الفصل الثالث

توزيعات العائلة الأسية

3-1 التوزيـع الطبيـعـي :

يعود الفضل في اكتشاف هذا التوزيع الي العالم الرياضي الأنجليزي دي مويفر(De-moiver)عام 1733م، وكان اول من استخدم التوزيع الطبيعي في دراسه الاخطاء المحتمله في القياس لكل من العالمين الرياضيين لاباس وكاوس عام 1890م .وفي نظريه الإحتمالات هو توزيع إحتمالي مستمر كثير الانتشار والاستعمال وغالبا ما يستخدم لوصف المتغيرات العشوائيه التي تميل الي التمركز حول نقطه متوسطه وحيده. ويعد التوزيع الطبيعي من اهم التوزيعات من الناحيتين النظريه والتطبيقيه اذا انه يستخدم علي نطاق واسع في وصف عدد كبير من الظواهر الطبيعيه ،منها علي سبيل المثال الحصر ووصف متغيرات الأوزان ،الأطوال ،قياس مستوي الذكاء وضبط جوده الإنتاج.

وبإفتراض أن لدينا متغير عشوائي متصل وليكن (x) يتوزع وفق التوزيع الطبيعي بوسط حسابي (μ) وتباين (σ^2)،فان داله التوزيع الاحتمالي له تأخذ الشكل التالي:-

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}}e^{\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})}\rightarrow(3-1)$$
$$-\infty\prec x\prec\infty$$

حيث:

$e=2.71828$

μ= معلمات التوزيع الطبيعي .

π= النسبه التقديريه الثابته والتي تساوي (3.14159).

وغالبا ما يعبر عن التوزيع الطبيعي بالأتي:-

$$\mu_x(t) = \mathrm{E}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} e^{-\frac{1}{2}(\frac{x-\mu}{\sigma})^2} dx \to (3-2)$$

وهذا يعني ان المتغير العشوائي (x)يتوزع وفق التوزيع بالمعلمتين (σ^2) (μ)

ولإيجاد الوسط الحسابي μللتوزيع الطبيعي نتبع الخطوات التاليه:-

نفترض ان :

$$y = \frac{x-\mu}{\sigma}$$

ومنه نتحصل علي:

$$dx = \sigma dy$$

وبتعويض العلاقه بالمعادله (3-2)نحصل علي:

$$\mu_x(t) = \mathrm{E}(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(\sigma y+\mu)} e^{-\frac{1}{2}(y)^2} \sigma dy \to (3-3)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{t(\sigma y+\mu)} e^{-\frac{1}{2}y^2} \sigma dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\mu t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\sigma t y - y^2}{2}} dy$$

وباضافه وطرح$(\sigma^2 t^2)$في العلاقه اعلاه نحصل علي الاتي:

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{\mu t} \int_{-\infty}^{\infty} e^{\frac{\sigma^2 t^2 - \sigma^2 t^2 + 2\sigma t y - y^2}{2}} dy$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{2\mu t + \sigma^2 t^2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-\sigma t)^2}{2}} dy$$

وبما أن:-

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{(y-\sigma t)^2}{2}} dy = \sqrt{2\pi}$$

وبالتعويض عنها في العلاقه أعلاه نحصل علي :-

$$\mu_x(t) = e^{\frac{2\mu t+\sigma^2 t^2}{2}} \rightarrow (3-4)$$

وهذه تمثل الداله المولده للعزوم ،وبايجاد المشتقه لها عندما $(t=0)$،نحصل علي :-

$$M_x(t) = (\mu + \sigma^2 t)e^{\frac{2\mu t+\sigma^2 t^2}{2}}$$

$$M_x(0) = \left[\mu + \sigma^2(0)\right]e^0 = \mu$$

وبذلك نكون قد اثبتنا أن الوسط للتوزيع هو(μ) ،وبايجاد المشتقه الثانيه للداله نحصل علي العزم الثاني وكما يلي :-

$$M''_x(t) = (\mu + \sigma^2 t)(\mu + \sigma^2 t)e^{\frac{2\mu t+\sigma^2 t^2}{2}} + \sigma^2 e^{\frac{2\mu t+\sigma^2 t^2}{2}}$$

$$M''_x(0) = (\mu + 0)(\mu + 0)e^0 + \sigma^2 e^0 = \mu^2 + \sigma^2$$

ومن العلاقه التاليه نحصل علي التباين للتوزيع ،وكما يلي :-

$$\operatorname{var}(x) = M''_x(0) - \left\{\mu'_x(0)\right\}^2$$

$$= \mu^2 + \sigma^2 - (\mu)^2 = \sigma^2 \rightarrow (3-5)$$

ومن خصائص هذا التوزيع مايأتي :

$1 - \mathrm{E}(z) = 0$

$2 - \operatorname{var}(z) = 1$

ولإثبات الخاصيه (1) نحسب الأتي :-

$$E(Z)=\int_{-\infty}^{\infty} z f(z)dz=\int_{-\infty}^{\infty} z(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2})dz$$

$$=-2e^{-\frac{1}{2}z^2}\int_{-\infty}^{\infty}=0\to(3-6)$$

وبنفس الطريقه يمكن أثبات الخاصيه (2):-

$$E(z^2)=\int_{-\infty}^{\infty} z^2(\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}z^2})dz=1\to(3-7)$$

وهنا نحتاج الي بعض المعلومات عن التكامل بالتجزئه لغرض اكمال البرهان ،ومنه نحصل علي الأتي:

$$\sigma^2=\text{var}(z)=E(z^2)-\{E(z)\}^2=1-\{0\}^2=1$$

ومن ثم يعبر عن توزيع المتغير z بالرموز $Z\to N(0,1)$ ويعني أن المتغير العشوائي x يتبع التوزيع الطبيعي بمتوسط (0) وتباين (1) .

3- إن منحني داله الكثافه الإحتماليه $f(x)$ للتوزيع الطبيعي يشبه شكل الناقوس (الجرس)، ويكون متماثل حول المحور الرأسي، المار بالنقطه (x=µ)، والشكل التالي يوضح ذلك :-

4- يتقارب طرفا منحني داله الكثافه $f(t)$ من الصفر أي:-

$$\lim f(x)=\lim f(x)=0$$

5- المساحه تحت منحني التوزيع تساوي الواحد الصحيح ،أي أن:-

$$p(-\infty\prec x\prec\infty)=\int_{-\infty}^{\infty} f(t)dx=1$$

6- إن الوسط الحسابي والوسيط والمنوال للتوزيع الطبيعي متساويه دائما ،أي ان :-

$$\overline{X}=Median(Me)=Mode(M_o)$$

7- تمتلك داله الكثافه الإحتماليه $f(t)$ للتوزيع الطبيعي نقطه إنقلاب عند النقطتين $X=\mu-\sigma, X=\mu+\sigma$

2-3 التوزيـع الأسـي:

التوزيع الأسي هو من التوزيعات المتصله ،وهو يستخدم بكثير من المجالات نذكر منها علي سبيل المثال دراسه طول حياه ماده مشعه ،واذا كان (x)متغيرا متصلاً يتبع التوزيع الأسي فإن داله كثافه إحتماله تأخذ الشكل التالي :-

$$f(x)=\frac{1}{\theta}e^{-\frac{x}{\theta}} \to (3-8)$$

$$0 \le x \le \infty$$

$$\theta \succ 0$$

ويمكن إثبات أن الداله المولده للعزوم حول الصفر هي :-

$$M_X(s)=(1-\theta_s)^{-1} \to (3-9)$$

والتي يمكن أن تفك كما يلي :-

$$M_X(s)=1+\frac{\theta s}{1!}+\frac{2\theta^2 s^2}{2!}+\frac{6\theta^3 s^3}{3!}+...$$

ومنها نستنتج أن :-

الوسط الحسابي:

$$\overline{\mu}_1=\theta$$

التباين :

$$\sigma_2=\theta^2$$

أما معاملات الإلتواء والتفرطح لهذا التوزيع فهما علي الترتيب :-

$$B_1=4$$

$$B_2=9$$

ويمثل التوزيع الأسي حاله خاصه من توزيع قاما عندما تكون $(\beta=\theta,\alpha=1)$.

كما أنه يمثل حاله خاصه من توزيع ويبل ، وهو توزيع له تطبيقات مهمه في دراسه المأمونيه .

والتوزيع الأسي من ابسط التوزيعات الإحتماليه من حيث المعالجه الرياضيه ،لذلك كثيرا ما نستخدم دوال من متغيرات أسيه كتقريب لبعض المتغيرات العشوائيه في بعض التطبيقات الإحصائيه.

وداله التوزيع الاحتمالي للمتغير (x)ذو التوزيع الأسي هي :-

$$f(x)=\int_0^x \lambda e^{-\lambda} u du = 1-e^{-\lambda x} \rightarrow (3-10)$$

$$x \succ 0$$

$$\lambda \succ 0$$

عندما $\lambda = 1$ **:-**

$$f(x)=(1-e^{-x})$$

$$x \succ 0$$

$$\lambda = 0$$

والداله المميزه للمتغير ذوالتوزيع الأسي هي :-

$$\phi_{(t)} = \mathrm{E}(e^{itx}) = \int_0^\infty \lambda e^{itx}.e^{-\lambda x} dx = (1-\frac{it}{x})^{-1} \rightarrow (3-11)$$

والداله المولده لعزوم التوزيع هي :-

$$\mathrm{M}(\theta)=(1-\frac{\theta}{\lambda})^{-1} = \sum_0^\infty (\frac{\theta}{\lambda})^J \rightarrow (3-12)$$

$$|\theta| \prec \lambda$$

والعزم الرائي حول الصفر $\overline{\mu_r}$ **هو معامل المفكوك** $\frac{\theta^r}{r!}$ **في المفكوك السابق :-**

$$\overline{\mu_r} = r!(\lambda^{-r}) \rightarrow (3-13)$$

والتوقع :-

$$\mathrm{M}'_r = \frac{1}{\lambda}$$

والتباين :-

$$\mathrm{M}_2 = \frac{1}{\lambda^2}$$

والعزمين الثالث والرابع :-

$$M_3 = 2\lambda^{-3}$$

$$M_4 = 9\lambda^{-4}$$

والداله المولده للعزوم المركزيه هي :-

$$M_m(\theta) = E\left[e^{\theta(x-\frac{1}{\lambda})}\right] \rightarrow (3-14)$$

$$= e^{\frac{-\theta}{\lambda}} m(e) = e^{\frac{-\theta}{\lambda}} (1-\frac{\theta}{\lambda})^{-1}$$

تعتبر القوانين الإحتماليه للتوزيع الأسي ذات أهميه كبيره في الكثير من المجالات التطبيقيه لنظريه الأحتمالات ، هذه القوانين يمكن أن تصف العديد من الحالات أو نماذج العمليه كحاله وبعد أحداث تقع (تحدث) عشوائيا في الزمن مثل ورود عدد من المكالمات التلفونيه علي لوحه استقبال الهاتف لفتره زمنيه محدده ، كما يمكن بقوانين التوزيع الأسي معرفه أعمار المصابيح الكهربائيه التي تنتجها أحدي شركات التصنيع ،أو طول مده الإنتظار للوصول للخدمه في محطه من محطات الخدمات ،أو غير ذلك من المجالات التطبيقيه .

كما تعتبر أختبارات الحياه من أهم المجالات التطبيقيه للتوزيع الأسي ،والعمر بصفه عامه (emitefil)، ويمكن تمثيله بمتغير عشوائي له توزيع اسي .

فإذا افترضنا مثلا أن الزمن المتبقي من عمر مفرده ما (أي العمر المستقبل للمفرده) له نفس التوزيع بغض النظر عن عمر هذه المفرده في اللحظه الحاليه ،فيمكن صياغه ذلك كما يلي :-

لنرمز للعمر بالرمز (x) :

$$P_r\left[X \succ x + a / X \succ a\right]$$

$$P_r\left[X \succ x\right], a \succ x \succ 0$$

$$P_r\left[X \succ x + a / X \succ a\right] = P_r\left[x \leq X\right]$$

$$a \succ o$$

$$x \succ o$$

تقدير داله معدل الفشل للتوزيع الأسي :-

تعد داله معدل الفشل $r(t)$مقدار ثابت في حاله التوزيع الأسي ،ويمكن الحصول عليها كالأتي :-

$$r(t)=\frac{f(t)}{1-f(t)}=\frac{f(t)}{R(t)}\rightarrow(3-15)$$

$$=\frac{\frac{1}{\theta}.e^{-\frac{t}{\theta}}}{e^{-\frac{t}{\theta}}}=\frac{1}{\theta}\rightarrow(3-16)$$

عليه فإن مقدر الإمكان الأعظم لداله معدل الفشل $r(t)$ يمكن الحصول عليه بعد التعويض عن مقدر المعلمه $(\hat{\theta})$في داله الفشل $r(t)$الوارده بالعلاقه (16-3) وكالأتي :-

$$\hat{r}(t)=\frac{1}{\hat{\theta}}$$

نقوم بالتعويض عن المقدر $(\hat{\theta})$الوارده بالعلاقه اعلاه فنحصل علي مقدر الإمكان الأعظم لداله معدل الفشل $r(t)$وكالأتي :-

$$\hat{r}(t)=\frac{n}{\sum_{i=1}^{n}ti}\rightarrow(3-17)$$

إن مقدر داله الفشل $r(t)$الوارده بالعلاقه اعلاه [2]يعد مقدرا متحيزا(Biased Esximator) ، وبما أن المتغير العشوائي $(y=\Sigma t_i)$هو مؤشر إحصائي كافي للمعلمه (θ)،وبإعتماد نظريه ليمان وشفيه (Lehman &Sheffe)نحصل علي المقدر غير المتحيز لداله معدل الفشل $r(t)$ كالأتي :-

$$\hat{r}(t)=\frac{n-1}{\sum_{i=1}^{n}t_i}\rightarrow(3-18)$$

إن مقدر داله معدل الفشل $\hat{r}(t)$الوارده بالعلاقه (18-3) ،لها خاصيه المقدر غير المتحيز بأقل تباين لداله معدل الفشل $\hat{r}(t)$.

3-4 توزيــع جـامــا:

إن داله قاما من الدوال الرياضيه التي تلعب دور هام في نظريه الإحتمالات ،وفي الإحصاء الرياضي بصفه عامه وهذه الداله تعرف رياضيا لكل عدد مركب (Complex number)،يكون الجزء

الحقيقي فيه اكبر من الصفر. وحيث أننا في دراستنا الحاليه نهتم فقط بالأعداد الحقيقيه فإننا نعرف داله قاما لكل عدد حقيقي موجب (t).

داله جاما :

الداله $\Gamma(n)$ المعرفه لكل عدد حقيقي $n \succ o$ بالعلاقه الأتيه :-

$$F(n) = \int_0^{\infty} x^{n-1} e^{-x} dx \rightarrow (3-19)$$

في العلاقه السابقه إذا اجرينا التكامل بالتجزئه نجد أن :-

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) \rightarrow (3-20)$$

فإذا كان n عدد صحيح موجب فإن :-

$$\Gamma(n) = (n-1)...(n-r+1)\Gamma(n-r+1) \rightarrow (3-21)$$

وبما أن $F(1)=1$ كما بتضح من العلاقه(1) ،إذن لأي عدد صحيح موجب n نجد أن :-

$$\Gamma(n) = (n-1)! \rightarrow (3-22)$$

وا ذا كانت $n \succ o$ ولكنها ليست عدد صحيح فإن :-

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)...s\Gamma(s)$$

حيث:

$$0 \prec s \prec 1$$

ونذكر أننا في مجال النظريه الإحصائيه سنجد أن معظم الصيغ التي من النوع (s) تكون فيها ($s = \frac{1}{2}$) ، ويمكن إثبات أن :-

$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi} \rightarrow (3-22)$$

وذلك كما يلي :-

$$\Gamma(n) = (n-1)(n-2)...s\Gamma(s)$$

ويتحويل المتغير x الي : $x=\frac{1}{2}u^2$

$$F(\frac{n+1}{2})=\frac{1}{2(n-1)/2}\int_0^\infty u^n e^{-\frac{1}{2}u^2}.du \to (3-23)$$

وعندما $n=0$:

$$F(\frac{1}{2})=\sqrt{2}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}u^2}.du=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2}u^2}du=\sqrt{\pi}\to(3-24)$$

ومن (3-23)و(3-24) نجد أن :-

$$\Gamma(h+\frac{1}{2})=\frac{(1)...(2n-1)}{2^n}\sqrt{\pi}\to(3-25)$$

ولقيم n الكبيره يوجد صيغه تقريبية لداله قاما تعرف بصيغه استيرلنج ،سنقدم هذه االصيغه بدون إثبات حيث أن إثباتها يتطلب طرق متقدمه من التحليل وهذه الصيغه يمكن كتابتها في الصوره الأتية:-

$$\Gamma(n)=\sqrt{2\pi}n^{n-\frac{1}{2}}e^{-n}\left[1+0(\frac{1}{n})\right]\to(3-26)$$

حيث :-

$$o(\frac{1}{n})=\left\{\frac{1}{12n}+\frac{1}{1288n^2}+o(\frac{1}{n^3})\right\}$$

ولإثبات هذه الصيغه السابقة يمكن الرجوع الي (ويتكر و واتسون) -(Wittaker& Watson)1927 ، ولقيم n الكبيره يكون التقريب كافيا لمعظم الأغراض .

$$\Gamma(n)\approx\sqrt{2\pi}h^{n-\frac{1}{2}}e^{-n}\to(3-27)$$

وا إذا كانت n عدد صحيح موجب يمكن إستخدام تقريب ستيرلنج لحساب !n لقيم n الكبيره .

$$n!\,\square\,\sqrt{2\pi h}h^n e^{-h}$$

وذلك لأن :-

$$n! = \Gamma(n+1) = \sqrt{2\pi}\,(n+1)^{n+\frac{1}{2}}$$
exp(-n)

وعندما تكون n كبيره تعتبر ($(1+\frac{1}{n})^{\frac{1}{2}} = 1$ و $(1+\frac{1}{n})^{n} = e^{1}$) ،وبذلك نصل الي(3-28)وكذلك يمكن إثبات العلاقه التقريبيه التاليه :-

$$\frac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(n+b)} \approx n^{a+b}\left[1+\frac{(a+b)(a+b-1)}{2n}+o(n^{-2})\right] \to (3-28)$$

أي أن النسبه : $\frac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(n+b)}$ للأعداد الحقيقيه a,b,nتساوي تقريبا الجانب الأيمن في العلاقه السابقه حيث $o(n^{-2})$ تمثل حدود تحتوي في مقامها علي n^{2}أو أكثر .

بعد أن تعرفنا علي داله جاما رياضياً سنتعرف الأن علي داله كثافه إحتمال من أهم الدوال التي تواجهنا كثيرا عند دراسه دوال معينه من الدرجه التانيه في متغيرات معتاده هذه الداله هي داله كثافه إحتمال جاما أو توزيع قاما والتي تعريفها كما يلي :-

تعريف داله جاما :

إذا كان المتغير العشوائي x له داله كثافه الإحتمال التاليه ، فنقول أن له توزيع جاما ذو معلمتين n,α كالأتي :-

$$G(x,\alpha,n) = \frac{\alpha^{n}}{\Gamma(n)} x^{n-1} e^{-\alpha x} \to (3-29)$$

حيث:

$$x > 0$$
$$n > 0$$
$$\alpha > 0$$

حيث أن n تسمي معلمه الشكل (Shope Parameter)، و α تسمي معلمه الإنتشار (Scole Parameter)، حيث أن شكل التوزيع يعتمد علي n،وا ٍنتشاره يعتمد علي α ،ونرمز لتوزيع قاما بالرمز $G(\alpha,n)$،وتعبر عن المتغير x يتبع توزيع جاما ذو المعلمتين α,n بالرمز :-

$$x \to G(\alpha,n).$$

والصوره القياسيه لتوزيع قاما نحصل عليها بوضع $\alpha=1$وتكون :-

$$G(x,n)=\frac{1}{\Gamma(n)}x^{n-1}e^{-x} \to (3-30)$$

حيث:

$$x>0$$

ونرمز لها بالرمز $G(w)$والرمز هنا يشير الي وجود معلمه واحده هي n ،في حين أن الرمز $G(\alpha,n)$يشير الي وجود معلمتين هي α,n،ومنحني داله كثافه الإحتمال لتوزيع قاما عندما $\overline{\alpha}=1$

وداله التوزيع الإحتمالي هي :-

$$pr(X \le x)=\frac{(\alpha)^n}{\Gamma(n)}\int_0^x t^{n-1}e^{-\alpha t}dt \to (3-31)$$

وتسمي داله قاما الناقصه (In Complete Gamma Function)، وهذه الداله عند $\alpha=1$ لها جداول رياضيه يمكن استخدامها لإيجاد الإحتمال السابق لقيم مختاره لكل من x و n .

وبإجراء التكامل بالتجزئه في العلاقه السابقه يمكن إثبات :

إذا كان x متغيرعشوائي له توزيع جاما بالمعلمتين α,nكما في (3-32) حيث أن n عدد صحيح موجب فإن:

$$pr\left[X \le x\right]=1-\sum_{j=0}^{n-1}e^{-\alpha x}\frac{(\alpha x)^j}{j!} \to (3-32)$$

الدوال المولده للعزوم لتوزيع قامــا:

الداله المميزه لتوزيع قاما $G(\alpha,n)$،المعطي بالعلاقه (3-33) هي :-

$$Q(t)=E(e^{itx})=(1-{it}/{\alpha})^{-n} \to (3-33)$$

وذلك لأن :-

$$E(e^{itx})=\frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty e^{itx}(\alpha x)^{n-1}e^{-\alpha x}d(\alpha x)$$

وبالتحويل في x الي $(1-it/\alpha)$ و $y=\alpha x$ نحصل علي (3-34) والداله المولده للعزوم لتوزيع قاما $G(\alpha,n)$ وهي :-

$$M(Q)=(1-\theta/\alpha)^{-n}\rightarrow(3-34)$$

$$|\theta|<1$$

والداله المولده للتراكمات هي :-

$$k(t)_{2-n/n(1-it/\alpha)}=n\sum_{r=1}^{\infty}(\frac{it/\alpha}{r})^r\rightarrow(3-35)$$

ويمكن الحصول علي العزم الرائي حول الصفر $\bar{M}r$ من التوزيع (3-35) مباشره في الصوره :-

$$\bar{M}r=\frac{\Gamma(n+r)}{\Gamma(n)(\alpha)^r}$$

$$\bar{M}1=\frac{n}{\alpha}$$

$$\bar{M}2=\frac{n(n+1)}{\alpha^2}$$

$$\bar{M}3=\frac{n(n+1)(n+2)}{\alpha^3}$$

$$\bar{M}4=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{\alpha^4}$$

وذلك لأن :-

$$\bar{M}r=\int_0^\infty x^rG(x:\alpha,n)dx$$

$$=\frac{(\alpha^{-r})}{\Gamma(n)}\int_0^\infty (\alpha x)^{r+n-1}e^{-\alpha x}dx \rightarrow (3-36)$$

ويمكن الحصول علي التراكمات من (3-36) بدلاله العزوم ،ولكن في هذا شئ من الصعوبه ،لذلك ليكن الحصول علي التراكمات ببساطه من العلاقه (3-35) إذ نجد أن المتراكمه rk ومعامل $\frac{(it)^r}{r!}$ هي :-

$$\bar{M}r=\int_0^\infty x^r G(x:\alpha,n)dx \rightarrow (3-37)$$

إذن بالنسبه لتوزيع $G(a,n)$ كما في (3-32) نجد من (3-33)و(3-34) أن :-

التوقع:

$$E(x)=\frac{n}{\alpha}$$

التباين:

$$v(x)=\frac{n}{\alpha^2}$$

العزم الثالث المركزي :-

$$\mu 3=\frac{2n}{\alpha^3}$$

العزم الرابع المركزي :-

$$\mu 4=\frac{(3n^2+6n)}{\alpha^4}$$

ومعاملي الإلتواء والتفرطح هما علي الترتيب :-

$$y1=\sqrt{B1}=\frac{\mu 3}{\mu 2^{3/2}}$$

$$B2=\frac{\mu 4}{\mu 2^2}=3+6/n$$

وبوضع $\alpha=1$ نحصل علي كل العلاقات السابقه بالنسبه للتوزيع القياسي $G(n)$.

وتوزيع قاما القياسي (15) له معدل وحيد عند النقطه $x=n=1$ ،عندما $n\geq 1$،وذلك لأن النقطه $x=(n-1)$ هي حل المعادله $(\frac{d^2G(x:n)}{dx^2}=0)$ $\frac{-dG(x:n)}{dx}=0$ ،

عند هذه النقطه كما يتضح كالأتي :

$$\hat{G}=\frac{dG(x:n)}{dx}=\frac{x^{n-2-x}e^{-x}}{\Gamma(n)}\left[(n-1)-x\right]$$

عندما تكون $x=(n-1)$.

كما أن:

$$G''=\frac{d^2G}{dx^2}=\frac{x^{n-3}e^{-x}}{\Gamma(n)}\left[(n-1)(n-2)-2(n-1)x+x^2\right]\rightarrow(3-38)$$

وعندما $x=(n-1)$ تكون $G''<0$.

ومن صيغه الداله $G(x:n)$ المعطاه بالعلاقه (34-3) نجد أن :

$$\lim_{x\rightarrow\infty}G=0$$

بجمع قيم n وذلك لأن :

$$\lim_{x\rightarrow\infty}x^{n-1}e^{-x}=0$$

ولكن عندما $x\rightarrow 0$ ،يكون أمامنا ثلاث حالات :-

1/عندما (n<1) ، $\lim_{G\rightarrow\infty}$

2/عندما (n=1) ، $\lim_{G=1}$

3/عندما (n>1) ، $\lim_{G=0}$

ويجب أن ننوه هنا أن التوزيع الأسي ماهو إلا حاله خاصه من هذا التوزيع بالوسيطين $(\alpha=1,\beta=0)$ ،ومتوسط وتباين توزيع جاما لهما الصيغتين الآتيتين:

$$\mu=\alpha\beta,\alpha^2=\alpha\beta^2$$

3-4 تـوزيــع ويبــل:

يستمد هذا التوزيع اسمه من عالم الطبيعه السويدي والودي ويبل (WaloddiWeibull) الذي قدم هذا التوزيع عام 1939 .

تعريف :

نقول أن المتغير العشوائي x له توزيع ويبل بالمعالم $(x_0, \beta > 0, \alpha > 0)$،إذا كان المتغير العشوائي:-

$$y = (\frac{x - x_0}{\alpha})^{\beta}$$

له توزيع أسي قياسي بداله كثافه للإحتمال:

$$g(y) = e^{-y}$$

$$y > 0$$

وفي هذه الحاله تكون داله كثافه احتمال المتغير العشوائي x ذو التوزيع ويبل هي :

$$f(x) = \frac{\beta}{\alpha}(\frac{x - x_0}{\alpha})^{\beta-1} \exp\left\{-\left[(x - x_0)/\alpha\right]^{\beta}\right\} \to (3-39)$$

$$x > x_0$$

وداله التوزيع الإحتمال للمتغير x هي :

$$F(x) = 1 - \exp\left\{-\left[(x - x_0)/\alpha\right]^{\beta}\right\}; x > x_0 \to (3-40)$$

يتضح من التعريف السابق أن الداله $f(x)$ تحقق خصائص داله التوزيع الإحتمالي ومنها :

$$F(\infty) = 1; F(x_0) = 0$$

كما أن الداله $f(x)$ تحقق شروط كثافه الإحتمال حيث :

$$f(x) > 0; x > x_0$$

$$\int_{x_0}^{\infty} f(x)dx = 1$$

الصيغه القياسيه لتوزيع ويبل هي التي تكون فيها $x_0 = 0; \alpha = 1$،وبالتالي نحصل علي داله كثافه احتمال ويبل في صورتها القياسيه من (3-39)، بوضع $x_0 = 0; \alpha = 1$ في الصوره التاليه :

$$f(y) = \beta y^{\beta-1} e^{-y\beta}; y > 0, \beta > 0 \to (3-41)$$

وداله التوزيع الإحتمالي القياسيه هي :

$$F(x) = 1 - e^{-y\beta}; y > 0, \beta > 0 \rightarrow (3-42)$$

العزوم :

يمكن الحصول علي عزوم المتغير ذو التوزيع القياسي في (3-42)،حيث نحصل علي العزم الرائي للمتغير القياسي y من العلاقه التاليه :-

$$\mu' r = E(y^r) = \beta \int_0^\infty y^{r+\beta-1} e^{-y\beta} dy$$

وبوضع $Z = y^\beta$:

$$= \int_0^\infty Z^{\frac{r}{\beta}} e^{-z} dz$$

وهو $E(Z^{\frac{r}{\beta}})$ للمتغير z،ذو التوزيع الأسي القياسي ،إذن العزم الرائي لمتغير ويبل القياسي هو :

$$\mu' r = \Gamma(\frac{r}{\beta} + 1) \rightarrow (3-43)$$

والتوقع والتباين لمتغير ويبل القياسي :

$$\mu' 1 = \Gamma(\frac{1}{\beta} + 1)$$

$$\mu' 2 = \Gamma(\frac{2}{\beta} + 1) - \left[\Gamma(\frac{1}{\beta} + 1)\right]^2 \rightarrow (3-44)$$

ويمكن إيجاد باقي العزوم كما يمكن إستخدام تقريب (ستيرلنج)، أنظر علاقه (3-44) لحساب $\Gamma(\frac{1}{\beta} + 1)$ و $\Gamma(\frac{2}{\beta} + 1)$ ، وباقي قيم $\Gamma(-)$ المطلوبه .

أما عزوم المتغير x ذو التوزيع الثلاث معالم وداله كثافه الإحتمال،فيمكن إيجادها من العزوم المقابله للمتغير القياسي y ذو داله كثافه الإحتمالبإستخدام العلاقه :

$$Y = \frac{x - x_0}{\alpha}; x = x_0 + \alpha Y$$

حيث :

α, x_0 ثوابت.

إذن التوقع والتباين للمتغير x ذو الثلاث معالم هما :

$$E(x) = x_0 + \alpha E(Y) = x_0 + \alpha\Gamma(\frac{1}{\beta}+1) \rightarrow (3-45)$$

$$v(x) = \alpha^2\left[\Gamma(\frac{2}{\beta}+1) - \Gamma^2(\frac{1}{\beta}+1)\right] \rightarrow (3-46)$$

هذا التوزيع من التوزيعات الهامه للنظم المعقده والمركبه (Complex and Complicated Systems) ،والتي تتكون من مكونات (Components)، سوف تفشل في العمل بعد وقت ما يقاس من بدايه محدوده ، ويسمي بالوقت المنتظم للفشل (Failure time)أو عمر هذا المكون (life time)، فإذا رمزنا لهذا العمر ب (T)، فإن T كمتغير عشوائي له توزيع إحتمالي متصل $f(t)$ ، ويسمي بتوزيع ويبل ببارا مترين اي وسيطين α, β،إذا كان :

$$f(t) = \left\{\alpha\beta t^{\beta-1} e^{-\alpha t\beta}\right\} \rightarrow (3-47)$$ ،

حيث :

$$t > 0$$
$$\alpha, \beta > 0$$

ويمكن إثبات أن هذا يصلح كتوزيع إحتمالي لأن :

$$\int_0^\infty \alpha\beta t^{\beta-1} e^{-\alpha t\beta} dt = -\int_0^\infty d(e^{-\alpha t\beta}) = \left[-e^{--\alpha t\beta}\,{}_0^\beta\right] = -\left[e^{-\infty} - e^0\right] = 1$$

لاحظ أنه يؤول الي التوزيع الأسي عند $\beta = 1$ببارمترا αومتوسط هذا التوزيع وتباينه يعطيان بالصيغتين الآتيتين:

لاحظ أنه يؤول الي التوزيع الأسي عند (β=1) ببارا مترا α، ومتوسط هذا التوزيع وتباينه يعطيان بالصيغيتين الأتيتين :

$$\mu = \alpha^{-\frac{1}{\beta}}\Gamma(1+\frac{1}{\beta});\ \delta^2 = \alpha^{\frac{-2}{\beta}}\left[\Gamma(1+\frac{2}{\beta}) - \Gamma(1+\frac{1}{\beta})^2\right]$$

ولإثبات ذلك :

$$\mu = \int_0^\infty t\alpha\beta t^{\beta-1}e^{-\alpha}dt = \alpha\beta\int_0^\infty t^\beta e^{-\alpha t\beta}dt$$

وبوضع $y = \alpha t^\beta$ **ومنها** $dy = \alpha\beta t^{\beta-1}dt$ **فإن:**

$$\mu = \int_0^\infty (\frac{y}{\alpha})^{\frac{1}{\beta}} e^{-y}dy$$

$$= \alpha^{-\frac{1}{\beta}}\int_0^\infty y^{\frac{1}{\beta}}e^{-y}dy$$

$$= \alpha^{-\frac{1}{\beta}}\Gamma(\frac{1}{\beta}+1)$$

وكذلك :

$$E(T^2) = \int_0^\infty \alpha\beta t^2 t^{\beta-1}e^{-\alpha t^\beta}dt$$

$$= \int_0^\infty (\frac{y}{\alpha})^{\frac{2}{\beta}} e^{-y}dy$$

$$= \alpha^{\frac{-2}{\beta}}\int_0^\infty y^{\frac{2}{\beta}}e^{-y}dy$$

$$\alpha^{\frac{-2}{\beta}}\Gamma(\frac{2}{\beta}+1)$$

$$\delta^2 = \alpha^{\frac{2}{\beta}}\left[\Gamma(\frac{2}{\beta}+1) - \alpha^{\frac{2}{\beta}}\Gamma^2(1+\frac{1}{\beta})\right]$$

$$= \alpha^{\frac{-2}{\beta}}\left[\Gamma(\frac{2}{\beta}+1) - \Gamma^2(1+\frac{1}{\beta})\right]$$

ويمكن للقارئ محاوله إثبات أن:

$$E(T^n) = \alpha^{\frac{-n}{\beta}} \Gamma\left[\frac{n}{\beta}+1\right]$$

*ملحوظه :-

ونود أن ننوه أن التوزيع الأسي هو حاله خاصه من هذا التوزيع (β=1) .