الباب الثالث

طرق أقل التربيعـــــات

3-1 مقـــــــدمه:

من مبادئ العمل المساحي أننا نقوم بقياس عدد من الأرصاد أكثر من العدد الفعلي المطلوب وذلك ليتوفر لدينا أرصاد زائده تمكننا من توفير فرصة المراجعه والتحقيق الحسابي وفحص الأرصاد فمثلاً من الممكن أن نكتفي بقياس زاويتين في مثلث ونقوم بحساب الزاوية الثالثة لكننا في الواقع نقيس الزوايا الثلاثة حتى نتحقق من أن مجموعهم يساوى °180 درجة وبالتالي نتأكد من جودة القياسات ونستطيع أن نحدد قيمة الخطأ. وهنا تكن لدينا رصده واحده زائده حيث أن عدد الأرصاد الفعليه للمثلث هو 2 بينما عدد الأرصاد المقاسه هو 3.

وللتغلب على وجود عدة حلول (عدة إحتمالات للقيمة المطلوبة)هناك أربعه أساليب:

- اختيار أنسب مجموعة أرصاد من حيث الثقة فيهم عيب هذه الطريقه أننا سنهمل جزء من باقي الأرصاد ولن ندخلها في الحسابات.
- حساب القيمة المجهوله بإتباع كل الحلول والمعادلات المتاحه ثم حساب متوسط كل هذه الحلول لكن هذه الطريقه تحتاج وقت أطول ومجهود أكبر.
- ضبط الأرصاد بصوره بسيطه ثم الإعتماد على الأرصاد المضبوطه أو المصححه لكن عيب هذه الطريقة أنها تحتاج إلى مجهود أكبر لكنها تكون مناسبه للأعمال البسيطه .
- ضبط الارصاد بالاعتماد على شرط أو خاصيه محدده أو بأسلوب معين مشروط وهذا مايعرف بضبط الشبكات .

3-2 ضبط الشبكات بطريقة مجموع أقل التربيعات :

إن أي قياسات تجرى بغرض إيجاد كميات مجهوله تحتوي على أخطاء بعد تصحيح الاخطاء الجسيمه والمنتظمه بالطرق سالفة الذكر يتبقى لدينا الأخطاء العشوائيه ويلجأ الراصد إلى رصد كميات إضافيه بحيث يكون العدد الكلي للأرصاد أكثر من مجرد الضروري ومن هنا ينشأ تناقض في الارصاد ويلزم البحث عن طريقه للحصول على الأفضل منها وذلك بإضافة تصحيحات لها بحيث تكون هذه التصحيحات صغيره لا تزيل التناقضات الناشئة عن الارصاد الزائده فتحصل على قيم للمجاهيل المطلوبه أكثر احتمالا من أي قيم أخرى .

وتوجد طرق مختلفه تفيئ ببعض هذه المتطلبات بدرجات متفاوته وتعتبر أفضل هذه الطرق هي تلك التى أوجدها جاوس والتي استنبطها ممن نظرية الاحصاء على أساس أن التوزيع التكرارى للأخطاء هو توزيع عادي وتسمى هذه النظريه بنظرية أقل للتربيعات وهي تنص على أن التصحيحات المعطاه للكميات المرصوده تكون بحيث أن مجموع مربعاتها أقل مايمكن ومن المميزات البارزه لنظرية أقل التربيعات :

- أنها تعطى قيمة واحده وهى الأكثر احتمالاً .
- تعطي تقييماً لدقة كل من الكميات المرصوده والكميات المضبوطه أي أنها تعطي الخطأ المعياري للمجاهيل.

أنها تستوعب قيم مرصوده مختلفه في نوعيتها ودقتها ودقة القيم المرصوده عباره عن مصفوفة تعرف بمصفوفة الوزن نرمز لها بالرمز (w) وهي مصفوفه مربعة الأبعاد $(n * n)$ حيث n تمثل عدد الأرصاد وهذه المصفوفه في الأغلب تكون مصفوفه قطريه وهذا يعنى أن دقة القيم لا يعتمد بعضها على بعض .

في حالة الأرصاد لم تؤخذ بنفس الدقة فإن مصفوفة الوزن (w) تكون :

$$W_{n*n} = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma^2{}_1} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sigma^2{}_2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma^2{}_n} \end{bmatrix}$$

حيث σ^2 هى مربع الخطأ المعياري .

أما في حالة جميع القيم المرصوده قد رصدت بنفس الدقة أصبح مصفوفة الوزن مصفوفة وحده:

$$W_{n*n} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

- ***يوجد أسلوبين لتنفيذ ضبط الشبكات بطريقة مجموع أقل التربيعات :***

1-2-3 *طريقة معادلات الرصد :*

يتم تكوين معادلات رياضيه تربط بين القيمه المرصوده والقيمه المجهوله ثم يتم حل هذه المعادله معاً كما تسمى هذه الطريقه أيضاً باسم الضبط المباشر حيث أن القيم المجهوله تظهر مباشره في معادلات الرصد المطلوب حلها.

تكتب مسأله أقل التربيعات كما يلي :

صغر $v^{T}wv$ بالنسبه ل $Ax = b + v$.

المصفوفات أعلاه كما يلي :

v ≡ مصفوفة الأخطاء المتبقيه وذات أبعاد (n×1).

w ≡ مصفوفة الوزن وذات أبعاد (n×n).

A ≡ مصفوفة معاملات المجاهيل وذات أبعاد (n×m).

b ≡ مصفوفة تحتوي على القيم المرصوده أو القيم المحسوبه من القيم المرصوده وذات أبعاد (n×1).

x ≡ مصفوفة المجاهيل وذات أبعاد (m×1).

لدينا:

n ≡ تمثل عدد الارصاد.

m ≡ تمثل عدد المجاهيل

قام العالم لاجرانج بحل المسأله أعلاه وذلك بجمع المعادلات في داله واحده سميت دالة لاجرانج ومن ثم أضاف مجاهيل جديده k سميت بمضاعفات لاجرانج:

$$\emptyset = v^{T}wv + 2K^{T}(Ax - b - v)$$

ولكي نتحصل على القيم الأكثر احتمالاً نوجد المشتقه الأولى للدالة بالنسبه للاخطأ المتبقيه ومضاعف لاجرانج والمجاهيل .

$$\frac{d\emptyset}{dv} = 2\hat{v}^T w - 2K^T = 0$$

نوجد المنقول .

$$w\hat{v} - \widehat{K} = 0$$

$$\widehat{K} = w\hat{v} \quad \dots\dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{d\emptyset}{dk} = 2(A\hat{x} - b - \hat{v})^T = 0$$

نوجد المنقول .

$$A\hat{x} - b - \hat{v} = 0$$

$$\hat{v} = A\hat{x} - b \dots\dots\dots (2)$$

$$\frac{d\emptyset}{dx} = 2K^T A = 0$$

نوجد المنقول .

$$A^T \widehat{K} = 0 \dots\dots\dots.. (3)$$

نعوض (1) فى (3) لنحصل على :

$$A^T w\hat{v} = 0 \dots\dots\dots.. (4)$$

نعوض (2) فى (4) لنحصل على :

$$A^T w(A\hat{x} - b) = 0$$

$$A^T wA\hat{x} - A^T wb = 0$$

$$\hat{x} = (A^T wA)^{-1} A^T wb \quad \dots\dots(1\text{-}3)$$

وهي معادلة القيمه الأكثر احتمالا للمجاهيل .

مميزات الطريقة :

1. هذه الطريقة تعطينا حلاً مباشراً للمجاهيل.
2. الطريقة سهله جداً لأن كل قيمه مرصوده يجب أن تنتج عنها معادله تحتوي على المجاهيل.

2-2-3 *طريقة المعادلات الشرطيه:*

يتم تكوين معادلات شرطيه بحيث تحقق كل معادله منهم شرطاً رياضياً معيناً يجب تحقيقه في الارصاد المساحيه .ثم يتم تحويل هذه المعادلات معاً لحساب قيم العناصر المجهوله وتسمى هذه الطريقه أيضًا باسم الضبط الشرطي .

تكتب مسأله أقل التربيعات كما يلي :

صغر $v^{\mathrm{T}}\mathrm{w}\mathrm{v}$ بالنسبه ل $\mathrm{Cv}=\mathrm{b}$.

المصفوفات أعلاه كما يلي :

$v \equiv$ مصفوفة الأخطاء المتبقيه وذات أبعاد $(n\times1)$.

$w \equiv$ مصفوفة الوزن وذات أبعاد $(n\times n)$.

$b \equiv$ مصفوفة خطأ القفل وذات أبعاد $(d\times1)$.

$C \equiv$ مصفوفة معاملات الأخطاء المتبقيه وذات أبعاد $(d\times n)$.

لدينا:

$d \equiv$ حاصل طرح الارصاد ناقصاً المجاهيل وتعرف بالارصاد الزائده وهي الشروط التي يجب استيفائها.

في طريقة المعادلات الشرطيه :

- ✓ المعادلات تساوي الشروط المستقلة التي يجب استيفائها .
- ✓ لا يوجد حل مباشر للمجاهيل إنما يكون في خطوه أخرى .

قام العالم لاجرانج بحل المسأله أعلاه وذلك بجمع المعادلات في داله واحده سميت دالة لاجرانج ومن ثم اضاف مجاهيل جديده k سميت بمضاعفات لاجرانج:

$$\emptyset = v^T w v + 2K^T (Cv - b)$$

ولكي نتحصل على القيم الاكثر احتمالاً نوجد المشتقه الأولى للداله بالنسبه للمجاهيل .

$$\frac{d\emptyset}{dv} = 2\hat{v}^T w + 2K^T C = 0$$

نوجد المنقول .

$$w\hat{v} + C^T \hat{K} = 0$$

$$\hat{v} = -w^{-1} C^T \hat{K} \qquad \dots\dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{d\emptyset}{dk} = 2(C\hat{v} - b)^T = 0$$

نوجد المنقول .

$$C\hat{v} - b = 0$$
$$C\hat{v} = b \dots\dots\dots (2)$$

نعوض (1) فى (2) لنحصل على :

$$\hat{K} = -(Cw^{-1}C^T)^{-1} b \dots\dots\dots (3)$$

نعوض (3) فى (1) لنحصل على :

$$\hat{v} = w^{-1} C^T (Cw^{-1}C^T)^{-1} b \dots\dots (\mathbf{2-3})$$

وهي معادلة قيم الأخطأ المتبقيه.

نجد بأن المعادلات الشرطيه تستعمل في تعديل الكثير من المشاريع المساحية ولكن ثمة بعض المشاكل في استعمالها و هي مجملة كما في الآتى:

- صعوبة تكوين كل المعادلات اللازمه لحل المسأله المعنيه خاصة في الشبكات الكبيره.
- الوصول إلى حلول صحيحه لابد من كتابة جميع المعادلات الشرطيه.
- عدد المعادلات قليل وبالتالي يقلل ذلك من الحده الحسابيه للمسأله.

3-3 ضبط أقل التربيعات للمعادلات غير الخطية :

تعتمد نظرية أقل التربيعات في أساسها على المعادلات الرياضيه الخطيه فقط لكن هنالك الكثير من التطبيقات المساحيه التي بها تكون العلاقه الرياضيه بين الأرصاد والعناصر المجهوله ليست علاقة خطيه ولتطبيق طريقة ضبط أقل التربيعات يجب تحويل هذه العلاقه إلى النوع الخطي .

1-3-3 *الطريقه الموحـــده (الطريقة العامه):*

يمكن كتابة الاطار الرياضي الغير خطي للطريقه الموحده كما يلي :

$$f(\bar{x},\bar{l}) = 0 \ldots\ldots (1)$$

حيث $\bar{l}$, $\bar{x}$ تمثل القيم الحقيقيه للمجاهيل والأرصاد على التوالي :

$$\bar{x} = x + x^{\circ}$$

$$\bar{l} = l + v$$

بتطبيق سلسلة تايلور على المعادله (1) نحصل على الإطار الرياضي الخطي .

$$F(x) = f(x^{\circ}, l) + \frac{df}{d\bar{x}}(\bar{x} - x^{\circ}) + \frac{df}{dl}(\bar{l} - l) + \cdots = 0$$

$$f(x^{\circ}, l) + Ax + Cv + \cdots = 0$$

$$Ax + Cv = f(x^{\circ}, l)$$

$$Ax + Cv - b = 0$$

وهو الأطار الرياضي الخطي للطريقه العامه .

ولكي نتحصل على القيمه الأكثر احتمالاً للمجاهيل المقدره للطريقه العامه نستخدم دالة لاجرانج للاطار الرياضي الخطي للطريقه العامه .

$$\emptyset = v^T w v + 2K^T(Ax + Cv - b)$$

أجرى عملية التفاضلات على داله لاجرانج :

$$\frac{d\emptyset}{dv} = 2\hat{v}^T w + 2K^T C = 0$$

المنقول يعطينا :

$$w\hat{v} + C^T\widehat{K} = 0$$

$$\hat{v} = -w^{-1}C^T\widehat{K} \qquad \dots\dots\dots\dots (1)$$

$$\frac{d\emptyset}{dx} = 2K^T A = 0$$

المنقول يعطينا :

$$A^T\widehat{K} = 0 \dots\dots\dots.. (2)$$

$$\frac{d\emptyset}{dk} = 2(A\hat{x} + C\hat{v} - b)^T = 0$$

المنقول يعطينا :

$$A\hat{x} + C\hat{v} - b = 0$$

$$A\hat{x} + C\hat{v} = b \dots\dots\dots (3)$$

نعوض المعادله (1) في المعادله (3):

$$A\hat{x} + C(-w^{-1}C^T\widehat{K}) = b$$

$$\widehat{K} = (Cw^{-1}C^T)^{-1}A\hat{x} - (Cw^{-1}C^T)^{-1}b \dots\dots\dots (4)$$

نعوض المعادله (4) في المعادله (2):

$$A^T[(Cw^{-1}C^T)^{-1}A\hat{x} - (Cw^{-1}C^T)^{-1}b] = 0$$

$$A^T(Cw^{-1}C^T)^{-1}A\hat{x} - A^T(Cw^{-1}C^T)^{-1}b = 0$$

$$\hat{x} = (A^T(Cw^{-1}C^T)^{-1}A)^{-1}A^T(Cw^{-1}C^T)^{-1}b \dots\dots (\mathbf{3-3})$$

وهي القيمه الأكثر احتمالا للمجاهيل المقدره للطريقة الموحده.

❖ المصفوفات أعلاه كالآتى :

A ≡ مصفوفة تفاضلات المجاهيل وذات أبعاد (r×m).

$$A_{r\times m} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial x_m} \end{bmatrix}$$

C ≡ مصفوفة معاملات الأخطاء المتبقيه وذات أبعاد (r×n).

$$C_{r\times n} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial l_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial l_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_r}{\partial l_1} & \cdots & \frac{\partial f_r}{\partial l_n} \end{bmatrix}$$

v ≡ مصفوفة الأخطاء المتبقيه وذات ابعاد (n×1).

$$v_{n\times 1} = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

x ≡ مصفوفة المجاهيل وذات أبعاد (m×1).

$$x_{m\times1} = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{bmatrix}$$

w ≡ مصفوفة الوزن وذات أبعاد (n×n).

$$W_{n*n} = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$