ملحق رقم (2)

خطة تدريس وحدة تحليل المقادير الجبرية إلى العوامل باستخدام نموذج التمثيل الهندسي

تحليل المقادير الجبرية

ما هو المقدار الجبري:

يتكون المقدار الجبري من حدين على الأقل بينهما عملية جمع أو طرح مثلاً الجمل التالية كلها مقادير جبرية: س+ ص ، 2س-3ص، س^2-13س+36 .

أما تحليل المقدار الجبري يعني كتابته على شكل أقواس مضروبة في بعضها على أن لا يكون أي قوس منها قابلاً لتحليل آخر، ويمكن أن توجد عمليات الجمع أو الطرح داخل الأقواس.

مثلاً: س^2-13س+36 تحلل إلى (س-4)(س-9)، و كذلك 3س+3ص تحلل إلى 3(س+ص) . أما إذا لم يكن بالإمكان تحويل المقدار الجبري إلى شكل أقواس مضروبة في بعضها، فنقول عندها أن المقدار الجبري غير قابل للتحليل، كما هو الحال في المثال س^2-6س+36 .

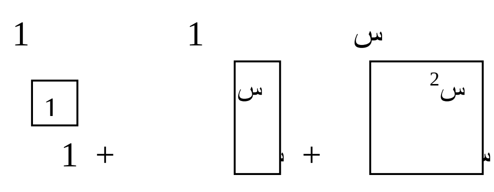
تتخذ المقادير الجبرية التي نتعامل بها في الرياضيات صوراً مختلفة ، ومن أهم هذه الصور ما يسمى بالعبارة التربيعية. فعلى سبيل المثال، يعتبر كل من المقادير الآتية عبارة تربيعية: س^2 + 3س +2 ، 2س^2 + 9س +4 ، س^2 + 6س ، س^2 – 4، بينما لا يعتبر أي من المقادير الآتية عبارة تربيعية: س^3 + 6س +8 ، س^5 - 6س +9 ، س$^{2/1}$ + 5س +8 ، 6س +7 .

بشكل عام:

المقدار الجبري الذي يتخذ الصورة : أ س^2 + ب س +ج حيث أ ، ب ، ج أعداد حقيقية، أ$\neq$0 يسمى عبارة تربيعية وتسمى أ معامل س^2 ، ب معامل الحد الأوسط ، ج الحد الثابت.

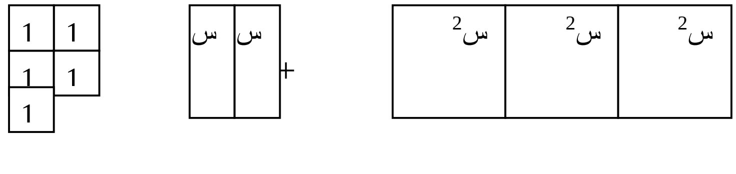
مثال (1): أرسم شكلاً هندسياً يمثل المقدار الجبري : س^2 + س+1

الحل: س^2 تتمثل بمربع طول ضلعه س، و س تتمثل بمستطيل طوله س وعرضه 1، والعدد 1 يتمثل بمربع طول ضلعه 1 وحدة كما يلي:



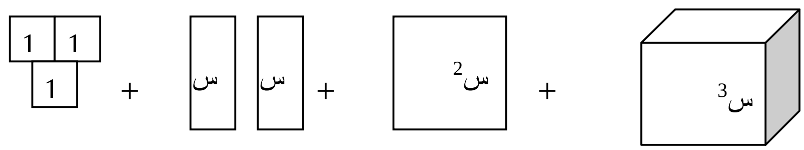
مثال (2): أرسم شكلاً هندسياً يمثل المقدار الجبري : 3س^2 + 2س+5

الحل:



مثال (2): أرسم شكلاً هندسياً يمثل المقدار الجبري : $س^3 + س^2 + 2س + 3$

الحل: تمثل $س^3$ بمكعب طول ضلعه س كما يلي:



نشاط : ارسم أشكالاً هندسية تمثل المقادير الجبرية التالية:

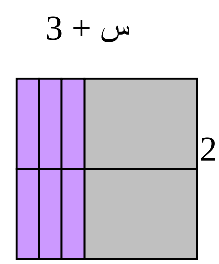
أ- $3س^2 + 3س + 4$ ب- $3س^2 - 2س + 5$

ت- $س^2 + 2س + 5$ ث- $4س^2 + 5$

أولاً : تحليل المقادير الجبرية(هندسياً) بإخراج العامل المشترك:

مثال(1): جد مفكوك العبارة 2س (س +3)

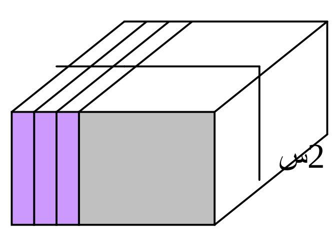
الحل : العبارة 2س (س +3) هي مستطيل طوله (س +3) وعرضه 2س كما يلي :



إذن مفكوك العبارة 2س (س +3) = $2س^2 + 6س$

مثال(2): جد مفكوك العبارة 2س ($س^2$ +3)

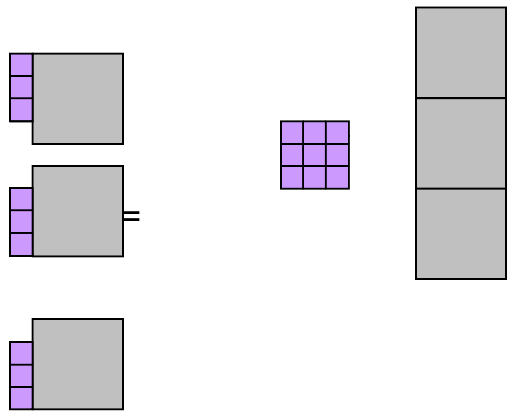
الحل : العبارة 2س ($س^2$ +3)هي متوازي مستطيلات مساحة قاعدته ($س^2$ +3) وارتفاعه 2س كما يلي :



$\text{س} \qquad = 2\text{س}^3 + 6\text{س}$

مثال (3) : حلل إلى العوامل $3\text{س}^2 + 9$

الحل : العبارة $3\text{س}^2 + 9$ تتكون من ثلا ث مربعات منتظمة + تسعة مربعات مساحة كل منها 1 وحدة كما يلي :



$= 3(\text{س}^2 + 3)$

نشاط :

1- جد مفكوك العبارات التالية هندسياً:

أ) $5\text{س} + 10$ ب) $4(\text{س}^2 + 3)$

ت) $3(2\text{س}^2 + 3)$ ث) $3(\text{س}^2 + 2)$

2- حلل إلى العوامل (هندسياً)

أ) $2\text{س}^2 + 4\text{س}$ ب) $(5\text{س}^2 + 15)$

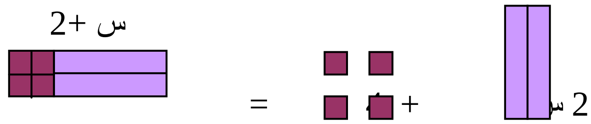
ت) $\text{س}^3 + 3\text{س}$ ث) $4\text{س} + 12$

ثانياً : تحليل المقادير الجبرية(هندسياً) بالتقسيم:

تستخدم هذه الطريقة إذا علم أحد عوامل العبارة التربيعية وكان المطلوب معرفة العوامل الأخرى ، وهنا نلفت الانتباه إن وجود أحد هذه العوامل معناه هندسياً وجود أحد أضلاع المستطيل معروفاً لدينا والمطلوب إيجاد الضلع الأخر. ويتم ذلك بإعادة ترتيب الأشكال الهندسية المأخوذة من العبارة التربيعية بحيث يكون الضلع المعلوم هو أحد جوانب المستطيل وبعملية الترتيب نحصل على الضلع الأخر (العامل الأخر).

مثال (1): حلل هندسياً $2\text{س} + 4$ علماً أن العدد 2 هو أحد العوامل؟

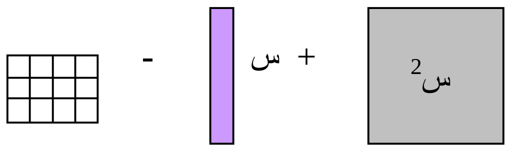
الحل: نمثل العدد 2 بمربعين مساحة كل منهما 1 وحدة مربعة، ونمثل العدد س بمستطيل طوله س وحدة وعرضه 1 وحدة كما يلي :



ومن الشكل ينتج أن العامل الأخر هو س + 2

مثال (2): إذا علمت أن أحد عوامل العبارة التربيعية س^2 + س – 12 هو (س+4) فما هو العامل الأخر؟

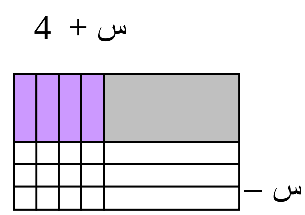
الحل: س^2 + س – 12 =



يمكن إعادة كتابة العبارة التربيعية س^2 +س – 12 كما يلي :

س^2 +س – 12 = س^2 + 4س – 3س – 12 لأن عوامل العدد - 12 هما 4، -3 واللذان الفرق بينهما 1 .

وهنا يمكن التعبير بالرسم كما يلي :



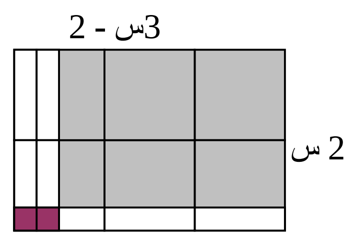
تحليل

ومن الرسم يتبين أن العامل الأخر هو س - 3 أي أن

س^2 +س – 12 = (س +4)(س – 3) .

مثال (3): إذا علمت أن أحد عوامل العبارة التربيعية 6س^2 - 7س +2 هو (2س-1) فما هو العامل الأخر؟

الحل: أحد الجوانب هو (2س – 1) من الرسم يمكن إيجاد الجانب الآخر للمستطيل



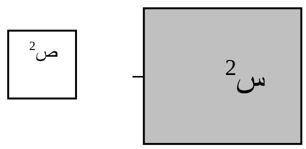
من الرسم نلاحظ أن العامل الأخر هو (3س -2)

ثالثاً : تحليل الفرق بين مربعين :

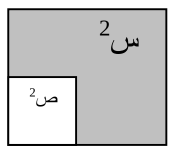
مثال (1): استخدم الرسم لإيجاد تحليل مفكوك س^2 - ص^2

الحل:

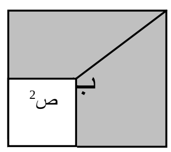
1) نمثل كلاً من س^2 ، ص^2 بمربعات كما في الشكل المجاور

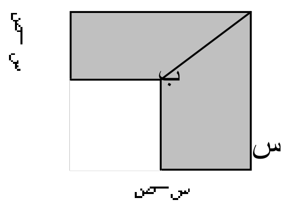


2) نضع المربع ص^2 في زاوية المربع س^2 كما يلي:

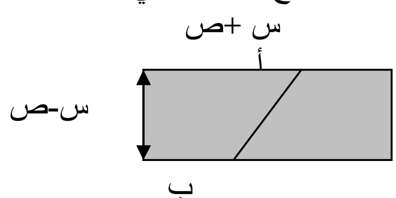


3) نقص المربع ص^2 ، فينتج الشكل التالي:





4) نصل أ ب ،ثم نقطع أ ب ونعيد ترتيبه فينتج الشكل التالي:



من الشكل نستنتج أن س^2 - ص^2= (س- ص)(س +ص)

نتيجة :

مفكوك (س- ص)(س +ص) = س^2 - ص^2

أو

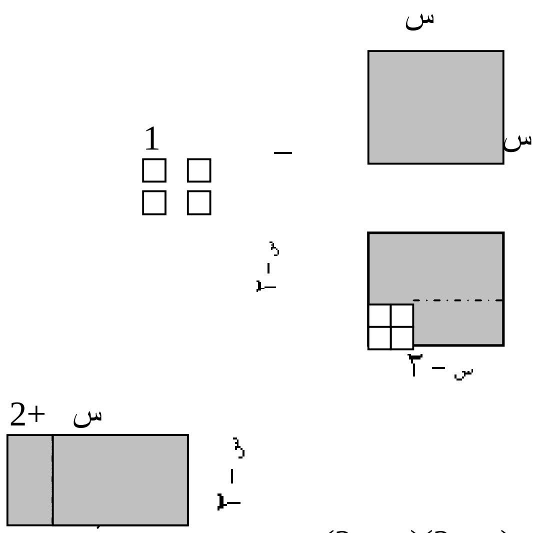
تحليل الفرق بين مربعين

س^2 - ص^2 = (س- ص)(س +ص)

بالكلمات : تحليل الفرق بين مربعين = (الحد الأول – الحد الثاني)(الحد الأول + الحد الثاني)

مثال(2): حلل إلى العوامل (هندسياً)

$س^2 - 4 =$



= (س -2)(س +2)

تمارين :

1)جد مفكوك ما يلي هندسياً :

أ- (س-3)(س+3)   ب- (س-4)(س+4)

ت- (2س-3)(2س+3)   ث- (2س-5)(2س+5)

2) حلل إلى العوامل هندسياً:

أ- $س^2 - 9$ ب- $س^2 - 25$

ت- $س^2 - 36$ ث- $4س^2 - 25$

3) أوجد قيمة كل مما يلي باستخدام تحليل الفرق بين مربعين

أ- 144 - 64   ب- 169 – 49

ت- 625 – 225   ث- $(101)^2 - (99)^2$

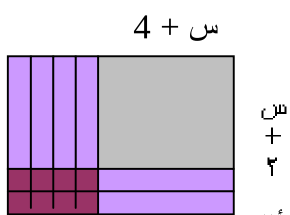
رابعاً: تحليل العبارة التربيعية:

سنقوم الآن بدراسة تحليل العبارة التربيعية في صورتها الخاصة عندما يكون معامل $س^2 = 1$،
ومن ثم في صورتها العامة عندما يكون معامل $س^2 \neq 1$

أولاً: عندما يكون معامل $س^2 = 1$

مثال (1) : جد مفكوك (س +2)(س+4)

الحل : هذه العبارة التربيعية عبارة عن مستطيل عرضه (س + 2) و طوله (س + 4) ويمكن التعبير عنها بالشكل التالي :



ومن الشكل نلاحظ وجود مربع مساحته $س^2$ وأربعة مستطيلات عمودية مساحة كل منها س، ومستطيلين أفقيين مساحة كل منها س، و ثمانية مربعات منتظمة مساحة كل منها 1 وحدة مربعة.

وهنا يمكن إعادة كتابة هذه الأشكال بالرموز الجبرية كما يلي :

$س^2$ + 4س + 2س +8 = $س^2$ + 6س +8 أي أن تحليل العبارة التربيعية

$س^2$ + 6س +8 = (س +2)(س+4)

من المثال السابق، نلاحظ ما يلي:

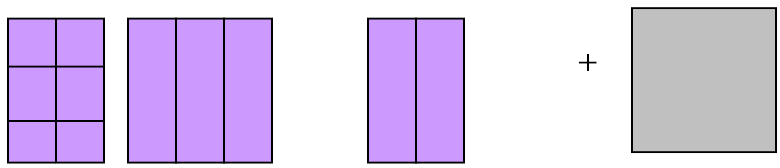
1- تحليل العبارة التربيعية $س^2$ + 6س +8 يتكون من عاملين وضعا داخل زوجين من الأقواس هكذا: $س^2$ + 6س +8 = (س +2)(س+4)

2- الحدّان الأوّلان في القوسين (أي س ، س) هما عاملان للحد الأول في العبارة التربيعية.

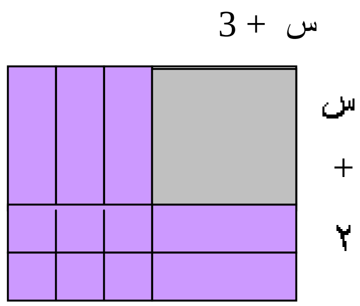
3- الحدّان الثّانيان في القوسين (أي +2 ،+4) هما عاملان للحد الثابت في العبارة التربيعية، ويلاحظ أن مجموعهما يساوي معامل الحد الأوسط وهذه ملاحظة هامة إذ لو تم اختيار عاملين آخرين للعدد 8 مثل 1 ، 8 لما كان مجموعهمايساوي الحد الأوسط وبالتالي لما كان التحليل صحيحاً .

مثال (2) : حلل العبارة التربيعية س^2 + 5س +6

الحل : نقول أن العددان اللذان حاصل ضربهما = 6 ومجموعهما =5 هما 2 ، 3 إذن فالحدّان الثّانيان في القوسين هما +2 ، +3 ويمكن التعبير عن ذلك بالرسم



س^2 + 2س + 3س + 6 = س^2 + 5 س +6



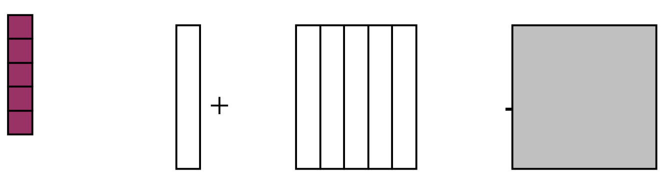
ومن الرسم نستنتج أن تحليل العبارة التربيعية س^2 + 5 س +6= (س +2)(س +3)

مثال (3) : حلل العبارة التربيعية س^2 - 6 س +5

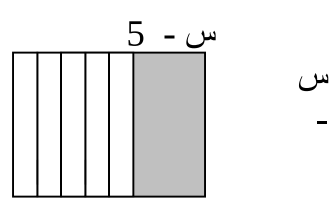
الحل : نقول ما هما العددان اللذان حاصل ضربهما + 5 ومجموعهما -6 ؟

بما أن حاصل الضرب (+5) موجب فالعددان أما موجبان معاً أو سالبان معاً، ولأن مجموعهما (-6) سالب إذن فهما سالبان معاً. إذن فالعددان هما -1 ، -5.

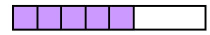
وبالرسم:



وبتجميع هذه الأشكال لنحصل على مستطيل ومن ثم نستنتج تحليل العبارة التربيعية كما يلي :



1



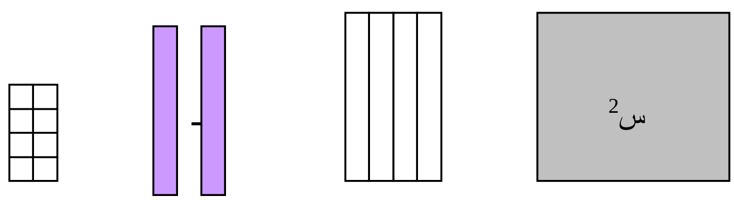
ومن الرسم نلاحظ أن تحليل العبارة التربيعية

س^2 - 6 س +5 = (س – 1)(س – 5)

مثال (4) : حلل العبارة التربيعية س^2 - 2 س -8

الحل: نقول ما هما العددان الصحيحان اللذان حاصل ضربهما -8 ومجموعهما -2 ؟

بما أن حاصل الضرب (-8) سالب فالعددان أحدهما موجب والآخر سالب، وبما أن مجموعهما (-2) سالب فالعدد السالب بإهمال الإشارة أكبر من العدد الموجب. إذن العددان هما -4 ، 2 ويكون التحليل بالرسم كما يلي:



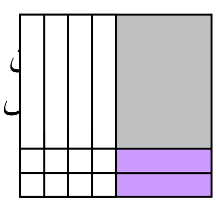
وبتجميع هذه الأشكال لنحصل على مستطيل ومن ثم نستنتج تحليل العبارة التربيعية كما يلي :

س - 4

س

+ +

2



ن الرسم نلاحظ أن تحليل العبارة التربيعية س^2 - 2 س -8 =

(س + 2)(س – 4)

مثال(5) :

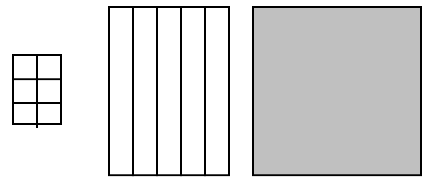
حلل العبارة التربيعية س^2 + س + 1

الحل : نقول ما هما العددان الصحيحان اللذان حاصل ضربهما +1 ومجموعهما +1 ؟

بما أنحاصل الضرب موجب فالعددان إما موجبان معاً أو سالبان معاً، وبما أن مجموعهما موجب فهما موجبان معاً، والعددان الصحيحان الموجبان اللذان حاصل ضربهما 1 هما 1، 1 ولكن مجموعهما ≠ 1 إذن لا يوجد مثل هذين العددين الصحيحين. إذن العبارة أولية لا نستطيع تحليلها.

مثال(6) : حلل العبارة التربيعية (س + 1)^2 – 5(س +1) -6

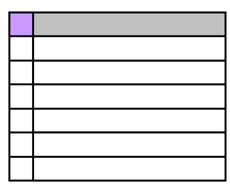
الحل : نفرض متغير جديد أسمه ص مثلاً، بحيث ص = س +1 وعندها تصبح العبارة التربيعية بدلالة ص كما يلي : ص^2 – 5ص -6 وبالرسم



ص^2 – 5ص - 6 نقول ما هما العددان الصحيحان اللذان حاصل ضربهما -6 ومجموعهما -5 ؟

بما أن حاصل الضرب (-6) سالب فالعددان أحدهما موجب والآخر سالب، وبما أن مجموعهما (-5) سالب فالعدد السالب بإهمال الإشارة أكبر من العدد الموجب. إذن العددان هما -6 ، 1 ويكون التحليل بالرسم كما يلي:

س + 1



س – 6

ومن الرسم نلاحظ أن تحليل العبارة التربيعية

س^2 - 5 س -6 = (س- 6)(س+1)

تمارين :

1 - حلل العبارات الآتية إلى عواملها الأولية :

أ- س^2 - 3 س +6

ب- 2س^2 +10 س +8

ت- 7س + س^2 - 8

ث- س^2 - س -12

ج- 5 س^2 + 45 س +70

2 – حلل إلى العوامل الأولية (إن أمكن)

أ- $س^2$ – (6 س +7)

ب- (س + 2)^2 - 36

ت- (س +2)^2 – 10(س +2) +24

ث- $س^2$ 18 س ص +45 $ص^2$

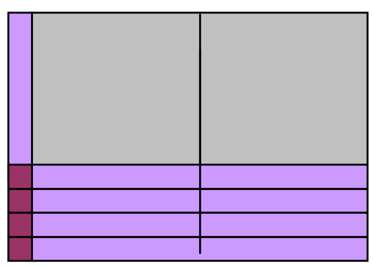
ج- $س^2$ + س +6

ثانياً: عندما يكون معامل $س^2 \neq 1$

لا تختلف طريقة التحليل في هذه الحالة عن الحالة الخاصة السابقة عندما كان معامل $س^2$=1، فالتجريب هو الأساس، وقد يستغرق التجريب في الحالة العامة بعض الوقت نظراً لتعدد الإمكانات القابلة للتجريب، ولكن التدريب والممارسة سيساعدنا في الوصول إلى التحليل المطلوب في وقت أقل.

مثال (1) : جد مفكوك العبارة التالية (س +4)(2س +1)
الحل : هذه العبارة تعبر عن مستطيل طوله (2س +1) وعرضه (س +4) كما في الشكل التالي :

2 س + 1



س + 4

ومن الشكل نلاحظ وجود مربعين مساحة كل منها $س^2$ و(9) مستطيلات مساحة كل منها س، وأربعة مربعات مساحة كل منها وحدة مربعة واحدة.

إذن الشكل يمكن التعبير عنه كما يلي : 2 $س^2$ + 9س + 4 وهنا نستنتج أن تحليل العبارة التربيعية 2 $س^2$ + 9س + 4 = (س +4)(2س +1) .

من هذا المثال نلاحظ ما يلي :

1-الحدّان الأوّلان في القوسين (أي س ،2س) هما عاملان للحد الأول في العبارة التربيعية.

2-الحدّان الثّانيان في القوسين (أي +4 ،+1) هما عددان حاصل ضربهما = الحد الثابت في العبارة التربيعية، وبحيث : 4 × 2س + س × 1 = 9 س = الحد الأوسط. إذا سمّينا الحدين 4 ، 2 س الحدّين القريبين، وسمّينا س ، 1 الحدين البعيدين، نلاحظ أن التحليل يكون صحيحاً عندما يكون (حاصل ضرب الحدّين القريبين + حاصل ضرب الحدّين البعيدين) = الحد الأوسط في العبارة التربيعية. ويمكن استخدام التمثيل الآتي في عملية الضرب والجمع المذكورة.

-نكتب أولاً عوامل الحد الأول في العبارة التربيعية تحت بعضهما

- نكتب ثانياً عوامل الحد الثابت في العبارة التربيعية تحت بعضهما.

- نجري ضرب الحدين على كل من القطرين ونجمع حاصل الضرب ونقارن ذلك بالحد الأوسط.

س 4 س

2س 1 = + 8س

9 س = الحد الأوسط

مثال (2): حلل العبارة التربيعية 3 س^2 + 8س +4

الحل : (1) نحلل الحد الأول 3س^2 إلى عاملين : 3س ، س

2) نحلل الحد الثابت 4 إلى عاملين فنجد أكثر من احتمال: نجرب العددين 1، 4:

3س 1 12س

س 4 + س

13س≠ الحد الأوسط

نجرب العددين 2، 2 :

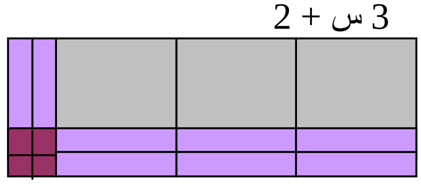
3س 2 6س

س 2 + 2س

8س = الحد الأوسط

إذن التحليل المطلوب هندسياً:

3 س + 2



س+2

3س^2 + 8س +4 = (3س + 2)(س +2)

مثال (4): حلل العبارة التربيعية 2 س^2 - 7س +6

(1) نلاحظ أن الحد الثابت 6 موجب والحد الأوسط سالب فالعاملان للعدد 6 يجب أن يكونا سالبين، ويساعدنا هذا الاستنتاج في تقليص حالات التجريب.

نجرب العددين -1، -6 :

2س -1 -12س

س -6 -س

-13س ≠ الحد الأوسط

نجرب العددين -2، -3 :

2س -2 -6س

س -3 -2س

-8س ≠ الحد الأوسط

نجرب العددين -3، -2 :

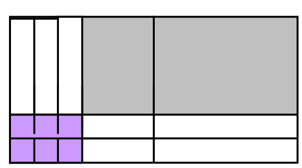
2س -3 -4س

س -2 -3س

-7س = الحد الأوسط

وهنا يمكن التعبير عن عملية التحليل باستخدام الرسم كما يلي :

2س -3



س -2

ومن الشكل نستنتج أن تحليل العبارة التربيعية 2 س^2 - 7س +6 = (2س -3)(س -2)

مثال(4) : حلل : العبارة التربيعية 5 س^2 -8س -4

الحل : **(1)** نجرب العددين 1، -4 عاملين للحد الثابت -4 :

5 س   1   -20س

س   -4   + س

-19س $\neq$ الحد الأوسط

(2) نجرب العددين 2، -2 عاملين للحد الثابت -4 :

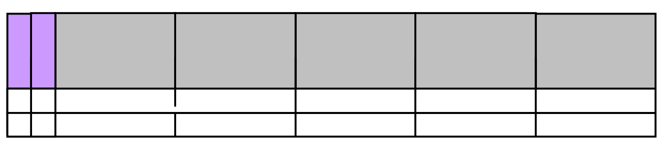
5 س   2   -10س

س   -2   +2 س

-8س = الحد الأوسط

إذن التحليل المطلوب بالرسم كما يلي :

5س + 2



س - 2

تمارين :

1 - حلل كلاً من العبارات التربيعية الآتية :

أ- 5 س^2 -11س +2   ب- 7 س^2 +15س +2

ج- 6 س^2 +س -1   د- 2س^2 -5س -7

2- مستطيل مساحته (2 س^2 +13س -7) وحدة مربعة. عبر عن بعدي المستطيل بدلالة س .

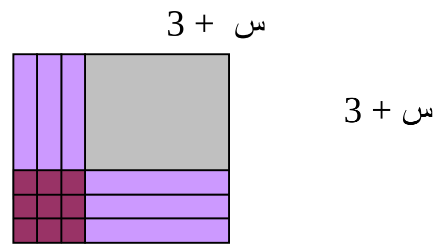
3- مربع مساحته (س^2 +2س +1) وحدة مربعة، عبر عن طول ضلع المربع بدلالة س .

خامساً : تحليل عبارة تربيعية على صورة مربع كامل

تمهيد : مربع مجموع أو فرق حدّين :

مثال : جد مفكوك (س +3)^{2}هندسياً :

الحل : (س +3)^2 عبارة عن مربع طول ضلعه (س +3) :



من الشكل نلاحظ تكون أربعة مناطق هي (س)^2 + 3 س +3 س + (3)^2 = بالكلمات مربع مجموع حدين = مربع الحد الأول + ضعفي الحد الأول في الثاني + مربع الحد الثاني).

وبشكل عام

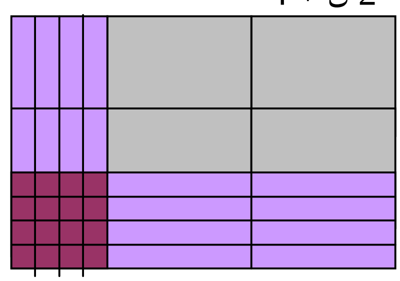
(س + أ)^2 = (س + أ)(س +أ) = س^2 + 2 ×أ س + أ^2

مثال (2) : أوجد مفكوك (2 س + 4)^2 هندسياً:

الحل : العبارة (2 س + 4)^2 هي مربع كامل طول ضلعه (2س +4) كما يلي :

2س + 4

2س +4



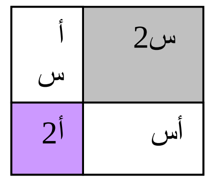
من الشكل نلاحظ وجود أربعة مناطق كما يلي : (أربعة مربعات منتظمة مساحة كل منها س^2) + (16 مستطيلاً مساحة كل منها س وحدة مربعة) + (16مربعاً مساحة كل منا 1 وحدة مربعة) = 4س^2 + 16س + 16 .

نتيجة: بنفس الأسلوب يمكن التوصل إلى قاعدة مربع الفرق بين حدين وذلك كما يلي:

(س – أ)^2 = (س +(-أ))^2 = (س)^2 + 2 × (-أ) × س + (-أ)^2 ويمكن تمثيل ذلك بالرسم كما يلي :

(س ـ أ)

(س ـ أ)

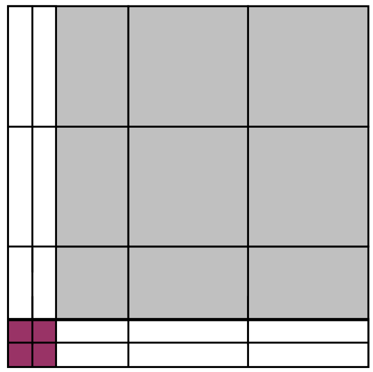


(س – أ)^2 = س^2 - 2 × (-أ) × س + (-أ)^2 = س^2 – 2أ س + أ^2

مثال(3) : أوجد مفكوك (3س- 2)^2

الحل : العبارة (3س - 2)^2 هي مربع كامل طول ضلعه (3س - 2) كما يلي:

3س – 2



3س – 2

من الشكل نلاحظ وجود أربعة مناطق هي : (3س)^2 – 2×(6 س) – (2)^2 إذن
مفكوك (3س- 2)^2 = 9س^2 – 12 س – 4

تدريب :

أكتب مفكوك المربعات الكاملة الآتية:

أ- (س + 5)^2

ب- (س - 7)^2

ت- (3 س - 8)^2

ث- (2 س + 1/2)^2

ج- (م س + ن)^2

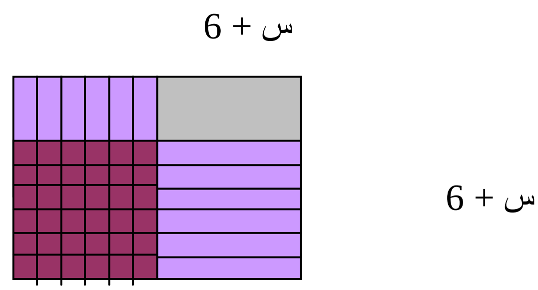
ح- (س + ص + 1)^2 (إرشاد: اعتبر (س +ص)حداً أولاً في المقدار).

تحليل العبارة التربيعية التي على صورة مربع كامل:

وجدنا في سابقً باستخدام الرسومات أن (س ±أ)^2 = س^2 ± 2أ س + أ^2 أي أن العبارة التربيعية التي على صورة س^2 ± 2أ س + أ^2 تكون مربعاًكاملاً وتحلل هكذا : س^2 ± 2أ س + أ^2 = (س ±أ)^2.

مثال(1) : حلل العبارة التربيعية : س^2 + 12 س + 36

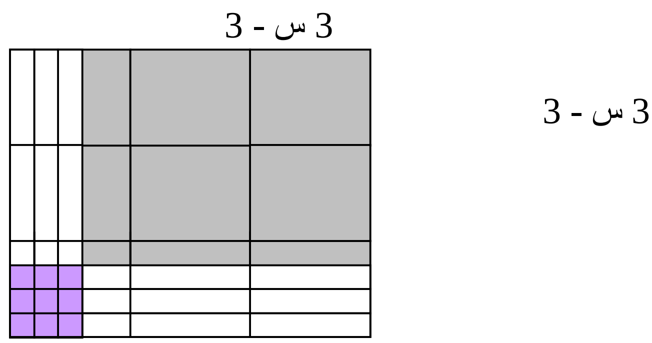
الحل :يمكن تمثيل العبارة السابقة هندسياً مما يلي :



من الشكل نلاحظ أن تحليل س^2 + 12 س + 36 = (س +6)(س + 6).

مثال (2) : حلل العبارة التربيعية 9س^2 – 18س + 9

الحل :يمكن تمثيل العبارة السابقة هندسياً مما يلي :



من الشكل نلاحظ أن تحليل 9س^2 – 18س +9= (س -3)(س -3).

تمارين ومسائل :

1 – حلل العبارات الآتية :

أ- س^2 + 6 س + 9

ب- ص^2 -10 ص + 25

ت- 9س^2 + 24 س ص + 16 ص^2

ث- 8س^2 - 24 س + 18

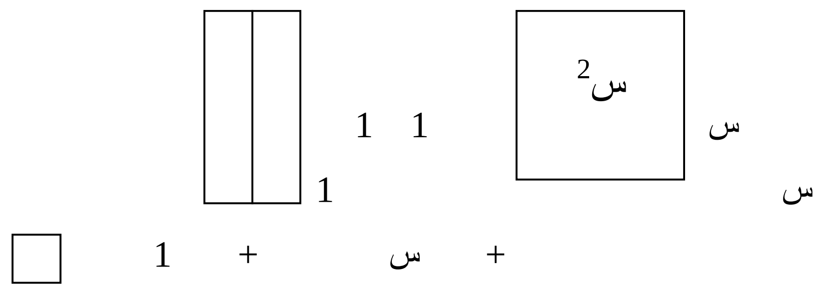
2- أكمل الحدود الناقصة في العبارات الآتية لتصبح مربعات كاملة:

أ- س^2 - + $\boxed{36}$

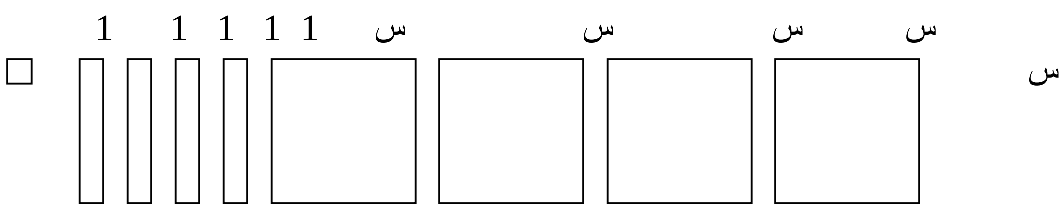
ب- 4 $س^2$ -4 س + $\square$

3- في الأشكال التالية أعد ترتيبها لنحصل على مربعاً. ما طول ضلع هذا المربع؟ س

أ-



ب-

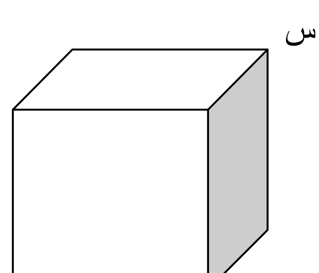


سادساً: تحليل الفرق بين مكعبين

كما تعرفنا سابقاً على تحليل الفرق بين مربعين، نتعرف الآن طريقة تحليل الفرق بين مكعبين.

نشاط عملي:

1) اصنع مكعباً طول ضلعه س. ما حجم هذا المكعب بدلالة س ؟

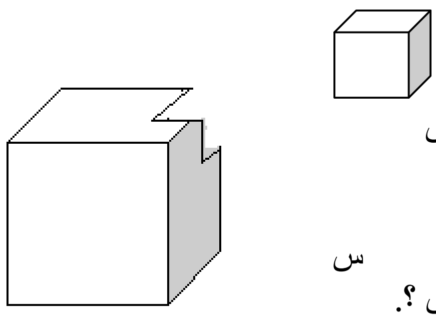


س

س

2) اقطع من إحدى زوايا هذا المكعب مكعباً آخر طول ضلعه ص. ما حجم المكعب المقطوع بدلالة ص ؟

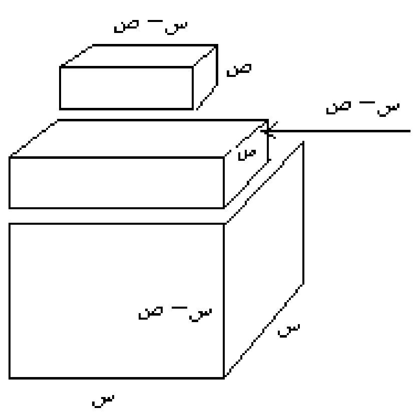
ص



3) ما حجم الجزء المتبقي من المكعب الأول بدلالة س ،ص ؟.

هل هو س^{3} – ص^{3} ؟

4) حاول أن تجد حجم الجزء المتبقي وذلك بتجزئته إلى ثلاثة أجزاء، كل جزء عبارة عن متوازي مستطيلات معلوم الأبعاد بدلالة س ، ص كما في الشكل المجاور:



الجزء الأول:

أبعاده هي س، س ،(س-ص)

فيكون حجمه هو س^{2}(س – ص)

الجزء الثاني: أبعاده هي س،ص،(س-ص)

فيكون حجمه هو س ص (س-ص)

الجزء الثالث: أبعاده هي : ص،ص،(س-ص)

فيكون حجمه هو ص^{2}(س-ص)

إذن حجم الجزء المتبقي = س^{3} – ص^{3}= حجم الجزء الأول + حجم الجزء الثاني + حجم الجزء الثالث = س^{2}(س – ص) + س ص (س-ص) + ص^{2}(س-ص)

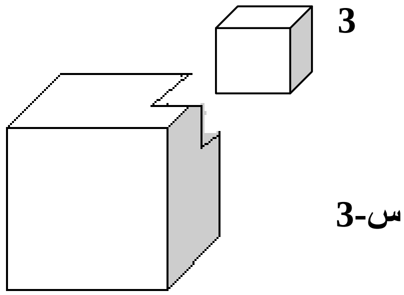
= (س-ص) (س^{2}+ س ص + ص^{2})

نتيجة:

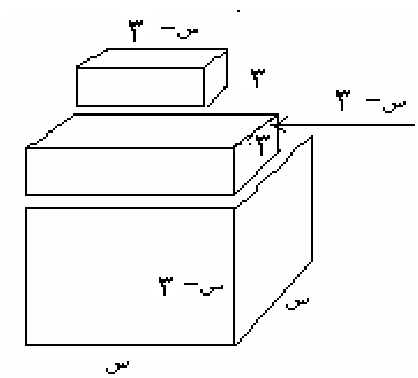
س^{3} – ص^{3}= (س-ص) (س^{2}+ س ص + ص^{2})

مثال(1): حلل هندسياً س^{3} - 27 ؟

الحل: س^3 - 27 = س^3 – (3)^3



من الشكل المجاور نلاحظ وجود ثلاثة حجوم هي :



س×س×(س-3) + (س-3) ×س × 3 + 3×3×(س-3)

= (س-3) ×(س2+ 3س +9)

إذن تحليل س^3 - 27 = (س-3) ×(س2+ 3س +9)

وهو المطلوب .

تدريبات :

حلل المقادير الآتية إلى عواملها الأولية:

أ- س^3 - 1 ب- س^4 – ص^3 س

ت- 24ل^3 - 81 ث- س^6 - 64

ج- س^3 – 2^3 ح- ل^3 – م^3

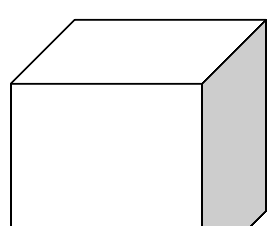
سابعاً: تحليل مجموع مكعبين

يمكن الاعتماد على قاعدة تحليل الفرق بين مكعبين السابقة في تحليل مجموع مكعبين هكذا:

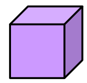
س^3 + ص^3 = س^3 – (-ص)^3 = [س-(-ص)][س^2 + س ×(-ص) + (-ص)^2] = س^3 + ص^3= (س+ص) (س^2- س ص + ص^2).

ويمكن التحقق من هذه النتيجة باستخدام الرسومات كما يلي:

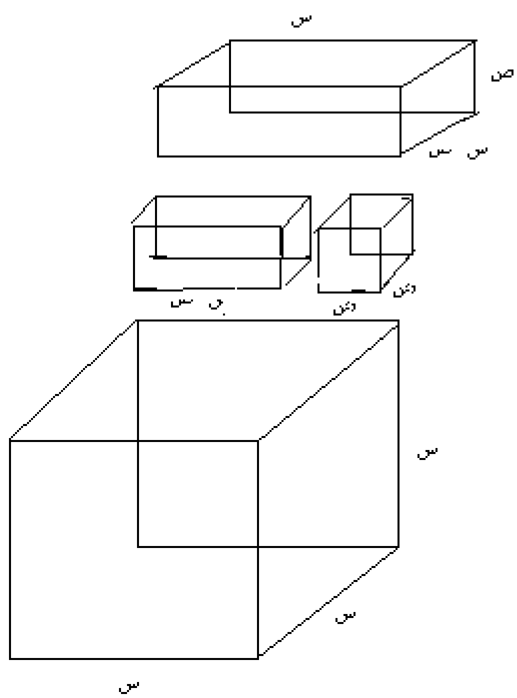
س^3 + ص^3 =



+



-

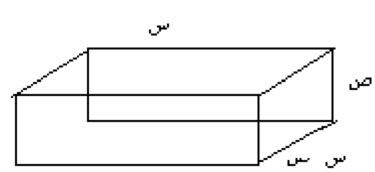


=

ونلاحظ هنا وجود ثلاث مجسمات هي :

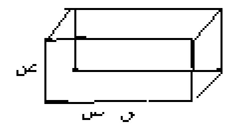
الجزء الأول : يتمثل في الشكل الأكبر الكلي أعلاه ويساوي س^{2} (س+ص)

الجزء الثاني : هو الجزء المطروح الأول من الشكل الكلي ومقداره



= س×ص×(س - ص)

الجزء الثالث : هوالجزء المطروح الثاني من الشكل الكلي ومقداره



= ص^2 (س - ص)

أي أن س^3+ص^3= س^2 (س+ص) - س×ص×(س- ص)- ص^2 (س- ص)

= س^2 (س+ص) + (س- ص)(- س ص- ص^2)

= س^2 (س+ص) +(س- ص)× - ص(س+ص)

=(س+ص)(س^2 – س ص+ ص^2)

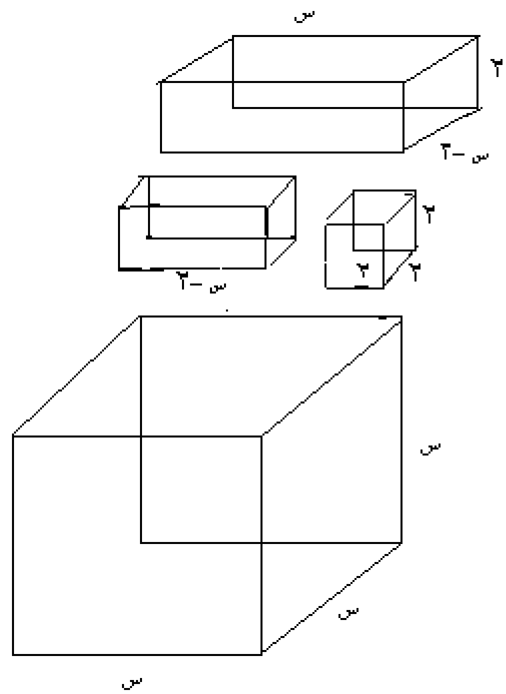
نتيجة :

س^3 + ص^3 = (س+ص) (س^2- س ص + ص^2)

(الحد الأول) ^{3} + (الحد الثاني) ^{3} =(الحد الأول+ الحد الثاني)(مربع الحد الأول - الحد الأول× الحد الثاني + مربع الحد الثاني)

مثال(1) : حلل المقدار التالي إلى عوامله الأولية هندسياً:

نرسم س^3+(2)^3 كما يلي :

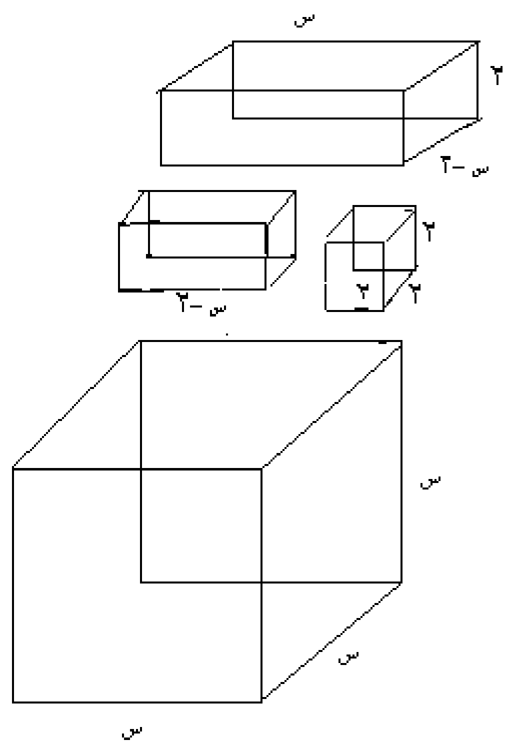


= س^{2} (س+2) - س×2×(س -2)- 2^{2}(س -2)

= س^{2} (س+2) + (س- 2)(-2س - 2^{2})

= س^{2} (س+2) +(س- 2)× - 2(س+2)

=(س+2)(س^{2} – 2س + 2^{2})



$= س^2\,(س+2) - س\times 2\times(س-2) - 2^2(س-2)$

$= س^2\,(س+2) + (س-2)(-2س - 2^2)$

$= س^2\,(س+2) + (س-2)\times -2(س+2)$

$=(س+2)(س^2 - 2س + 2^2)$

ملاحظة هامة:

قام الباحث باستخدام المكعبات الخشبية ومكعبات الصابون لتوضيح ما ورد في الفرق بين المكعبين ومجموع المكعبين

تدريبات :

حلل المقادير التالية إلى عواملها الأولية:

أ- $س^3+ل^3$ ب- $8س^3+1^3$

ت- $24س^3 + 3ص^3$ ث- $-س^3-ص^3$

ج- $64+ص^3$ ح- $8\,س^3+27ص^3$

ملحق رقم (3)

خطة تدريس وحدة التحليل إلى العوامل باستخدام نموذج الطريقة العكسية " فك الأقواس "

تحليل المقادير الجبرية

ما هو المقدار الجبري:

يتكون المقدار الجبري من حدين على الأقل بينهما عملية جمع أو طرح مثلاً الجمل التالية كلها مقادير جبرية: س+ ص ، 2س-3ص، س^2-13س+36 .

أما تحليل المقدار الجبري يعني كتابته على شكل أقواس مضروبة في بعضها على أن لا يكون أي قوس منها قابلاً لتحليل آخر، ويمكن أن توجد عمليات الجمع أو الطرح داخل الأقواس.

مثلاً: س^2-13س+36 تحلل إلى (س-4)(س-9)، و كذلك 3س+3ص تحلل إلى 3(س+ص) . أما إذا لم يكن بالإمكان تحويل المقدار الجبري إلى شكل أقواس مضروبة في بعضها، فنقول عندها أن المقدار الجبري غير قابل للتحليل، كما هو الحال في المثال س^2-6س+36 .

تتخذ المقادير الجبرية التي نتعامل بها في الرياضيات صوراً مختلفة ، ومن أهم هذه الصور ما يسمى بالعبارة التربيعية. فعلى سبيل المثال، يعتبر كل من المقادير الآتية عبارة تربيعية: س^2 + 3س +2 ، 2س^2 + 9س +4 ، س^2 + 6س ، س^2 – 4، بينما لا يعتبر أي من المقادير الآتية عبارة تربيعية: س^3 + 6س +8 ، س^5 - 6س +9 ، س$^{2/1}$ + 5س +8 ، 6س +7 .

بشكل عام:

المقدار الجبري الذي يتخذ الصورة : أ س^2 + ب س +ج حيث أ ، ب ، ج أعداد حقيقية، أ$\neq$0 يسمى عبارة تربيعية وتسمى أ معامل س^2 ، ب معامل الحد الأوسط ، ج الحد الثابت.

مثال (1): جد مفكوك (س+1) (س+1)

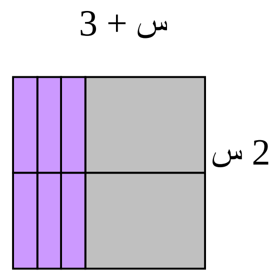
الحل : باستخدام عملية توزيع الضرب على الجمع فإن (س+1) (س+1)

= س(س +1) + 1 (س +1) = س^2 + س + س + 1 = س^2 + 2 س + 1

أولاً : تحليل المقادير الجبرية بإخراج العامل المشترك:

مثال(1): جد مفكوك العبارة 2س (س +3)

الحل : العبارة 2س (س +3) هي مستطيل طوله (س +3) وعرضه 2س كما يلي :



إذن مفكوك العبارة 2س (س +3) = 2س^2 + 6س وممكن الحصول على نفس النتيجة وذلك باستخدام عملية توزيع الضرب على الجمع كما يلي:

2س (س +3) = 2س × س + 2 س × 3 = 2س^2 + 6س

أي إن تحليل العبارة التربيعية 2س^2 + 6س = 2س (س +3)

مثل هذا النتيجة تسمى التحليل إلى العوامل بإخراج عامل مشترك (وهو أكبر عامل يكون مشتركاً بين جميع حدود المقدار الجبري) .

مثال(2): جد مفكوك العبارة 2س (س^2 +3)

الحل : العبارة 2س (س^2 +3) = 2 س × س^2 + 2 س× 3 = 2س^3 + 6س

أي إن تحليل العبارة التكعيبية 2س^3 + 6س = 2س (س^2 +3)

مثال (3) : حلل إلى العوامل 3 س^2 + 9

الحل : العبارة 3 س^2 + 9 تتكون من ثلا ث مربعات منتظمة + تسعة مربعات مساحة كل منها 1 وحدة وبما أن العدد 3 يقبل القسمة على نفسه وعلى العدد 9، فإن العمل المشترك هو العدد 3 ، ويكون التحليل كما يلي: 3 س^2 + 9 = 3(س^2 + 3)

ويمكن التحقق من صحة الحل كما يلي: 3(س^2 + 3) = 3× س^2 + 3× 3 = 3 س^2 + 9= العبارة الأصلية .

نشاط :

1- حلل العبارات التالية بإخراج العمل المشترك ، ثم تحقق من صحة الحل باستخدام طريقة فك الأقواس؟

أ) 5 س + 10 ب) 4(س^{2} +3)

ت) 3(2 س^{2} +3) ث) 3 (س^{2} +2)

2- حلل إلى العوامل (ثم تحقق من صحة الحل باستخدام طريقة فك الأقواس)

أ) 2س^{2} +4س ب) (5 س^{2} +15)

ت) س^{3} + 3س ث) 4 س +12

ثانياً : تحليل المقادير الجبرية بالتقسيم: (باستخدام طريقة فك الأقواس)

تستخدم هذه الطريقة إذا علم أحد عوامل العبارة التربيعية وكان المطلوب معرفة العوامل الأخرى ، وهنا نلفت الانتباه إن وجود أحد هذه العوامل معناه هندسياً وجود أحد أضلاع المستطيل معروفاً لدينا والمطلوب إيجاد الضلع الأخر، ويتم ذلك بوضع المقدار المطلوب تحليل على يمين اشارة المساواة وو ضع العامل الأخر مضروباً بمقدار مفترض بين حاصرتين، ثم مقارنة جانبي اشارة المساواة لنستنتج العامل المجهول كما يلي:

مثال (1): جد العامل الأخر للمقدار 2س +4علماً أن العدد 2 هو أحد العوامل؟

الحل: 2س +4 = 2 × (   ) نلاحظ وجود العددين 2 ، 4في العبارة الأصلية إذاً المشترك بينهما هو العدد 2؟

ونلاحظ وجود العدد س على يمين المساواة إذاً يجب ان يكون في العامل الثاني العدد س أي أن العامل الثاني هو (س + 2) وللتحقق نستخدم طريقة فك الأقواس كما يلي:

2 × (س + 2) = 2س + 4 (العبارة الأصلية).

مثال (2): إذا علمت أن أحد عوامل العبارة التربيعية $س^2$ + س – 12 هو (س+4) فما هو العامل الأخر؟

الحل: $س^2$ + س – 12 = (س +4)(س - ب)

أي أن $س^2$ + س – 12 = س (س - ب) + 4 (س - ب)

= $س^2$ - ب س + 4س - 4 × ب)

ونلاحظ ان 12 = 4 × ب

إذاً ب = 3 ،ويكون الحد الثاني هو (س – 3) ويمكن التحقق من ذلك بعملية فك الأقواس .

مثال (3): إذا علمت أن أحد عوامل العبارة التربيعية 6$س^2$ - 7س +2 هو (2س-1) فما هو العامل الأخر؟

الحل: 6$س^2$ - 7س +2 = (2س-1) (أس + ب)

= 2 أ $س^2$ + 2 ب س– 3أ س – ب

إذاً ب = - 2 ، 2 أ = 6إذاً أ = 3 والعامل الأخر هو (3س -2).

وللتحقق ننفذ عملية فك الأقواس كما يلي :

(2 س – 1)(3 س- 2) = 6$س^2$ - 4س – 3 س + 1 = 6$س^2$ - 7س +2 (العبارة الأصلية).

ثالثاً : تحليل الفرق بين مربعين :

مثال (1): جد مفكوك (س – 3) (س + 3)

الحل : (س – 3) (س + 3) = س (س + 3) – 3 (س + 3) = $س^2$ + 3 س – 3 س - $(3)^2$

= $س^2$ – 9

نتيجة :

$\boxed{\text{مفكوك (س- ص)(س +ص) = س}^2 - \text{ص}^2}$

أي أن تحليل الفرق بين مربعين

$\boxed{س^2 - ص^2 = (س - ص)(س + ص)}$

وبالكلمات : تحليل الفرق بين مربعين = (الحد الأول – الحد الثاني)(الحد الأول + الحد الثاني)

مثال(2): حلل إلى العوامل

الحل : حسب النتيجة السابقة $س^2 - 4 = (س - 2)(س + 2)$

و للتحقق نستخدم عملية فك الأقواس كما يلي:

$(س - 2)(س + 2) = س (س + 2) - 2 (س + 2) = س^2 + 2 س - 2 س - 4 = س^2 - 4$ (العبارة الأصلية)

تمارين :

1) جد مفكوك ما يلي:

أ- (س-3)(س+3) ب- (س-4)(س+4)

ت- (2س-3)(2س+3) ث- (2س-5)(2س+5)

2) حلل إلى العوامل ثم تحقق با ستخدام طر يقة " فك الأقواس " :

أ- $س^2 - 9$ ب- $س^2 - 25$

ت- $س^2 - 36$ ث- $4س^2 - 25$

3) أوجد قيمة كل مما يلي باستخدام تحليل الفرق بين مربعين

أ- $144 - 64$

ب- $169 - 49$

ت- $625 - 225$

ث- $(101)^2 - (99)^2$

رابعاً : تحليل العبارة التربيعية

تتخذ المقادير الجبرية التي نتعامل بها في الرياضيات صوراً مختلفة ، ومن أهم هذه الصور ما يسمى بالعبارة التربيعية. فعلى سبيل المثال، يعتبر كل من المقادير الآتية عبارة تربيعية: س^2 + 3س +2 ، 2س^2 + 9س +4 ، س^2 + 6س ، س^2 – 4، بينما لا يعتبر أي من المقادير الآتية عبارة تربيعية: س^3 + 6س +8 ، س^5 - 6س +9 ، س$^{2/1}$ + 5س +8 ، 6س +7 .

بشكل عام:

المقدار الجبري الذي يتخذ الصورة : أ س^2 + ب س +ج حيث أ ، ب ، ج أعداد حقيقية، أ$\neq$0 يسمى عبارة تربيعية وتسمى أ معامل س2 ، ب معامل الحد الأوسط ، ج الحد الثابت.

سنقوم بدراسة تحليل العبارة التربيعية في صورتها الخاصة عندما يكون معامل س^2 = 1، ومن ثم في صورتها العامة عندما يكون معامل س^2 $\neq$1

أولاً: عندما يكون معامل س^2 =1

مثال (1) : جد مفكوك (س +2)(س+4)

الحل : هذه العبارة التربيعية عبارة عن مستطيل عرضه (س + 2) و طوله (س + 4) ويمكن حساب مساحته باستخدام قانون التوزيع كما يلي :

(س + 2)(س +4) = (س + 2) (س +4) = س^2 + 4س + 2س + 8

= س^2 + 6س + 8

من المثال السابق، نلاحظ ما يلي:

4- تحليل العبارة التربيعية س^2 + 6س +8 يتكون من عاملين وضعا داخل زوجين من الأقواس هكذا: س^2 + 6س +8 = (س +2)(س+4)

5- الحدّان الأوّلان في القوسين (أي س ، س) هما عاملان للحد الأول في العبارة التربيعية.

6- الحدّان الثّانيان في القوسين (أي +2 ،+4) هما عاملان للحد الثابت في العبارة التربيعية، ويلاحظ أن مجموعهما يساوي معامل الحد الأوسط وهذه ملاحظة هامة إذ لو تم اختيار عاملين آخرين للعدد 8 مثل 1 ، 8 لما كان مجموعهمايساوي الحد الأوسط وبالتالي لما كان التحليل صحيحاً .

مثال (2) : حلل العبارة التربيعية س^2 + 5س +6

الحل : نقول أن العددان اللذان حاصل ضربهما = 6 ومجموعهما =5 هما 2 ، 3إذن فالحدّان الثّانيان في القوسين هما +2 ، +3 .

نكمل التحليل : س^2 + 5 س +6 = (س +3)(س + 2)

التحقق : بإجراء ضرب العاملين: (س +3)(س + 2) = س^2 + 2س + 3س +6

= س^2 + 5 س +6

= العبارة الأصلية، أي أن التحليل صحيح.

مثال (3) : حلل العبارة التربيعية س^2 - 6 س +5

الحل : نقول ما هما العددان اللذان حاصل ضربهما + 5 ومجموعهما -6 ؟

بما أن حاصل الضرب (+5)موجب فالعددان أما موجبان معاً أو سالبان معاً، ولأن مجموعهما (-6) سالب إذن فهما سالبان معاً. إذن فالعددان هما -1 ، -5.

نكمل التحليل : س^2 - 6 س +5 = (س – 1)(س – 5)

التحقق : بإجراء ضرب العاملين ومقارنة ناتج الضرب بالعبارة التربيعية يمكن التحقق من صحة التحليل.

مثال (4) : حلل العبارة التربيعية س^2 - 2 س - 8

الحل: نقول ما هما العددان الصحيحان اللذان حاصل ضربهما -8 ومجموعهما -2 ؟

بما أن حاصل الضرب (-8) سالب فالعددان أحدهما موجب والآخر سالب، وبما أن مجموعهما (-2) سالب فالعدد السالب بإهمال الإشارة أكبر من العدد الموجب. إذن العددان هما -4 ، 2 ويكون التحليل :

س^2 - 2 س - 8 = (س -4)(س + 2)

التحقق : (س -4)(س + 2) = س (س+2) – 4 (س +2) = س^2 + 2 س - 4 س - 8

= س^2 - 2 س - 8

مثال(5) : حلل العبارة التربيعية س^2 + س + 1

الحل : نقول ما هما العددان الصحيحان اللذان حاصل ضربهما +1 ومجموعهما +1 ؟

بمأن حاصل الضرب موجب فالعددان إما موجبان معاً أو سالبان معاً، وبما أن مجموعهما موجب فهما موجبان معاً، والعددان الصحيحان الموجبان اللذان حاصل ضربهما 1 هما 1، 1 ولكن مجموعهما ≠ 1 إذن لا يوجد مثل هذين العددين الصحيحين. إذن العبارة أولية لا نستطيع تحليلها.

مثال(6) : حلل العبارة التربيعية (س + 1)^2 – 5(س +1) – 6

الحل : نفرض متغير جديد أسمه ص مثلاً، بحيث ص = س +1 وعندها تصبح العبارة التربيعية بدلالة ص كما يلي : ص^2 – 5ص -6

نقول ما هما العددان الصحيحان اللذان حاصل ضربهما -6 ومجموعهما -5 ؟

بما أن حاصل الضرب (-6) سالب فالعددان أحدهما موجب والآخر سالب، وبما أن مجموعهما (-5) سالب فالعدد السالب بإهمال الإشارة أكبر من العدد الموجب. إذن العددان هما -6 ، 1 ويكون التحليل

ص^2 – 5ص – 6 = (ص - 6)(ص +1)

وللتحقـــــق: (ص -6)(ص +1) = ص (ص +1) – 6 (ص +1)= ص^2 +ص – 6ص -6 = ص^2 – 5ص -6 . وهنا نعيد المتغير ص إلى أصله فينتج العبارة الأصلية :

= (س + 1)^2 – 5(س +1) – 6

تمارين ومسائل :

3 - حلل العبارات الآتية إلى عواملها الأولية :

أ- س^2 - 3 س +6

ب- 2س^2 +10 س +8

ت- 7س + س^2 - 8

ث- س^2 - س -12

ج- 5 س^2 + 45 س +70

4 – حلل إلى العوامل الأولية (إن أمكن)

أ- س^2 – (6 س +7)

ب- (س + 2)^2 - 36

ت- (س +2)^2 – 10(س +2) +24

ث- س^2 18 س ص +45 ص^2

ج- س^2 + س +6

ثانياً: عندما يكون معامل س^2 $\neq$ 1

لا تختلف طريقة التحليل في هذه الحالة عن الحالة الخاصة السابقة عندما كان معامل س^2=1، فالتجريب هو الأساس، وقد يستغرق التجريب في الحالة العامة بعض الوقت نظراً لتعدد الإمكانات القابلة للتجريب، ولكن التدريب والممارسة سيساعدنا في الوصول إلى التحليل المطلوب في وقت أقل.

مثال (1) : جد مفكوك العبارة التالية (س +4)(2س +1)

الحل : باستخدام قانون التوزيع، نعلم أن :

(س +4)(2س +1) = (س +4)(2س +1) = 2س^2 + س + 8س + 4 = 2س^2 + 9س + 4

أو بصورة عكسية 2س^2 + 9س + 4 = (س +4)(2س +1)

وهنا نستنتج أن تحليل العبارة التربيعية 2 س^2 + 9س + 4 = (س +4)(2س +1) .

من هذا المثال نلاحظ ما يلي :

1-الحدّان الأوّلان في القوسين (أي س ،2س) هما عاملان للحد الأول في العبارة التربيعية.

2-الحدّان الثّانيان في القوسين (أي +4 ،+1) هما عددان حاصل ضربهما = الحد الثابت في العبارة التربيعية، وبحيث : 4 × 2س + س × 1 = 9 س = الحد الأوسط. إذا سمّينا الحدين 4 ، 2 س الحدّين القريبين، وسمّينا س ، 1الحدين البعيدين، نلاحظ أن التحليل يكون صحيحاً عندما يكون (حاصل ضرب الحدّين القريبين + حاصل ضرب الحدّين البعيدين) = الحد الأوسط في العبارة التربيعية. ويمكن استخدام التمثيل الآتي في عملية الضرب والجمع المذكورة.

-نكتب أولاً عوامل الحد الأول في العبارة التربيعية تحت بعضهما

-نكتب ثانياً عوامل الحد الثابت في العبارة التربيعية تحت بعضهما.

- نجري ضرب الحدين على كل من القطرين ونجمع حاصل الضرب ونقارن ذلك بالحد الأوسط.

س   4   1س

2س   1   + 8س _____

9 س = الحد الأوسط

مثال (2): حلل العبارة التربيعية 3 س^2 + 8س +4

الحل : (1) نحلل الحد الأول 3س^2 إلى عاملين : 3س ، س

(2) نحلل الحد الثابت 4 إلى عاملين فنجد أكثر من احتمال: نجرب العددين 1، 4:

3س   1   12س

س   4   + س ________

13س≠ الحد الأوسط

نجرب العددين 2 ،2 :

3س   2   6س

س   2   + 2س ________

8س = الحد الأوسط

إذن التحليل المطلوب

3س^2 + 8س +4 = (3س + 2)(س +2)

للتحقق : (3س + 2)(س +2) = 3س (س+ 2) + 2 (س +2) = 3س^2 + 6س + 2س +4 = 3س^2 + 8س +4 العبارة الأصلية .

مثال (4): حلل العبارة التربيعية 2 س^2 - 7س +6

(2) نلاحظ أن الحد الثابت 6 موجب والحد الأوسط سالب فالعاملان للعدد 6 يجب أن يكونا سالبين، ويساعدنا هذا الاستنتاج في تقليص حالات التجريب.

نجرب العددين -1، -6 :

2س   -1   -12س

س   -6   - س

-13س ≠ الحد الأوسط

نجرب العددين -2، -3 :

2س   -2   -6س

س   -3   -2س

-8س ≠ الحد الأوسط

نجرب العددين -3، -2 :

2س   -3   -4س

س   -2   -3س

-7س = الحد الأوسط

نستنتج أن تحليل العبارة التربيعية 2 س^2 - 7س +6 = (2س -3)(س -2)

للتحقق : (2س -3)(س -2) = 2س (س- 2) – 3(س -2) = 2 س^2 - 4س – 3س +6 =

2س^2 - 7س +6 العبارة الأصلية، إذن التحليل صحيح .

مثال(4) : حلل : العبارة التربيعية 5 س^2 - 8س -4

الحل : (1) نجرب العددين 1، -4 عاملين للحد الثابت -4 :

5 س   1   -20س

س   -4   + س

-19س ≠ الحد الأوسط

(2) نجرب العددين 2، -2 عاملين للحد الثابت -4 :

5 س   2   -10س

س   -2   +2 س

-8س = الحد الأوسط

فيكون التحليل كما يلي : 5 س^2 - 8س -4 = (5 س+ 2)(س - 2)

وللتحقق نجري عملية فك الأقواس كما يلي :

(5 س+ 2)(س - 2)= 5س(س – 2) + 2(س - 2) = 5 س^2 - 10س +2س – 4

= 5 س^2 - 8س -4 العبارة الأصلية، إذن التحليل صحيح.

تمارين ومسائل :

1 - حلل كلاً من العبارات التربيعية الآتية :

أ- 5 س^2 -11س +2   ب- 7 س^2 +15س +2

ج- 6 س^2 +س -1   د- 2س^2 -5س -7

2- مستطيل مساحته (2 س^2 +13س -7) وحدة مربعة. عبر عن بعدي المستطيل بدلالة س .

3- مربع مساحته (س^2 +2س +1) وحدة مربعة، عبر عن طول ضلع المربع بدلالة س .

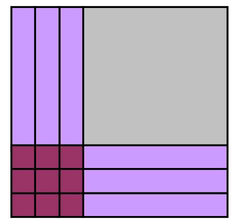
خامساً : تحليل عبارة تربيعية على صورة مربع كامل

تمهيد : مربع مجموع أو فرق حدّين :

مثال : جد مفكوك (س +3)^2

الحل : (س +3)^2 عبارة عن مربع طول ضلعه (س +3) :

س + 3



س + 3

من الشكل نلاحظ تكون أربعة مناطق هي (س)^2 + 3 س +3 س + (3)^2 = بالكلمات مربع مجموع حدين = مربع الحد الأول + ضعفي الحد الأول في الثاني + مربع الحد الثاني).

وبشكل عام :

فإن **(س + أ)^2 = (س + أ)(س+ أ)**

= س^2 + 2 ×أ س + أ^2

وبالكلمات :

مربع مجموع حدين = مربع الحد الأول + 2 × الحد الأول × الحد الثاني + مربع الحد الثاني

مثال (2) : أوجد مفكوك (2 س + 4)^2

الحل : العبارة (2 س + 4)^2 هي مربع كامل طول ضلعه (2س +4) فيكون مفكوكه كما يلي :

(2س +4) (2س +4) = 2س (2س +4) + 4(2س +4) = 4س^2 + 8س+ 8س + 16 = 4س^2 + 16س+ 16، أي أن تحليل 4س^2 + 16س+ 16= (2 س + 4)^2

نتيجة: بنفس الأسلوب يمكن التوصل إلى قاعدة مربع الفرق بين حدين وذلك كما يلي:

(س – أ)^2 = (س +(-أ))^2 = (س)^2 + 2× (-أ) × س + (-أ)^2 ويمكن تمثيل ذلك بالرسم كما يلي :

(س –أ)

(س –أ)

أ س	س2
أ2	أس

(س – أ)^2 = س^2 - 2 × (-أ) × س + (-أ)^2 = س^2 – 2أ س + أ^2

وبالكلمات :

مربع الفرق بين حدين = مربع الحد الأول - 2× الحد الأول × الحد الثاني + مربع الحد الثاني

مثال(3) : أوجد مفكوك (3س- 2)^2

الحل : العبارة (3س - 2)^2 هي مربع الفرق بين حدين الحد الأول هو 3س، الحد الثاني 2، حسب النتيجة أعلاه فإن تحليله هو :

(3س - 2)^2 = (3س)^2 – 2 × (3س)×(2) + (2)^2 = 9س^2 – 12 س + 4

وللتحقق: نستخدم عملية توزيع الضرب على الجمع كما يلي :

(3س - 2)^2= (3س – 2)× (3س – 2) = 3س(3س – 2) – 2 ×(3س – 2) =

9س^2 – 12 س + 4 = العبارة الأصلية.

تدريب :

أكتب مفكوك المربعات الكاملة الآتية:

خ- (س + 5)^2

د- (س - 7)^2

ذ- (3 س - 8)^2

ر- (2 س + 1/2)^2

ز- (م س + ن)^2

س-(س + ص + 1)^2 (إرشاد: اعتبر (س +ص)حداً أولاً في المقدار).

تحليل عبارة تربيعية على صورة مربع كامل:

وجدنا في سابقً باستخدام عملية توزيع الضرب على الجمع أن (س ±أ)^2 = س^2 ± 2أ س + أ^2 أي أن العبارة التربيعية التي على صورة س^2 ± 2أ س + أ^2 تكونمربعاً كاملاً وتحلل هكذا : س^2 ± 2أ س + أ^2 = (س ±أ)^2.

مثال(1) : حلل العبارة التربيعية : س^2 + 12 س + 36

الحـل : نلاحـظ أن س^2 + 12 س + 36 يمكـن كتابتهـا س^2 + 2× س× 6 + (6)^2 وهـذه تشـكل مربـع مجموع حدين حسب النتيجة السابقة أعلاه فيكون تحليلها هو (س +6)(س + 6).

وللتحقق : نجري عملية توزيع الضرب على الجمع كما يلي :

(س +6)(س + 6) = س×(س +6) + 6× (س+6) = س^2 + 12 س + 36 العبارة الأصلية.

مثال (2) : حلل العبارة التربيعية 9س^2 – 18س +9

الحل : نلاحظ أن 9س^2 – 18س +9 يمكن كتابتها بصورة (3س)^2 – 2× (3س)×3 + (3)^2 وهذه عبارة عن مربع الفرق بين حدين الحد الأول هو (3س) والحد الثاني هو (3) وعليه فإن تحليل العبارة

9س^2 – 18س +9 = (3س -3)(3س- 3)

وللتحقق : نجري عملية توزيع الضرب على الجمع كما يلي :

(3س -3)(3س- 3)= 3س× (3س -3) - 3 × (3س -3)= 9س^2 – 18س +9العبارة الأصلية.

تمارين ومسائل :

1 – حلل العبارات الآتية :

أ- س^2 + 6 س + 9

ب- ص^2 -10 ص + 25

ت- 9س^2 + 24 س ص + 16 ص^2

ث- 8س^2 - 24 س + 18

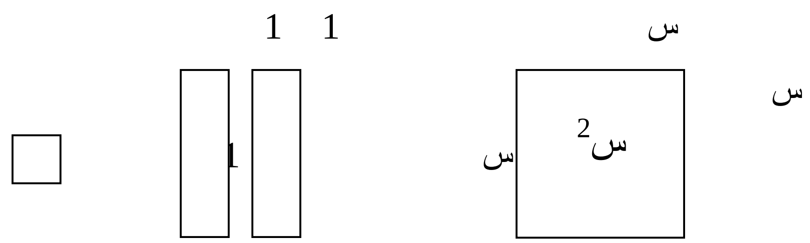
2- أكمل الحدود الناقصة في العبارات الآتية لتصبح مربعات كاملة:

أ- س^2 - + $\boxed{\text{ص}}$

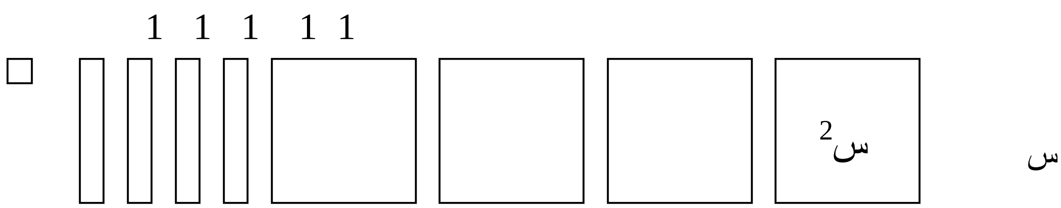
ب- 4 س^2 -4 س + $\boxed{}$

3- في الأشكال التالية أعد ترتيبها لنحصل على مربعاً. ما طول ضلع هذا المربع؟ س

أ-



ب-



سادساً : تحليل الفرق بين مكعبين

كما تعرفنا سابقاً على تحليل الفرق بين مربعين، نتعرف الآن طريقة تحليل الفرق بين مكعبين.

مثال : جد مفكوك (س- ص) (س^2+ س ص + ص^2)

الحل : باستخدام خاصية توزيع الضرب على الجمع فإن (س- ص) (س^2+ س ص + ص^2) =

س×(س^2+ س ص + ص^2) – ص ×(س^2+ س ص + ص^2) =

= س^{3} + ~~س^{2} ص~~ + ~~س ص^{2}~~ - ~~س^{2} ص~~ - ~~س ص^{2}~~ - ص^{3} = س^{3} – ص^{3}

ومن هنا نستنتج أن تحليل الفرق بين مكعبين

نتيجة :

س^{3} – ص^{3} = (س- ص) (س^{2} + س ص + ص^{2})

وبالكلمات :

(الحد الأول)^{3} – (الحد الثاني) ^{3} = (الحد الأول – الحد الثاني)(مربع الحد الأول + الحد الأول × الحد الثاني + مربع الحد الثاني)

مثال(1): حلل العبارةً س^{3} - 27 ؟

الحل: س^{3} - 27 يمكن كتابته على صورة (س)^{3} – (3)^{3} وهذه عبارة عن فرق بين مكعبين يكون تحليلها حسب النتيجة أعلاه كما يلي

(س)^{3} – (3)^{3} = (س -3)(س^{2} + 3س + 9)

وللتحقق : نستخدم الطريقة العكسية كما يلي :

(س -3)(س^{2} + 3س + 9) = س^{3} + 3س2 + 9س – 3 س2 – 9س - 27 = س^{3} - 27 العبـــــارة الأصلية.

تدريبات :

حلل المقادير الآتية إلى عواملها الأولية:

أ- س^{3} - 1 ب- س^{4} – ص^{3} س

ت- 24ل^{3} - 81 ث- س^{6} - 64

ج- س^{3} – 2^{3} ح- ل^{3} – م^{3}

سابعاً : تحليل مجموع مكعبين

يمكن الاعتماد على قاعدة تحليل الفرق بين مكعبين السابقة في تحليل مجموع مكعبين هكذا:

س^3 + ص^3 = س^3 – (-ص)^3 = [س-(-ص)][س^2 + س × (-ص) + (-ص)^2] = س^3 + ص^3= (س+ص) (س^2- س ص + ص^2).

وللتحقق : نستخدم الطريقة العكسية كما يلي : (س+ص) (س^2- س ص + ص^2) =

س×(س^2- س ص + ص^2) + ص ×(س^2- س ص + ص^2) =

= س^3 - س^2 ص ~~+س ص^2~~ ~~+س^2 ص~~ ~~- س ص^2~~ + ص^3 = س^3 + ص^3

ومن هنا نستنتج أن تحليل الفرق بين مكعبين

نتيجة :

س^3 + ص^3 = (س+ ص) (س^2 - س ص + ص^2)

وبالكلمات :

(الحد الأول)^3 + (الحد الثاني) ^{3} = (الحد الأول + الحد الثاني)(مربع الحد الأول - الحد الأول × الحد الثاني + مربع الحد الثاني)

أي أن س^3+ص^3= س^2 (س+ص) - س×ص×(س- ص)- ص^2 (س- ص)

= س^2 (س+ص) + (س- ص)(- س ص- ص^2)

= س^2 (س+ص) +(س- ص)× - ص(س+ص)

=(س+ص)(س^2 – س ص+ ص^2)

مثال(1) : حلل المقدار التالي إلى عوامله الأولية: $س^3 + 8$

الحل : المقدار $س^3 + 8 = س^3 + (2)^3$ و حسب النتيجة السابقة أعلاه فإن

$$س^3 + (2)^3 = (س+2)(س^2 - 2س + 2^2)$$

وللتحقق : نستخدم الطريقة العكسية كما يلي :

$$(س+2)(س^2 - 2س + 2^2) = س^2(س+2) - س\times 2\times(س + 2) + 2^2(س + 2)$$

$$= س^3 + 2س^2 - 2س^2 - 4س + 4س + (2)^3 = س^3 + (2)^3 = س^3 + 8$$ العبارة الأصلية.

ملاحظة هامة:

قام الباحث باستخدام المكعبات الخشبية ومكعبات الصابون لتوضيح ما ورد في الفرق بين المكعبين ومجموع المكعبين

مثال(2) : حلل المقدار التالي إلى عوامله الأولية: $8س^3 + 27$

الحل : المقدار $8س^3 + 27 = (2س)^3 + (3)^3$ و حسب النتيجة السابقة أعلاه فإن

$$(2س)^3 + (3)^3 = (2س + 3)(4س^2 - 6س + 9)$$

وللتحقق : نستخدم الطريقة العكسية كما يلي :

$$(2س + 3) \times (4س^2 - 6س + 9) = 8س^3 - \cancel{12س^2} + \cancel{18}س + \cancel{12س^2} - \cancel{12}س + 27$$

$= 8س^3 + 27$ العبارة الأصلية .

تدريبات :

حلل المقادير التالية إلى عواملها الأولية:

أ- $س^3 + ل^3$

ب- $8س^3 + 1^3$

ت- $24س^3 + 3ص^3$

ث- $-س^3 - ص^3$

ج- $64 + ص^3$

ح- $8س^3 + 27ص^3$

ملحق رقم (4)

- الاختبار التحصيل القبلي لطلبة الصف التاسع الأساسي

- اختبار التحصيل البعدي لطالبات عينة الدراسة