mu) + a_{n+\ell}]|Z_n, Z_{n-1}, \dots], \quad \ell \geq 1$$

$$= \mu + E[\Phi_1(Z_{n+\ell-1} - \mu)|Z_n, Z_{n-1}, \dots + a_{n+\ell}|Z_n, Z_{n-1}, \dots], \quad \ell \geq 1$$

$$= \mu + \Phi_1 E[(Z_{n+\ell-1}|Z_n, Z_{n-1}, \dots) - \mu] + E[a_{n+\ell}|Z_n, Z_{n-1}, \dots], \quad \ell \geq 1$$

إي

$$Z_n(\ell) = \mu + \Phi_1 E[(Z_{n+\ell-1}|Z_n, Z_{n-1}, \dots) - \mu] + E[a_{n+\ell}|Z_n, Z_{n-1}, \dots], \quad \ell \geq 1$$

وبحل هذه العلاقة تكراريا ً

$$\ell = 1: Z_n(1) = \mu + \Phi_1 E[(Z_n|Z_n, Z_{n-1}, \dots) - \mu] + E[a_{n+1}|Z_n, Z_{n-1}, \dots]$$

$$= \mu + \Phi_1(Z_n - \mu)$$

$$\ell = 2: Z_n(2) = \mu + \Phi_1 E[(Z_{n+1}|Z_n, Z_{n-1}, \dots) - \mu] + E[a_{n+2}|Z_n, Z_{n-1}, \dots]$$

$$= \mu + \Phi_1(Z_n(1) - \mu)$$

$$\ell = 3: Z_n(3) = \mu + \Phi_1 E[(Z_{n+2}|Z_n, Z_{n-1}, \dots) - \mu] + E[a_{n+3}|Z_n, Z_{n-1}, \dots]$$

$$= \mu + \Phi_1(Z_n(2) - \mu)$$

وهكذا بشكل عام فإن دالة التنبؤ ذات متوسط مربع الأخطاء الادني لنموذج *AR(1)* هي:

$$Z_n(\ell) = \mu + \Phi_1[Z_n(\ell - 1) - \mu], \qquad \ell \geq 1 \quad \dots\dots (113-2)$$

وان تباينات اخطاء التنبؤ تعطي بالعلاقة التالية:

$$V[e_n(\ell)] = \sigma^2\left(1 + \Phi_1{}^2 + \Phi_1{}^4 + \cdots + \Phi_1{}^{2(\ell-1)}\right), \quad \ell \geq 1$$

$$= \sigma^2 \frac{1 - \Phi_1{}^{2\ell}}{1 - \Phi_1{}^2}, \quad \ell \geq 1 \quad \dots\dots \ (114-2)$$

3. دالة التنبؤ لنموذج الإنحدار الذاتي من الدرجة الثاني AR(2)

لنفترض لدينا السلسلة الزمنية $(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ و التي تتبع نموذج *AR(2)* والذي يكتب على الشكل الأتي:

$$Z_t - \mu = \Phi_1(Z_{t-1} - \mu) + \Phi_2(Z_{t-2} - \mu) + a_t \ , a_t \sim WN(0, \sigma^2), \Phi_2 - \Phi_1 < 1, \Phi_2 + \Phi_1 < 1 |\Phi_2| < 1 \ , \mu \in (-\infty, \infty)$$

وعندما يراد التنبؤ بالقيم المستقبلية $(Z_{n+1}, Z_{n+2}, \dots)$ او بشكل عام $(Z_{n+\ell}, \ell \geq 1)$ فإن قيم التنبؤات تعطي بالصيغة التالية:

$$Z_n(\ell) = E(Z_{n+\ell}|Z_n, Z_{n-1} \dots), \qquad \ell \geq 1$$

$$= \mu + E[[\Phi_1(Z_{n+\ell-1} - \mu) + \Phi_2(Z_{n+\ell-2} - \mu) + a_{n+\ell}]|Z_n, Z_{n-1}, \dots], \quad \ell \geq 1$$

$$= \mu + E[\Phi_1(Z_{n+\ell-1} - \mu)|Z_n, Z_{n-1}, \dots + \Phi_2(Z_{n+\ell-2} - \mu)|Z_n, Z_{n-1}, \dots + a_{n+\ell}|Z_n, Z_{n-1}, \dots], \quad \ell \geq 1$$

$$= \mu + \Phi_1 E[(Z_{n+\ell-1}|Z_n, Z_{n-1}, \dots) - \mu] + \Phi_2 E[(Z_{n+\ell-2}|Z_n, Z_{n-1}, \dots) - \mu] + E[a_{n+\ell}|Z_n, Z_{n-1}, \dots], \quad \ell \geq 1$$

إي

$$Z_n(\ell) = \mu + \Phi_1 E[(Z_{n+\ell-1}|Z_n, Z_{n-1}, \dots) - \mu] + \Phi_2 E[(Z_{n+\ell-2}|Z_n, Z_{n-1}, \dots) - \mu] + E[a_{n+\ell}|Z_n, Z_{n-1}, \dots], \quad \ell \geq 1$$

وبحل هذه العلاقة تكراريا ً

$$\ell = 1: Z_n(1) = \mu + \Phi_1 E[(Z_n|Z_n, Z_{n-1}, \dots) - \mu] + \Phi_2 E[(Z_{n-1}|Z_n, Z_{n-1}, \dots) - \mu] E[a_{n+1}|Z_n, Z_{n-1}, \dots]$$

$$= \mu + \Phi_1(Z_n - \mu) + \Phi_2(Z_{n-1} - \mu)$$

$\ell = 2: Z_n(2)$

$$= \mu + \Phi_1 E[(Z_{n+1}|Z_n, Z_{n-1}, \dots) - \mu]$$
$$+ \Phi_2 E[(Z_n|Z_n, Z_{n-1}, \dots) - \mu] E[a_{n+2}|Z_n, Z_{n-1}, \dots]$$

$$= \mu + \Phi_1(Z_n(1) - \mu) + \Phi_2(Z_n - \mu)$$

$\ell = 3: Z_n(3)$

$$= \mu + \Phi_1 E[(Z_{n+2}|Z_n, Z_{n-1}, \dots) - \mu]$$
$$+ \Phi_2 E[(Z_{n+1}|Z_n, Z_{n-1}, \dots) - \mu] E[a_{n+3}|Z_n, Z_{n-1}, \dots]$$

$$= \mu + \Phi_1(Z_n(2) - \mu) + \Phi_2(Z_n(1) - \mu)$$

$\ell = 4: Z_n(4)$

$$= \mu + \Phi_1 E[(Z_{n+3}|Z_n, Z_{n-1}, \dots) - \mu]$$
$$+ \Phi_2 E[(Z_{n+2}|Z_n, Z_{n-1}, \dots) - \mu] E[a_{n+4}|Z_n, Z_{n-1}, \dots]$$

$$= \mu + \Phi_1(Z_n(3) - \mu) + \Phi_2(Z_n(2) - \mu)$$

وهكذا بشكل عام فإن دالة التنبؤ ذات متوسط مربع الأخطاء الادني لنموذج AR(2) هي:

$$Z_n(\ell) = \mu + \Phi_1[Z_n(\ell - 1) - \mu] + \Phi_2[Z_n(\ell - 2) - \mu], \quad \ell \geq 1 \quad \dots\dots (115-2)$$

وان تباينات اخطاء التنبؤ تعطي بالعلاقة التالية:

$$\Psi_j = \begin{cases} 1, & j = 0 \\ \Phi_1, & j = 1 \\ \Phi_1^{\,2} + \Phi_2, & j = 2 \\ \Phi_1 \Psi_{j-1} + \Phi_2 \Psi_{j-2}, & j \geq 3 \end{cases} \quad \dots\dots (116-2)$$

4. دالة التنبؤ لنموذج المتوسطات المتحركة MA(q)

اذا كانت$(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ تمثل سلسلة زمنية مشاهدة حتي الزمن *(n)* فإن الصيغة الرياضية لنموذج *MA(q)* بدلالة الأوزان هي:

$$Z_t = \mu + a_t - \Theta_1 a_{t-1} - \Theta_2 a_{t-2} - \cdots - \Theta_q a_{t-q}$$

وعندما يراد التنبؤ عن القيم المستقبلية $(Z_{n+1}, Z_{n+2}, \dots)$ او $(Z_{n+\ell}, \ell \geq 1)$ فإن قيم التنبؤات تعطي بالصيغة التالية:

$$Z_n(\ell) = E(Z_{n+\ell} | Z_n, Z_{n-1} \dots), \qquad \ell \geq 1$$

$$= \mu + E[a_{t+\ell} | Z_n, Z_{n-1}, \dots] - \Theta_1 E[a_{t+\ell-1} | Z_n, Z_{n-1}, \dots] - \Theta_2 E[a_{t+\ell-2} | Z_n, Z_{n-1}, \dots] - \cdots - \Theta_q E[a_{t+\ell-q} | Z_n, Z_{n-1}, \dots]$$

$$= \begin{cases} \mu - \Theta_\ell a_n - \Theta_{\ell+1} a_{n-1} - \cdots - \Theta_q a_{n+\ell-q}, & \ell = 1,2, \dots, q \\ \mu, & \ell \geq q+1, q+2, \dots \end{cases} \qquad \dots \dots (117-2)$$

5. دالة التنبؤ لنموذج المتوسط المتحرك من الدرجة الأولي **MA(1)**

اذا كانت$(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ تمثل سلسلة زمنية مشاهدة حتي الزمن *(n)* فإن الصيغة الرياضية لنموذج *MA(1)* بدلالة الأوزان هي:

$$Z_t = \mu + a_t - \Theta_1 a_{t-1}, \quad a_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

وعندما يراد التنبؤ عن القيم المستقبلية $(Z_{n+1}, Z_{n+2}, \dots)$ او $(Z_{n+\ell}, \ell \geq 1)$ فإن قيم التنبؤات تعطي بالصيغة التالية:

$$Z_n(\ell) = E(Z_{n+\ell} | Z_n, Z_{n-1} \dots), \qquad \ell \geq 1$$

$$= \mu + E[a_{n+\ell} | Z_n, Z_{n-1}, \dots] - \Theta_1 E[a_{n+\ell-1} | Z_n, Z_{n-1}, \dots], \qquad \ell \geq 1$$

وبحل هذه العلاقة تكراريا ً

$$Z_n(\ell) = \mu + E[a_{n+\ell} | Z_n, Z_{n-1}, \dots] - \Theta_1 E[a_{n+\ell-1} | Z_n, Z_{n-1}, \dots], \quad \ell \geq 1$$

$$\ell = 1 : Z_n(1) = \mu + E[a_{n+1} | Z_n, Z_{n-1}, \dots] - \Theta_1 E[a_n | Z_n, Z_{n-1}, \dots]$$

$$= \mu - \Theta_1 a_n$$

$$\ell = 2 : Z_n(2) = \mu + E[a_{n+2} | Z_n, Z_{n-1}, \dots] - \Theta_1 E[a_{n+1} | Z_n, Z_{n-1}, \dots]$$

$$= \mu$$

$$\ell = 3 : Z_n(3) = \mu + E[a_{n+3}|Z_n, Z_{n-1}, \dots] - \Theta_1 E[a_{n+2}|Z_n, Z_{n-1}, \dots]$$

$$= \mu$$

وهكذا بشكل عام فإن دالة التنبؤ ذات متوسط مربع الأخطاء الادني لنموذج MA(1) هي:

$$Z_n(\ell) = \begin{cases} \mu + \Theta_1 a_n , & \ell = 1 \\ \mu , & \ell \geq 2 \end{cases} \quad \dots \dots (118-2)$$

6. دالة التنبؤ لنموذج المتوسط المتحرك من الدرجة الثانية MA(2)

اذا كانت$(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ تمثل سلسلة زمنية مشاهدة حتي الزمن *(n)* فإن الصيغة الرياضية لنموذج *MA(2)* بدلالة الأوزان هي:

$$Z_t = \mu + a_t - \Theta_1 a_{t-1} - \Theta_2 a_{t-2}, \;\; a_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

وعندما يراد التنبؤ عن القيم المستقبلية $(Z_{n+1}, Z_{n+2}, \dots)$ او $(Z_{n+\ell}, \ell \geq 1)$ فإن قيم التنبؤات تعطي بالصيغة التالية:

$$Z_n(\ell) = E(Z_{n+\ell}|Z_n, Z_{n-1} \dots), \qquad \ell \geq 1$$

$$= \mu + E(a_{n+\ell}|Z_n, Z_{n-1}, \dots) - \Theta_1 E(a_{n+\ell-1}|Z_n, Z_{n-1}, \dots) - \Theta_2 E(a_{n+\ell-2}|Z_n, Z_{n-1}, \dots), \qquad \ell \geq 1$$

وبحل هذه العلاقة تكرارياً

$$Z_n(\ell) = \mu + E(a_{n+\ell}|Z_n, Z_{n-1}, \dots) - \Theta_1 E(a_{n+\ell-1}|Z_n, Z_{n-1}, \dots) - \Theta_2 E(a_{n+\ell-2}|Z_n, Z_{n-1}, \dots), \quad \ell \geq 1$$

$$\ell = 1 : Z_n(1) = \mu + E(a_{n+1}|Z_n, Z_{n-1}, \dots) - \Theta_1 E(a_n|Z_n, Z_{n-1}, \dots) - \Theta_2 E(a_{n-1}|Z_n, Z_{n-1}, \dots)$$

$$= \mu - \Theta_1 a_n - \Theta_2 a_{n-1}$$

$$\ell = 2 : Z_n(2) = \mu + E(a_{n+2}|Z_n, Z_{n-1}, \dots) - \Theta_1 E(a_{n+1}|Z_n, Z_{n-1}, \dots) - \Theta_2 E(a_n|Z_n, Z_{n-1}, \dots)$$

$$= \mu - \Theta_2 a_n$$

$$\ell = 3 : Z_n(3) = \mu + E(a_{n+3}|Z_n, Z_{n-1}, \dots) - \Theta_1 E(a_{n+2}|Z_n, Z_{n-1}, \dots) - \Theta_2 E(a_{n+1}|Z_n, Z_{n-1}, \dots)$$

$$= \mu$$

وهكذا بشكل عام فإن دالة التنبؤ ذات متوسط مربع الأخطاء الادني لنموذج MA(2) هي:

$$Z_n(\ell) = \begin{cases} \mu - \Theta_1 a_n - \Theta_2 a_{n-1}, & \ell = 1 \\ \mu - \Theta_2 a_n, & \ell = 2 \\ \mu, & \ell \geq 3 \end{cases} \qquad \ldots\ldots (119-2)$$

7. دالة التنبؤ لنموذج الإنحدار الذاتي والمتوسط المتحرك من الدرجة ARMA(1,1)

اذا كانت $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ تمثل سلسلة زمنية مشاهدة حتي الزمن *(n)* فإن الصيغة الرياضية لنموذج ARMA(1,1) بدلالة الأوزان هي:

$$Z_t = \mu + \Phi_1(Z_{t-1} - \mu) + a_t - \Theta_1 a_{t-1}, \quad a_t \sim WN(0, \sigma^2), \Phi_1 \neq \Theta_1, |\Phi_2| < 1$$

وعندما يراد التنبؤ عن القيم المستقبلية $(Z_{n+1}, Z_{n+2}, \ldots)$ او $(Z_{n+\ell}, \ell \geq 1)$ فإن قيم التنبؤات تعطي بالصيغة التالية:

$$Z_n(\ell) = E(Z_{n+\ell} | Z_n, Z_{n-1} \ldots), \qquad \ell \geq 1$$

$$= \mu + \Phi_1 E[(Z_{n+\ell-1} - \mu) | Z_n, Z_{n-1} \ldots] + E(a_{n+\ell} | Z_n, Z_{n-1} \ldots) - \Theta_1 E(a_{n+\ell-1} | Z_n, Z_{n-1} \ldots), \ \ell \geq 1$$

وبحل هذه العلاقة تكراراً

$$Z_n(\ell) = \mu + \Phi_1 E[(Z_{n+\ell-1} - \mu) | Z_n, Z_{n-1} \ldots] + E(a_{n+\ell} | Z_n, Z_{n-1} \ldots) - \Theta_1 E(a_{n+\ell-1} | Z_n, Z_{n-1} \ldots), \ \ell \geq 1$$

$$\ell = 1: Z_n(1) = \mu + \Phi_1 E[(Z_n - \mu) | Z_n, Z_{n-1} \ldots] + E(a_{n+1} | Z_n, Z_{n-1} \ldots) - \Theta_1 E(a_n | Z_n, Z_{n-1} \ldots), \ \ell \geq 1$$

$$= \mu + \Phi_1(Z_n - \mu) - \Theta_1 a_n$$

$$\ell = 2: Z_n(2) = \mu + \Phi_1 E[(Z_{n+1} - \mu) | Z_n, Z_{n-1} \ldots] + E(a_{n+2} | Z_n, Z_{n-1} \ldots) - \Theta_1 E(a_{n+1} | Z_n, Z_{n-1} \ldots), \ \ell \geq 1$$

$$= \mu + \Phi_1(Z_n(1) - \mu)$$

$$\ell = 3: Z_n(3) = \mu + \Phi_1 E[(Z_{n+2} - \mu) | Z_n, Z_{n-1} \ldots] + E(a_{n+3} | Z_n, Z_{n-1} \ldots) - \Theta_1 E(a_{n+2} | Z_n, Z_{n-1} \ldots), \ \ell \geq 1$$

$$= \mu + \Phi_1(Z_n(2) - \mu)$$

وهكذا بشكل عام فإن دالة التنبؤ ذات متوسط مربع الأخطاء الادني لنموذج ARMA(1,1) هي:

$$Z_n(\ell) = \begin{cases} \mu + \Phi_1(Z_n - \mu) - \Theta_1 a_n , & \ell = 1 \\ \mu + \Phi_1(Z_n(\ell - 1) - \mu) , & \ell \geq 2 \end{cases} \quad \ldots\ldots (120-2)$$

8. دالة التنبؤ لنموذج الإنحدار الذاتي التكاملي مع المتوسط المتحرك ARIMA(p,d,q)

ان اسلوب التنبؤ في السلاسل الزمنية الساكنة يمكن استخدامة في التنبؤ للسلاسل الزمنية غير الساكنة لإيجاد تنبؤات ذات متوسط مربع الأخطاء الادني حيث تستخدم الفروق W_t بدلاً من Z_t وحيث ان هدفنا هو التنبؤ لقيم $Z_{n+\ell}$ وليس الفرق $W_{n+\ell}$ فاننا نحصل على التنبؤ لقيم $Z_{n+\ell}$ بدلالة قيم Z_t و a_t

9. دالة التنبؤ لنموذج الإنحدار الذاتي التكاملي مع المتوسط المتحرك ARMA(1,1,0)

اذا كانت $(Z_1, Z_2, \ldots, Z_n)$ تمثل سلسلة زمنية مشاهدة حتي الزمن (n) فإن الصيغة الرياضية لنموذج ARIMA(1,1,0) بدلالة الأوزان هي:

$$\Phi_1(B)\nabla Z_t = \mu + a_t$$

$$(1 - \Phi_1 B)(Z_t - Z_{t-1}) = \mu + a_t$$

$$Z_t = \mu + Z_{t-1} + \Phi_1 Z_{t-1} - \Phi_1 Z_{t-2} + a_t$$

وعندما يراد التنبؤ عن القيم المستقبلية $(Z_{n+1}, Z_{n+2}, \ldots)$ او $(Z_{n+\ell}, \ell \geq 1)$ فإن قيم التنبؤات تعطي بالصيغة التالية:

$$Z_n(\ell) = E(Z_{n+\ell} | Z_n, Z_{n-1} \ldots) , \qquad \ell \geq 1$$

$$= \mu + E(Z_{n+\ell-1} | Z_n, Z_{n-1} \ldots) + \Phi_1 E(Z_{n+\ell-1} | Z_n, Z_{n-1} \ldots) - \Phi_1 E(Z_{n+\ell-2} | Z_n, Z_{n-1} \ldots) + E(a_{n+\ell} | Z_n, Z_{n-1} \ldots)$$

$$= \mu + Z_n(\ell - 1) + \Phi_1 Z_n(\ell - 1) - \Phi_1 Z_n(\ell - 2), \quad \ell \geq 1$$

وهكذا بشكل عام فإن دالة التنبؤ ذات متوسط مربع الأخطاء الادني لنموذج ARIMA(1,1,0) هي:

$$Z_n(\ell) = \begin{cases} \mu + Z_n + \Phi_1 Z_n\,, & \ell = 1 \\ \mu + (1+\Phi_1) Z_n(\ell-1) - \Phi_1 Z_n(\ell-2), & \ell \geq 2 \end{cases} \quad \dots (121-2)$$

10. دالة التنبؤ لنموذج الإنحدار الذاتي التكاملي مع المتوسط المتحرك ARMA(0,1,1)

اذا كانت$(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ تمثل سلسلة زمنية مشاهدة حتي الزمن (n) فإن الصيغة الرياضية لنموذج ARIMA(0,1,1) بدلالة الأوزان هي:

$$Z_t = Z_{t-1} + a_t - \Theta_1 a_{t-1}, \;\; a_t \sim WN(0, \sigma^2)$$

وعندما يراد التنبؤ عن القيم المستقبلية $(Z_{n+1}, Z_{n+2}, \dots)$ او $(Z_{n+\ell}, \ell \geq 1)$ فإن قيم التنبؤات تعطي بالصيغة التالية:

$$Z_n(\ell) = E(Z_{n+\ell} | Z_n, Z_{n-1} \dots), \qquad \ell \geq 1$$

$$= E(Z_{n+\ell-1} | Z_n, Z_{n-1} \dots) + E(a_{n+\ell} | Z_n, Z_{n-1} \dots) - \Theta_1 E(a_{n+\ell-1} | Z_n, Z_{n-1} \dots), \quad \ell \geq 1$$

وبحل هذه العلاقة تكراريا ً

$$Z_n(\ell) = E(Z_{n+\ell-1} | Z_n, Z_{n-1} \dots) + E(a_{n+\ell} | Z_n, Z_{n-1} \dots) - \Theta_1 E(a_{n+\ell-1} | Z_n, Z_{n-1} \dots), \quad \ell \geq 1$$

$$\ell = 1: Z_n(1) = E(Z_n | Z_n, Z_{n-1} \dots) + E(a_{n+1} | Z_n, Z_{n-1} \dots) - \Theta_1 E(a_n | Z_n, Z_{n-1} \dots), \quad \ell \geq 1$$

$$= Z_n - \Theta_1 a_n$$

$$\ell = 2: Z_n(2) = E(Z_{n+1} | Z_n, Z_{n-1} \dots) + E(a_{n+2} | Z_n, Z_{n-1} \dots) - \Theta_1 E(a_{n+1} | Z_n, Z_{n-1} \dots), \quad \ell \geq 1$$

$$= Z_n(1)$$

$$\ell = 3: Z_n(3) = E(Z_{n+2} | Z_n, Z_{n-1} \dots) + E(a_{n+3} | Z_n, Z_{n-1} \dots) - \Theta_1 E(a_{n+2} | Z_n, Z_{n-1} \dots), \quad \ell \geq 1$$

$$= Z_n(2)$$

وهكذا بشكل عام فإن دالة التنبؤ ذات متوسط مربع الأخطاء الادني لنموذج ARIMA(0,1,1) هي:

$$Z_n(\ell) = \begin{cases} Z_n - \Theta_1 a_n\,, & \ell = 1 \\ Z_n(\ell - 1), & \ell \geq 2 \end{cases} \quad \dots (122-2)$$

11. دالة التنبؤ لنموذج الإنحدار الذاتي التكاملي مع المتوسط المتحرك ARMA(1,1,1)

اذا كانت$(Z_1, Z_2, \dots, Z_n)$ تمثل سلسلة زمنية مشاهدة حتي الزمن (n) فإن الصيغة الرياضية لنموذج ARIMA(1,1,1) بدلالة الأوزان هي:

$$\Phi_1(\mathrm{B})\nabla Z_t = \mu + \Theta_1(B)\mathrm{a}_t$$

$$(1 - \Phi_1\mathrm{B})(Z_t - Z_{t-1}) = \mu + (1 - \Theta_1 B)\mathrm{a}_t$$

$$Z_t = \mu + Z_{t-1} + \Phi_1 Z_{t-1} - \Phi_1 Z_{t-2} + \mathrm{a}_t - \Theta_1\mathrm{a}_{t-1}$$

وعندما يراد التنبؤ عن القيم المستقبلية $(Z_{n+1}, Z_{n+2}, \dots)$ او $(Z_{n+\ell}, \ell \geq 1)$ فإن قيم التنبؤات تعطي بالصيغة التالية:

$$Z_n(\ell) = E(Z_{n+\ell}|Z_n, Z_{n-1} \dots), \qquad \ell \geq 1$$

$$= \mu + E(Z_{n+\ell-1}|Z_n, Z_{n-1} \dots) + \Phi_1 E(Z_{n+\ell-1}|Z_n, Z_{n-1} \dots) - \Phi_1 E(Z_{n+\ell-2}|Z_n, Z_{n-1} \dots) + E(\mathrm{a}_{n+\ell}|Z_n, Z_{n-1} \dots) - \Theta_1 E(\mathrm{a}_{n+\ell-1}|Z_n, Z_{n-1} \dots)$$

$$= \mu + Z_n(\ell - 1) + \Phi_1 Z_n(\ell - 1) - \Phi_1 Z_n(\ell - 2) - \Theta_1\mathrm{a}_{n+\ell-1}, \quad \ell \geq 1$$

وهكذا بشكل عام فإن دالة التنبؤ ذات متوسط مربع الأخطاء الادني لنموذج ARIMA(1,1,1) هي:

$$Z_n(\ell) = \begin{cases} \mu + Z_n + \Phi_1 Z_n - \Theta_1\mathrm{a}_n, & \ell = 1 \\ \mu + (1 + \Phi_1)Z_n(\ell - 1) - \Phi_1 Z_n(\ell - 2), & \ell \geq 2 \end{cases} \quad \dots (123 - 2)$$

حدود التنبؤ Forecasting Limits

ان دوال التنبؤ التي تم دراستها$(Z_{n+\ell}, \ell \geq 1)$ تعطي قيمة واحده فقط تسمي بتنبؤ النقطة والذي لايكفي او يفيد في إتخاذ قرارات إحصائية عن الظاهرة العشوائية المدروسة لان

$\Pr(Z_{n+m} = Z_n(m)) = 0$ تكون لبعض القيم وهذا يعني إحتمال ان القيمة المستقبلية المراد التنبؤ بها تساوي القيمة المعطاه من دالة التنبؤ التي تساوي الصفر وبالتالي لافائدة من التنبؤ، وللتغلب على ذلك نقوم بإيجاد ما يسمي التنبؤ بفترة وهي عبارة عن فترة مثل (a,b) على خط الاعداد الحقيقية

بحيث ان $\Pr(a \leq Z_{n+m} \leq b) = 1 - \alpha$ إي اننا حددنا درجة تأكدنا من ان القيمة المستقبلية المراد التنبؤ بها تقع بين (a,b) بدرجة إحتمال $1 - \alpha$.

اذا افترضنا ان المتغيرات العشوائية a_t لها توريع معتدل إي ان $a_t \sim N(0, \sigma^2)$ وان التوزيع الإحتمالي للتنبؤ عن $Z_{n+\ell}$ هو توزيع معتدل وسطه الحسابي $Z_n(\ell)$ وتباين $V(e_n(\ell))$ فغن فترة التنبؤ للعينات الكبيرة عند مستوي ثقه $(1 - \alpha)\%$ للتنبؤ عن $Z_{n+\ell}$ هي:

$$Z_n(\ell) \pm Z_{1-\frac{\sigma}{2}} \sqrt{V\big(e_n(\ell)\big)}, \qquad \ell \geq 1 \quad \ldots\ldots (124-2)$$

وبالإعتماد على المعادلة أعلاه يمكن إيجاد فترة التنبؤ لبعض النماذج ومنها:

فترة التنبؤ لنموذج AR(1) :

عندما $\alpha = 0.05$ تعطي بالصيغة التالية:

$$Z_n(\ell) \pm 1.96 \sqrt{\sigma^2 \frac{1 - {\Phi_1}^{2\ell}}{1 - {\Phi_1}^2}}, \qquad \ell \geq 1 \quad \ldots\ldots (125-2)$$

فترة التنبؤ لنموذج MA (1) :

عندما $\alpha = 0.05$ تعطي بالصيغة التالية:

$$Z_n(\ell) \pm 1.96 \sqrt{\sigma^2 (1 - {\Phi_1}^2)}, \qquad \ell \geq 1 \quad \ldots\ldots (126-2)$$

فترة التنبؤ لنموذج ARIMA (0,1,1) :

عندما $\alpha = 0.05$ تعطي بالصيغة التالية:

$$Z_n(\ell) \pm 1.96 \sqrt{\sigma^2 \big(1 + (\ell - 1)(1 - {\Theta_1}^2)\big)}, \qquad \ell \geq 1 \quad \ldots\ldots (127-2)$$

ثانياً : التنبؤ بإتجاه التكرار:

اذا كانت $(Z_t , t = 1,2, \dots , n)$ سلسلة زمنية فإن القيمة المراد التنبؤ بها بإستخدام النماذج الطيفية يمكن تمثيلها بالعلاقة التالية:

$$t_p = k_n + \acute{t}$$

حيث ان $\acute{t}$ هو قيمة لـ t عليه $t = 1,\acute{2}, \dots , n$ وبما أن

$$\cos(w_i t_p) = cos[w_i(mn + \acute{t})]$$

$$= \cos(w_i mn) \cos(w_i \acute{t}) - sin(w_i mn) sin(w_i \acute{t})$$

حيث m عدد صحيح لا يساوي صفر فإن:

$$\cos(w_i mn) = \cos\left[2\left(\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{n}}\right)\mathrm{mn}\right] = 1$$

$$\cos(w_i mn) = \sin\left[2\left(\frac{\mathrm{i}}{\mathrm{n}}\right)\mathrm{mn}\right] = 0$$

$$\cos(w_i t_p) = \cos(w_i \acute{t}) = \cos(w_i t) \quad \dots \dots \dots (128 - 2)$$

وهذا يعني عندما يراد التنبؤ لإي قيمة اكبر من n فإن التنبؤ في تلك النقطه $t_p = k_n + \acute{t}$ سيكون مساوياً للقيمة في النقطه $t = \acute{t}$ وهذا لدورية النموذج.

8-2 إتجاهات أخري في تحليل السلاسل الزمنية: [3] [12] [13] [37] [10] [20]

لغرض إعطاء صورة شاملة لتحليل السلاسل الزمنية لابد من الإشارة الي وجود اساليب أخري لتحليل السلاسل الزمنية تعتمد على نوعية السلسلة الزمنية سنذكر منها في عُجاله:

1-8-2 السلاسل الزمنية الموسمية: Seasonal Time series

يقصد بها مجموعة من القيم المشاهدة المرتبطة مع بعضها تولدت بشكل متعاقب مع إستمرار الزمن وتحتوي على ظاهرة الموسمية والتي تشير الي النمط المتماثل لحركة السلسلة الزمنية في الأشهر

المتقابلة خلال السنوات المتتالية، إي ان السلسلة الزمنية تعيد نفسها بعد فترات زمنية ثابتة (Fixed Intervals) وتدعي هذه الفترة بالفترة الموسمية ونرمز لها بالرمز (s) وقد تكون (s) سنة أو فصلاً أو شهراً، إي ان $f(t+s)=f(t)$

ويصعب تمييز الموسمية اذا كانت مدمجة مع الإتجاه العام وهذه المشكلة يمكن تفاديها عن طريق تحديد الموسمية عندما تكون البيانات مستقرة، إي ان وجود الإتجاه العام في البيانات يعني انها غير مستقره وبالتالي يمكن تحويلها الي بيانات مستقرة بإستخدام الفروق.

1. نماذج الإنحدار الذاتي الموسمي(Seasonal Autoregressive Model (SAR(p) :

الصيغة الرياضية لنموذج الإنحدار الذاتي الموسمي من الدرجة (P) تأخذ الشكل الأتي:

$$Z_t = \Phi_s Z_{t-s} + \Phi_{2s} Z_{t-2s} + \cdots + \Phi_{Ps} Z_{t-Ps} + a_t \ldots\ldots\ldots (129-2)$$

حيث أن:

Z_{t-is} : قيم مشاهدات السلسلة الزمنية الموسمية $i = 0,1,\ldots\ldots,p$

S : طول الفترة الموسمية

Φ_s : معلمات الإنحدار الذاتي الموسمي $i = 1,2,\ldots\ldots,p$

a_t : الخطأ العشوائي

2. نموذج الإنحدار الذاتي الموسمي من الدرجة الأولي SAR(1) :

يمكن كتابة الصيغة العامة لنموذج الإنحدار الذاتي الموسمي من الدرجة الأولي على النحو التالي:

$$Z_t = \Phi_s Z_{t-is} + a_t \ldots\ldots\ldots (130-2)$$

3. نموذج الإنحدار الذاتي الموسمي من الدرجة الثانية SAR(2) :

يمكن كتابة نموذج الإنحدار الذاتي الموسمي من الرتبة الثانية بالصيغة الأتية:

$$Z_t = \Phi_s Z_{t-s} + \Phi_{2s} Z_{t-2s} + a_t \quad \dots\dots\dots (131-2)$$

4. نموذج الاوساط المتحركة الموسمي: Seasonal Moving Average Model (SMA(q))

الصيغة العامة لنموذج الاوساط المتحركة الموسمي من الدرجة (Q) ستأخذ الشكل الأتي:

$$z_t = a_t - \Theta_s a_{t-s} - \Theta_{2s} a_{t-2s} - \cdots - \Theta_{qs} a_{t-qs} \quad \dots\dots (132-2)$$

5. نموذج الاوساط المتحركة الموسمي من الدرجة الأولي SMA(1) :

يمكن كتابة نموذج الاوساط المتحركة الموسمي من الدرجة الأولي بالصيغة الأتية:

$$z_t = a_t - \Theta_s B^S a_{t-s} \quad \dots\dots\dots (133-2)$$

6. نموذج المتوسط المتحرك الموسمي من الدرجة الثانية SMA(2) :

يمكن كتابة نموذج الاوساط المتحركة الموسمي من الدرجة الثانية بالصيغة الأتية:

$$z_t = a_t - \Theta_s B^S a_{t-s} - \Theta_{2s} B^{2S} a_{t-2s} \quad \dots\dots (134-2)$$

7. النموذج المختلط (الإنحدار الذاتي – الاوساط المتحركة) الموسمي:
Seasonal Mixed (Autoregressive – Moving Average) Model (SARMA(p,q))

$$\Phi_s(B^s) Z_t = \Theta_s(B^s) a_t$$

$$(1 - \Phi_s B^s - \Phi_{2s} B^{2s} - \cdots - \Phi_{ps} B^{ps}) Z_t = (1 - \Theta_s B^s - \Theta_{2s} B^{2s} - \cdots - \Theta_{qs} B^{qs}) a_t$$

فان الصيغة العامة للنموذج المختلط الموسمي من الدرجة SARMA(P,Q) ستأخذ الشكل الأتي:

$$Z_t = \Phi_s Z_{t-1} + \Phi_{2s} Z_{t-2s} + \cdots + \Phi_{ps} Z_{t-p} + a_t - \Theta_s a_{t-s} - \Theta_{2s} a_{t-2s} \dots - \Theta_{qs} a_{t-qs}$$

8. النموذج المختلط (الإنحدار الذاتي – الاوساط المتحركة) الموسمي من الدرجة الأولي:
Seasonal Mixed(Autoregressive – Moving Average) Model SARMA(1,1)

يمكن كتابة النموذج المختلط (الإنحدار الذاتي – الاوساط المتحركة) الموسمي من الدرجة الأولي بالصيغة الأتية:

$$Z_t = \Phi_s Z_{t-1} + a_t - \Theta_s a_{t-1} \quad \dots\dots\dots (135-2)$$

9. النموذج الموسمي المضاعف Multiplicative Seasonal Model

الصيغة العامة للنموذج الموسمي المضاعف من الدرجة (p,d,q)*(P,D,Q)s

$$\emptyset_p(B)\Phi_p(B^s)\nabla^d\nabla_s^D Z_t = \theta_q(B)\Theta_Q(B^s)a_t \ldots\ldots\ldots (136-2)$$